殼體における有限變形の理論(II)

吉　村　慶　丸

(1948 年 11 月 16 日受理)

3. 殼體における歪

前2節に於いては中性面を代表する幾何學的曲面の變形を規定する量を定義し，變位及びその導函數の高次の項までとつた場合のそれ等の量の表示式を求めた。次の問題は厚さをもつた彈性殼の中の任意の場所における歪を解析し，同時に中性面の歪及び曲率變化に關する前節の定義のよりどころを示すことである。

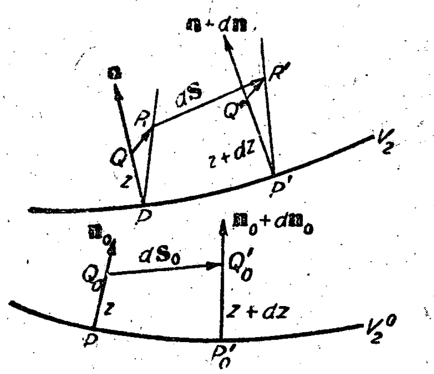
V_2^0 上の極めて近い二點 $P_0(\mathbf{r}_0)$ 及び $P_0'(\mathbf{r}_0+d\mathbf{r}_0)$ を考え，それらの點で V_2^0 に立てた法線の上で P_0, P_0' よりの距離が夫々 z, $z+dz$ である樣な點 Q_0, Q_0' を考える。そうすると Q_0 は

$$\mathbf{r}_0+z\mathbf{n}_0 \tag{3.1}$$

によつて表わされるから $\overrightarrow{Q_0Q_0'}$ を表わすヴェクトル $d\mathbf{s}_0$ は

$$d\mathbf{s}_0=d\mathbf{r}_0+dz\mathbf{n}_0+zd\mathbf{n}_0 \tag{3.2}$$

によつて表わされる。



第 2 圖

變形した狀態で P_0, P_0', Q_0, Q_0' に應ずる點を夫々 P, P', Q, Q' とする。若し變形に際して法線の保存に關する Bernoulli の假定が成立するとすれば PQ, $P'Q'$ は V_2 に垂直で，且つ $\overline{PQ}=z$ $\overline{P'Q'}=z+dz$ である。從つて Q, Q' をこの假定が成立つ場合の Q_0, Q_0' に相應ずる點と考えれば，實際の變形に於いて，Q_0, Q_0' に相應ずる點 R, R' は Q, Q' にある附加的の變位を與えたものでなくてはならない。Q に對するこの附加的變位を $\mathbf{x}$ で表わせば，R は

$$\mathbf{r}+z\mathbf{n}+\mathbf{x} \tag{3.3}$$

によつて表わされ，從つて $\overrightarrow{RR'}$ を表わすヴェクトル $d\mathbf{s}$ は

$$d\mathbf{s}=d\mathbf{r}+dz\mathbf{n}+zd\mathbf{n}+d\mathbf{x} \tag{3.4}$$

によつて與えられる。

$$d\mathbf{n}_0=\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\beta}d\beta \tag{3.5}$$

であるから (3.2) は又

$$d\mathbf{s}_0=\left(\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\alpha}\right)d\alpha+\left(\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\beta}+z\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\beta}\right)d\beta+\mathbf{n}_0dz \tag{3.6}$$

と書くことが出來る，從つて (1.5) 及び

$$\left.\begin{aligned}H_0^2\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\alpha}&=(F_0M_0-G_0L_0)\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\alpha}\\&\quad+(F_0L_0-E_0M_0)\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\beta}\\H_0^2\frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial\beta}&=(F_0N_0-G_0M_0)\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\alpha}\\&\quad+(F_0M_0-E_0N_0)\frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial\beta}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

但し　　$F_0=0,\ M_0=0$

を用いれば

$$(d\mathbf{s}_0)^2=E_0\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)^2d\alpha^2+G_0\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)^2d\beta^2+dz^2 \tag{3.8}$$

となる。從つて殼の中の任意の點 $(\alpha,\ \beta,\ z)$ における歪を表わすテンソル s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{12}, s_{23}, s_{31} は一般に次式によつて定義することが出來る。

$$\left.\begin{aligned}(d\mathbf{s})^2=(1+s_{11})E_0\left(1-z\frac{I_0}{E_0}\right)^2d\alpha^2&\\+(1+s_{22})G_0\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)^2d\beta^2&\\+(1+s_{33})dz^2&\\+2s_{12}\sqrt{E_0G_0}\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)\left(1-\frac{N_0}{E_0}\right)\alpha\,d\beta&\\+2s_{23}\sqrt{G_0}\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)d\beta dz&\\+2s_{31}\sqrt{E_0}\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)d\alpha dz&\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

こゝに添字 1, 2, 3 は夫々 α, β, z の方向に關するものである。一方 (3·4) より

$$\left.\begin{aligned} d\mathbf{s}=&\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\right)d\alpha\\ &+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}\right)d\beta\\ &+\left(\mathbf{n}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)dz \end{aligned}\right\}\tag{3·10}$$

