

鍛造および押出加工に関する塑性力学的研究

第 1 報 平面ひずみ問題の解析

工 藤 英 明

概 要

平面ひずみ鍛造および押出加工における加工所要圧力および変形を解析するために極限定理における上界を低下させる方法を採用し、少い時間で十分な精度のある結果を得る手法を考案した。この手法を用い、非硬化性材料の圧縮、盛上、作頭、押込、押出、穿孔押出鍛造、組合せ押出および圧印加工等を解析して新しい事実を見出すとともにそのうちすでに厳密解の知られているものについては比較を行いよい一致のあることがわかった。

緒 論

鍛造および押出加工は、金属材料素材を工具により直接加圧変形させて所望形状の製品を作る方法であり、圧延加工、引抜加工および鋳金成形加工と並んで金属塑性加工の一分野をなす。本研究においては鍛造および押出加工技術の進歩のため、加工所要圧力および材料の変形と欠陥生成を材料力学的見地より解析予測する方法を発展させるとともに、各種加工法をこの統一的解析法で取扱うことによってそれらの特性を見出そうとするものである。

鍛造および押出過程の研究は古くから数が多い[1]。まず解析的研究について見るならば、これら古典的研究は今日の塑性力学上の見地からすると不適當な仮定を用いていたり、実験によってはじめて決まる定数を含んでいるものが大部分である。したがって、これらの結果は断片的、部分的であり、一般的、普遍的な意味は乏しいものにならざるを得なかった。しかも解析可能な問題の種類は限られていた。これらの解析方法のうち、金属を加工硬化しない、剛塑性体と仮定して平面ひずみ状態に対する特性曲線の性質を利用するいわゆる二り線場の理論は、最近 10 年間に急速に発展し数学的厳密さを与えられて、加工問題に適用するための一般的方法も確立されるに至った [2] [3]。そしてすでに幾つかの比較的簡単な平面ひずみ鍛造および押出問題はこの方法によって解かれ、実験によって検証されたばかりでなく、未知の諸知識が得られるようになった。そしてこの方法は一層複雑な問題の解明に進みつつある。その上、本法による解析結果を、実際の加工硬化する材料に対して適用する補正方法も、引抜、押出のような定常過程に対しては考案され [4]、実験的にも確められた [5] [6] [7] ので、本法の利用価値は一層高くなった。

しかしながらこの方法は、一般に数値積分を含み、試探法をとともなうことが多いために、大きな手間と熟練を要するので、新しい問題やとくに複雑な加工問題への応用に困難がある。その上、実際加工において一般に見られる軸対称問題あるいは他の三次元問題に対して

は、現在のところ人為的な仮定を設けることなく本法を用いることはできないようである [8] [9].

最近、これらの困難を解決するための幾つかの方法が考え出された。一つは上述の数値積分の手間を省くために考案された迂り線場の機械的作図器である [10]。また連続的な応力の場を、応力の不連続線によって分けられたそれぞれの内部では一様な幾つかの応力の場に置きかえる近似方法もこの一つである [11]。さらに後で述べるように、いわゆる極限定理 [12] の応用によって加工圧力の上界、下界を定める方法があり、これは平面ひずみ加工問題ばかりでなく、三次元問題にも応用され成功した例が、幾つか報告されている。

このような理由で、本研究においても解析方法として極限定理を応用することにした。この場合加工圧力の上界は幾何学的考察からだけで求まるので比較的簡単である。このことは、特に鍛造および押出加工のように、素材表面の多くの部分が剛体工具で拘束される、言いかえると主として速度の境界条件の与えられる加工問題においてなおさらそうである。ところが下界を求めることは応力の釣合の考察を必要とし、上述のような特性をもつ鍛造、押出問題においては、有効な下界を得ることは厄介である。したがって著者は下界を求めることはせず、その代りに、正解になるべく近いような低い加工圧力上界を得る方法を調べた*。極限定理の方法は一般には材料内の変形に対する解答は与えないが、圧力の正解に十分近い上界を与えるような速度場は、正解による速度場にもかなり近いと考えられるので、本研究においては圧力上界とともに、同じ方法で材料の変形についても考察した。

この解析法によるとしてもやはり平面ひずみ問題が一番取扱いやすいため、本報においては平面ひずみ加工問題を取上げこれを簡単に解析する方法を検討し、これにもとずいて種々の具体問題を解いた。これらは、材料が加工硬化せずかつ工具と材料の接触面で摩擦がまったく存在しないかまたは両者が完全に附着するような条件の下における圧縮、作頭、盛上、押込、押出、穿孔、押出鍛造、特殊押出、圧印加工等を含んでいる。そのうち幾つかのものはすでに迂り線場理論による正解ないし完全解が知られているので比較を行い、解析方法の精度の検討を行った。すでに知られているように平面ひずみ問題は、実際加工に多く見られる軸対称その他三次元問題と一定の相似関係があるので、平面ひずみ問題として解いた結果は、そのままでも実際問題に利用する価値があろう。

軸対称問題の解析は第3報において幾つかの圧縮、押出、穿孔および押出鍛造問題に対して試みた。しかしながら、ここに用いた手法は今のところ平面ひずみ問題に対するものほど一般化するに至ってないため手間もいくらか余計にかかり精度も落ちる。第3報においてはまた工具と素材間に Coulomb 摩擦が働く場合、および材料が加工硬化する場合に対する加工圧力の近似計算法についても考察を行ってある。

鍛造および押出加工についての今日までの実験的研究も、個々の具体的問題への知識を与えるものは数多いが、解析的方法の正否を確かめるような、すなわち普遍化された知識をえられるようなものは少い。これは、正しい解析法が確立されたのが比較的最近である上、この解析の適用がこれまでのところ主に平面ひずみ問題に対してであるのに、実用目的の点およ

* W. Johnson も著者等にあてた手紙 (1958年5月) の中でこのやり方を使って複雑な問題を解こうとしていると述べている。

び実験技術上の点から実験は軸対称問題が取上げられる傾向にあったためであろう。

本研究においては解析の対象とした種々の平面ひずみ加工問題の代表的な例について第 2 報で鉛を素材として実験を行い、変形模様を調べて解析結果との比較検討を行った。しかしこの際使用した装置の関係上、加工圧力についての正確なデータを得ることはできなかった。軸対称加工についての実験は第 4 報において、まずアルミニウム、銅等を使用し、圧縮、押出、穿孔および押出鍛造につき、加工圧力を測定して解析結果との比較を行った。これらの問題については鉛による変形模様も調べた。さらに今までに系統的に取上げられていない押込加工、押出口が二つの軸対称押出および押出鍛造、完全密閉型圧印加工について上と同じ材料を用いて加工圧力、変形、欠陥を観察した。これらの問題は軸対称問題としての解析は厄介なため行わず、対応する平面ひずみ問題の解析結果を利用して実験結果を解釈した。同様に解析で取扱えなかった工具に働く局部的圧力、リング状コンテナに加わる内圧についての実験も二三試みた。なお以上、本研究においては取上げた問題が広汎にわたったので、個々の問題について精密な知識を得ることはできなかったが、提示した解析法の一般的有効性を確かめ、また統一した解析方法および共通材料による実験によって、各加工法の一般的特性、加工法相互の関連について明らかにするよう努力した。

記 号

A : 表面積または断面積	R_t : 全断面減少比
a : 単位矩形変形領域の縦横比	r : 粗い面 ($f=1/2$) を表わす記号
B : 素材巾	S : 速度不連続面面積
C : 材料と型面の未接触部分長さまたは型の凹み深さ	s : 滑らかな面 ($f=0$) を表わす記号
\dot{E} : 内部エネルギー消費率 (速度)	T : 素材高さ、長さまたは厚さ
e : 内部エネルギー消費率係数 $=\dot{E}/2k \cdot (\text{加圧面面積}) \cdot (\text{加圧速度})$	\dot{U} : 材料の押出口よりの流出速度
F : 材料内変形領域巾	\dot{V} : 加工速度
f : 速度不連続面上の迂り抵抗係数 $= (\text{迂り抵抗})/2k$	\dot{u}, \dot{v} : 材料内点要素のそれぞれ水平および垂直方向流れ速度
G : 材料内変形領域深さ	\dot{W} : 工具巾
H : 突起高さまたは凹み深さ	$\dot{W}_c, \dot{W}_e, \dot{W}_p$: それぞれコンテナ、押出ダイス口、穿孔ポンチの中
k : 材料の剪断降伏応力	$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}_{xy}$: 流れの面内の x 軸 (水平方向) および y 軸 (垂直方向) に関する三ひずみ速度成分
L : 押出口より押出された材料長さ	$\dot{\bar{\epsilon}}$: 相当ひずみ速度
l : 前進工具ストローク	$\bar{\sigma}$: 相当応力
\bar{p} : 加工平均圧力またはその上界	
R : 押出、上昇穿孔加工等における断面減少比	

1・1 上界解のための可容速度場の研究

1・1・1 加工圧力および変形解析法の基礎

解析を可能にするために差当って素材々料は加工硬化しない等方性の剛塑性体であると仮

定する. さらにこのような材料に対し降伏条件は **Tresca** の条件

$$|\tau_{\max}| = \text{一定} \quad (1.1.1)$$

または **Mises** の降伏条件

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)\}} = \text{一定} \quad (1.1.2)$$

が成立つものとする. ここに τ_{\max} は材料内の絶対値最大の剪断応力, $\bar{\sigma}$ はいわゆる相当応力, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ は直角座標軸 x, y, z にかんする垂直および剪断応力成分を意味する. したがって, もしこの材料の単軸引張ないし圧縮降伏応力または変形抵抗を Y とすれば, 同じ材料の平面ひずみ状態での引張ないし圧縮降伏応力 $2k$ との間に

$$\text{Tresca の降伏条件のさい} \quad 2k = Y, \quad (1.1.3)$$

$$\text{Mises の降伏条件のさい} \quad 2k = 2Y/\sqrt{3} \quad (1.1.4)$$

なる関係があることは既知のとおりである. ここに k はまた材料の単純剪断降伏応力である.

