

粘弾性流体中でのマッハコーンの形成

三神史彦, 八木良明
千葉大学 大学院工学研究科

Formation of Mach cones in a viscoelastic fluid

by

Fumihiko Mikami and Yoshiaki Yagi (Chiba University)

ABSTRACT

Mach cones created by a falling sphere are observed experimentally in a viscoelastic fluid. The fluid used is a dilute wormlike micelle solution of cetyltrimethylammonium bromide (CTAB) and sodium salicylate (NaSal) dissolved in water. The shear wave speed for the CTAB/NaSal solution is $c \approx 10$ mm/s. A sphere falls through the fluid faster than the speed of shear waves. Mach cones are clearly observed in vorticity fields. They have a multiple-cone structure. The first cone is involved with forward shearing motion in the direction induced by the falling sphere, and it is followed by weaker cones with backward shearing motion accompanied by a relaxation of the initial shearing motion. The results suggest the importance of considering shear-wave-based Mach numbers that facilitates the understanding of a complex phenomenon associated with viscoelastic fluid flows.

1. 緒言

粘弾性流体中では、体積変化を伴う縦波の音波とともに、体積変化を伴わない横波のせん断波が生じる。せん断波は、渦度が伝わる波と捉えることもできる。液体である粘弾性流体の体積弾性率 K が 10^9 Pa 程度の大きさであるのに対して、剛性率 G は 1 Pa 程度である。このため、流体の密度 ρ をおよそ 10^3 kg/m³ とした場合、音速は $\sqrt{K/\rho} \sim 10^3$ m/s、せん断波の伝播速度は $\sqrt{G/\rho} \sim 10^{-2}$ m/s となり、せん断波の伝播速度は音速に比べてはるかに遅い。このとき、物体の運動速度 U とせん断波の伝播速度 c で定義した粘弾性マッハ数 $M = U/c$ は簡単に 1 を超えることができる。

粘弾性流体の流動は、複雑で特異な挙動を示すことが多い¹⁾。このような粘弾性流体の流れについては数多くの研究がなされてきたが、粘弾性流体中の波動現象を扱った例は少ない。これまでには、平板を面内で動かしたときの流れ²⁾ (Stokes の第 1 問題) や平板を面内で振動させたときの流れ³⁾ (Stokes の第 2 問題) が、波動現象の問題として調べられている。粘弾性を示す界面活性剤のひも状ミセル水溶液中で平板を振動させたときに発生するせん断波の位相速度は、溶液の濃度が低くなるにつれて減少し、ゼロに近づくことが報告されている³⁾。このことは、低濃度の溶液中では、粘弾性マッハ数が 1 を超えるような流れが発生しやすいことを示している。

Joseph⁴⁾ は粘弾性流体の一様流の中におかれた物体まわりの流れを線形理論を用いて解析し、 $M > 1$ のときにマッハコーンが形成されることを示している。このとき、線形近似された渦度の式は、 $M > 1$ のときに双曲型、 $M < 1$ のときに楕円型となる。

本研究では、せん断波の伝播速度がおよそ 10 mm/s となるように調整した希薄な界面活性剤のひも状ミセル水溶液を用いて、流体中を沈降する球のまわりにマッハコーンが形成されることを PIV (Particle Image Velocimetry) を用いて実験的に調べた。

2. 基礎方程式

線形粘弾性流体の基本的モデルである弾性要素のばねと粘性要素のダッシュポットが直列につながれた Maxwell モデルに従う流体について、一次元の波動伝播と、マッハコーン形成に関係する基礎方程式を示す。流体中の音速に比べて流速が小さい場合を扱うので、ここでは非圧縮流れとする。

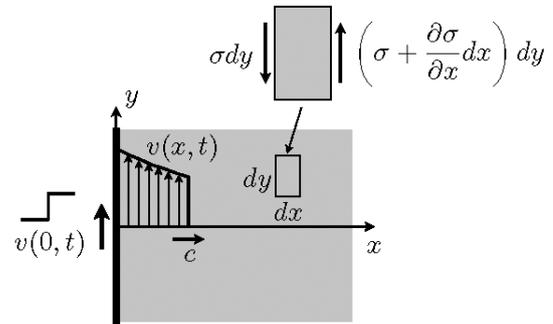


図 1 粘弾性流体における Stokes の第 1 問題

2.1 一次元の波動伝播

図 1 のように、 $x > 0$ の半無限領域で $x = 0$ の平面内にある平板の運動によって発生した x 軸方向に伝播する波について考える。流体の密度を ρ 、流速を $v(x,t)$ 、せん断応力を $\sigma(x,t)$ とすると、流体要素の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1)$$

