

ブロック境界条件を応用したマルチブロック LES 解析コードの開発と検証

青野 光

東京理科大学工学部機械工学科

野々村 拓

東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

The development of the large-eddy simulation analysis solver based on the block interface condition and its verification

by

Hikaru Aono, Taku Nonomura

ABSTRACT

A large-eddy simulation analysis solver using the multi-block grid with several block interface conditions is developed. The governing equations are the three-dimensional compressible Navier-Stokes equations in the generalized curvilinear coordinates. We adopt a sixth-order compact finite difference scheme for the convective and viscous terms and a fourth-order Runge-Kutta method for time integration. We introduce a block interface condition (BIC) that is newly developed and constructed based on the analogy between the finite volume scheme and the finite difference scheme. The BIC is compared with a characteristic based interface condition (CIC). We consider a single vortex convection crossing the boundary interface between the uniform Cartesian grid and the uniform Cartesian grid with considerable tilt as a test problem. Effects of strength of the vortex on the pressure distribution of the moving vortex are studied. A comparison of the pressure distribution of the vortex at the boundary interface presents that in the case of strong vortex the results of BIC are comparable to those of the CIC while in the case of weak vortex numerical oscillations are observed when the vortex crosses the interface. Furthermore, results obtained using the CIC and the BIC are considerably improved with increasing grid resolution in normal to the block interface.

1. はじめに

近年、計算手法の発展や計算機の性能向上などの複数の要因から計算の予測精度が格段に向上し、機械・航空を含む様々な分野で数値流体解析が物理現象の理解から製品設計に利用されている。現在では、空力音響や乱流遷移などの複雑な非定常流体現象の定量的な予測が活発に取り組まれている。非定常流体現象の解析では対象とする物理現象の特性から、高精度・高解像度計算手法が求められ、しばしば構造格子を用いた有限差分法が利用される。例えば、マルチブロック構造格子と最適化された有限差分スキームによる噴流騒音の数値計算[1-3]の報告などがあり、今後はより複雑な形状まわりの空力音響解析が期待される。しかしながら、乱流・音響解析などに適用される計算手法には、特に高品質な計算格子が要求されるため、複雑形状周りの計算格子にはマルチブロック格子法[1-3]や重合格子法[4]が利用される。本研究では、重合格子法に比べて複雑形状周りの格子生成に自由度が高いマルチブロック格子法と高次精度・高解像度計算手法である有限差分法を利用した数値シミュレーションに着目した。特に、マルチブロック格子法と有限差分法を利用した場合、ブロック境界近傍付近の格子分布の関係性や滑らかさ等により生じた数値エラーの問題を解決するために提案されている各種方法について調べ、その特性を議論することを目的とする。

その問題点を解決した手法の代表例として、Kim と Lee によって提案された特性インターフェイス条件(CIC: Characteristic Interface Condition)[5]がある。この方法には、(i)特性方程式の中に共通のブロック境界に垂直な方向の空間微分項を含むため、CIC の実装が格子の幾何学的配置が変化したときに難しくなること、(ii)ブロック境界において片側差分スキームが陰的な分散と散逸を取り込むこと、(iii)局所 1 次元非粘性関係に基づいているため、非粘性流束の勾配と粘性流束の勾配を別々に計算する必要があること、(iv) 流れがブロック境界に平行な時に数値不安定性があること等の問題があった。これまでにそれらの問題の一部に対して解決策が提案、報告され、不一致接合ブロック境界や有限差分コンパクト法へ拡張された[6-8]。近年、Du と Morris は有限差分法と有限体積法で離散化されたナビエ・