一方, **Mises** の降伏条件に従う材料の塑性変形中の応力とひずみ速度成分との間には **Lévy-Mises** の法則

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \lambda(\sigma_x + p), & \dot{\epsilon}_y &= \lambda(\sigma_y + p), & \dot{\epsilon}_z &= \lambda(\sigma_z + p), \\ \dot{\gamma}_{yz} &= 2\lambda \tau_{yz}, & \dot{\gamma}_{zx} &= 2\lambda \tau_{zx}, & \dot{\gamma}_{xy} &= 2\lambda \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

が成立つものとする. ここにひずみ速度成分は材料内の点要素の速度成分を $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \partial \dot{u} / \partial x, & \dot{\epsilon}_y &= \partial \dot{v} / \partial y, & \dot{\epsilon}_z &= \partial \dot{w} / \partial z, \\ \dot{\gamma}_{yz} &= (\partial \dot{v} / \partial z) + (\partial \dot{w} / \partial y), & \dot{\gamma}_{zx} &= (\partial \dot{w} / \partial x) + (\partial \dot{u} / \partial z), \\ \dot{\gamma}_{xy} &= (\partial \dot{u} / \partial y) + (\partial \dot{v} / \partial x) \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

によって定義され, p はいわゆる平均水圧で

$$p = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3 \quad (1.1.7)$$

を表わす. $(\sigma_x + p), (\sigma_y + p), (\sigma_z + p)$ はまた偏差応力成分とも呼ばれる. また λ は正の比例常数である. (1.1.5) 式は体積一定の条件

$$\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0 \quad (1.1.8)$$

をも含んでいる.

Tresca の降伏条件と組合わされて物理的数学的矛盾を生じない応力-ひずみ速度関係で (1.1.5) 式に対応するような形のものについては省略するが, 以下の議論は両方の場合に対し適用できる.

極限定理を用いた加工問題の解析はほとんど初期流れを取扱っているが, この定理は条件次第では有限変形後にも適用できる [12, b)]. いまこの定理を本研究に応用しやすい形で表現すれば次のようになる.

1) 材料内に, 与えられた速度の境界条件および体積一定の条件 (1.1.8) 式と矛盾しないようないわゆる可容速度場を考えれば, その速度場におけるエネルギー消費率 (速度) は, 正解の速度場におけるエネルギー消費率より小さくない. ただしここで言うエネルギー消費率には材料と剛性工具の接触面におけるものも含み, 以後は内部エネルギー消費率と呼ぶことにす

る。消費されるエネルギーは外力で与えられるから加工面に垂直に前進する工具と材料の接触面積を A 、加圧速度を \dot{V} 、平均加圧力を \bar{p} とすれば、可容速度場における内部エネルギー消費率 \dot{E} を $\bar{p} \cdot A \cdot \dot{V}$ に等しいとして求めた \bar{p} は、正解による平均圧力の上界となる。

2) 材料内に、与えられた外力の境界条件、応力の釣合条件、および降伏条件に矛盾しないようないわゆる可容応力の場合を考えたとき、この場に釣合う加圧面圧力は完全解によるそれより大きくない。そこでこのような圧力は下界と呼ばれる。

すでに述べたように本研究では定理 1) のみを利用するから、次に内部エネルギー消費率を求める一般式を示す。

考えた可容速度場内の材料のひずみ速度およびその x, y, z に関する微係数が有限な領域内では、Lévy-Mises の応力-ひずみ速度関係 (1.1.5) 式に従う材料に対して単位体積当りの塑性変形仕事率は

$$\dot{e}_p = \bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\epsilon}} \quad (1.1.9)$$

で与えられる。ここに $\dot{\bar{\epsilon}}$ は相当ひずみ速度で

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz}^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx}^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^2} \quad (1.1.10)$$

によって定義される。材料が Mises の降伏条件 (1.1.2) 式に従い、また z 軸に垂直な平面ひずみ問題とすれば

$$\dot{e}_p = \sqrt{2} k \cdot \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^2}. \quad (1.1.11)$$

一方、Tresca の降伏条件に従う材料に対しては

$$\dot{e}_p = 2k \cdot |\dot{\epsilon}|_{\max} \quad (1.1.12)$$

なることが証明されている [13]。ここに $|\dot{\epsilon}|_{\max}$ は絶対値最大の垂直ひずみ速度である。(1.1.11) および (1.1.12) 式は、 $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = 0$ または $\dot{\gamma}_{xy} = 0$ の場合には同じ形となる。

考える速度場において接線速度が不連続となる面上における単位面積当りのエネルギー消費率は

$$\dot{e}_d = 2k \cdot f \cdot \dot{s} \quad (1.1.13)$$

で与えられる。ここに $2kf$ は面上の迂りに対する抵抗応力を表わし、 \dot{s} は相対迂り速度である。以後、 f を迂り抵抗係数と呼ぶことにする。速度の不連続面が材料内部にあるか、潤滑されない粗い工具との接触面上にあるときは、この面が剪断応力最大の面となるから $f = 1/2$ であり、不連続面が完全に潤滑されたなめらかな工具面と材料表面の境界であるならば $f = 0$ である。以下の議論においては f の値は 0 か 1/2 のいずれかに限る。

結局、剛体工具および材料を含めた集合体における全内部エネルギー消費率は、Lévy-Mises 材料に対し

$$\dot{E} = \sqrt{2} k \int_V \sqrt{\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xy}^2} \cdot dV + 2k \int_S f \cdot \dot{s} \cdot dS \quad (1.1.14)$$

Tresca の材料に対し

$$\dot{E} = 2k \int_V |\dot{\epsilon}|_{\max} \cdot dV + 2k \int_S f \cdot \dot{s} \cdot dS \quad (1.1.15)$$

なお以下において考察する速度場はすべて $\dot{\epsilon}_x = \dot{\epsilon}_y = 0$ か $\dot{\gamma}_{xy} = 0$ かあるいは上式の第1項の積分が無いものなので、両式は一致するためどちらの材料に対しても同じ上界式が得られる。

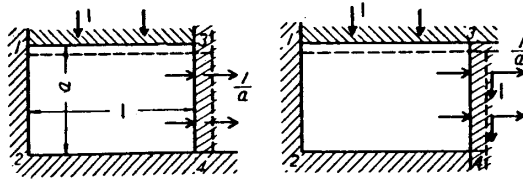
上のようにして得た \dot{E} から、加工圧力上界 \bar{p} と平面ひずみ圧縮降伏応力 $2k$ の比は

$$\bar{p}/(2k) = \dot{E}/(2k \cdot A \cdot \dot{V}) \quad (1.1.16)$$

で計算できる。以後この $\bar{p}/2k$ は圧力上界比と呼ぶことにする。

1.1.2 単位矩形変形領域における速度場と内部エネルギー消費率

加工問題への応用の便のために第1.1.1図のような巾1、高さaなる単位矩形変形領域という概念を導入しよう。この領域および本法の以下の議論においては、z軸（紙面に直角）



境界条件 (i) 境界条件 (ii)
第1.1.1図 単位矩形変形領域

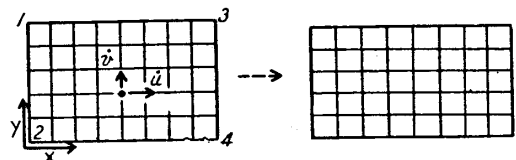
の厚さは常に1とする。この領域は左側面12および底面は静止する剛性物体と接し、上面13は一樣な速度1で垂直下方に押下げられ、右側面は右方に一樣にふくれ出すものとする。このふくれ出し速度は体積一定の条件によって $1/a$ に等しい。右側面34に接する外部剛性物体は矩形材料に押されて水平

方向へ外部からの抵抗を受けずに動くものとするが、これが単に水平方向にのみ動き得る場合と、矩形材料によって水平方向に押されるとともに外力によって垂直下方に1なる速度で押下げられる場合を考え、これらをそれぞれ境界条件 (i) および (ii) と名付ける。領域の左右側面上の迂り抵抗が少くとも一方は0なら、両者は同等になる。矩形材料1234の外周に接する剛性物体は工具であっても、また矩形材料と一体の材料の剛性部分であってもよい。

以下において、上のような条件を与えられた矩形領域内部および境界面におけるエネルギー消費率 \dot{E} を、上面13の面積、押下げ速度および $2k$ の積で割った量 $e = \dot{E}/(2k \cdot 1 \cdot 1)$ を内部エネルギー消費率係数と呼ぶことにする。この e は右側面34上での迂り抵抗係数 f_{34} が0であるか、0でなくても境界条件 (i) (第1.1.1図) ならば、13面における加圧力上界比 $\bar{p}/2k$ に等しくなる。またこのような条件においては、 e は矩形1234の右側面34を一樣に水平方向に押して上面13を外部抵抗なしに一樣に押上げる場合の面34上の加圧力上界比にも等しくなる。

1.1.2.1 一樣速度場

これは矩形領域1234内全体でひずみ速度が一樣な速度場であり、簡単なため古典的解析にしばしば用いられてきた。この場合、速度の不連続面は境界面上のみにある。いま第1.1.2図のように x, y 軸をとれば、材料要素の速度成分は