流速とひずみ速度の関係は、

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Maxwell 流体の応力とひずみ速度の関係を表した構成方程式は、

$$\tau \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \sigma \quad (3)$$

と書ける。ここで、 η は定常粘度、 $\tau = \eta/G$ は緩和時間、 G は剛性率である。これらの式を組み合わせると σ を消去すると、 v についての以下の偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

式 (2) を用いれば、せん断ひずみ速度、または渦度に関する式 (4) と同じ形の式を得ることもできる。また、せん断応力 σ についても、式 (4) と同じ形式の式を得る。ただし、

境界で与えるべき条件の形はそれぞれ異なる。式 (4) は波動を表す電信方程式で、左辺第 2 項は散逸の効果を表す。

ここで、式 (4) の電信方程式が表す波動現象について整理しておく。式 (4) で $c^2 = G/\rho$ とおき、解を $v(x, t) = f(x, t) \exp(-t/2\tau)$ の形に仮定すると、 f についての以下の方程式が得られる⁵⁾。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau} \right)^2 f \right\} \quad (5)$$

f の代表的な振動数を ω とすれば $\partial^2 f / \partial t^2 \sim \omega^2 f$ であるから⁶⁾,

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} \quad (6)$$

のときは $(1/\tau)^2$ の項を無視することができて、式 (5) は f についての波動方程式となる。このとき、 x の正の方向に進む波の場合は $f(x, t) = f(x - ct)$ となるので、

$$v(x, t) = f(x - ct) \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \quad (7)$$

となる。すなわち、式 (6) の条件を満たす場合には、速度の波は歪むことなく散逸により減衰しながら速さ $c = \sqrt{G/\rho}$ で進行し、波の大きさが $1/e$ に減少するまでの減衰時間は 2τ となる。

一方、式 (6) の条件を満たさない場合には式 (4) の電信方程式は分散性を示し、伝播の際に波形の歪みを伴う。 $v = v_0 e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - kx)}$ とおいて式 (4) に代入して整理すると、

$$\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{1 + \left(\frac{1}{2c\tau k}\right)^2} \quad (8)$$

の分散関係式を得る。ここで、 $k = 2\pi/\lambda$ は波数である。位相速度 $c_p = \omega/k$ は、

$$\begin{aligned} \frac{c_p}{c} &= \sqrt{2\omega\tau \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} - 2(\omega\tau)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} + \omega\tau}} \end{aligned} \quad (9)$$

のように表せて、式 (6) の条件を満たすときには $c_p = c$ となり、前述の結果と一致する。このように、Maxwell 流体中のせん断波は分散性の波であり、音波が分散性を持たない点とは異なる。

図 1 のように、板面の速度 v が時刻 $t = 0$ で 0 から v_0 にステップ的に変化する境界条件のもとで式 (4) を解く問題は、Maxwell 流体における Stokes の第 1 問題に相当し、次のラプラス変換を用いて求めた解⁷⁾ が知られている。

$$\begin{aligned} \frac{v(x, t)}{v_0} &= H\left(t - \frac{x}{c}\right) \left[e^{-\frac{x}{2c\tau}} + \frac{x}{2c\tau} \int_{\frac{x}{c}}^t \frac{e^{-\frac{t'}{2\tau}}}{\sqrt{t'^2 - \frac{x^2}{c^2}}} dt' \right. \\ &\quad \left. \cdot I_1\left(\frac{1}{2\tau} \sqrt{t'^2 - \frac{x^2}{c^2}}\right) dt' \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 H はヘヴィサイド関数、 I_1 は 1 次の第 1 種変形ベッセル関数である。式 (10) は、境界で与えられた速度の不連続が速度 c で伝播していくようすを示している。波頭 $t = x/c$ では、波面を横切つての流速の不連続は、

$$\begin{aligned} \left[\frac{v}{v_0} \right]_+^- &= \frac{1}{v_0} \left\{ v\left(x, t^+ - \frac{x}{c}\right) - v\left(x, t^- - \frac{x}{c}\right) \right\} \\ &= e^{-\frac{x}{2c\tau}} \end{aligned} \quad (11)$$

のように表せ、波の伝播距離 x とともに指数関数的に減衰する。

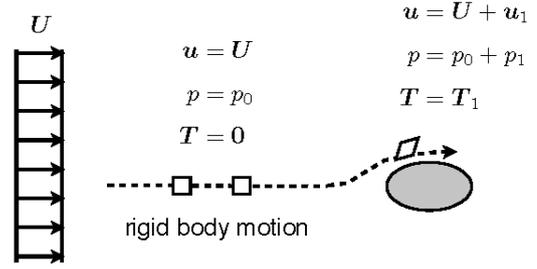


図 2 粘弾性流体の一様流の中におかれた物体まわりの流れ

2.2 渦度の波の線形理論

Maxwell 流体の流れの支配方程式は、以下の運動量の式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{T} \quad (12)$$