ストークス方程式の間にアナロジーがあることに着目し、上記の問題を解決する新たなブロック境界条件(BIC: Block Interface Condition)を提案した。その BIC を用い、静止状態での周期的音波、圧力源により励起された二次元ジェットと超音速加熱噴流から発生する音波について解析を行い、その結果、流れがブロック境界に平行なときや流れの勾配が強いときに精度が向上することを示している[9]。また、BIC が境界を跨ぐ格子が滑らかなとき、中心差分の形を維持できるため高次精度への拡張の可能性を有すること、局所的な 1 次元非粘性関係に依存せず、非粘性と粘性流束を統一な方法で取り扱えること等から今後魅力的な手法である。そこで、本稿では CIC[5,7]および Du と Morris によって提案されている BIC[9]を基にマルチブロック構造格子 LES 解析コードを開発し、検証問題の一つとして実施した独立渦の移流の結果を報告する。

2. 数値計算手法

本研究では、式(1)で示すような一般曲線座標系に変換した 3 次元圧縮性ナビエ・ストークス方程式を有限差分法で離散化し数値的に解く。対流項と粘性項の空間差分およびヤコビアン計算には 6 次精度コンパクト差分 [10] (ただし、境界点 2 次精度、次点 4 次精度) を適用した。時間積分には 4 次精度ルンゲクッタ法を用いた。更に、数値不安定性の原因になる高周波成分の除去には 6 次精度 3 重対角フィルタ[11]、係数は 0.495 を適用した。なお、計算におけるクーラン数は 0.8 以下とした。

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{E} - \hat{E}_v)}{\partial \xi} + \frac{\partial (\hat{F} - \hat{F}_v)}{\partial \eta} + \frac{\partial (\hat{G} - \hat{G}_v)}{\partial \zeta} = 0 \quad (1)$$

ここで、ハット記号は一般曲線座標系に変換された項であり、それぞれ流体量と変換行列の関数である。例えば、 $\hat{Q} = Q/J$, $Q = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T$, $E = (\xi_x E + \xi_y F + \xi_z G)/J$ 、 J はヤコビアン行列である。

3. BICについて

ここでは、Du と Morris によって提案された BIC について簡単に説明する。詳細については、彼らの論文[9]を参考にして頂きたい。初めに、構造格子での有限差分法と有限体積法による離散化に関するアナロジーについて説明する。

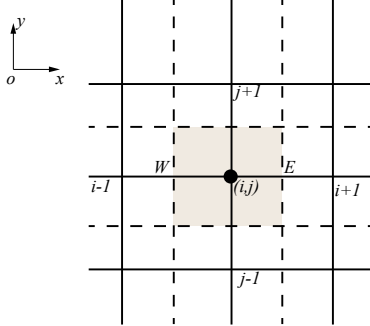


図1 格子点 (i,j) での格子中心検査体積

図1は格子点 (i,j) での支配方程式の格子点中心有限体積法での取り扱いを示し、この時支配方程式の積分形より解が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} Q dV + \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_v \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

ここで、 Ω は図1で色付けられた領域により示された検査体積である。格子点の座標から要素の体積 dV とセル表面の表面ベクトル $d\mathbf{S}$ を計算する。なお、ここでは粘性流束と非粘性流束の間の類似から、流束ベクトル \mathbf{F} に粘性流束を含む形を適用した。格子点 (i,j) で離散化した式は

$$\frac{\partial Q_{i,j} \Omega_{i,j}}{\partial t} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}|_{i+1/2,j} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}|_{i-1/2,j} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}|_{i,j+1/2} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}|_{i,j-1/2} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\Omega_{i,j}$ は格子点 (i,j) での要素の体積、 $\mathbf{S}|_{i-1/2,j}$ は半格子点 $(i-1/2,j)$ での表面ベクトルである。半格子点 $(i-1/2,j)$ で、2次精度近似の流束は $\mathbf{F}_{i-1/2,j} = (\mathbf{F}_{i-1,j} + \mathbf{F}_{i,j})/2$ 、表面ベクトルは $\mathbf{S}_w = (\mathbf{S}_{i-1,j} + \mathbf{S}_{i,j})/2$ として近似できる。x方向にこれらの近似を適用し、格子点 $(i+1,j)$ 、 (i,j) 、 (i,j) 、 $(i-1,j)$ での流束項を展開すると、

