

計測データに基づく格子細分化手法

三坂孝志, 鶴飼孝博, 小西康郁, 大林 茂
東北大学

Adaptive Mesh Refinement based on Measurement Data

by
Takashi Misaka, Takahiro Ukai, Yasufumi Konishi, Shigeru Obayashi

ABSTRACT

This study numerically investigated an adaptive mesh refinement method based on experimental measurement. The difference of experimental and numerical results was propagated by an adjoint model of the radial basis function-based reduced-order model (RBF-ROM), which was derived from snapshots of a preceding numerical simulation. The incompressible Navier-Stokes equations were solved on the framework of the building cube method (BCM) for generating the snapshots and the mesh refinement was realized by utilizing the data structure of the BCM, i.e., a BCM mesh was refined by dividing cubes. The error of the numerical simulation was evaluated by two CFD runs with different mesh resolutions and the region of mesh refinement was defined by the inner product of the error and the measurement sensitivity obtained from the adjoint model of the RBF-ROM. By considering the measurement sensitivity, the difference of meshes after refinement appeared near the object, i.e., the region of mesh refinement was focused on the wake where the pseudo measurement was carried out.

1. はじめに

各種センサーによる実計測と計算機による数値解析を協調的に利用し, より精度の高い現象解析・状態推定, さらには設計開発を実現するためにデータ同化法への期待が高まっている. データ同化法は気象予測の精度を, 衛星観測等の実観測値を用いて改善するために発展してきた技術であり, 工学分野においても有用であると考えられる. これまで流体工学分野においては, 早瀬らのハイブリッド風洞[1], 鈴木らの PTV 計測を利用したハイブリッド風洞[2], そして, 加藤らによるレイノルズ平均乱流モデルの渦粘性分布推定[3]など, データ同化に関連した研究が行われてきている.

流体工学分野においてデータ同化が効果的に利用されるようになるには, 非常に大まかに言って, 1) データ同化によって実験計測もしくは数値解析単体よりも良い結果が得られる, 2) 計算コストが既存の数値解析と比較して極端に大きくなならない, ことが必要であると考えられる. 第一の点に関して, “良い結果”の定義自体が様々であるものの, 新規技術を導入するに当たって自明な要求であるが, 工学分野においてはデータ同化によって解析精度を向上させるための一般的な知見は得られていない. 本研究では非定常流れ解析における計算格子解像度の重要性を鑑み, 計測データに基づく格子細分化により解析誤差を減少させる手法を検討する. 第二点に関しては, 得られる結果の精度向上がデータ同化導入による計算コストの増大に見合うことが必要であることから, 可能な限り低コストのデータ同化手法の構築が重要である. 非定常流体解析の分野では計算機リソースを最大限利用した解析が主であるため, 流体解析の精度を犠牲にしてまでデータ同化を導入するという状況にはなりにくいと考えられる. この点に関して, データ同化の計算コストを小さくするために直交固有分解などの空間基底に基づく次元縮約モデルを用いた流れ予測手法が提案されており, 本研究でも利用する.

本研究では, 非定常数値流体解析の精度向上に資するデータ同化技術の開発を目指して, 計測値と計算値の差に基づき格子細分化を行う手法の検討を行う. 次元縮約モデルのアジョイントモデルにより計測値と計算値の差の伝播を行い, マルチステップ法で推定された解析誤差の大きな領域のうち, 計測値と計算値の差の減少に影響する領域の格子を細分化する.

2. 手法

2.1 流れ場の数値解析手法

本研究では数値実験による手法の検討を行う. すなわち, 実際には実験装置で取得されるべき実験値を, 条件の異なる数値

計算結果で代用し, 計算機上でデータ同化の結果を検討する. 流体解析には大規模流体解析のためのフレームワークである Building Cube Method (BCM) を用いた[4]. BCM は格子生成, 高次精度スキームの組み込み, および, 後処理の簡素化のために等間隔の直交格子を用いている. さらに, BCM では計算アルゴリズムを複雑化させることなく, 格子を複雑形状および局所流れ場に適応させるために, ブロック構造格子を採用している. ブロック構造格子はデータ構造としても利点がある. 計算領域は Cube と呼ばれるブロックに分割されるが, 各 Cube 内の格子点数が同じであるため格子解像度が Cube サイズで決まり, また, Cube を用いた並列処理が効率的に行われる. この BCM フレームワークにおいて, Cube 分割および結合による格子細分化および粗化の機能を実装し, 事前に設定した格子細分化の指標量により, 局所的に計算格子の解像度を変化できるようにした.