従つて (3·10) より $(d\mathbf{s})^2$ を作つて (3·9) と係數を比較すれば

$$\left.\begin{aligned} 1+s_{11}=&\frac{1}{E_0\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)^2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\right)^2\\ 1+s_{22}=&\frac{1}{G_0\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)^2}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}\right)^2\\ 1+s_{33}=&\left(\mathbf{n}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)^2\\ s_{12}=&\frac{1}{\sqrt{E_0G_0}\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right.\\ &\left.+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}\right)\\ s_{23}=&\frac{1}{\sqrt{G_0}\left(1-z\frac{N_0}{G_0}\right)}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\beta}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}\right)\\ &\cdot\left(\mathbf{n}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)\\ s_{31}=&\frac{1}{\sqrt{E_0}\left(1-z\frac{L_0}{E_0}\right)}\left(\mathbf{n}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right.\\ &\left.+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\right) \end{aligned}\right\}\tag{3·11}$$

附加變位 $\mathbf{x}$ は一般に α, β, z の函數であつて，薄板に於いては z の取り得る値は極めて小さい範圍に限られると考えてよいから

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(\partial\mathbf{x}/\partial z)_0 z$$

とおくことが出來る。こゝに添字 0 は $z=0$ における値を示す。$z=0$ で $\mathbf{x}=0$ であるから

$$\mathbf{x}=(\partial\mathbf{x}/\partial z)_0 z \tag{3·12}$$

(3·11) は任意の大さの $s_{11},\cdots$, $s_{12},\cdots$ に對して成立つことが出來，$(\partial\mathbf{x}/\partial z)_0$ の絶對値は歪成分 $s_{11},\cdots$, $s_{12}\cdots$ と同程度の大さであると考えられるから，肉厚の小さな殼に對しては $\mathbf{x}$ の値は $s_{11},\cdots$, $s_{12},\cdots$ に比べて極めて小さい。從つて亦

$$\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)_0 z,\quad \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}\right)_0 z$$

の絶對値も $s_{11},\cdots$, $s_{12},\cdots$ に比べて小さいと考えられる。從つて (3·11) の右邊を計算する際に $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial z}$ に關する2次の項は省略してさし支えなく，

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\right)^2=&\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right)^2\\ &+2z\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+z^2\left(\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right)^2\\ &+2\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right), \end{aligned}\right\}\tag{3·13}$$

....

の樣に置くことが出來る。V_2^0 に對して成立つ (3·7) に於いて添符 0 を除いた式は V_2 に對して成立つから

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}=&\frac{1}{H^2}[E(FM-GL)\\ &+F(FL-EM)]=-L,\\ \left(\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right)^2=&\frac{1}{H^2}(GL^2+EM^2-2LFM), \end{aligned}\right\}\tag{3·14}$$

....

の樣になる。從つて (3·13) の $\mathbf{x}$ を含まぬ項は

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\right)^2&+2z\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}+z^2\left(\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right)^2\\ &=E-2zL\\ &\quad+z^2\frac{1}{H^2}(GL^2+EM^2-2LFM) \end{aligned}\right\}\tag{3·15}$$

....

附加變位 $\mathbf{x}$ は V_2 に關する基本ヴェクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向に分解して考えるのが都合がよく，

$$\mathbf{x}=\xi\mathbf{a}+\eta\mathbf{b}+\zeta\mathbf{n} \tag{3·16}$$

從つて，

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}=&\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\mathbf{a}+\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\mathbf{b}+\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\mathbf{n}+\xi\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\alpha}\\ &+\eta\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\alpha}+\zeta\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}, \end{aligned}\right\}\tag{3·17}$$

....

こゝで $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\alpha}$, … は一般の媒介曲線に對する Gauss の公式

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha^2}&=L\mathbf{n}+l_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+l_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\alpha\partial\beta}&=M\mathbf{n}+m_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+m_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\\ \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial\beta^2}&=N\mathbf{n}+n_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+n_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta} \end{aligned}\right\}\tag{3·18}$$

$$\left.\begin{aligned} l_1&=\frac{1}{2H^2}\left(G\frac{\partial E}{\partial\alpha}-2F\frac{\partial F}{\partial\alpha}+F\frac{\partial E}{\partial\beta}\right)\\ l_2&=\frac{1}{2H^2}\left(2E\frac{\partial F}{\partial\alpha}-E\frac{\partial E}{\partial\beta}-F\frac{\partial E}{\partial\alpha}\right)\\ m_1&=\frac{1}{2H^2}\left(G\frac{\partial E}{\partial\beta}-F\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right)\\ m_2&=\frac{1}{2H^2}\left(E\frac{\partial G}{\partial\alpha}-F\frac{\partial E}{\partial\beta}\right)\\ n_1&=\frac{1}{2H^2}\left(2G\frac{\partial F}{\partial\beta}-G\frac{\partial G}{\partial\alpha}-F\frac{\partial G}{\partial\beta}\right)\\ n_2&=\frac{1}{2H^2}\left(E\frac{\partial G}{\partial\beta}-2F\frac{\partial F}{\partial\beta}+F\frac{\partial G}{\partial\alpha}\right) \end{aligned}\right\}\tag{3·19}$$