非圧縮の条件

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (13)$$

構成方程式

$$\frac{1}{\tau} \mathbf{T} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (\nabla \mathbf{u})^T = G \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (14)$$

である。ここで、 \mathbf{T} は偏差応力、 \mathbf{u} は流速、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 τ は流体の緩和時間、 $G = \eta/\tau$ は剛性率である。全体の応力テンソルは、 $-p\mathbf{I} + \mathbf{T}$ で与えられる。また、 $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ 、 $(\text{div } \mathbf{T})_i = \partial T_{ji} / \partial x_j$ である。式 (14) の Maxwell 流体の構成方程式は、緩和時間 $\tau = 0$ とすればニュートン流体の構成方程式に帰着する。

図 2 のような一様流の中におかれた物体による擾乱を考える。一様流の速度を \mathbf{U} とする。一様流中では、流体粒子は剛体運動をしており、静止流体の場合と同様、流体要素の変形に関する偏差応力 \mathbf{T} はゼロである。物体によって一様流がわずかに乱されて、圧力と偏差応力もこれに対応して次式のようにわずかに変化するものとする。

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}_1 \quad (15)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (16)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \quad (17)$$

これらの式を、式 (12) から式 (14) に代入し、微小な \mathbf{u}_1 および \mathbf{T}_1 の 2 次以上の項を省略して線形近似を行うと、1 次の微小量に対する以下の式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \frac{1}{\rho} \text{div } \mathbf{T}_1 \quad (18)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_1 = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{\tau} \mathbf{T}_1 + \frac{\partial \mathbf{T}_1}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{T}_1 = G \left[\nabla \mathbf{u}_1 + (\nabla \mathbf{u}_1)^T \right] \quad (20)$$

ここで、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \quad (21)$$

と書くことにして、式 (18) の回転をとると、

$$\rho \frac{D\boldsymbol{\zeta}}{Dt} = \text{rot div } \mathbf{T}_1 \quad (22)$$

また、式 (20) と式 (19) より、

$$\frac{D}{Dt} \operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{T}_1 + \frac{1}{\tau} \operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{T}_1 = G \nabla^2 \zeta \quad (23)$$

ここで、 $\zeta = \operatorname{rot} \mathbf{u}_1 = \operatorname{rot} (\mathbf{U} + \mathbf{u}_1) = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ は渦度ベクトルである。式 (22), 式 (23) より、

$$\frac{D^2 \zeta}{Dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \zeta \quad (24)$$

を得る。式 (24) は、速度 \mathbf{U} の一様流中における渦度の波の伝播を表す線形理論による式で、一様流に相対的な渦度の伝播速度は $c = \sqrt{G/\rho}$ である⁴⁾。また、 $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ とすれば、 $D/Dt = \partial/\partial t$ となり、電信方程式に帰着する。

2.3 マッハコーン

x 軸方向の一様流 $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$ を考えると、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \quad (25)$$

と表せる。このとき、式 (24) は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \zeta + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta = c^2 \nabla^2 \zeta \quad (26)$$

と書ける。さらに、定常流の場合に式 (26) は、

$$U^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{U}{\tau} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = c^2 \nabla^2 \zeta \quad (27)$$

のように表せる。これは、粘弾性マッハ数

$$M = \frac{U}{c}, \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (28)$$

を用いて、

$$(M^2 - 1) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) = -\frac{M}{c\tau} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (29)$$

のように書くことができ、この渦度の式は、 $M > 1$ のときは双曲型となり、 $M < 1$ のときは楕円型となる⁴⁾。式 (29) の左辺は、渦度 ζ を擾乱ポテンシャル ϕ に置き換えれば、よく知られた気体力学の微小擾乱の理論の式と同じ形になる。式 (29) の右辺はゼロにはならないが、線形の式である。式 (26) は、 $U = 0$ のときには、式 (4) と同様の以下の電信方程式

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = c^2 \nabla^2 \zeta \quad (30)$$

に帰着するので、1次元の波の議論のように、式 (29) の右辺の1階微分の項は、渦度の波の減衰と分散性に関係している。 $M > 1$ のときの式 (29) の特性曲面は、

$$(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{M^2 - 1} \quad (31)$$

の円錐群となる⁴⁾。

波源から発生したせん断波は、三次元空間では球面状に速度 c で広がる。せん断波による流体粒子の運動方向は、遠方場では、波源から観測点への方向ベクトルに垂直となることが知られている⁸⁾。したがって、移動する波源から発生したせん断波の包絡面であるマッハコーンは、図3のようなせん断層になっていると考えられる。