基礎方程式は非圧縮性 Navier-Stokes 方程式である. 圧力は HSMAC 法により得られる[5]. 対流項は Skew-symmetric 型の 4 次精度中心差分, 粘性項は 4 次精度中心差分により離散化する[6]. 一方, 時間積分には 3 次精度ルンゲ・クッタ法を用いる[7]. Large Eddy Simulation のためのサブグリッドスケールモデルとしてコヒーレント構造モデルを採用した[8].

2.2 数値解析誤差の評価

格子細分化には解析誤差を指標として用いる. 数値解析誤差を評価する手法としては, 例えば, 4 次精度の Runge-Kutta 法の場合に, 時間刻みを変えて同一区間の時間積分を行い, その結果の差から解析誤差を推定するマルチステップ法や, 精度の異なる差分式を用いて同一区間の時間積分を行うことで解析誤差を推定する方法がある[9]. 後者は効率的ではあるものの, 一般的な CFD コードで利用するには異なる時空間精度のコードを用意しなければならないため, 本研究ではマルチステップ法を用いる. これにより流速に関する解析誤差ベクトル \mathbf{u}_{err} を得る. 非定常流れ場において格子解像度の異なる解析から解析誤差を算出するには, ある程度の時間区間に渡って計算を行う必要があるが, 密格子を用いる場合には効率的ではない. そこで, 代表的な周期現象を含む時間区間の計算において, 時間方向に複数箇所で粗-密格子により解析誤差を評価することとした.

2.3 計測感度取得のためのデータ同化手法

本研究では 4 次元変分法に基づくデータ同化法を用いた. 4 次元変分法ではある時間区間で式(1)に示すような計測と計算の差を表すコスト関数を考え, 勾配法により最小化する[10].

$$J(\mathbf{Q}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [H_i(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{y}_i]^T R_i^{-1} [H_i(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{y}_i]. \quad (1)$$

ここで、 N は時間ステップ、 \mathbf{Q}_i はモデル変数、 \mathbf{y}_i は計測変数、 H_i はモデル変数から計測変数への変換演算子、 R_i は計測誤差共分散行列である。ラグランジュ未定乗数法を用いて、最終的に以下のアジョイント方程式を時間逆方向に積分することでコスト関数の勾配を得る。

$$\lambda_i = \mathbf{M}_i^T \lambda_{i+1} + \mathbf{H}_i^T R_i^{-1} [H_i(\mathbf{Q}_i) - \mathbf{y}_i], \quad i = N \sim 0 \quad (2)$$

$$\nabla J(\mathbf{Q}_0) = \lambda_0 \quad (3)$$

ここで \mathbf{M}_i^T はアジョイント演算子、 λ_i はアジョイント変数である。添字 $i = N \sim 0$ は式(2)を時間逆方向に積分することを示す。この勾配および準ニュートン法の最小化で得られるヘッセ行列を用いて、コスト関数に対する計測値の感度は、

$$\nabla_{\mathbf{y}_i} J(\mathbf{Q}_0) = R_i^{-1} \mathbf{H}_i \mathbf{M}_{0,i} [\nabla_{\mathbf{Q}_0}^2 J(\mathbf{Q}_0)]^{-1} \nabla J(\mathbf{Q}_0) \quad (4)$$

となる[11]。計測感度により、どの部分を計測することで、対象としているコスト関数を効率よく減少させることができるかが分かる。この式からコスト関数の勾配にヘッセ行列の逆行列を掛けたものを線形モデルにより時間発展させることでコスト関数に対する計測値の感度が得られる。