第1.1.2図 一樣速度場。矩形内格子線は材料面に画いた格子線を意味する

$$\dot{u} = \frac{1}{a}x, \quad \dot{v} = -\frac{1}{a}y \quad (1.1.17)$$

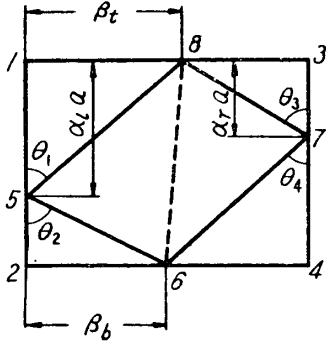
であるから (1.1.6) および (1.1.14) 式より、内部エネルギー消費率係数は

$$e = \frac{\dot{E}}{2k} = 1 + \frac{1}{2}(f_{12} + f_{34})\alpha + \frac{1}{2}(f_{13} + f_{24})\frac{1}{\alpha} \quad (1.1.18)$$

ここに f_{ij} は面 ij 上のり抵抗係数とし、各面上で一定であると仮定する。上式はまた既述の境界条件 (i) および (ii) に共通である (第 1.1.1 図)。

1.1.2.2 剛性三角形速度場

考える変形領域が何個かの剛性三角形領域より成り、与えられた外形の境界条件をそれらの相互のりによってのみ満すような形式の速度場である。この形式の内、幾つかのものはすでに圧力上界を求めるために利用されている。



第 1.1.3 図 6 個の三角形よりなる剛性三角速度場

いまこの速度場を一般的に考察するために、まず矩形領域 1234 が第 1.1.3 図のように 6 個の剛性三角形より成る場合を考えよう。ただし三角形 568 と 678 は一体をなしているものとする。領域内の速度の不連続線、すなわち各直角三角形の斜辺の傾斜角を図のような記号で表わせば、第 1.1.1 図で与えられた速度の境界条件を満すためには

$$\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_4 = \tan \theta_2 \cdot \tan \theta_3 \quad (1.1.19)$$

が必要条件である。これはまた第 1.1.3 図の別の記号を用いれば

$$\frac{\beta_t}{\alpha_i} \cdot \frac{1-\beta_b}{1-\alpha_r} = \frac{\beta_b}{\alpha_r} \cdot \frac{1-\beta_t}{1-\alpha_i} \quad (1.1.20)$$

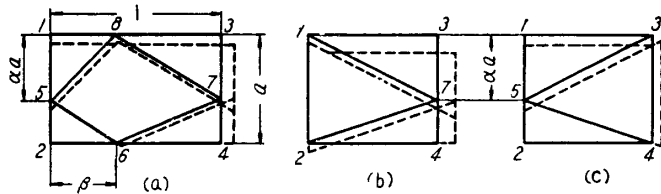
とも表わしうる。簡単のため以後は上式を満す条件のうち

$$\alpha_r = \alpha_i \quad \text{および} \quad \beta_t = \beta_b \quad (1.1.21)$$

のような形のもののみを取上げる。

第 1.1.4 図 (a) はこのような速度場を示す。

このような速度場における内部エネルギー消費率は (1.1.14) 式から



第 1.1.4 図 使用した剛性三角形速度場

$$\dot{E} = 2k \sum_{ij} f_{ij} \cdot \dot{s}_{ij} \cdot S_{ij} \quad (1.1.22)$$

で計算できる。ここで、 f_{ij} , \dot{s}_{ij} , S_{ij} は ij 面のそれぞれり抵抗係数、相対り速度および面積を表わす。幾何学的考察によって \dot{s}_{ij} と S_{ij} を求めれば、内部エネルギー消費率係数は境界条件 (i) に対し

$$e = \left\{ (f_{13} + f_{24})(1-\beta) + (f_{56} + f_{58})\beta^2 + (f_{67} + f_{78})(1-\beta)^2 \right\} \frac{1}{\alpha} + \left\{ (f_{12} + f_{34})\alpha + (f_{58} + f_{78})\alpha^2 + (f_{56} + f_{67})(1-\alpha)^2 \right\} a \quad (1.1.23)$$

なることがわかる。境界条件 (ii) に対しては上式中の a の係数の第 1 項 $(f_{12} + f_{34})\alpha$ が $f_{12}\alpha + f_{34}(1-\alpha)$ に変わる。

いま f_{56} , f_{67} , f_{78} , f_{58} は $1/2$ に等しいから、(1.1.23) 式は

$$e = \{1 + (f_{13} + f_{24} - 2)(1 - \beta) + 2(1 - \beta)^2\} \frac{1}{a} + \{1 + (f_{12} + f_{34} - 2)\alpha + 2\alpha^2\} a \quad (1.1.24)$$

となり、境界条件 (ii) においては上式の a の係数は $\{1 + f_{34} + (f_{12} - f_{34} - 2)\alpha + 2\alpha^2\}$ となる。

同様に第 1.1.4 図 (b) のような形式に対しては境界条件 (i) に対し

$$e = (1 + f_{13} + f_{24})/a + \{1/2 + f_{12} - (1 + f_{12} - f_{34})\alpha + \alpha^2\} a \quad (1.1.25)$$

となり、(ii) に対しては a の係数 $\{1/2 + f_{12} + f_{34} - (1 + f_{12} + f_{34})\alpha + \alpha^2\}$ を得る。

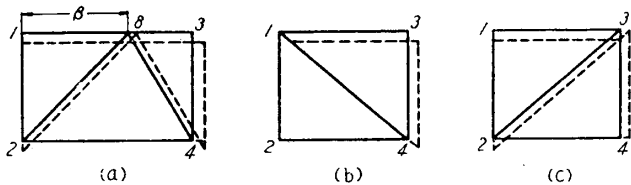
第 1.1.4 図 (c) に対しては境界条件 (i) に対し

$$e = 1/a + \{1/2 + f_{34} - (1 + f_{34} - f_{12})\alpha + \alpha^2\} a, \quad (1.1.26)$$

(ii) に対しては a の係数は $\{1/2 - (1 - f_{12} - f_{34})\alpha + \alpha^2\}$ になる。

次に第 1.1.4 図のより簡単な形第 1.1.5 図について考えると、第 1.1.5 図 (a) の形式で境界条件 (i) に対しては

$$e = \{1/2 + f_{13} - (1 + f_{13} - f_{24})\beta + \beta^2\}/a + (1 + f_{12} + f_{34})a \quad (1.1.27)$$



第 1.1.5 図 使用した簡単な剛性三角形速度場

(ii) に対しては a の係数は $(1 + f_{12})$ である。

第 1.1.5 図 (b) の形式では、境界条件 (i) に対して

$$e = (1/2 + f_{13})/a + (1/2 + f_{34})a, \quad (1.1.28)$$

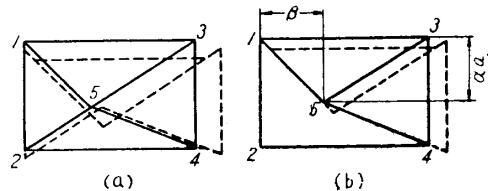
(ii) に対しては a の係数は単に $1/2$ である。

さらに第 1.1.5 図 (c) の形式では、境界条件 (i) で

$$e = (1/2 + f_{24})/a + (1/2 + f_{12})a \quad (1.1.29)$$

(ii) に対しては a の係数は $(1/2 + f_{12} + f_{34})$ となる。

この他第 1.1.4 図の形式の変形したものとして第 1.1.6 図のようなものが考えられる。第 1.1.6 図 (a) のタイプは第 1.1.4 図 (b) と (c) の組合せによって e はただちに求まる。第 1.1.6 図 (b) のように三角形 125 と 245 が一体となったようなものに対しては e の表現式はいくらか複雑となり、境界条件 (i) では



第 1.1.6 図 使用した剛性三角形速度場

$$e = f_{13} \cdot \frac{\beta}{\alpha \cdot a} + f_{15} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot \alpha^2 + \beta^2}{\alpha \cdot a} + f_{35} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot \alpha^2 + (1 - \beta)^2}{\alpha \cdot a} \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \beta} \right| + f_{45} \cdot \frac{(1 - \alpha)^2 \alpha^2 + (1 - \beta)^2}{(1 - \beta) a} + f_{34} \cdot \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} a \quad (1.1.30)$$

を得る。境界条件 (ii) の場合には上式中最後の項は $f_{34} |(\alpha - \beta)a / (1 - \beta)|$ となる。

今まで考えた剛性三角形速度場の内第 1.1.6 図 (b) のもの以外の場合には、それぞれの e の表現式を α または β に関して微分することにより e を極小とする α または β の値が

簡単に求まり、 e の極小値も直ちに得られる。このような α および β の値は速度場のタイプと境界条件の (i) か (ii) が与えられれば、それぞれ左右境界面の迂り抵抗係数 f_{12} , f_{34} と上下境界面の迂り抵抗係数 f_{13} , f_{24} のみの函数となる。しかし (1.1.30) 式は一般に極小値を求めることは三次方程式を解く必要があり厄介である。とくに境界条件 (i) で $f_{13} = f_{34} = 1/2$ のときには、 $f_{15} = f_{35} = f_{45} = 1/2$ とすれば (1.1.30) 式は

$$\alpha = 1/\sqrt{2a}, \quad 1 - \beta = \sqrt{a/2} \tag{1.1.31}$$

のとき極小となり、このとき

$$e = 2\sqrt{2}(\sqrt{a} + 1/\sqrt{a}) - 4 \tag{1.1.32}$$

となる。これ以外の場合は計算が面倒ばかりでなく、同じ境界条件に対して他の速度場よりも低い e を与えそうもない。

なお (1.1.30) 式において $\beta = 0$, $f_{45} = f_{35} = 1/2$, $f_{15} \rightarrow f_{12}$ とすれば第 1.1.4 図 (c) に対する e の式 (1.1.26) と一致する。