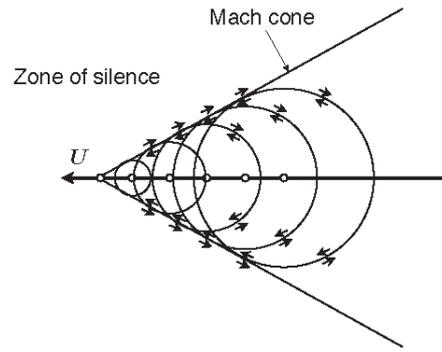


図3 粘弾性流体中を動く波源からのせん断波の伝播

3. 実験装置および方法

3.1 実験流体

界面活性剤 CTAB (臭化セチルトリメチルアンモニウム) と対イオンとしてサリチル酸ナトリウム (NaSal) を脱イオン水に溶解して、ひも状ミセル水溶液を作成した。ひも状ミセル水溶液は、ミセルの絡み合いによる強い粘弾性特性を示す。CTAB のモル濃度は 3 mM と 5 mM の二種類を使用し、対イオンのモル比は 1 とした。溶液には、可視化のためのトレーサ粒子として、蛍光レッドの水性アクリル絵具を溶液中に混入した。溶液は作成後、室温で 24 時間以上静置した。

CTAB/NaSal 水溶液の線形粘弾性特性は、単一緩和時間を持つ Maxwell モデルでよく記述できることが知られている⁹⁾。マッハコーン形成に関わる現象を支配する重要なパラメータがせん断波の伝播速度であることから、レオメータを用いて剛性率 G または定常粘度 η と緩和時間 τ を測定して溶液中のせん断波の伝播速度 $c = \sqrt{G/\rho} = \sqrt{\eta/\rho\tau}$ を算出する代わりに、一次元の波動伝播のようすを観測して直接伝播速度 c を求めた。

3.2 PIV 計測

PIV 計測の実験装置の概略を図 4 および図 5 に示す。実験流体を透明なアクリル製容器 (底面 100 mm×100 mm, 高さ 350 mm) に満たし、室温 $25 \pm 1^\circ\text{C}$ で実験を行った。照明には Nd:YAG レーザ (532nm, 30mJ/pulse) のシート光 (厚さ 0.8mm) を使い、ミセル水溶液の散乱光を除去するため、シャープカットフィルター (O56) を用いてトレーサ粒子の蛍光のみを撮影した。撮影は、CCD カメラ (Vieworks VA-4M, 2336×1752 pixel) を鉛直方向に 2 台並べて行った。撮影した画像はパソコンに取り込み、相互相関法 PIV を用いて速度場を算出し、得られた速度場から渦度分布を計算した。

3.3 伝播速度の測定

図 4 のように、容器内の流体中に鉛直に設置した金属製の薄板 (80 mm×400 mm, 厚さ 0.3 mm) を電動スライダ (オリエンタルモータ, ELS2) を用いて上方に突然動かすことによってせん断波を発生させた。平板は、静止状態から 10 mm/s の速度までステップ駆動させ、容器内の対流の影響を抑えるため、1 秒後に運動を停止した。なお、3 mM の場合のみ、対流の影響を避けるため、0.5 秒後に運動を停止している。発生したせん断波は平板に垂直な向きに伝播する。容器中央の平板に垂直な面内にレーザのシート光を照射して、断面内の流れを可視化した。せん断波に伴う流れ場を PIV によって算出し、せん断波の伝播速度 c は渦度のピーク位置をフレーム間で追跡することで決定した。

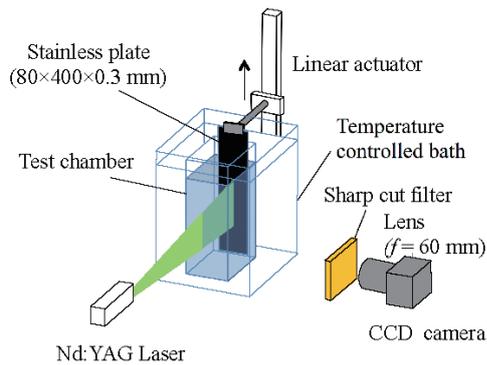


図4 伝播速度測定装置

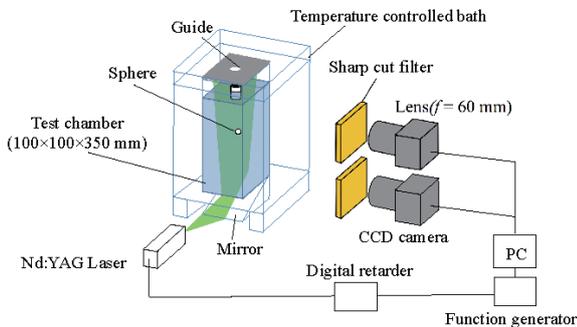


図5 沈降球まわりの流速計測装置

3.4 沈降球まわりの流れの測定

供試球として、ポリスチレン球（直径 $d = 6.36$ mm, 密度 $\rho_s = 1.05 \times 10^3$ kg/m³）および POM 球（直径 $d = 6.36$ mm, 密度 $\rho_s = 1.39 \times 10^3$ kg/m³）を用いた。