Navier-Stokes 方程式の数値解を求める計算は、流れ場が複雑になればなるほどコストが大きくなり、複雑形状まわりの流れ解析は一般に計算コストが大きい。このような流れ場にデータ同化を直接適用すると、さらに数十倍の計算コストを要求することになり、実用上受け入れられない。そこで本研究では Navier-Stokes 方程式の数値解析結果から導出される次元縮約モデルを採用する。まず、ある時間区間の非定常流体解析を行い、一定間隔で流れ場のデータを保存する。その流れ変数ベクトルを並べることで行列を構成し、その固有値問題を解くことで、流れ変数を以下のように分解する (Snapshot POD) [12]。

$$\psi^n(x, t) = \bar{\psi}(x) + \sum_{i=1}^P \alpha_i^n(t) \Psi_i(x) \quad (5)$$

ここで、 $\psi^n(x, t)$ は分解される変数、 $\bar{\psi}(x)$ は時間平均成分で空間の関数、 $\Psi_i(x)$ は分解に用いる基底ベクトルであり空間の関数、そして、 $\alpha_i^n(t)$ は基底ベクトルの重ね合わせに用いる係数であり、時間の関数である。次元縮約モデルにおいては、係数 $\alpha_i^n(t)$ の時間発展式を解くことにより、流れ場の時間発展を求める。係数の時間発展式は、支配方程式である Navier-Stokes 方程式を上記の基底ベクトルに射影することによっても得られるが (ガラーキン射影)、本研究ではこの時間発展式を Radial Basis Function (RBF) によって式(6)のような形で構成する[13]。

$$\alpha_i^n = f_i(\alpha^{n-1}) = \sum_{j=1}^N w_i(j) \cdot \phi(\|\alpha^{n-1} - \hat{\alpha}(j)\|) \quad (6)$$

ここで重み係数 $w_i(j)$ は既存データベース (流れ場のスナップショット) から決定することができる。 $\phi(\|\alpha^{n-1} - \hat{\alpha}(j)\|)$ はカーネル関数であり、ここではデータ間の距離の逆数で定義した。

縮約モデルの変数を $\delta \widehat{\mathbf{Q}}_i$ 、Navier-Stokes 方程式の変数 $\delta \mathbf{Q}_i$ とし、変換行列を T とすると $(\delta \widehat{\mathbf{Q}}_i = T \delta \mathbf{Q}_i, \delta \mathbf{Q}_i = T^T \delta \widehat{\mathbf{Q}}_i)$ 、式(1)のコスト関数は以下ようになる。

$$J(\widehat{\mathbf{Q}}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [H_i T^T \delta \widehat{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{d}_i]^T R_i^{-1} [H_i T^T \delta \widehat{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{d}_i] \quad (7)$$

コスト関数に対する計測値の感度も同様にして得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{sens} &= \nabla_{\mathbf{y}_i} J(\widehat{\mathbf{Q}}_0) \\ &= R_i^{-1} \mathbf{H}_i T^T \mathbf{M}_{0,i} [\nabla_{\widehat{\mathbf{Q}}_0}^2 J(\widehat{\mathbf{Q}}_0)]^{-1} \nabla J(\widehat{\mathbf{Q}}_0) \end{aligned} \quad (8)$$

2. 4 格子細分化の指標

アジョイント法による誤差伝播を利用して、特定の出力関数の精度向上に影響する領域の格子細分化を行う手法がある。この手法により、物体周りの流れ解析において、物体に働く抗力を出力関数として、抗力の推定精度に影響する領域の格子細分化を行うことができる[14]。本研究ではこの手法を応用し、ある計測領域における計測値と計算値の差を減少させるように格子細分化を行う。