1.1.2.3 有心扇形速度場

有心扇形応力場は迂り線場の理論による解析においてたびたび使用される便利な場である。この応力場に対応する速度場も簡単なために、上界解を求めるのに利用された例が幾つかある。

有心扇形速度場 (第 1.1.7 図) は次のような特徴をもっている。すなわち扇形の中心を極とする極座標 r, θ に関する速度成分は [14]

$$\dot{u}_r = 0, \quad \dot{v}_\theta = \dot{v}_\theta(r) \tag{1.1.33}$$

で与えられる。そこで境界 OA に垂直なある速度分布が与えられるときは、他の境界 OB 上の速度分布も同じであり、速度の向きのみが $\theta_2 - \theta_1$ だけ変えられたことになる。いま \dot{v}_θ が r にも無関係で一定であるとすると、ひずみ速度成分は

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = 0, \quad \dot{\gamma}_{r\theta} = -\dot{v}_\theta/r \tag{1.1.34}$$

で与えられる。そこで (1.1.11) または (1.1.12) 式より外半径 R の扇形 OAB 内のエネルギー消費率は

$$\dot{E}_f = k \cdot \dot{v}_\theta \cdot R(\theta_2 - \theta_1) \tag{1.1.35}$$

で与えられ、境界弧 AB 上のエネルギー消費率は

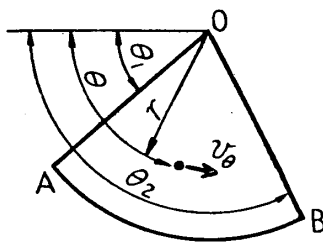
$$\dot{E}_p = 2k \cdot f_{AB} \cdot \dot{v}_\theta \cdot R(\theta_2 - \theta_1) \tag{1.1.36}$$

で与えられる。扇形領域と、境界弧 AB の外部の物体が一体のときは $f_{AB} = 1/2$ であるから、全内部エネルギー消費率は

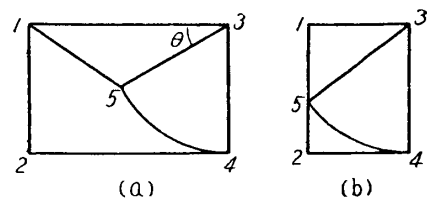
$$\dot{E} = 2\dot{E}_f = 2k \cdot \dot{v}_\theta \cdot R(\theta_2 - \theta_1) \tag{1.1.37}$$

となる。

いま単位矩形変形領域 1234 内を第 1.1.8 図 (a) のように剛性三角形 135, 剛性部分 1245 および有心扇形 345 より成るものとすれば幾何学的考察および (1.1.14) 式の使用によって境界条件 (i) に対し



第 1.1.7 図
有心扇形速度場



第 1.1.8 図
有心扇形-剛性三角形速度場

$$e = \frac{1}{\sin \theta} \left\{ f_{13} \left(\frac{1}{a} - \cos \theta \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - 2 \cos \theta + a \right) + \frac{1}{2} |\cos \theta - a| \right\} + \frac{\pi}{2} - \theta \quad (1.1.38)$$

が得られる。ここに $f_{13}=f_{35}=f_{45}=1/2$ としてある。右側面 34 の境界条件 (ii) に対しては上式に $a \cdot f_{34}$ を加えればよい。

(1.1.38) 式は $f_{13}=0$ のとき $a \leq 1/\sqrt{2}$ に対しては $\cos \theta = a$, すなわち $\angle 153 = \pi/2$ のとき極小となり, 極小値

$$e = \frac{1}{2a} \sqrt{1-a^2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} a \quad (1.1.39)$$

をもつ。また $1/\sqrt{2} \leq a \leq 1.06$ の範囲では $\cos \theta = 1/2a$ で極小値

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{2a} \quad (1.1.40)$$

をとる。

また $f_{13}=1/2$ のときには, $a \leq 1$ に対して $\cos \theta = a$ が極小の条件で, このとき

$$e = \frac{1}{a} \sqrt{1-a^2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} a = 0 \quad (1.1.41)$$

他方 $a \geq 1$ のときは (1.1.38) 式は $\cos \theta \rightarrow 1/a$ で極小となる。このときもし $f_{13}=f_{12}=1/2$ とすれば極小値は

$$e = \sqrt{a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{a} \quad (1.1.42)$$

で与えられる。

第 1.1.8 図 (b) のようなタイプに対しては $f_{12}=0$ なら境界条件 (i) で

$$e = \frac{1}{2} \sqrt{a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{a} \quad (1.1.43)$$

を得る。境界条件 (ii) なら上式に $a \cdot f_{34}$ を加える。また $f_{12}=1/2$ のときは (1.1.42) 式と同じである。

1.1.3 単位矩形変形領域の直列組合せ

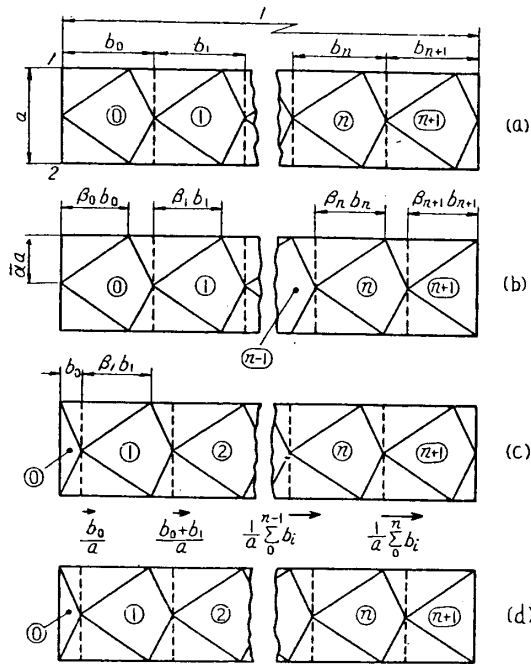
矩形領域の縦横比 a が 1 に比べて大または小になるときは, 領域を前に述べた単位矩形変形領域の横または縦の直列組合せと考えることにより, 内部エネルギー消費率係数を低下させることができる。

一様速度場の場合はこの直列組合せは, 単一のものと同じことであり, e はあらゆる a に対して (1.1.18) 式で与えられる。有心扇形速度場の直列組合せは, 細長い矩形領域のところどころに応力の特異点があるようなことになり物理的にも感心できないばかりでなく, 計算も厄介になる。そこで本節においてはもっぱら剛性三角形速度場のみについて考察した。

1.1.3.1 縦横比が 1 よりかなり小さい場合

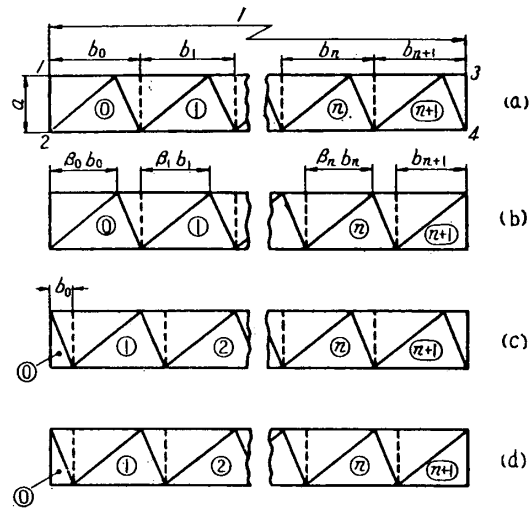
縦横比 a が 1 よりかなり小さな矩形変形領域に第 1.1.1 図のような境界面に垂直な速度条件が与えられたとし, 各辺上では f が一定である場合につき, 領域内を横に 0 から $n+1$ 番の単位矩形領域に分けてみる。1 から n 番の領域内の速度場は, 隣合う単位領域相互間の

迂りが起らないように第 1.1.4 図 (a) または第 1.1.5 図 (a) のタイプで、かつ前者の場合にはそれぞれに対する α の値 (第 1.1.4 図参照) α_i は共通で $\bar{\alpha}$ に等しいとする. 同じ理由で左端の 0 番領域は第 1.1.4 図または第 1.1.5 図の (a) か (b), 右端 $n+1$ 番領域は (a) か (c) のタイプとし, これらの α の値も $\bar{\alpha}$ に等しいとする. このような組合せの方法は第 1.1.9 図および第 1.1.10 図に示されている.