球は、図5のような、自由表面の中心に設置したガイドパイプから放出した。ガイドパイプの下端は液面下 12 mm の位置にあり、球は重力により初速度ゼロで落下を開始し、流体中を沈降する。球中心をとる断面内にレーザシートを照射して、断面内の球まわりの流れ場を PIV によって算出した。

ガイドパイプ下端を原点として鉛直下向きに y 軸をとり、球の沈降速度 $U(t_i)$ を、次式の中心差分¹⁰⁾によって求めた。

$$U(t_i) = \frac{2y_{i+2} + y_{i+1} - y_{i-1} - 2y_{i-2}}{10\Delta t} \quad (32)$$

ここで、 Δt は撮影時間間隔、 $y_i = y(t_i)$ は二値化した画像から求めた時刻 t_i における球の図心の y 座標である。式 (32) は、5 時刻の球中心の座標を二次関数で最小二乗近似した曲線の、中心時刻 t_i での接線の傾きを表している¹¹⁾。粘弾性マッハ数は、球沈降速度 U とせん断波の伝播速度 c の比によって、 $M = U/c$ と定義される。

4. 結果および考察

4.1 平面波の伝播速度

5 mM の溶液中で平板から発生したせん断波の瞬時渦度分布を図6に示す。赤色は平板の運動開始時に発生した反時計回りの渦度で、青色は運動停止時に発生した時計回りの渦度である。渦度のスケールは、渦度 ζ を容器幅 L と平板の速度 U によって、 $\zeta^* = (L/U)\zeta$ のように無次元化して示している。右側の移動平板から発生した渦度の波は、平

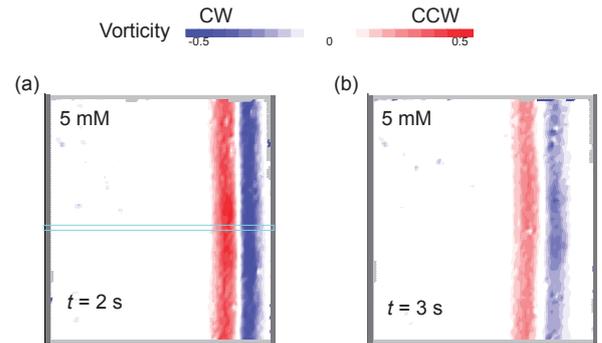


図6 平板から発生した平面波の瞬時渦度分布 (5 mM, 平板が運動を開始した時刻を $t = 0$ とする) (a) $t = 2$ s (b) $t = 3$ s

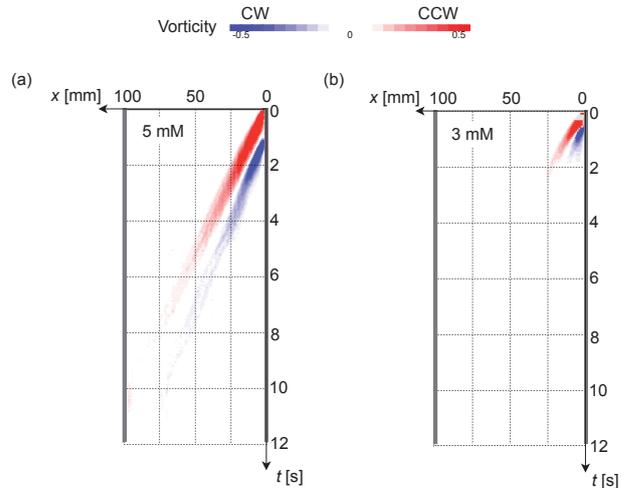


図7 平面波の伝播の時空間画像 (図6 (a) の水色の枠で囲った領域をフレーム番号順に並べて作成) (a) 5 mM (1秒後に板の運動を停止) (b) 3 mM (0.5秒後に板の運動を停止)

面波の状態を保ちながら左向きに伝播し、向かい合う壁面に到達する前に減衰して反射波は見られなかった。

図6 (a) の水色の枠で囲った領域をフレーム番号順に縦に並べて作成した時空間画像を図7に示す。渦度のピーク位置が一定速度で伝播しているのがわかる。また、3 mM の溶液では減衰が顕著である。図7の渦度ピーク位置の軌跡から測定したせん断波の伝播速度は、3 mM の溶液では $c = 8.4$ mm/s, 5 mM の溶液では $c = 11.5$ mm/s となった。