本研究では、格子細分化の指標となる量として、前節までに得られた解析誤差ベクトル \mathbf{u}_{err} と計測感度ベクトル \mathbf{u}_{sens} を内積した量の大きさ $u_{ref} = |\mathbf{u}_{sens} \cdot \mathbf{u}_{err}|$ を定義する。この u_{ref} の大きな領域から格子細分化を行っていく。ここでは何割の Cube の分割を行うかを事前に指定し、 u_{ref} の大きな Cube から分割する。図1に計測値と計算値の差に基づく格子細分化のフローチャートを示す。図中の青枠で囲まれた部分は粗格子による計算、黒枠は次元縮約モデルを使った解析であり、計算負荷は比較的小さい。図中赤枠では、粗格子の全ての Cube を分割することで密格子を作成しているため計算コストが大きい。そのため、密格子を使用したマルチステップ法による誤差解析は、時間区間を N 分割し、各時刻で少数ステップにより行うこととした。これらの計算から格子細分化の指標 u_{ref} を計算し、事前に指定した割合の Cube を分割する。上記を繰り返し行い、計測値と計算値の差の減少を確認する。

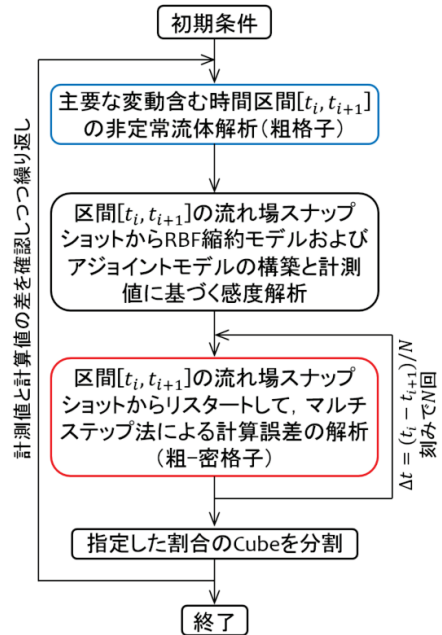
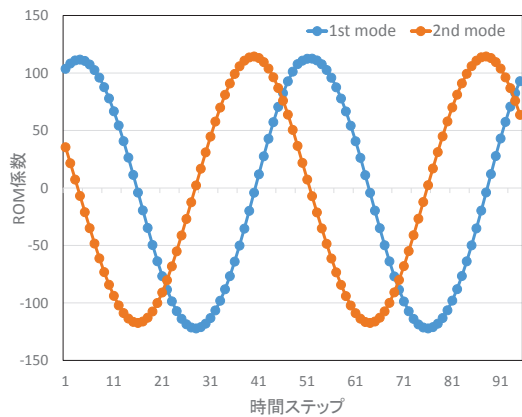


図1 計測値と計算値の差に基づく格子細分化の流れ

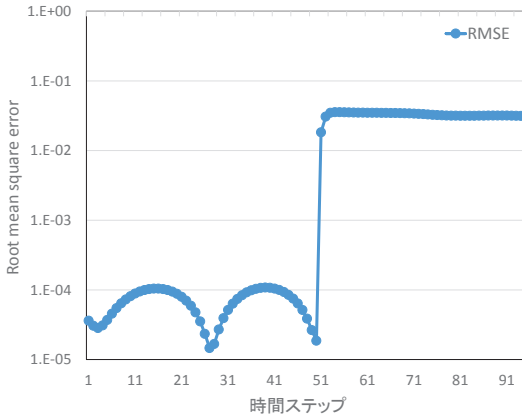
3. 結果および考察

図2に円柱後流の非定常流れ (Re=100) から得られる RBF 縮約モデル係数 $\alpha_i^n(t)$ の時間履歴を示す。周期現象を示す主要な第1および第2モードのみを示している。図2(a)の横軸48タイムステップまでが Radial Basis Function に基づく縮約モデル

(RBF-ROM)の学習フェーズ, それ以降が構成された RBF-ROM による予測フェーズとなる. 図に示すように, 第 1, 2 モード共に周期的な変動が予測されていることがわかる. 図 2(b)に係数 $\alpha_i^n(t)$ から式(5)を用いて流れ場を構成し, 元の流れ場との比較から平均二乗誤差の平方根を評価した結果を示す. 学習フェーズでは当然ながら小さな値となるが, 式(5)の演算精度からマシンゼロの精度は達成できていないことがわかる. 一方, 49 タイムステップ以降の予測フェーズでは, 誤差が急増し, 元の流れ場に対して数%となっている. 主要モード係数の予測精度が比較的高いにも関わらず, 再現した流れ場の精度がそれほど高い点に関しては, 更なる検討が必要である. 別に行った検討の結果から, RBF-ROM においては学習フェーズにおいて対象としている流動現象の手法な変動を利用することができれば, その後の予測においても現象を予測できることを確かめている. また, 学習フェーズにおけるデータ量は主要現象の再現においては大きく影響しない.