第 1.1.9 図 剛性三角形直列組合せ速度場 (第 1.1.4 図の組合せ)

いま各単位矩形領域の中を b_i で表わすと, それぞれの縦横比 a_i は a/b_i で与えられる. すでに見たように第 1.1.4 図または第 1.1.5



第 1.1.10 図 剛性三角形直列組合せ速度場 (第 1.1.5 図の組合せ)

図のタイプの速度場に対する内部エネルギー消費率係数 e_i は

$$e_i = c_i/a_i + g_i \alpha_i \tag{1.1.44}$$

なる形で与えられる. 第 1.1.4 図 (a) または第 1.1.5 図 (a) に対しては (1.1.24) または (1.1.27) 式に見られるようにこれらを極小とする β の値は f_{13}, f_{24} のみによってきまる. そこで仮定より領域 $0 \sim n$ に対しては $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n \equiv \bar{\beta}$ であつて $c_1 = c_2 = \dots = c_n \equiv \bar{c}$ である. また (1.1.24) 式および仮定により第 1.1.9 図式のものでは $g_1 = g_2 = \dots = g_n \equiv \bar{g}(\bar{\alpha})$ であることがわかる. 第 1.1.10 図式の組合せならば $\bar{g} = 1$ である. c_0, c_{n+1} にしても f_{13}, f_{24} のみの函数であり, また g_0, g_{n+1} は $\bar{\alpha}$ およびせいぜい f_{12}, f_{34} の函数にすぎない. (1.1.44) 式は領域 i の左側面が左右には動かない場合に対するものであるが, 実際は左側面は隣りの材料によって右方に $\sum_0^{i-1} b_j/a$ なる速度で押されるから, そのため上下面での迂り仕事が付加される. したがって領域 1234 での全内部エネルギー消費率は

$$\dot{E} = 2k \sum_0^{n+1} \left\{ \left(\frac{c_i \cdot b_i^2}{a} + a \cdot g_i \right) + (f_{13} + f_{24}) \frac{b_i}{a} \sum_0^{i-1} b_j \right\} \tag{1.1.45}$$

\bar{c}, \bar{g} を用いることにより内部エネルギー消費率係数は

$$e = \left[\bar{c} \sum_1^n b_i^2 + c_0 \cdot b_0^2 + c_{n+1} (1 - b_0 - \sum_1^n b_i)^2 + (f_{13} + f_{24}) \{ b_0 (1 - b_0) + (1 - b_0) \sum_1^n b_i - (\sum_1^n b_i)^2 + \sum_2^n (b_i \sum_1^{i-1} b_j) \} \right] \frac{1}{a} + (n \cdot \bar{g} + g_0 + g_{n+1}) a \quad (1.1.46)$$

となる。上式を極小にする b_i の値は b_{n+1} のみを従属変数として偏微分を行うことにより得られ

$$\left. \begin{aligned} b_1 = b_2 = \dots = b_n, \\ b_0 = \frac{2\bar{c} - (f_{13} + f_{24})}{2c_0 - (f_{13} + f_{24})} b_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.47)$$

を得る。いま上式中の b_1, \dots, b_n を \bar{b} で表わせば第 1.1.9 図および第 1.1.10 図 (a) の場合には $c_0 = \bar{c}$ だから $b_0 = b_{n+1} = \bar{b}$, 第 1.1.9 図および第 1.1.10 図 (b) の場合には $b_0 = \bar{b}$, $b_{n+1} = \bar{\beta}\bar{b}$, (c) の場合には $b_0 = (1 - \bar{\beta})\bar{b}$, $b_{n+1} = \bar{b}$, (d) の場合には $b_0 = (1 - \bar{\beta})\bar{b}$, $b_{n+1} = \bar{\beta}\bar{b}$ のとき (1.1.46) 式は極小となることを示すことができる。これは全矩形領域内部の速度の不連続線が、幾組かの互に平行な直線から成ることを意味する。第 1.1.9 図および第 1.1.10 図はそのように画かれている。

したがって、いま $b_0 = q\bar{b}$, $b_{n+1} = r\bar{b}$ と表わすと、(1.1.46) 式は

$$e = \left[\bar{b}^2 \left\{ \bar{c}n + c_0q^2 + c_{n+1}r^2 + (f_{13} + f_{24}) \left(qr - \frac{n(n+1)}{2} \right) \right\} + \bar{b}(f_{13} + f_{24})n \right] \frac{1}{a} + (n\bar{g} + g_0 + g_{n+1})a \quad (1.1.48)$$

と書ける。他方上式を最小にする $\bar{\alpha}$ の値は

$$n \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial g_0}{\partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial g_{n+1}}{\partial \bar{\alpha}} = 0 \quad (1.1.49)$$

から得られる。

次に第 1.1.9 図および第 1.1.10 図中のいろいろなタイプの内、いずれに対する e が最低になるかを検討しよう。まず a を 1 に比べて非常に小さいとすると、(1.1.48) 式で $q = r = 0$, $\bar{b} = 1/n$, $g_0 = g_{n+1} = 0$ とおいて n で偏微分し 0 と置くことにより e の極小値を求めれば

$$e = 2\sqrt{\left(\bar{c} - \frac{f_{13} + f_{24}}{2}\right)\bar{g}} + \frac{f_{13} + f_{24}}{2} \cdot \frac{1}{a} \quad (1.1.50)$$

を得る。 n は整数であるが、非常に大きくなれば上式は e の極小値のよい近似を与える。ここで $f_{13} = f_{24} = 1/2$ の場合を考えると、第 1.1.9 図に対しては $\bar{\alpha} = 1/2$, $\bar{\beta} = 3/4$, $\bar{c} = 7/8$, $\bar{g} = 1/2$ で

$$e \doteq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{a}. \quad (1.1.51)$$

また第 1.1.10 図なら $\bar{\beta} = 3/4$, $\bar{c} = 3/4$, $\bar{g} = 1$ だから

$$e \doteq 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{a}. \quad (1.1.52)$$

したがってこの場合は第 1.1.9 図のタイプの方が第 1.1.10 図よりも低い e を与える。逆

に f_{12} , f_{24} の内一方が 0, 一方が $1/2$ のときは第 1.1.10 図の方が e が低いことを示すことができ, また $f_{12}=f_{24}=0$ のときは, 両者はここにおける計算の近似度内で一致する.

次に $f_{12}=f_{24}$ のとき第 1.1.9 図中いずれのタイプの e が最小になるか見よう. (1.1.48) 式に q , r , \bar{b} , \bar{c} , \bar{g} , \bar{c}_0 , \bar{g}_0 , \bar{c}_{n+1} , \bar{g}_{n+1} の値を代入することにより

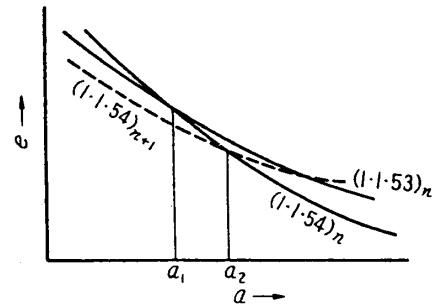
$$e = (n+2+f_{12}+f_{34}) \frac{a}{2} + \frac{n+11/4}{4n+8} \frac{2}{a}, \quad \text{第 1.1.9 図 (a)} \quad (1.1.53)$$

$$e = \left(n + \frac{3}{2} + f_{12} + f_{34} \right) \frac{a}{2} + \frac{n+5/2}{4n+7} \frac{2}{a}, \quad \text{第 1.1.9 図 (b)} \quad (1.1.54)$$

$$e = \left(n + \frac{3}{2} + f_{12} + f_{34} \right) \frac{a}{2} + \frac{n+2}{4n+5} \frac{2}{a}, \quad \text{第 1.1.9 図 (c)} \quad (1.1.55)$$

$$e = (n+1+f_{12}+f_{34}) \frac{a}{2} + \frac{n+7/4}{4n+4} \frac{2}{a}, \quad \text{第 1.1.9 図 (d)} \quad (1.1.56)$$

を得る. 上式は右側面の境界条件 (i), (ii) に対し成立する. (1.1.53) と (1.1.56) 式は n の差を 1 とすれば同一式となる. (1.1.53) と (1.1.54) 式の n を同じ値と考えて差をとると, a が $a_1 = \sqrt{3/8} \sqrt{1/(n+2)(n+5/4)}$ より大きいときは (1.1.53) > (1.1.54) であるが $a < a_1$ においては (1.1.53) < (1.1.54) となる. そこで (1.1.54) 式の n を $n+1$ として (1.1.53) 式と比べると, このときは a が $a_2 = \sqrt{9/8} \sqrt{1/(n+2)(n+9/4)}$ より小さくなれば (1.1.54) < (1.1.53) となる. ところが $a_2 > a_1$ であるから第 1.1.11 図より, 結局, n を適当に選べば (1.1.54) 式はあらゆる a に対して, つねに (1.1.53) 式より小さくしうることがわかる. また (1.1.54) と (1.1.55) 式は, 同一の n に対して a いかんにかかわらず, 常に (1.1.54) 式の方が小さい. そこで n を適当に選ぶと第 1.1.9 図の中で (b) のものが最低の e を与えることがわかる.



第 1.1.11 図 第 1.1.9 図 (a), (b), (c), (d) の内もつとも低い内部エネルギー消費率を与える組合せ方式の証明概念図

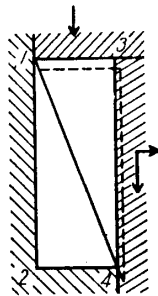
同様にして $f_{12}=1/2$, $f_{24}=0$ の場合を検討すると, $f_{12}=0$ で $f_{34}=0$ か $f_{34}=1/2$ でも境界条件 (i) の場合には第 1.1.10 図 (b) のタイプが最小の e を与え, $f_{12}=0$ で $f_{34}=1/2$, 境界条件 (ii) では (a), $f_{12}=1/2$ で, $f_{34}=0$ か $f_{34}=1/2$ でも境界条件 (i) なら (d), また $f_{12}=1/2$ で $f_{34}=1/2$, 境界条件 (ii) に対しては (c) のタイプがそれぞれ最低の e を与えることを証明しう. これらはすべて $f=1/2$ なる側面では材料と外部の間の相対比がないようなものである.

また $f_{12}=f_{24}=0$ の場合は $\bar{\alpha}=\bar{\beta}=1/2$ となるが, $f_{12}=f_{34}=0$ なら一般に第 1.1.9 図のタイプがより低い e を与えることができ, 他方 f_{12} , f_{34} のうち少くとも一方が $1/2$ だと第 1.1.10 図の方が低い e を与えうる. この際より低い e を得るためには $f_{12}=1/2$, $f_{24}=0$ の場合について述べたと同様, 迂り抵抗係数が $1/2$ である側面上では相対比が起らぬように組合せることを必要とする.