4.2 球沈降速度の履歴

図8は、3 mM の溶液中におけるポリスチレン球の沈降速度の履歴を球の位置に対して表したものである。横軸は、ガイドパイプ下端からの沈降距離 y を球直径 d で無次元化している。また、この溶液のせん断速度の大きさを図中に示している。

ガイドパイプ下端で球が沈降を開始した直後に速度のオーバーシュートが見られ、その後、球はせん断波の伝播速度よりも大きい速度を維持しながら沈降していく。球の沈降速度には変動が見られるが、図中の点Aと点Bではほぼ一定の沈降速度が続いており、定常状態とみなせる。点Aおよび点Bにおける粘弾性マッハ数は、それぞれ $M = 1.4$, $M = 1.5$ である。

4.3 マッハコーンの構造

図8の点Bにおける球まわりの速度場と渦度場を図9に示す。図9 (a) では、速度ベクトルの向きを色相で表している。図9 (b) の渦度場の等高線において、渦度の正負は赤

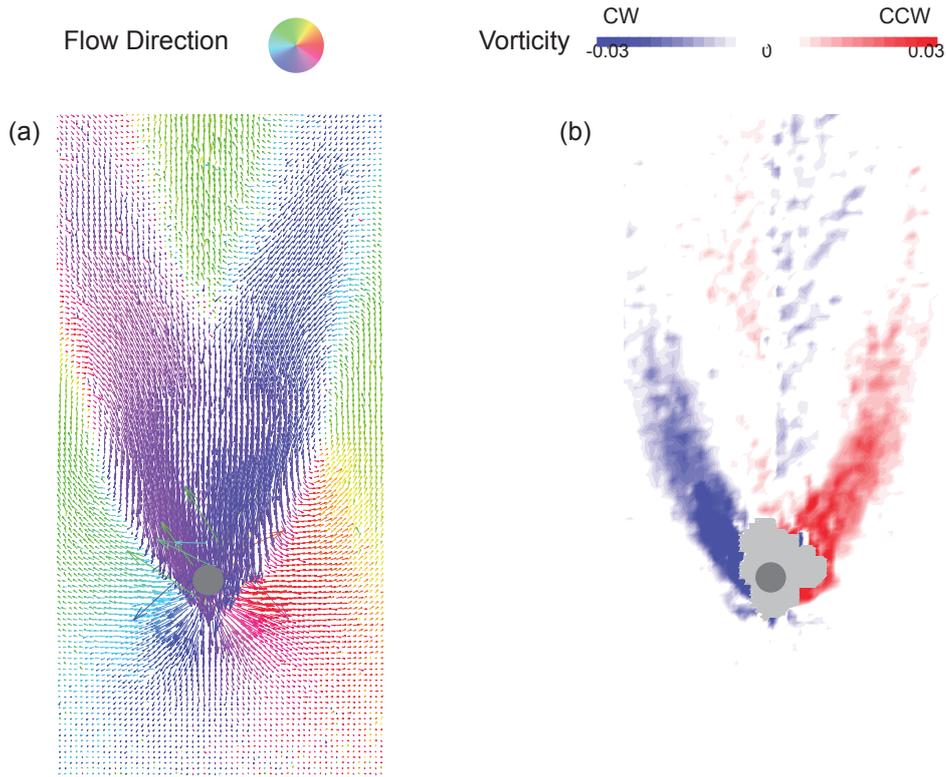


図9 沈降球まわりのマッハコーン ($M = 1.5$, ポリスチレン球, 3 mM, 図8のBに対応) (a) 速度ベクトル場 (流れの方向を色相で表示) (b) 渦度場 (赤: 反時計回り, 青: 時計回り)

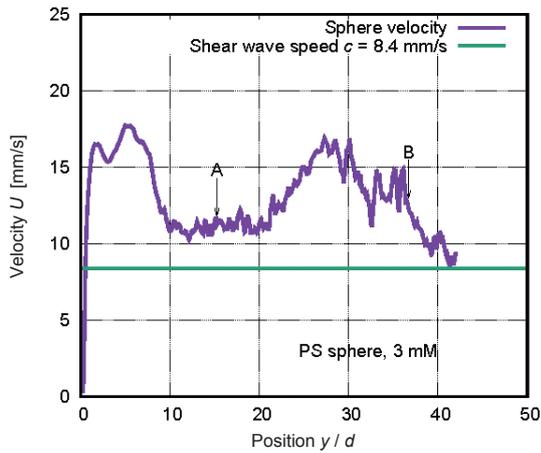


図8 球沈降速度の履歴 (ポリスチレン球, 3 mM)