によつて次の様に計算される。

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\alpha}&=\frac{1}{\sqrt{E}}\left[L\mathbf{n}+\left(l_1-\frac{\partial E/\partial\alpha}{2E}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+l_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right]\\
\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\alpha}&=\frac{1}{\sqrt{G}}\left[M\mathbf{n}+m_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+\left(m_2-\frac{\partial G/\partial\alpha}{2G}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right]\\
\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\beta}&=\frac{1}{\sqrt{E}}\left[M\mathbf{n}+\left(m_1-\frac{\partial E/\partial\beta}{2E}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+m_2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right]\\
\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\beta}&=\frac{1}{\sqrt{G}}\left[N\mathbf{n}+n_1\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+\left(n_2-\frac{\partial G/\partial\beta}{2G}\right)\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right]
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot20)
$$

これ等の式及びV_2に關する (3·7) に相當する式 (即ち (3·7) に於いて添字 0 を除いた式) を (3·17) に入れゝば, $\partial\mathbf{x}/\partial\alpha,\cdots$は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ によつて表わされるから (3·13) の最後の項が次の様になる。

$$
\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right)&=2\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\sqrt{E}+2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{F}{\sqrt{G}}\\
&+2\xi\left[\left(l_1-\frac{\partial E/\partial\alpha}{2E}\right)\sqrt{E}+\frac{l_2}{\sqrt{E}}F\right]\\
&+2\eta\left[\frac{m_1}{\sqrt{G}}E+\left(\frac{m_2}{\sqrt{G}}-\frac{\partial G/\partial\alpha}{2G\sqrt{G}}\right)F\right]-2\zeta L\\
&-2\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}z\frac{L}{\sqrt{E}}-2\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}z\frac{M}{\sqrt{G}}\\
&-2\xi z\left[\left(\frac{l_1}{\sqrt{E}}-\frac{\partial E/\partial\alpha}{2E\sqrt{E}}\right)L+\frac{l_2}{\sqrt{E}}M\right]\\
&-2\eta z\left[\frac{m_1}{\sqrt{G}}L+\left(\frac{m_2}{\sqrt{G}}-\frac{\partial G/\partial\alpha}{2G\sqrt{G}}\right)M\right]\\
&+2\zeta z\frac{GL^2+EM^2-2FLM}{H^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot21)
$$

こゝで前に述べた樣に $\mathbf{x}$, $\partial\mathbf{x}/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{x}/\partial\beta$ は $s_{11},\cdots$に對して極めて小さいから，これ等よりも更に高次の微小量を省略すると (3·21) は

$$
\left.\begin{aligned}
2\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\alpha}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}+z\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\alpha}\right)&=2\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\frac{\partial E/\partial\beta}{\sqrt{G}}\eta-2L\zeta,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot22)
$$

のように簡單になる。(3·11)の第二式以下の右邊のスカラー積についても以上の計算と全く同樣であるから結局 (3·11) は

$$
\left.\begin{aligned}
1+s_{11}&=\frac{E-2zL+z^2(GL^2+EM^2-2LFM)/H^2}{E_0(1-zL_0/E_0)^2}\\
&+\frac{1}{E_0(1-zL_0/E_0)^2}\left[2\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\frac{\partial E/\partial\beta}{\sqrt{G}}\eta-2L\zeta\right]\\
1+s_{22}&=\frac{G-2zN+z^2(EN^2+GM^2-2NFM)/H^2}{G_0(1-zN_0/G_0)^2}\\
&+\frac{1}{G_0(1-zN_0/G_0)^2}\left[2\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+\frac{\partial G/\partial\alpha}{\sqrt{E}}\xi-2N\zeta\right]\\
1+s_{33}&=1+2\frac{\partial\zeta}{\partial z}\\
s_{12}&=\frac{F-2zM+z^2(GLN-FLN+EMN-FM^2)/H^2}{\sqrt{E_0G_0}(1-zL_0/E_0)(1-zN_0/G_0)}\\
&+\frac{1}{\sqrt{E_0G_0}(1-zL_0/E_0)(1-zN_0/G_0)}\left[\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial E/\partial\beta}{2\sqrt{E}}\xi-\frac{\partial G/\partial\alpha}{2\sqrt{G}}\eta\right]\\
s_{23}&=\frac{1}{\sqrt{G_0}(1-zN_0/G_0)}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}+\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{N}{\sqrt{G}}\eta\right]\\
s_{31}&=\frac{1}{\sqrt{E_0}(1-zL_0/E_0)}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}+\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{L}{\sqrt{E}}\xi\right]
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot23)
$$

となる。これ等の式の中で $\mathbf{x}$ を含まぬ項は中性面の變形に起因する歪を表わし，それ等の項では板厚が V_2 の曲率半徑に較べて極めて小さい場合には z について展開して z^2 以上の項を省略してさし支えない。$\mathbf{x}$ を含む項は附加變位に起因する歪を表わし，Bernoulli の假定が滿足されている場合には 0 である。これ等の項に於いては分母をzについて展開し$\mathbf{x}$, $\partial\mathbf{x}/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{x}/\partial\beta$, $\partial\mathbf{x}/\partial z$ と z との積を省略することが出來る。その結果 (3·23) は