なお $f_{13}=f_{24}=1/2$ でかつ $f_{12}=f_{34}=1/2$ で境界条件 (ii) の場合, あるいは $f_{13}=f_{24}=1/2$ で f_{12}, f_{34} の内一方が 0, 他方が $1/2$ のときには, a が 1 に近くなると, したがって最低の e を与える n が小さくなると, e を極小にする \bar{a} の値は $1/2$ とかなり違ってくる. しかし前者の場合には $n \geq 1$, 後者の場合なら $n \geq 0$ であれば, $\bar{a}=1/2$ として求めた e の値 (1.1.54) 式は, \bar{a} に関する e の極小値に比べて誤差約 1% 以下となることを示すことができる.

なお上に考えた組合せの他に列の端に第 1.1.6 図 (b) のような速度場を加えることもときには有効と思われたが, ここでは考えなかった.

1.1.3.2 縦横比が1よりもかなり大きい場合



第 1.1.12 図 縦横比 $a > 1$, $f_{12}=f_{34}=1/2$ で境界条件 (ii) に対する最適速度場

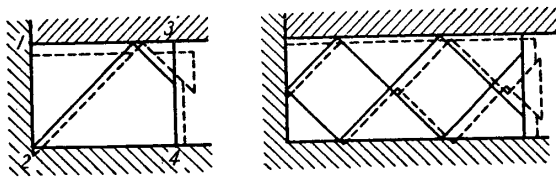
これは細長い柱の圧縮のような形であるが, 右側面も左側面も平面を保って, 外部物体との間に隙間ができることが許されず, しかも側面 34 上で f_{12}, f_{34} のいずれか一方が 0 もしくは境界条件 (i) であれば, これはすでに考えた a が小さい場合に対する結果を, ただ a を $1/a$ とすることによって簡単に利用できる. $f_{12}=f_{34}=1/2$ で境界条件 (ii) に対しては, 今まで考えた速度場のうち第 1.1.12 図のごときものが最低の e を与え, その大きさは (1.1.28) 式より

$$e = \frac{1}{2} a + \left(\frac{1}{2} + f_{13} \right) \frac{1}{a} \quad (1.1.57)$$

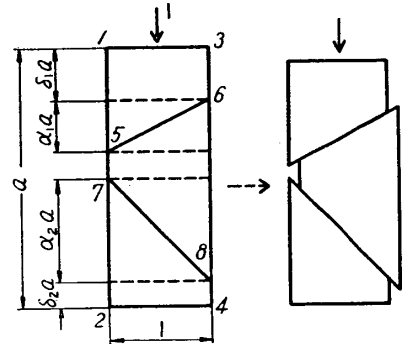
である.

1.1.3.3 側面が平面を保たなくてもよい場合

まず a が 1 より小さい場合を考える. このとき $f_{13}=f_{24}=0$ のときは第 1.1.13 図のような 45° の速度不連続線をもつタイプが $e=1$ で最低となる. しかし, f_{13}, f_{24} のうち少くとも一方が $1/2$ のときは不連続線が側面途中で終るタイプ, すなわち側面が平面を保たなくなるタイプは, そ



第 1.1.13 図 $f_{12}=f_{34}=f_{13}=f_{24}=0$ で側面自由な矩形領域における最適速度場



第 1.1.14 図 縦横比大なる矩形領域において側面が平面を保たない速度場

うでないものに比べて e は高くなることを前と同様 (1.1.48) 式を用いて証明できる.

a が 1 よりも大きい場合には第 1.1.14 図のごとく, すでに考えた剛性三角形速度場をもつ単位矩形領域と, まったく変形しない剛性矩形領域の縦方向直列組合せを考えることができる. これに対する内部エネルギー消費率係数は境界条件 (i) に対し

$$e = \frac{\frac{1}{2} \left(\alpha_1^2 a + \alpha_2^2 a + \frac{2}{a} \right) + f_{34} \alpha_2 (1 - \delta_1 - \delta_2) a}{\alpha_1 + \alpha_2} + f_{12} (\alpha_1 + \delta_1) a \quad (1.1.58)$$

を得る。(ii) に対しては上式中分母の第 2 項が $f_{34} \alpha_1 (1 - \delta_1 - \delta_2) a$ に変るだけである。

まず左側面 12 は平面を保つ必要がなく右側面 34 は平面を保たなくてはならない場合を考えると、 $\delta_1 = \delta_2 = 0$ となる。このとき境界条件 (i) に対する (1.1.58) 式から、 α_1, α_2 に関する極小を求めると、 $f_{12} = f_{34} = 0$ のときは $a \geq 2$ に対し

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \quad (1.1.59)$$

$$e = 1 \quad (1.1.60)$$

を得る。また $f_{12} = 0, f_{34} = 1/2$ ならば $4/\sqrt{5} \leq a \leq 2\sqrt{2}$ に対して

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{16}{a^2} - 1}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{16}{a^2} - 1} \quad (1.1.61)$$

において e は極小となり、このとき

$$e = \frac{1}{4} \sqrt{16 - a^2} + \frac{1}{4} a. \quad (1.1.62)$$

他方 $f_{12} = 1/2, f_{34} = 0$ のときは $a \geq 4/\sqrt{7}$ に対し

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{7} a, \quad \alpha_2 = 3/\sqrt{7} a \quad (1.1.63)$$

において e の極小値

$$e = \sqrt{7}/2 \quad (1.1.64)$$

を得る。さらに $f_{12} = f_{34} = 1/2$ ならば $\sqrt{2} \leq a \leq 3$ に対して

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{7}} \sqrt{\frac{16}{a^2} - 1}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4\sqrt{7}} \sqrt{\frac{16}{a^2} - 1} \quad (1.1.65)$$

が極小の条件であり、このとき

$$e = \frac{\sqrt{7}}{8} \sqrt{16 - a^2} + \frac{3}{8} a \quad (1.1.66)$$

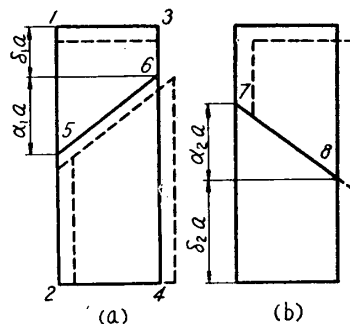
を得る。

境界条件 (ii) に対しては f_{12}, f_{34} の内、少くとも一方が 0 なら、 e の極小値は (i) のときと同じになる。 $f_{12} = f_{34} = 1/2$ のときは計算が困難であるが、このようなときは、他のタイプの速度場の方が低い e を与えるようである。

右の側面にまったく拘束がないときには両側面が平面を保たなくてよい。したがって (1.1.58) 式で $f_{34} = 0$ とすれば

$$\alpha_1 = \frac{1 - f_{12}}{\sqrt{1 + 2f_{12} - f_{12}^2}}, \quad \alpha_2 = \frac{1 + f_{12}}{\sqrt{1 + 2f_{12} - f_{12}^2}}, \quad \delta_1 = 0 \quad (1.1.67)$$

において e が極小となる。ここで $f_{12} = 0$ なら δ_1 は 0 でなくてもよい。 e の極小値は $f_{12} = 0$ か $1/2$ によってそれぞれ (1.1.60) および (1.1.64) 式で与えられる。



第 1.1.15 図 縦横比大なる矩形領域において側面が平面を保たない一層簡単な速度場

第 1.1.14 図の変形したもので第 1.1.15 図のような簡単な形も考えることができる。第 1.1.15 図 (a) は、境界条件 (i) に対して

$$e = f_{12}(\alpha_1 + \delta_1)a + \frac{1}{2} \left(a\alpha_1 + \frac{1}{a\alpha_1} \right) + f_{24} \cdot \frac{1}{\alpha_1 a} \quad (1.1.68)$$

第 1.1.15 図 (b) は境界条件 (ii) に対して

$$e = \frac{1}{2} \left(\alpha_2 a + \frac{1}{\alpha_2 a} \right) + f_{13} \frac{1}{\alpha_2 a} \quad (1.1.69)$$

となり、それぞれの極小値は簡単に求まる。

1.1.4 各種速度場の比較

以上において、できるだけ低い上界を得るために各種速度場およびそれらの組合せについて検討した。いま矩形変形領域の縦横比、境界面上の迂り抵抗係数、および右側面における外部物体の運動条件のいろいろな場合につき、剛性三角形速度場で考えたタイプの内、最低の e を与える形式と e の最小値の式を第 1.1.1 表に示す。表中第 1 欄の記号は境界条件を表わし、境界面が滑らか (s) か粗い (r) かを面 12, 13, 24, 34 の順に示したものである。字が 3 個しか並んでないものは、右側面が自由であることを示し、さいごの () 内は

第 1.1.1 表 各種境界条件およびいろいろな縦横比の矩形変形領域に (* (1.1.61) 式, ** (1.1.65) 式)

sss					
rss		$e=1$			
ssss (i)		$e=(I)(H=\frac{a}{2})$			
ssss (ii)		$e=(I)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=1$		
sssr (i)		$e=(I)(H=a)$			
sssr (ii)		$e=(II)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=1$		
srs					
srss (i)		$e=(II)(H=a)$			
srss (ii)		$e=(I)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=1$		
ssrs (i)					
ssrs (ii)					
srsr (i)		$e=(II)(H=a)$			
ssrr (ii)		$e=(II)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=1$		
srsr (ii)					
ssrr (i)		$e=(IV)(H=a)$	$e=(V)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=(V)$	$e=\sqrt{2}$
srr					
srrs (i)		$e=(II)(H=\frac{a}{2})$	$e=(I)(H=\frac{2}{a})$	$e=1$	
srrs (ii)					
srrr (i)		$e=(II)(H=\frac{a}{2}) + \frac{a}{4}$	$e=(IV)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=(V)$	$e=\sqrt{2}$
srrr (ii)					
rssr (i)		$e=(I)(H=2a)$	$e=(II)(H=\frac{1}{2}a)$	$e=\sqrt{2}$	
rssr (ii)		$e=(I)(H=a)$	$n=奇数$	$e=(II)(H=a)$	$e=1$
				$n=1$	