$$\mathbf{S}_{i\pm 1} = \mathbf{S}_i \pm \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x} |_{i} \Delta^{\pm} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x^2} |_{i} \Delta^{\pm} x^2 + o(\Delta^{\pm} x^3) \quad (4a)$$

$$\mathbf{F}_{i\pm 1} = \mathbf{F}_i \pm \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} |_{i} \Delta^{\pm} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x^2} |_{i} \Delta^{\pm} x^2 + o(\Delta^{\pm} x^3) \quad (4b)$$

ここで、インデックス j は簡単のために省略した。また、 $\Delta^+ x = x_{i+1} - x_i$ 、 $\Delta^- x = x_i - x_{i-1}$ を意味する。一様なデカルト格子については、 $\Delta^+ x = \Delta^- x$ となり、式(3)に代入し、式を整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{F}_{i+1,j} + \mathbf{F}_{i,j}}{2} \cdot \frac{\mathbf{S}_{i+1,j} + \mathbf{S}_{i,j}}{2} - \frac{\mathbf{F}_{i-1,j} + \mathbf{F}_{i,j}}{2} \cdot \frac{\mathbf{S}_{i-1,j} + \mathbf{S}_{i,j}}{2} \\ & = \frac{\mathbf{F}_{i+1} \cdot \mathbf{S}_{i+1} - \mathbf{F}_{i-1} \cdot \mathbf{S}_{i-1}}{2} + o(\Delta x^3) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)は半格子点での流束の2次精度有限体積近似が異なった打ち切り誤差を持つが精度は同じ隣接した格子点の流束項の平均で近似できることを示す。但し、非一様計算格子では精度が落ちる。格子中心有限体積法についても同様な形式が導出できる。従って、2次精度有限体積法は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_{i,j} \Omega_{i,j}}{\partial t} + \frac{\mathbf{F}_{i+1,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j}}{2} - \frac{\mathbf{F}_{i-1,j} \cdot \mathbf{S}_{i-1,j}}{2} \\ & + \frac{\mathbf{F}_{i,j+1} \cdot \mathbf{S}_{i,j+1}}{2} - \frac{\mathbf{F}_{i,j-1} \cdot \mathbf{S}_{i,j-1}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

と書ける。一方で、同じ構造格子で2次精度中心差分法は、

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} + \frac{\hat{E}_{i+1,j} - \hat{E}_{i-1,j}}{2} + \frac{\hat{F}_{i,j+1} - \hat{F}_{i,j-1}}{2} = 0 \quad (7)$$

となる。このように、2次精度有限体積法(式(6))と2次精度有限差分法(式(7))による離散化の間には類似性が確認できる。実際、格子変換から

$$1/J |_{i,j} = \Omega |_{i,j} \quad (8)$$

と ξ 方向について

$$S|_{i,j} = \frac{(\xi_x, \xi_y, \xi_z)}{J} |_{i,j} \quad (9)$$

が分かる。すなわち、有限体積法による離散化式の $\mathbf{F}_{i+1,j} \cdot \mathbf{S}_{i+1,j}$ もしくは $\mathbf{F}_{i,j+1} \cdot \mathbf{S}_{i,j+1}$ の項と有限差分法による離散化式の $\hat{E}_{i+1,j}$ もしくは $\hat{F}_{i,j+1}$ の間にアナロジーがある。更に、一般的に言えば、有限体積離散化式と有限差分離散化式の間にアナロジーがある。

また離散化手法に関係なく格子が一様でない場合、余分な項が式(5)の右辺に残るため精度を失うことに注意する。この格子由来のエラーは残念ながら不可避であり、格子のストレッチや局所流れの勾配に依存する。これらの精度の低下は流れの勾配が強い領域での近傍格子サイズの連続性の担保することや格子の滑らかさと密度を増やすことで改善できる。