$$
\left.\begin{aligned}
s_{11}&=g_{11}-2z\kappa_1+\frac{1}{E_0}\left[2\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\frac{\partial E/\partial\beta}{\sqrt{G}}\eta-2L\varepsilon\right]\\
s_{22}&=g_{22}-2z\kappa_2+\frac{1}{G_0}\left[2\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+\frac{\partial G/\partial\alpha}{\sqrt{E}}\xi-2N\zeta\right]\\
s_{33}&=2\,\partial\zeta/\partial z\\
s_{12}&=g_{12}-2z\kappa_{12}+\frac{1}{\sqrt{E_0G_0}}\left[\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\beta}+\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}-\frac{\partial E/\partial\beta}{2\sqrt{E}}\xi-\frac{\partial G/\partial\alpha}{2\sqrt{G}}\eta\right]\\
s_{23}&=\frac{1}{\sqrt{G_0}}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}+\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{N}{\sqrt{G}}\eta\right]\\
s_{31}&=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}+\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{L}{\sqrt{E}}\xi\right]
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot24)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&g_{11}=(E-E_0)/E_0,\ \ g_{12}=F/H_0,\\
&g_{22}=(G-G_0)/G_0\\
&\kappa_1=\frac{E}{E_0}\left(\frac{L}{E}-\frac{L_0}{E_0}\right)\\
&\kappa_{12}=\frac{M}{\sqrt{E_0G_0}}-\frac{1}{2}\frac{F}{\sqrt{E_0G_0}}\left(\frac{L_0}{E_0}+\frac{N_0}{G_0}\right),\\
&\kappa_2=\frac{G}{G_0}\left(\frac{N}{G}-\frac{N_0}{G_0}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot25)$$

となる。g_{11}, g_{12}, g_{21} の定義 (1·19) 及び κ_1, κ_{12}, κ_2 の定義 (2·1) はこの結果に基ずくものである。尙 $s_{11},\cdots$, $s_{12},\cdots$の代りに歪成分として

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{11}=s_{11}/2,\ \ \gamma_{22}=s_{22}/2,\ \ \gamma_{33}=s_{33}/2\\
&\gamma_{12}=s_{12},\ \ \ \gamma_{23}=s_{23},\ \ \ \gamma_{31}=s_{31}
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot26)$$

を用いるのが普通である。そのときは (3·24) は次の様に書きかえられる。

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{11}&=e_{11}-z\kappa_1+\frac{1}{E_0}\left[\sqrt{E}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}+\frac{\partial E/\partial\beta}{2\sqrt{G}}\eta-L\zeta\right]\\
\gamma_{22}&=e_{22}-z\kappa_2+\frac{1}{G_0}\left[\sqrt{G}\frac{\partial\eta}{\partial\beta}+\frac{\partial G/\partial\alpha}{2\sqrt{E}}\xi-N\zeta\right]\\
\gamma_{33}&=\partial\zeta/\partial z\\
\gamma_{12}&=s_{12},\ \ \gamma_{23}=s_{23},\ \ \gamma_{31}=s_{31}
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot24')$$

E, F, G ; L, M, N は既に (1·21), (2·8) によつて u, v, w 及びその導函數によつて表わされているから，上式の $E,\cdots$, $L,\cdots$ に關する量と ξ, η, ζ 或ひはその導函數との積の項では，u, v, w及びその導函數と ξ, η, ζ 及びその導函數との積を省略するならば，$E,\cdots$, $L,\cdots$ の代りに $E_0,\cdots$, $L_0,\cdots$ を用いてよいことになる。又 $\xi,\cdots\partial\xi/\partial\alpha,\cdots$は $\partial\xi/\partial z,\cdots$ に比べて小さいから，それ等を省略することが出來，(3·24′) は次の様に簡單にすることが出來る。

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{11}=e_{11}-z\kappa_1, &&\gamma_{31}=\partial\xi/\partial z\\
&\gamma_{12}=e_{12}-2z\kappa_{12}, &&\gamma_{23}=\partial\eta/\partial z\\
&\gamma_{22}=e_{22}-2z\kappa_2, &&\gamma_{33}=\partial\zeta/\partial z
\end{aligned}\right\}\quad(3\cdot24'')$$

4.　應力及び合應力，偶應力

前節までの議論は殼の變位が有限の大さであるとして，その高次の項まで考えた極めて一般的のものである。即ちそれは有限變位に對してばかりでなく歪の値が有限な場合にも成立つものである。從つてこの様な一般的な場合に對する彈性法則と平衡方程式を求めることが出來るならば有限歪に對する基礎が得られるのであつて，そのためには先づ應力の定義が必要である。而してこの樣な有限の歪の場合の應力は種々の仕方で定義することが出來，現在のところその何れを取るべきかに關する論議は餘りないようである。以下では應力を考えるに當つて，その作用する斷面積としては變形した狀態における單位面積をとり，應力成分を考えるのには V_2 に關する自然座標 **a**, **b**, **n** の方向をとることゝする。そうすると，この様な應力成分と前節で定義された歪成分 $\gamma_{11},\cdots$ との間に彈性法則を與える函數關係が存在する。