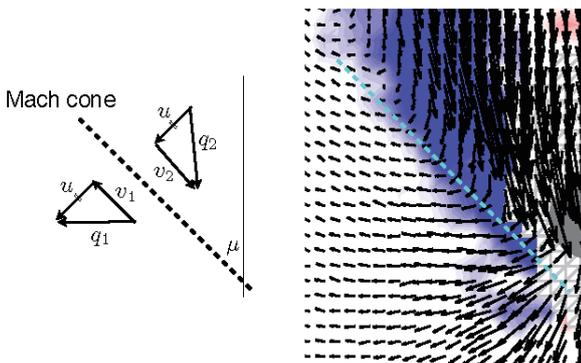


図10 波面における速度の変化 (速度ベクトル場と渦度場を重ねて表示)

(反時計回り)と青(時計回り)の色に対応し、渦度の大きさを色の濃さで表している。また渦度のスケールは、渦度 ζ を球直径 d と球沈降速度 U によって、 $\zeta^* = (d/U)\zeta$ のように無次元化して示している。図9では、球の位置に頂点をもつマッハコーンが形成されているようすがはっきりわかり、速度場よりも渦度場の分布において、その形状をより容易に確認できる。速度場とは対照的に、渦度場では、マッハコーンの前方は乱されていない領域 (zone of silence) となっているのがわかる。すなわち、球表面で発生した渦度はマッハコーンの外側には伝わっていない。球の下方に球の沈降によって押しつけられた流れの領域が見られるが、ここでは渦度自体は乱されていないので、渦なしの流れと考えられる。渦度の波は音波とは異なり分散性の波であるが、本研究のPIVの空間解像度では、分散の影響は明確には観察されていない。

マッハコーンの波面を境にして、図10に示すような速度の不連続が見られた。図10のように、流れの速さを q 、波面に垂直な速度成分を u 、平行な成分を v とし、波面上流側の状態を添字1、下流側の状態を添字2で表す。波面上流側では左に向いた速さ q_1 の流れが見られ、波面の下流側では下に向いた速さ q_2 の流れが見られる。このような流れが波面を境にして一様に続いているとすれば、波面に垂直な速度成分は連続の式より不変に保たれるから、 $u_1 = u_2 = u$ である。このとき、波面に平行な速度成分 v_1, v_2 は、せん断流れとなっている。すなわち波面における流体粒子は、球によって誘起された渦度と同じ向きにせん断を受けている。波面における速度ベクトルの向きの不連続は、図9(a)において色の不連続面として確認できる。

図9の渦度場には、球の位置に頂点をもつ先頭のマッハコーンの背後に、渦度の符号が反対の頂角がほぼ等しい弱いマッハコーンが形成されているのを確認できる。速度場と渦度場のようなすから、先頭のマッハコーンでは、流体粒子は落下する球によって誘起された渦度と同じ向きにせん

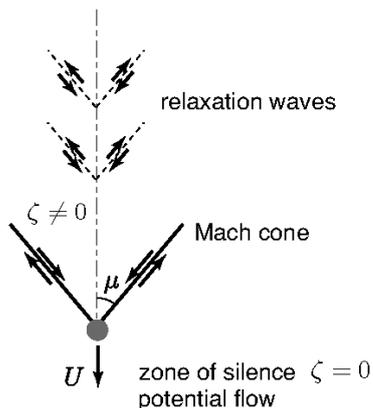


図 11 球まわりのマッハコーンの構造

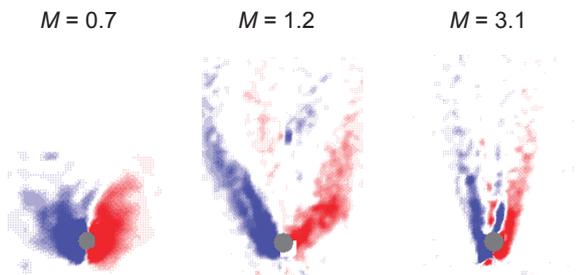


図 12 球まわりの渦度分布の粘弾性マッハ数による変化

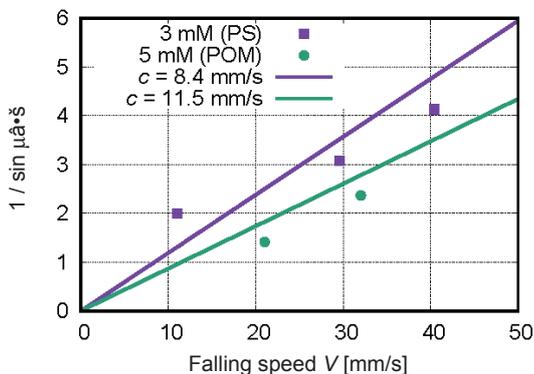


図 13 マッハコーンの半頂角と沈降速度の関係

断を受けており、背後のマッハコーンでは、流体粒子はそれと逆向きのせん断を受けていることがわかる。渦度の符号が反対の背後の弱いマッハコーンは、最初のマッハコーンで受けたせん断変形の緩和によって引き起こされると考えられる。先頭のマッハコーンと背後のマッハコーンの構造を模式的に図 11 に示す。