(a) RBF-ROM の係数 $\alpha_i^n(t)$



(b) 再現した流れ場の平均二乗誤差

図 2 RBF-ROM による予測結果

数値実験においては条件の異なる数値シミュレーションから得られた流れ場から抽出した流速を疑似計測として用いる. 本研究では図 3 に示す物体後流で疑似計測値を得た.

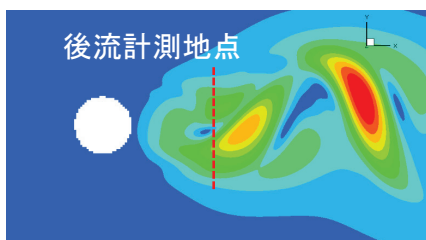
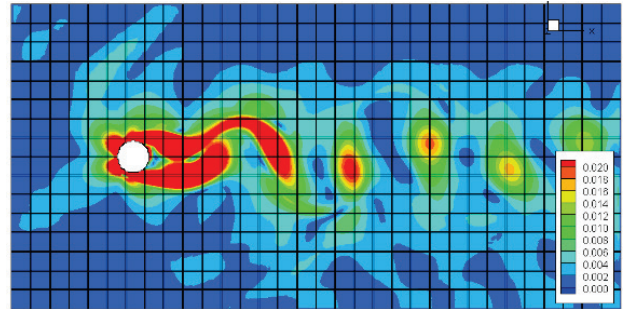
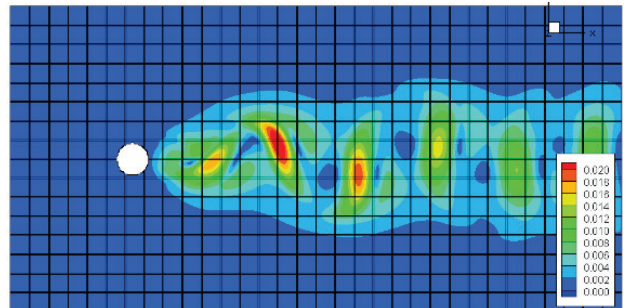


図 3 物体後流の疑似計測値の位置

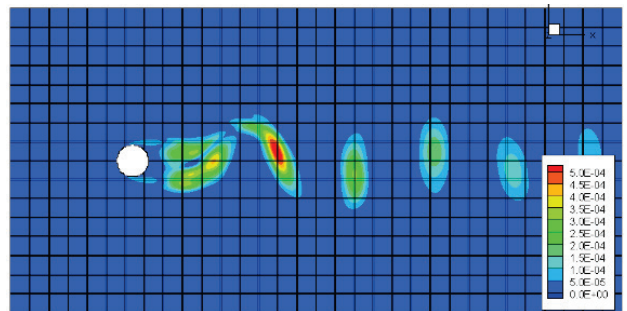
図 4 に誤差に基づく格子細分化の様子を示す. 図 4 中の黒線は BCM の Cube 境界を示しており, 各 Cube 内に 16³ 点の格子点を配置している. 図 4(a)は数値解析に起因する解析誤差の分布であり, 流速変動が大きく, 分布の急峻な領域で大きな値となっている. 一方で, 図 4(b)は物体後流で得られる計測値と数値解析値の誤差の影響範囲を式(8)により計算した結果である. 本研究では, 図 4(c)は, 図 4(a)および(b)の誤差分布を内積した格子細分化指標量の分布である. この指標により格子細分化を行った結果を図 4(d)に示す. 解析誤差は円柱周辺で大きくなっているが, 計測感度が物体から離れた後流域で大きくなっているため, 格子細分化指標量は後流領域で大きな値となっている.