以下に於ては簡單のために彈性法則として Hooke の法則を假定し，殼體には外力として體積力も表面力も作用しないとするならば，その場合の應力狀態は平面應力狀態であつて σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} は何れも0である。從つて

$$\left.\begin{aligned}
&\partial\xi/\partial z=0,\ \ \ \ \partial\eta/\partial z=0\\
&\partial\zeta/\partial z=-\nu/(1-\nu)[e_{11}+e_{22}-z(\kappa_1+\kappa_2)]
\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{11}=[E_1/(1-\nu^2)][e_{11}+\nu e_{22}-z(\kappa_1+\nu\kappa_2)]\\
&\sigma_{22}=[E_1/(1-\nu^2)][e_{22}+\nu e_{11}-z(\kappa_2+\nu\kappa_1)]\\
&\sigma_{12}=[E_1/(2(1+\nu))]\ e_{12}-2z\kappa_{12})
\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot2)$$

但しヤング率を曲面の第一種の基礎量 E と區別するために E_1 で表わす。(4·2)より合應力 (stress-resultant)，偶應力 (stress-couple) として

$$\left.\begin{aligned}
&T_{11}=[E_1t/(1-\nu^2)](e_{11}+\nu e_{22})\\
&T_{22}=[E_1t/(1-\nu^2)](e_{22}+\nu e_{11})\\
&T_{12}=[E_1t/(2(1+\nu))]e_{12}
\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&G_1\ =-B(\kappa_1+\nu\kappa_2)\\
&G_2\ =+B(\kappa_2+\nu\kappa_1)\\
&H_1\ =-H_2=B(1-\nu)\kappa_{12}\\
&B\ \ =E_1t^3/[12(1-\nu^2)]
\end{aligned}\right\}\quad(4\cdot4)$$

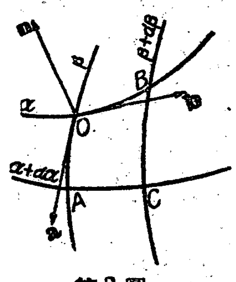
を得る。こゝに合應力，偶應力の成分はすべて **a**, **b**, **n** の正の方向のものを正にとつてある（次節參照）

5.　平衡方程式(運動方程式)

第4節に於いて行つた應力の定義を用いて，一般に有限歪の場合にも成立つ平衡方程式を導こう。即ち，

$\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$: 變形した狀態において夫々 $\alpha=$const. $\beta=$const. の單位長さの斷面に作用する合應力。

$\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$: 變形した狀態において夫々 $\alpha=$const. $\beta=$const. の單位長さの斷面に作用する偶應力。



第3圖

とし，αの値がαと$\alpha+d\alpha$の間に，βの値がβと$\beta+d\beta$との間にある四邊形の殼體素片に關する力の平衡條件を考える（第3圖）。そうすると斷面 OB には $\mathbf{T}_1\sqrt{G}d\beta$ が，從つて斷面 AC には $\mathbf{T}_1\sqrt{G}d\beta+\partial/\partial\alpha(\mathbf{T}_1\sqrt{G}d\beta)d\alpha$ が作用し，同樣に斷面 OA, BC には夫々 $\mathbf{T}_2$

$\sqrt{E}\,d\alpha$, $\mathbf{T}_2\sqrt{E}d\alpha+\partial/\partial\beta\,(\mathbf{T}_2\sqrt{E}\,d\alpha)d\beta$ が作用するから平衡條件は次の樣になる。

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{T}_1\sqrt{G}\,d\beta)\,d\alpha+\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{T}_2\sqrt{E}d\alpha)d\beta$$
$$+\rho_0\left[\mathbf{X}(\mathbf{r})-\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\right]H_0 d\alpha d\beta=0$$

從つて

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{T}_1\sqrt{G})+\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{T}_2\sqrt{E})+\rho_0\Big[\mathbf{X}(\mathbf{r})\\-\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}\Big]H_0=0\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot1)$$

こゝに ρ_0 は初期狀態における殼體の面密度，$\mathbf{X}(\mathbf{r})$ は變形後の狀態において體積素片の占める位置 $\mathbf{r}$ において單位質量に作用する體積力を表はす。合應力の成分として，前に述べた樣に自然座標系 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ に對する反變成分をとれば

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{T}_1&=T_{11}\mathbf{a}+T_{12}\mathbf{b}+T_{13}\mathbf{n}\\\mathbf{T}_2&=T_{21}\mathbf{a}+T_{22}\mathbf{b}+T_{23}\mathbf{n}\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot2)$$

次に外力の場が一樣であれば $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)$ との區別を考える必要はないが，それが勾配をもつ場合には一般に

$$\mathbf{X}(\mathbf{r})=\mathbf{X}(\mathbf{r}_0+\mathbf{u})=\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)+\mathbf{u}\cdot\varDelta\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)\qquad(5\cdot3)$$

こゝに

$$V=\frac{1}{\sqrt{E_0}}\mathbf{a}_0\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sqrt{G_0}}\mathbf{b}_0\frac{\partial}{\partial\beta}\qquad(5\cdot4)$$

で (5·3) の右邊の第2項は變位に基づく外力の變化を表わす。而して $\mathbf{r}_0$ における外力 $\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)$ は一般に $V_2{}^0$ に對する自然座標系に關して與えられるのが通常であるから

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)=X\mathbf{a}_0+Y\mathbf{b}_0+Z\mathbf{n}_0\qquad(5\cdot5)$$