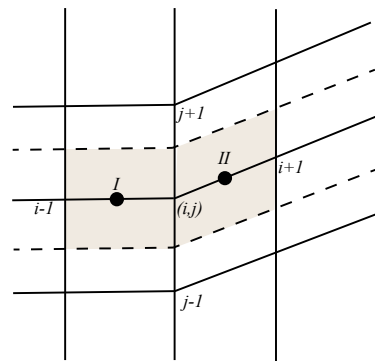


図2 BICの概要図

続いて、2次精度のBICについて説明する。ここで、図2に示すような検査体積(I, II)について有限差分法と有限体積法の類似性を考慮すると、2次精度有限体積法と2次精度有限差分法は以下の式のように書ける。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^I}{J^I} \right) + \frac{\hat{E}_{i,j} - \hat{E}_{i-1,j}}{2} + \frac{\hat{F}_{i,j+1} - \hat{F}_{i,j-1}}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q^{II}}{J^{II}} \right) + \frac{\hat{E}_{i+1,j} - \hat{E}_{i,j}}{2} + \frac{\hat{F}_{i,j+1} - \hat{F}_{i,j-1}}{2} = 0 \quad (10)$$

式(8)に基づき、格子点 (i,j) での流れの解が検査体積内の平均値になると考え、

$$Q_{i,j} \left(\frac{1}{J_{i,j}^I} + \frac{1}{J_{i,j}^{II}} \right) = \frac{Q^I}{J_{i,j}^I} + \frac{Q^{II}}{J_{i,j}^{II}} \quad (11)$$

を得る。つまり、もし格子が一樣でかつ直交であれば2次精度中心差分になる。

ここで、 ξ が一定の格子線の性質については何も仮定しない。もし、格子線が左右のブロックの間の境界になったとき、式(10)と式(11)はBICとなる。このBICでは、左右のブロックの垂直方向には1次精度のバイアス化された有限差分スキームが使用され、重要なのは二つの近傍ブロックの共通の境界を横切る流束はキャンセルされる。有限体積法のアナロジーから、この境界の取り扱いは一様デカルト格子では2次精度中心差分スキームを維持でき、ブロック境界を横切る粘性・非粘性流束の勾配についても同じように取り扱える。

格子が十分に滑らかでないとき精度の低下は一般的な有限差分・体積法に関して避けきれないが、例えばこれは空力音響や乱流遷移を捉えるために要求される格子の滑らかさや直交性はもとから厳しいこと、および、形式上の精度より分散誤差と散逸誤差の影響が重要であることから、実問題解析の中では比較的重要な場合も多い[9]。