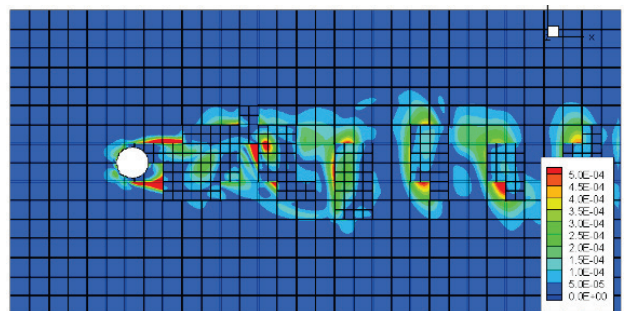
(a) 解析誤差 $|u_{err}|$ の分布



(b) 計測感度 $|u_{sens}|$ の分布



(c) 格子細分化指標 u_{ref} の分布

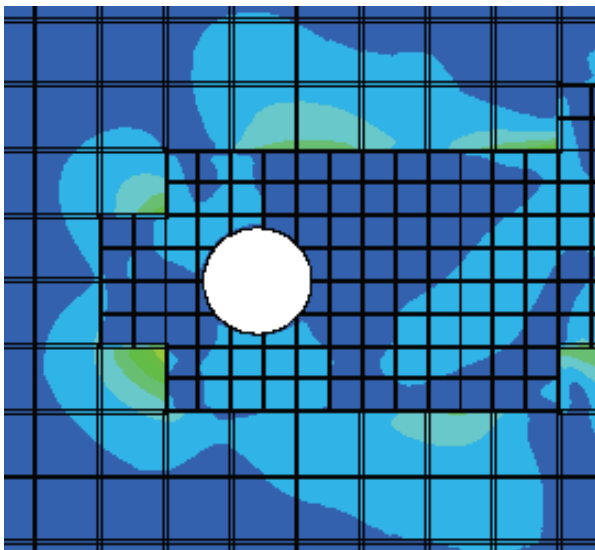


(d) 格子細分化後の Cube 分布

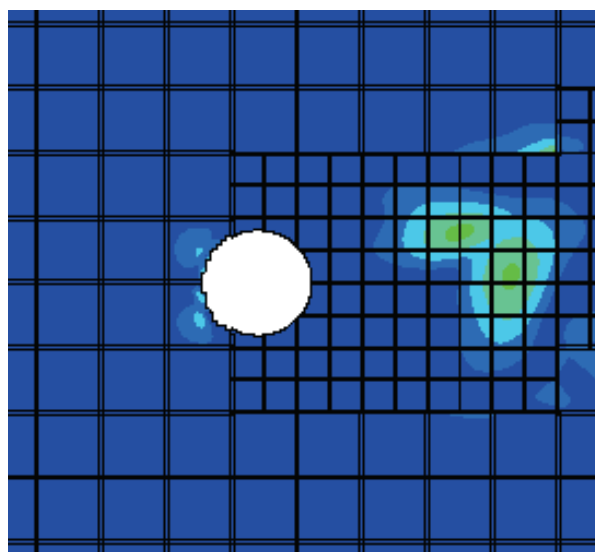
図 4 格子細分化に関する諸量の分布と Cube 境界

アジョイント方程式を用いた感度解析では、通常感度情報が流れと逆方向に伝わるが、本研究では次元縮約モデルを用いているため、計測感度 \mathbf{u}_{sens} の分布が空間基底に依存することになる。そのため図 4(b)では計測位置後方にも計測感度の大きな領域が広がっている。これは計測位置に偏った格子細分化が行われないという意味では利点であるが、余計な領域も細分化されてしまうため効率的な格子細分化という観点では好ましくない。