併し特に流體壓の樣な場合には

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_0)=X\mathbf{a}+Y\mathbf{b}+Z\mathbf{n}\qquad(5\cdot6)$$

の形で與えられるが，この場合は (5·5) の場合より結果は簡單である。今 (5·5) の場合を考えることにすると，(5·5) を (5·3) に入れて $\mathbf{u}$ の式 (1·11) を用いれば次の結果を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\mathbf{r})&=\left(X+\frac{1}{\sqrt{E_0}}u\frac{\partial X}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sqrt{G_0}}v\frac{\partial X}{\partial\beta}\right)\mathbf{a}_0\\&+\left(Y+\frac{1}{\sqrt{E_0}}u\frac{\partial Y}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sqrt{G_0}}v\frac{\partial Y}{\partial\beta}\right)\mathbf{b}_0\\&+\left(Z+\frac{1}{\sqrt{E_0}}u\frac{\partial Z}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sqrt{G_0}}v\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)\mathbf{n}_0\end{aligned}\qquad(5\cdot7)$$

又 $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ は時間 t に關しては變化しないから

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathbf{a}_0+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\mathbf{b}_0+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\mathbf{n}_0\qquad(5\cdot8)$$

次に (5·2) を用いて (5·1) の $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{T}_1\sqrt{G})$, $\dfrac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{T}_2\sqrt{E})$ を計算しなければならないが，それには (5·2) の $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を $\partial\mathbf{r}/\partial\alpha$, $\partial\mathbf{r}/\partial\beta$ で表わし，微分した後 Gauss の公式を適用して結局次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{T}_1\sqrt{G})&=\Bigg[\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{G}{E}}+T_{11}\Bigg(l_1\sqrt{\frac{G}{E}}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{G}{E}}\Bigg)+T_{12}m_1\\&\quad+T_{13}\sqrt{G}\frac{FM-GL}{H^2}\Bigg]\sqrt{E}\,\mathbf{a}\\&+\Bigg[\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha}+T_{11}l_2\sqrt{\frac{G}{E}}+T_{12}m_2\\&\quad+T_{13}\sqrt{G}\frac{FL-EM}{H^2}\Bigg]\sqrt{G}\,\mathbf{b}\\&+\Bigg[\frac{\partial T_{13}}{\partial\alpha}\sqrt{G}+T_{11}L\sqrt{\frac{G}{E}}+T_{12}M\\&\quad+T_{13}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{G}\Bigg]\mathbf{n}\\\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{T}_2E)&=\Bigg[\frac{\partial T_{21}}{\partial\beta}+T_{21}m_1+T_{22}n_1\sqrt{\frac{E}{G}}\\&\quad+T_{23}\sqrt{E}\frac{FN-GM}{H^2}\Bigg]\sqrt{E}\,\mathbf{a}\\&+\Bigg[\frac{\partial T_{22}}{\partial\beta}\sqrt{\frac{E}{G}}+T_{21}m_2+T_{22}\Bigg(n_2\sqrt{\frac{E}{G}}\\&\quad+\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{E}{G}}\Bigg)\\&\quad+T_{22}\sqrt{E}\frac{FM-EN}{H^2}\Bigg]\sqrt{G}\,\mathbf{b}\\&+\Bigg[\frac{\partial T_{23}}{\partial\beta}\sqrt{E}+T_{21}M+T_{22}N\sqrt{\frac{E}{G}}\\&\quad+T_{23}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{E}\Bigg]\mathbf{n}\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot9)$$

平衡方程式は u, v, w 或いはその他どの樣な變數を用うにしても，三個の獨立な式から成立たねばならない。即ち $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向の力の釣合を表わす三個の成分方程式或いは $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ の方向の三個の成分方程式より成立つと考えられる。而して (5·7), (5·8) は $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ によつて，(5·9) は $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ によつて表わされて居り，これ等の表示式を何れかの自然座標系に統一することが必要である。そのためには $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ と $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ との間の變換式を求めねばならない。$\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0\to\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の變換は既に (1·17) 及び (2·6) によつて與えられて居り，その逆變換 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}\to\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ を求めるには

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}_0&=\alpha_{11}\mathbf{a}+\alpha_{12}\mathbf{b}+\alpha_{13}\mathbf{n}\\\mathbf{b}_0&=\alpha_{21}\mathbf{e}+\alpha_{22}\mathbf{b}+\alpha_{23}\mathbf{n}\\\mathbf{n}_0&=\alpha_{31}\mathbf{a}+\alpha_{32}\mathbf{b}+\alpha_{33}\mathbf{n}\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot10)$$

とおき，(5·10)の第1式に $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を夫々スラカー的に掛け (1·17) を參照して α_{11}, α_{12} に關する連立方程式を作り，それを解いて α_{11}, d_{12} を求める。α_{13} を求めるには (5·10) の第1式に $\mathbf{n}$ をスカラー的に掛け，

(2・6) より $\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{n}$ を求めて a_{13} についての方程式を作ればよい。其の他の係數も同樣にして求めることが出來る。その結果を記せば次の樣になる。