4.4 マッハ角

図 12 に、さまざまなマッハ数で観察された球まわりの渦度分布のようすを示す。M = 0.7 の流れでは、球表面で発生した渦度が球のまわりに集中しており、渦度の波の包絡線としてのマッハコーンの形成は見られない。球の前後では、波源の移動に伴う渦度分布の非対称性がわずかに見られる。M = 1.2 と M = 3.1 の流れでは、M = 0.7 の場合とは渦度の分布のようすが一変し、明瞭なマッハコーンを観察することができ、マッハ数が高いほどマッハコーンの半頂角 μ は小さくなっている。

マッハコーンの半頂角すなわちマッハ角 μ は粘弾性マッ

ハ数 M によって決まり、

$$M = \frac{1}{\sin \mu} \tag{33}$$

の関係がある。図 13 は、3 mM の溶液中にポリスチレン球を沈降させた場合と、5 mM の溶液中に POM 球を沈降させた場合に観測された球沈降速度 U と 1/sin μ の関係である。希薄溶液中では過去に落下した球の履歴が沈降速度に影響するため¹²⁾、同じ種類の溶液でも、沈降回数によって図 13 に示したように沈降速度の異なる結果が得られる。式 (33) の関係を満足していれば、傾き 1/c の原点をとる直線となる。それぞれの溶液のせん断波の伝播速度を表す直線と比べると、実測値とおおよそ一致が見られたが、ばらつきがやや大きい。波が伝播するにつれて減衰することが、せん断波の伝播速度やマッハ角の計測誤差につながったためと考えられる。

5. 結言

粘弾性流体中で形成されるマッハコーンを、PIV 計測を用いて実験的に調べた。ひも状ミセル水溶液中をせん断波の伝播速度より大きな速度で沈降する球によって、マッハコーンが形成された。マッハコーンは渦度場において見られ、複数のマッハコーンからなる構造が観察された。先頭のマッハコーンでは、流体粒子は球によって誘起される向きのせん断を受け、背後の弱いマッハコーンでは、逆向きのせん断を伴って緩和する。ここで得られた結果は、粘弾性流体の複雑な流動現象を明らかにしていく上での、粘弾性マッハ数の重要性を示唆している。

今後は、マッハコーン形成による抗力への影響を調べる計画である。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP15K05784 の助成を受けたものです。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Boger, D. V., Walters, K., Rheological phenomena in focus, (1993).
- 2) Preziosi, L, Joseph, D. D., Stokes' first problem for viscoelastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **25** (1987), pp.239-259.
- 3) Gladden, J. R., Gamble, A. M., Skelton, C. E., Mobley, J., Shear waves in viscoelastic wormlike micellar fluids over a broad concentration range, *J. Acoust. Soc. Am.*, **131** (2012), pp.2063-2067.
- 4) Joseph, D. D., Fluid dynamics of viscoelastic liquids, Springer-Verlag (1990), pp.164-208.
- 5) Coulson, C. A., Jeffrey, A., Waves: A mathematical approach to the common types of wave motion, Longman (1977), pp.15-16.
- 6) 徳岡辰雄, 工学基礎 波動論, サイエンス社 (1984), pp.10-11.
- 7) Narain, A., Joseph, D. D., Linearized dynamics for step jumps of velocity and displacement of shearing flows of a simple fluid, *Rheol. Acta*, **21** (1982), pp.228-250.
- 8) Aki, K., Richards, P. G., Quantitative seismology: theory and methods, Vol. 1, W. H. Freeman and Company (1980), pp.74-75.
- 9) Shikata, T., Hirata, H., Kotaka, T., Micelle formation of detergent molecules in aqueous media: viscoelastic properties of aqueous cetyltrimethylammonium bromide solutions, *Langmuir*, **3** (1987), pp.1081-1086.
- 10) Becker, L. E., McKinley, G. H., Rasmussen, H. K., Hassager, O., The unsteady motion of a sphere in a viscoelastic fluid, *J. Rheol.*, **38** (1994), 377-403.
- 11) Whitaker, S., Pigford, R. L., An Approach to Numerical Differentiation of Experimental Data, *Ind. Eng. Chem.*, **52** (1960), 185-187.
- 12) 齊藤友剛, 長澤拓, 三神史彦, 西川進榮, 界面活性剤ミセル水溶液中での連続沈降球の速度変化, 日本機械学会論文集 (B 編), **75** (2009), pp.913-921.