図5に格子細分化指標として、解析誤差ベクトル \mathbf{u}_{err} 、および、 \mathbf{u}_{err} と計測感度ベクトル \mathbf{u}_{sens} を内積した量の大きさ $u_{ref} = |\mathbf{u}_{sens} \cdot \mathbf{u}_{err}|$ を用いた場合の格子細分化結果を示す。ここでも図中の黒線は Cube 境界を示している。 \mathbf{u}_{err} を用いた格子細分化では、物体を囲むように格子細分化が行われ、さらに、後流へも細分化領域が広がっている。一方で、 u_{ref} を用いた場合には、主に後流領域が細分化され、特に物体前方の細分化が行われていないことがわかる。これは、この流れ場において物体前方の格子密度が後流の計測位置における解析精度に影響していないことを示している。



(a) $|\mathbf{u}_{err}|$ で細分化



(b) $u_{ref} = |\mathbf{u}_{sens} \cdot \mathbf{u}_{err}|$ で細分化

図5 格子細分化に関連する諸量の分布と Cube 境界

4. おわりに

本研究では、非定常数値流体解析の精度向上を目的として、計測値と計算値の差に基づき格子細分化を行う手法を検討した。BCM フレームワークを利用した格子細分化による数値誤差解析手法を、次元縮約モデルによる効率的な計測感度の解析手法と共に用いることで、計測値との差を効果的に減少させるように数値解析誤差を低減する手法を構築した。簡単な流れ場において、物体後流の疑似計測値を用いることで格子細分化の結果を検討した。

課題としては、密格子を用いることによる計算コスト増加への対応と、次元縮約モデルによって得られる計測感度分布の妥当性の検証が挙げられる。

参考文献

- [1] T. Hayase, K. Nisugi, and A. Shirai, "Numerical Realization for Analysis of Real Flows by Integrating Computation and Measurement," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 47, pp. 543-559, 2005.
- [2] T. Suzuki, "Reduced-order Kalman-Filtered Hybrid Simulation Combining Particle Tracking Velocimetry and Direct Numerical Simulation," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 709, pp 249- 288, 2012.
- [3] H. Kato, A. Yoshizawa, G. Ueno and S. Obayashi, "A Data Assimilation Methodology for Reconstructing Turbulent Flows around Aircraft," *Journal of Computational Physics*, Vol. 283, pp. 559-581, 2015.
- [4] K., Nakahashi, "High-Density Mesh Flow Computations with Pre-/Post-Data Compressions," *AIAA Paper 2005-4876*, 2005.
- [5] C. W., Hirt, and J. L., Cook, "Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain," *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, No. 2, pp. 324-340, 1972.
- [6] Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, and P. Moin, "Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow," *Journal of Computational Physics*, Vol. 143, No. 1, pp. 90-124, 1998.
- [7] J. H. Williamson, "Low-storage Runge-Kutta schemes," *Journal of Computational Physics*, Vol. 35, No. 1, pp. 48-56, 1980.
- [8] H., Kobayashi, "The Subgrid-Scale Models based on Coherent Structures for Rotating Homogeneous Turbulence and Turbulent Channel Flow," *Physics of Fluids*, Vol. 17, pp. 045104, 2005.
- [9] A. S. Chai, "Error Estimate of a Fourth-order Runge-Kutta Method with Only One Initial Derivative Evaluation," *Proceeding of AFIPS '68*, pp. 467-471, 1968.
- [10] T. Misaka, and S. Obayashi, "Sensitivity Analysis of Unsteady Flow Fields and Impact of Measurement Strategy," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2014, Article ID 359606, 12 pages, 2014.
- [11] D. N. Daescu, "On the Sensitivity Equations of Four-Dimensional Variational (4D-Var) Data Assimilation," *Monthly Weather Review*, Vol. 136, pp. 3050-3065, 2008.
- [12] L., Sirovich, "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures Part I: Coherent Structures," *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 45, No. 3, pp. 561-571, 1987.
- [13] D. Xiao, F. Fang, C. Pain and G. Hu, "Non-Intrusive Reduced-Order Modelling of the Navier-Stokes Equations based on RBF Interpolation," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 79, pp. 580-595, 2015.
- [14] K. J. Fidkowski, D. L. Darmofal, "Review of Output-Based Error Estimation and Mesh Adaptation in Computational Fluid Dynamics," *AIAA Journal*, Vol. 49, No. 4, pp. 673-694, 2011.