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}&=[-\sqrt{E}F\psi_1+\sqrt{E}G(\sqrt{E_0}+\varphi_1)]/H^2\\
a_{12}&=[-\sqrt{G}F(\sqrt{E_0}+\varphi_1)+E\sqrt{G}\psi_1]/H^2\\
a_{13}&=\varphi_3/\sqrt{E_0}+\varphi_2\psi_3/H_0+\varphi_1\varphi_3/E_0\\
a_{21}&=-\sqrt{E}F(\sqrt{G_0}+\psi_2)+\sqrt{E}G\varphi_2]/H^2\\
a_{22}&=[-\sqrt{G}F\varphi_2+E\sqrt{G}(\sqrt{G_0}+\psi_2)]/H^2\\
a_{23}&=-\frac{1}{\sqrt{G_0}}\psi_3+\frac{1}{H_0}\psi_1\varphi_3+\frac{1}{G_0}\psi_2\psi_3\\
a_{31}&=[-\sqrt{E}F\psi_3+\sqrt{E}G\varphi_3]/H^2\\
a_{32}&=[-\sqrt{G}F\varphi_3+E\sqrt{G}\psi_3]/H^2\\
a_{33}&=1-\varphi_3^2/(2E_0)-\psi_3^2/(2G_0)
\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot11)$$

E, F, G, H は $\varphi's$, $\psi's$ で表わせるからこれ等の係數はすべて $\varphi's$, $\varphi's$, 従つて u, v, w によつて表わすことが出來る。これ等の變換式 (1・17), (2・6) 或いは (5・10), (5・11)を用いれば $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ 或いは $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向の平衡方程式の何れを求めることも自由である。靜力學的問題を取扱うのには $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向の平衡方程式の方が都合がよいが，併しこの場合には外力及び慣性の項が高次の項に於いて複雜な形をとる。この $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向における運動方程式は次の樣になる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha}\sqrt{G}+\frac{\partial T_{21}}{\partial\beta}\sqrt{E}+T_{11}\Big(l_1\sqrt{G}\\
&\quad+\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{G}{E}}\Big)+(T_{12}+T_{21})m_1\sqrt{E}\\
&\quad+T_{22}n_1\frac{E}{\sqrt{G}}+T_{13}\sqrt{EG}\frac{FM-GL}{H^2}\\
&\quad+T_{23}E\frac{FN-GM}{H^2}\\
&\quad+\rho_0H_0\left[a_{11}\Big(X_1-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\Big)+a_{21}\Big(Y_1-\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\Big)\right.\\
&\quad\left.+a_{31}\Big(Z_1-\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\Big)\right]=0\\
&\frac{\partial T_{22}}{\partial\beta}\sqrt{E}+\frac{\partial T_{12}}{\partial\alpha}\sqrt{G}+T_{22}\Big(n_2\sqrt{E}\\
&\quad+\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{E}{G}}\Big)+(T_{12}+T_{21})m_2\sqrt{G}\\
&\quad+T_{11}l_2\frac{G}{\sqrt{E}}+T_{13}G\frac{FL-EM}{H^2}\\
&\quad+T_{23}\sqrt{EG}\frac{FM-EN}{H^2}\\
&\quad+\rho_0H_0\left[a_{12}\Big(X_1-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\Big)+a_{22}\Big(Y_1-\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\Big)\right.\\
&\quad\left.+a_{32}\Big(Z_1-\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\Big)\right]=0\\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_{13}\sqrt{G})+\frac{\partial}{\partial\beta}(T_{23}\sqrt{E})\\
&\quad+T_{11}L\sqrt{\frac{G}{E}}+T_{22}N\sqrt{\frac{E}{G}}+(T_{12}+T_{21})M\\
&\quad+\rho_0H_0\left[a_{13}\Big(X_1-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\Big)+a_{23}\Big(Y_1-\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\Big)\right.\\
&\quad\left.+a_{33}\Big(Z_1-\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\Big)\right]=0\\
&\qquad X_1=X+\frac{u}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial X}{\partial\alpha}+\frac{v}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial X}{\partial\beta}\\
&\qquad Y_1=Y+\frac{u}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial Y}{\partial\alpha}+\frac{v}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial Y}{\partial\beta}\\
&\qquad Z_1=Z+\frac{u}{\sqrt{E_0}}\frac{\partial Z}{\partial\alpha}+\frac{v}{\sqrt{G_0}}\frac{\partial Z}{\partial\beta}
\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot12)$$

こゝに l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 は (3・19) によつて與えられるものである。(5・12) は E, F, G, L, M, N のどの樣な値に對しても成立ち，従つて有限の曲率變化のみならず，中性面の伸び及び剪斷歪が有限な値をもつ樣な變形に對しても成立する。特に不伸脹變形の場合には $E=E_0$, $F=F_0=0$, $G=G_0$ とおけばよい。係數 a_{ik} は，微小變位の場合には $a_{ik}\sim1$ $(i=k)$ であり，a_{ik} $(i\neq k)$ は一次の微小量であるから，(5・12)の外力及び慣性項は，二次以上の微小量を省略すると，第一，第二，第三式に於いて夫々

$$\rho_0H_0\Big(X_1-\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\Big),\quad \rho_0H_0\Big(Y_1-\frac{\partial^2v}{\partial t^2}\Big),$$

$$\rho_0H_0\Big(Z_1-\frac{\partial^2w}{\partial t^2}\Big)$$

のみが殘る。又外力が (5・6) で與えられている場合には，(5・12)の第一，第二，第三式の外力の項は正確に $\rho_0H_0X_1$, $\rho_0H_0Y_1$, $\rho_0H_0Z_1$ によつて置きかえられる。尙 $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{n}_0$ の方向の平衡方程式も同樣にして (1・17), (2・6) を用いて (5・9), (5・7), (5・8) を (5・1) に入れゝば得られることは勿論であるが，これは極めて複雜な形を有する。エネルギーの原理から得られる平衡方程式はこの場合と同等であつて實用上不便であることが分る。