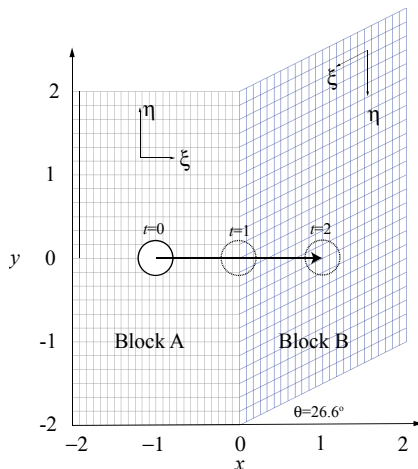


図3 解析に用いる計算格子と計算座標定義

4. 計算ケース

一樣流のマッハ数を0.3、レイノルズ数を10,000に設定した。一樣流中に存在する単独の移流渦は初期状態において以下で与えた。

$$\begin{aligned} p_\infty - p &= \frac{\rho C^2}{2R^2} e^{-(r^2)} \\ u_\infty - u &= \frac{C(y - y_c)}{R^2} e^{-(r^2/2)} \\ v &= \frac{C(x - x_c)}{R^2} e^{-(r^2/2)} \\ r^2 &= \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{R^2} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 C は渦の強さを決めるパラメータ、 R は渦の特性半径である。住らの研究[7]を参考に、渦の特性半径 $R=0.2$ とし、渦の強さ($C=0.167, 0.00167$)を変えた2種類の同様のケースに計算を実施した。ここで、式(12)より速度成分は C に比例するが、圧力は C の2乗に比例するため、そのため渦の強さと渦中心の圧力の大きさの変化もそれに従うことに注意されたい。一樣流に対して強い渦は最大旋回速度が約50%、中心圧力が約4%程度であり、一方で弱い渦は最大旋回速度が約0.5%、中心圧力が0.0004%程度である。いずれの場合も流れ場全体は亜音速状態である。

渦は図3に示す計算格子上を ξ 方向に沿ってブロックAからブロックBへインターフェイスを横切って移動する。渦中心は初期状態の時刻 $t=0$ において $x=-1$ に位置し、単独渦がブロック境界を挟んで距離2を時間2をかけて移流する計算を行った。また、格子を分割しない計算も実施し、計算の比較対象とした。強い渦移流の問題では格子収束性が確認された。一方、弱い渦移流の問題は格子収束が得られなかったが、住らの研究[7]で利用された計算格子と同等以上の格子解像度を利用しており、今回の結果に大きな影響がないと考えた。表1に今回実施した計算ケースの名前と格子点数を纏めたものを示す。

表1 ケース名と格子点数

Case name	Grid ($\xi \times \eta$)
Original	481×241
CIC, BIC	241×241
CIC fine, BIC fine	481×241

5. 結果と考察

5.1 強い渦についての比較と検討

図4に渦の中心が境界を跨ぐタイミングの渦の圧力分布の比較を示し、図5は $y=0$ 上での渦の圧力分布の定量的な比較を示す。なお、図4で(b-1)と(c-1)は(b-2)と(c-2)は格子の解像度が異なり、(b-2)と(c-2)はfine格子に該当する。図4,5の比較は本ケースに於いてCIC, BIC, 格子を分割しない計算の結果が類似し、マルチブロック境界を有するCICとBICの計算は、どちらも同程度の精度であることを示す。なお、ここでは最も数値エラーが生じる時刻である渦の中心が丁度ブロック境界もしくは格子が曲がった位置に来る時刻に注目したが、計算全体としてどの時刻でも同様の結果を示すことを確認済みである。