第 1・1・1 図で示した右側面の境界条件の区別を与える。また表中において e の表示式としてしばしば繰返される形のもの番号で置換えてあるが、これらはそれぞれ次のごとき式である。

$$\frac{1}{2} \left(Hn + \frac{1}{Hn} \right) \quad (I)$$

$$nH + \frac{n+3/4}{4n} \cdot \frac{1}{H} \quad (IV)$$

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) H + \frac{n+1/2}{4n-1} \cdot \frac{1}{H} \quad (II)$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{16-a^2} + \frac{1}{4} a \quad (V)$$

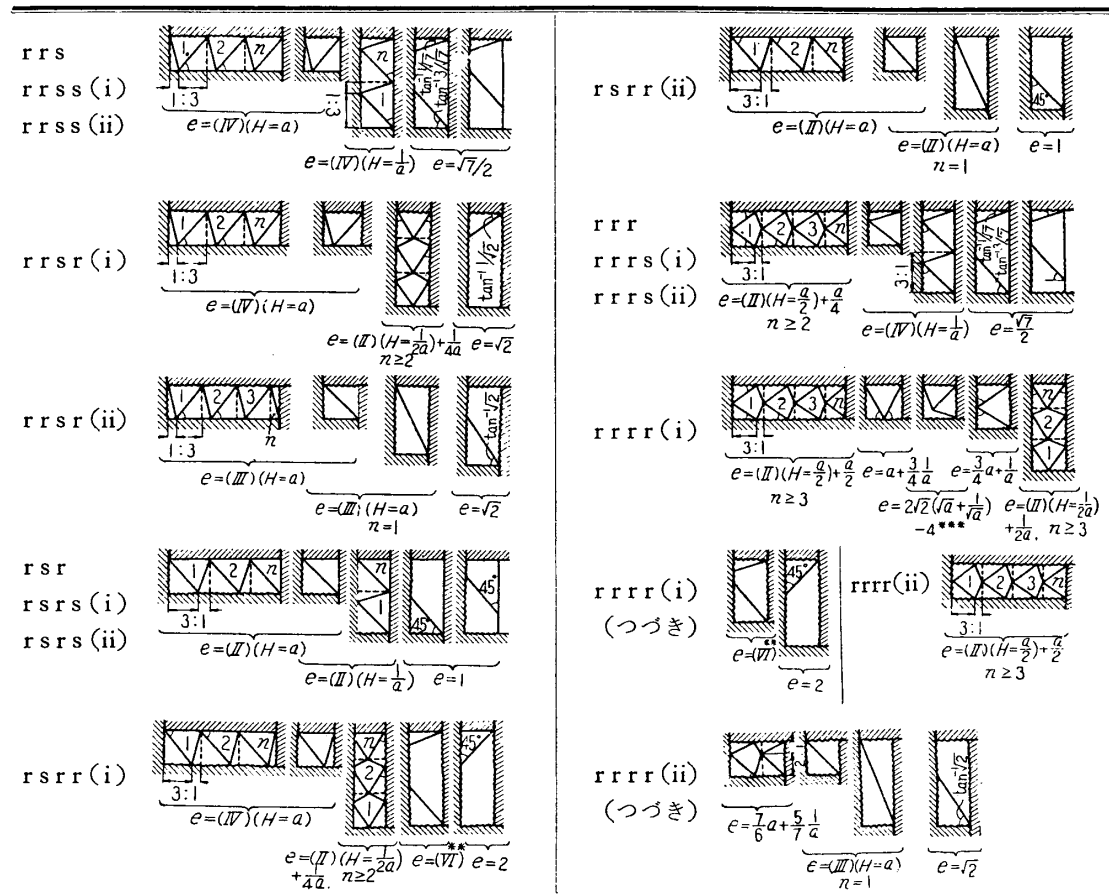
$$\left(n - \frac{1}{2} \right) H + \frac{n}{4n-3} \cdot \frac{1}{H} \quad (III)$$

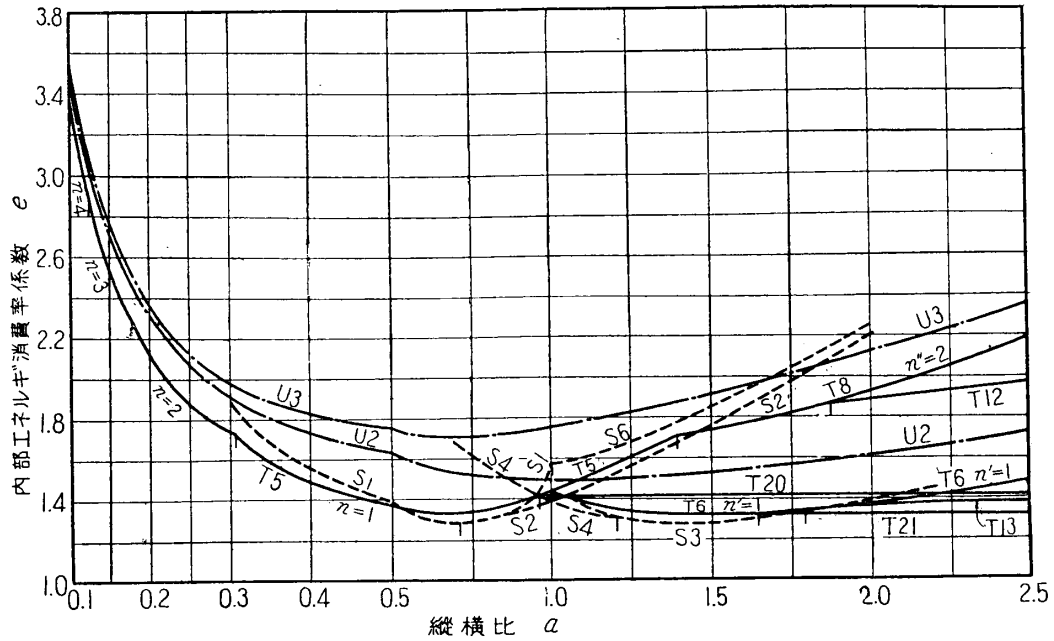
$$\frac{\sqrt{7}}{8} \sqrt{16-a^2} + \frac{3}{8} a \quad (VI)$$

注意すべきは (I)~(IV) 式中の n は前節で用いたものと意味が異り、数え方は表中の図にそれぞれについて示してある。

これらの e の値を各境界条件に対して a の函数としてプロットした一例を第 1・1・16 図に示す。図にはまた一様速度場、扇形速度場による e もプロットしてある。すなわち実線は剛性三角、破線は有心扇形、鎖線は一様速度場に対するものである。この図および他の同様の図から剛性三角形速度場は他のものに比べて、ほとんどの場合、 a のあらゆる大いさに対応する最適剛性三角形速度場と内部エネルギー消費率係数

式, *** (1・1・31) 式参照





srsr (ii), ssrr (i) → T(5, 6, 13, 20), S(1, 2, 3), U(2)

rrs, rrss (i), rrss (ii) → T(5, 6, 21), S(4, 3), U(2)

rrsr (i) → T(5, 8, 20), S(1, 6), U(3)

rsrr (i) → T(5, 8, 12, 22), S(1, 2), U(3)

$$T5 : na + \frac{n+3/4}{4n} \cdot \frac{1}{a}, \quad T6 : n' \frac{1}{a} + \frac{n'+3/4}{4n'} a, \quad T12 : \frac{\sqrt{7}}{8} \sqrt{16-a^2} + \frac{3}{8} a$$

$$T8 : n'' \frac{1}{2a} + \frac{n''+1/2}{4n''-1} 2a, \quad T13 : \frac{1}{4} \sqrt{16-a^2} + \frac{1}{4} a, \quad T20 : \sqrt{2}, \quad T21 : \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$T22 : 2, \quad S1 : \frac{1}{2a} \sqrt{1-a^2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} a, \quad S6 : \sqrt{a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{a}$$

$$S2 : \frac{1}{2} \sqrt{4a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{2a}, \quad S3 : \frac{1}{2} \sqrt{a^2-1} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{1}{a}, \quad U2 : 1 + \frac{1}{4} a + \frac{1}{4} \frac{1}{a}$$

$$S4 : \frac{1}{2a} \sqrt{4-a^2} + \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \frac{a}{2}, \quad U3 : 1 + \frac{1}{2} a + \frac{1}{4} \frac{1}{a}$$

第 1・1・16 図 幾種かの境界条件の下における矩形変形領域に対する内部エネルギー消費率係数と縦横比の関係。実線は剛性三角形速度場，破線は有心扇形速度場，鎖線は一樣速度場

し低い e を与えることがわかった。中には a が 1 の近くで有心扇形速度場の方の e が低い場合もあるが、その差はわずかである。一方一樣速度場は a が 1 の近くでは一般に e は比較的高いが a が 1 より非常に大または小になると剛性三角形速度場によるものに十分近づく。

この比較によって、以下の加工問題の解析には圧力上界の計算が簡単でしかも低い e を与える剛性三角形速度場を用いることにした。この際第 1・1・16 図のような線図を、あらゆる場合に対して作って置くことにより、数値計算は非常に楽になった。