殼體の平衡を論ずるのには尙モーメントの平衡條件が必要であり，それは上の力の平衡方程式の場合と同樣にして求めることが出來る。即ち (5・1) における $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ の代りに $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ を用い，且つこの他に $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ によるモーメントを考えねばならないから，この場合は (5・1) の代りに次の樣になる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{G}_1\sqrt{G}d\beta)d\alpha+\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{G}_2\sqrt{E}d\alpha)d\beta+\overrightarrow{Ⓜ}H_0d\alpha d\beta\\
&\quad+[\mathbf{a}\sqrt{E}d\alpha\times\mathbf{T}_1\sqrt{G}d\beta]\\
&\qquad+[\mathbf{b}\sqrt{G}d\beta\times\mathbf{T}_2\sqrt{E}d\alpha]=0\qquad(5\cdot13)
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{Ⓜ}$：變形前の中性面の單位面積當りの外力のモーメント。

但しこゝでは廻轉慣性の項は省略した。(5•2) の場合と同樣に

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{G}_1&=H_1\mathbf{a}+G_1\mathbf{b}\\ \mathbf{G}_2&=G_2\mathbf{a}+H_2\mathbf{b}\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot14)$$

と置けば，平衡方程式を求めるには (5•12) の T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} の代りに夫々 H_1, G_1, G_2, H_2 とおき T_{13}, T_{23} の代りには 0 とおけばよい。又 (5•2) により

$$[\mathbf{a}\sqrt{E}d\alpha\times\mathbf{T}_1\sqrt{G}d\beta]=\left[T_{12}\frac{H}{\sqrt{EG}}\mathbf{n}+T_{13}\left(\frac{F}{H}\mathbf{a}-\frac{\sqrt{EG}}{H}\mathbf{b}\right)\right]\sqrt{EG}d\alpha d\beta$$

$$[\mathbf{b}\sqrt{G}d\beta\times\mathbf{T}_2\sqrt{E}d\alpha]=\left[-T_{21}\frac{H}{\sqrt{EG}}\mathbf{n}+T_{23}\left(\frac{\sqrt{EG}}{H}\mathbf{a}-\frac{F}{H}\mathbf{b}\right)\right]\sqrt{EG}d\alpha d\beta$$

であるから

$$\vec{\Theta}=\Theta_1\mathbf{a}+\Theta_2\mathbf{b}\quad(5\cdot15)$$

とおけば，$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ の方向に關するモーメントの平衡方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\sqrt{G}+\frac{\partial G_2}{\partial\beta}\sqrt{E}+H_1\left(l_1\sqrt{G}+\sqrt{E}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sqrt{\frac{G}{E}}\right)+(G_1+G_2)m_1\sqrt{E}\\&\quad+H_2n_1\frac{E}{\sqrt{G}}+T_{13}\frac{\sqrt{EG}F}{H}+T_{23}\frac{EG}{H}+\Theta_1H_0=0\\&\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\sqrt{E}+\frac{\partial G_1}{\partial\alpha}\sqrt{G}+H_2\left(n_2\sqrt{E}+\sqrt{G}\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{E}{G}}\right)+(G_1+G_2)m_2\sqrt{G}\\&\quad+H_1l_2\frac{G}{\sqrt{E}}-T_{13}\frac{EG}{H}-T_{23}\frac{\sqrt{EG}F}{H}+\Theta_2H_0=0\\&H_1L\sqrt{\frac{G}{E}}+H_2N\sqrt{\frac{E}{G}}+(G_1+G_2)M+(T_{12}-T_{21})H=0\end{aligned}\right\}\quad(5\cdot16)$$

となり，平衡の條件は (5•12), (5•16) によつて完全に與えられる。(5•16) も (5•12) と同樣に任意の大さの變位並びに歪に對して成立つ。尙外力のモーメントが空間の位置によつて變化する場合には $\vec{\Theta}$ に關して (5•7) と同樣の考えを適用しなければならないことは勿論である。

第3卷 第2號豫告

〔物理學〕

空洞共振器について	林・霜田
アルカリ・ハライド結晶に於ける F 吸收帶の理論	武藤

〔應用力學〕

衝撃波による臨界現象について	河村
金屬棒の貫入に對する土の抵抗力	最上・渡邊
潤滑油の油性に關する研究（第2報）	
變質した潤滑油の摩擦係數と精製處理の影響	永井・長谷川
球のころがり摩擦について	
1. 球のころがり摩擦は滑り摩擦か	曾田・藥師寺
ピストン・リングの溝内における運動	
其の 3. 高速機關に關する實驗	橫堀