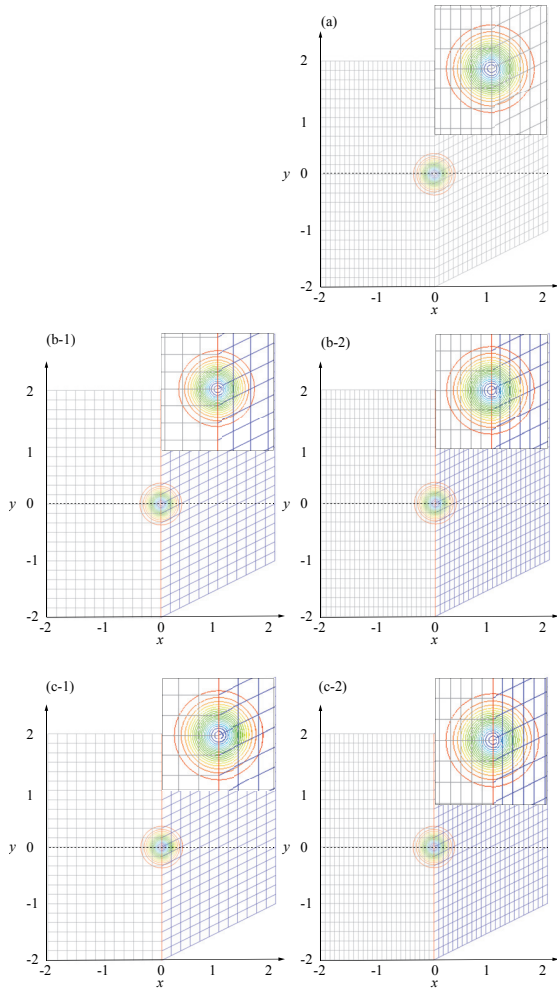


図 4 圧力分布の比較($t=1$): (a) シングルブロック格子での計算, (b)マルチブロック格子で CIC, (c)マルチブロック格子で BIC

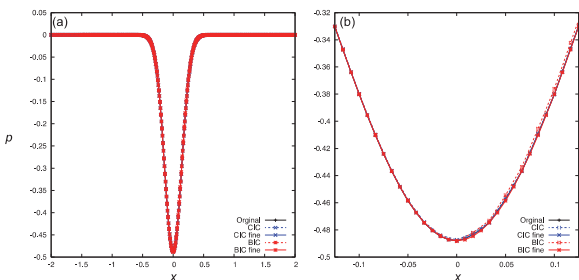


図 5 $y=0$ 上での圧力分布の比較($t=1$): (a)全体, (b)渦中心付近

5. 2 弱い渦についての比較と検討

続いて、渦の強さを極端に弱くした場合の比較を図 6, 7 に示す。図 4 と同様で図 6 においても、(b-1) と (c-1)は(b-2) と (c-2)は格子の解像度が異なり、(b-2)と(c-2)は fine 格子に該当する。ここでは、先ほどの強い渦とは異なり、幾つかの傾向が見られた。一つ目として、ブロック境界を持たない計算 (Original) では、計算格子が十分に細かい場合でも境界で振動する。二つ目として、CIC と BIC 両方の手法を利用した場合、一定以上の格子解像度であれば、渦の圧力分布に振動せずに渦の移流が計算できる。三つ目として、計算格子が粗い場合 BIC の方が CIC と比較して若干振動するが圧力分布の形は正しく維持できる。これらの解析結果は、弱い渦移流が存在する問題でも、シングルブロック格

子の計算と比較してマルチブロック格子で CIC と BIC を用いた方がより少ない格子で一定以上の計算精度での計算が可能になると示唆する。ただし、これは図 3 のような境界を跨いで格子が急激に変化する計算格子を適用した場合の知見であり、今後ブロック境界を跨ぐ格子の特性が計算結果にどの程度影響するのかを詳細に解析する必要がある。

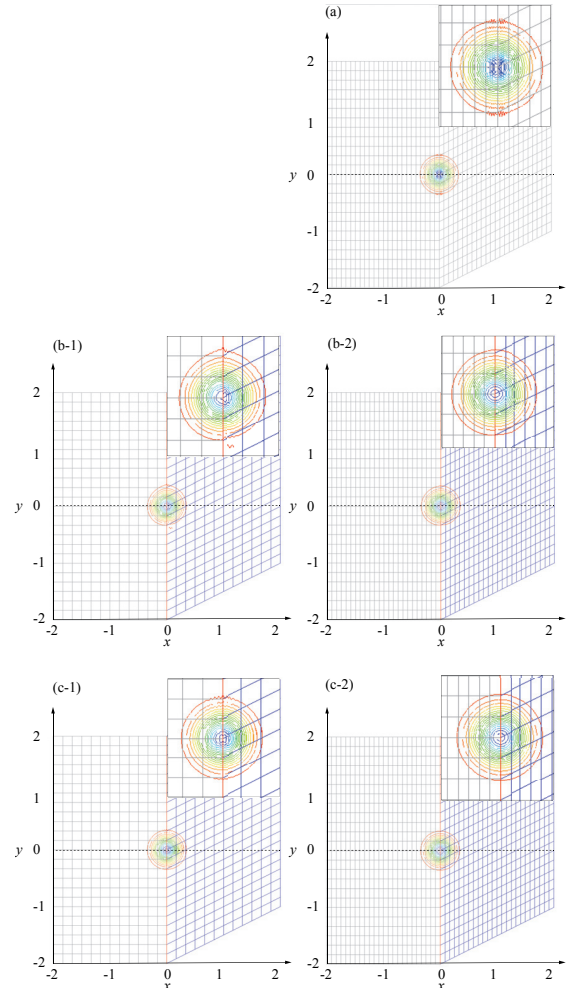


図 6 圧力分布の比較($t=1$): (a) シングルブロック格子での計算, (b)マルチブロック格子で CIC, (c)マルチブロック格子で BIC

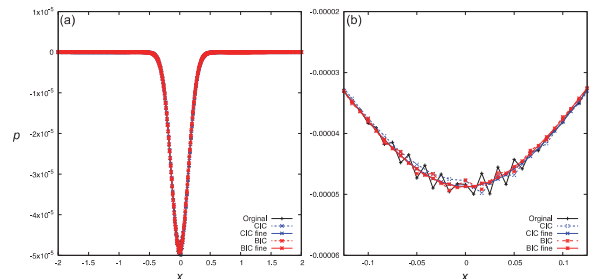


図 7 $y=0$ 上での圧力分布の比較($t=1$): (a)全体, (b)渦中心付近

6. 結論

本研究は、CIC および Du と Morris らが提案した有限体積法と有限差分法の離散化式のアナロジーに着目した新しいブロック境界条件を応用したマルチブロック LES 解析コードの開発を行った。異なる強さの渦の移流問題で開発したプログラムの検証を行い、これまで提唱されている CIC

と同様の精度で結果が得られることを示した。渦の強さがより弱い時に CIC と BIC が有効である可能性も示した。現在更なる検証を進めるべく、周期圧力源から発生する音波や NASA-CRM ベンチマークテストなどの解析を進めている。今後その結果について報告する予定である。

参考文献

- 1) Shur, M.L., Spalart, P.R., Strelets, M.K., and Garbaruk, A.V.: Further Step in LES-based Noise Prediction for Complex Jets, AIAA Paper 2006-0485.
- 2) Uzun, A., and Hussaini, M. Y.: Simulation of Noise Generation in Near-Nozzle Region of a Chevron Nozzle Jet, AIAA J., 47 (2009), pp. 1793-1810.
- 3) Xia, H., Tucker, P.G., and Eastwood, S.: Large-eddy Simulations of Chevron Jet Flows with Noise Predictions, Int. J. Heat Fluid Fl., 30(2009), pp. 1067-1079.
- 4) Sherer, S. E. and Scott, J. N.: High-order Compact Finite-Difference Methods on General Overset Grids, J. Comput. Phys., 210(2005), pp. 459-496.
- 5) Kim, J.W., and Lee, D.J.: Characteristics Interface Conditions for Multiblock High-order Computations on Singular Structured Grid, AIAA J., 41 (2003), pp. 2341-2348.
- 6) Ikeda, T., Sumi, T., and Kurotaki, T.: Interface Conditions of Finite Difference Compact Schemes for Computational Aeroacoustics, AIAA J., 11(2009), pp. 2658-2665.
- 7) 住, 黒滝, 桧山: 高精度マルチブロック流体計算のための一般化特性インターフェイス条件の構築とその性能評価, 日本航空宇宙学会論文集, 50(2006), pp. 563-575.
- 8) 住, 黒滝, 桧山: 高次精度補間を導入した特性インターフェイス条件によるマルチブロック計算法, 日本航空宇宙学会論文集, 57(2009), pp. 196-209.
- 9) Du, Y. and Morris, P.J.: Improved Block Interface Conditions for Aeroacoustic Problems with Grid Discontinuities, AIAA J., 53 (2015), pp. 1531-1543.
- 10) Lele, S: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, J. Comput. Phys., 103 (1992), pp. 16-42.
- 11) Gaitonde, D. and Visbal, M.: Pade-Type Higher-Order Boundary Filters for the Navier-Stokes Equations, AIAA J., 38 (2000), pp. 2103-2112.