1・2 開放型による鍛造

素材を上下の型の間で加圧成形するのに、素材側面には拘束を与えず、自由に横方向に拡

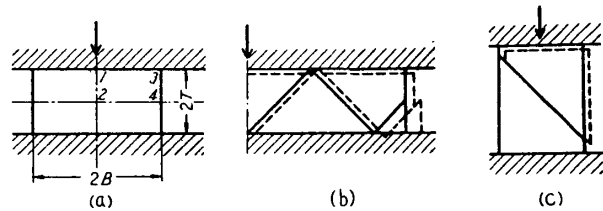
がれるようになっている工具は開放型と呼ばれる。これは製品の側面の寸法精度が要求されない場合や、後で行う仕上成形の前の予備成形に広く用いられている。また以下の例に見られるように本法は後で述べる密閉型による加工に比べて所要圧力は低くてすむので、本法によって加工し、その後、素材側面を剪断や切削によって仕上げることも多い。以下には、本法に含まれる幾つかの代表的な例について、1・1 章で述べた解析を適用する。

なお以下各章の議論は簡単のため工具と材料間の相対通り抵抗係数 f が 0 と $1/2$ の場合についてのみ行う。これらはそれぞれ型の面が滑らかな場合および粗い場合と言う言葉によって表示する。前者は良好な表面仕上および潤滑を施した工具による冷間加工の場合に近く、後者は高温加工の場合に近い。

1・2・1 圧縮加工

第 1・2・1 図 (a) に見られるような矩形素材の上下面を素材巾 $2B$ よりも広い巾をもつ平行な工具で圧縮する加工は、鍛造加工の基礎過程として古くから研究されている。

この内型の面が完全に滑らかな場合は特に簡単で、実際には応力もひずみも材料内で一様となり、加工所要圧力は当然 $2k$ に等しくなる。この問題に対して剛性三角速度場を適用すると第 1・1・1 表 sss に見られるように上界比 $\bar{p}/2k$ は 1 となって実際と一致するが、速度場は第 1・2・1 図 (b) の



第 1・2・1 図 巾が広く滑らかな平行型による圧縮と最低上界剛性三角形速度場

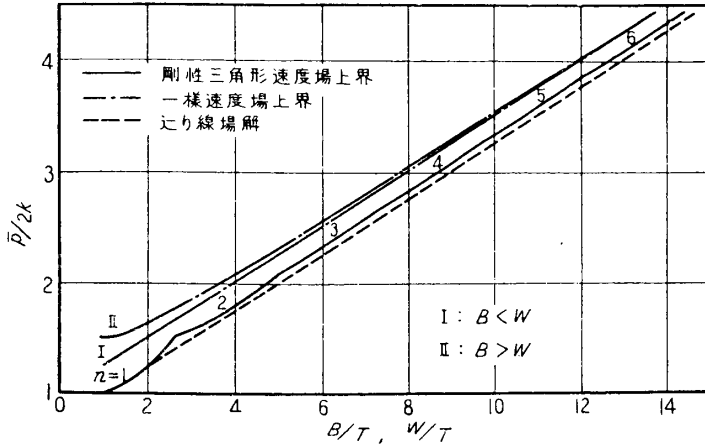
ようになり、実際とはかなりかけ離れたものとなる*。そこで本問題に限って前に述べた一様速度場が実際のもものと一致している。しかし素材の縦横比 B/T が 1 より小さくなると第 1・1・1 表から、第 1・2・1 図 (c) に見られるような変形の起りうることがわかり、これは挫屈現象に近似する。事実、加工硬化しない剛塑性体の曲り変形を考えた挫屈応力もまた $2k$ に等しい [15]。型面が完全に粗く、通り抵抗係数 f が $1/2$ のときは素材の第一象限 (第 1・2・1 図 (a) 1234) を取上げて考えると対称性から第 1・1・1 表 srs に相当するから $B/T \geq 1$ に対して

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{T}{B} + \frac{n+1/2}{4n-1} \cdot \frac{B}{T}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

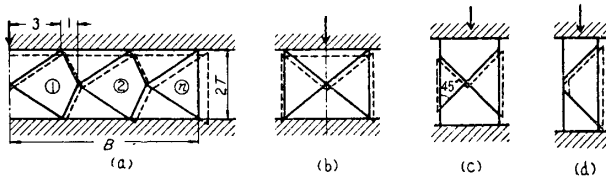
を得る。この値は第 1・2・2 図に B/T の函数として実線で示してある。本問題は最初 B/T が非常に大きい場合に対し Prandtl [16] が通り線場の理論による解を求めた。また最近の Ross [17] による埋込ブロックの圧縮問題の特別な場合として $B/T=1\sim 19$ の範囲で完全解が与えられている。この結果は第 1・2・2 図に破線で示されている。実線と比較すると $B/T=1\sim 12$ の範囲で、その差はほとんど 5% 以下である。

なお参考までに同図中に一様速度場による上界比を (1.1.18) 式より求めて鎖線 I で示

* 同じ内部エネルギー消費率を生じるにもかかわらず、実際には一様な変形の方しか起らないことは、実際材料は多少とも加工硬化するため、速度の不連続によるはげしいひずみ速度は生じにくいことを考えても理解できる。

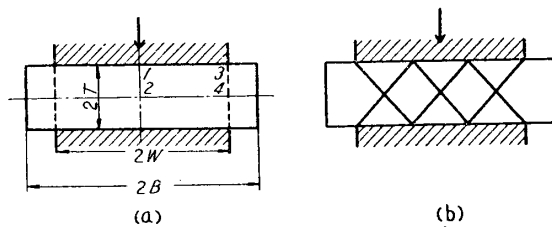


第 1・2・2 図 粗い平行型による圧縮の際の圧力上昇比

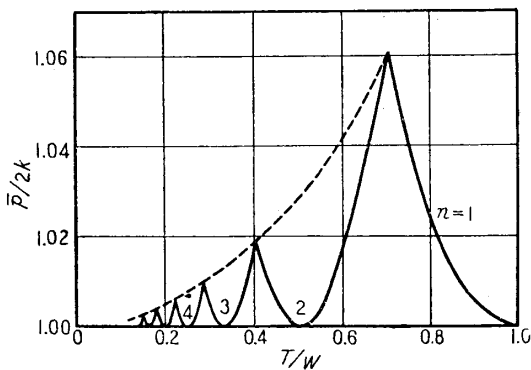


第 1・2・3 図 巾が広く粗い平行型による圧縮における最適速度場

ごとき変形が起ることになるが、これはいわゆる樽形変形に似ている。 $B/T \geq 0.5$ では図(d)のような挫屈変形も可能となる。これらの変形様式は今日までに知られている多くの理論



第 1・2・4 図 巾が狭く滑らかな平行型による圧縮加工およびその際の最適速度場



第 1・2・5 図 巾が狭く滑らかな平行型で圧縮する際の圧力上昇比 (Hill による)

したが、これは古典理論による解 [18] において摩擦応力を k とした場合に一致する。

上の上界に対応する速度場は第 1・2・3 図に例を示してある。図 (a) を見ると B/T の大なるところでは素材が有限変形後も変形しない剛性楔が型の中心面上に見られ、一方両側面にも三角形の剛性部が存在する。 B/T が 2.6 以下のときは、素材と型の上下接触面全体にそれぞれ単一の剛性楔が附着することになる (図 (b))。さらに B/T が 1 以下に対しては図 (c) の

および実験結果と定性的に一致している。

次に第 1・2・4 図 (a) のように上下型の巾 $2W$ が素材巾より狭く $W/T \geq 1$ の場合を考えよう。型に挟まれていない素材部分は剛性領域と考えると、型の面が滑らかな場合には素材第一象限 1234 は第 1・1・1 表 $sssr(i)$ に相当するから、圧力上昇比は

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{1}{2} \left(n \cdot \frac{W}{T} + \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{W} \right), \quad n=1, 2, \dots \tag{1.2.2}$$

および第 1・2・5 図で与えられ、対応する速度場は第 1・2・4 図 (b) のごとくなる。この速度場と上界はすでに Hill によって与えられているもの [19] とまったく同じである。またこの上界と速度場は Green [20] による迂り線場理論の解、また Watts および Ford [21], Muvdi および Tong

[22] による実験結果に非常によく一致することが証明されている。

型の面が粗い場合には第 1.1.1 表 $srsr$ (i) に相当するが, $B/T \geq 1$ に対する最低上界比と速度場はそれぞれ第 1.2.2 図および第 1.2.3 図 (a), (b) とまったく一致する. そこで $\bar{p}/2k$ の値は第 1.2.2 図で横座標を W/T として求まる. 事実, 本問題の迂り線場理論による解 [23] [24] も, 前の Ross による結果 (第 1.2.2 図破線) とまったく一致している. しかし王 [25] による結果は著者の上界よりも高い圧力比を与えており, これは計算の誤差によるものと思われる.

著者の速度場においてはすでに述べたように単一の剛性楔が型全面にまたがる条件は $W/T \leq 2.6$ であるが, Hill らによる条件 [23] は $W/T \leq 3.64$ である. 著者の速度場はまた本問題を不連続応力場で解いた Hodge [11. a)] および Nye [26] の実験結果とも一致している.

第 1.2.2 図には参考のため一様速度場による上界比を鎖線 II で示してあるが, これは巾の広い工具による圧縮に対する同じ速度場の上界 (鎖線 I) と比べて W/T が 1 の近くでかなり高い.

なお上述の巾の狭い工具による圧縮に対する上界比は, 有限変形の後も適用できる. なぜなら, 型面からすでに押出された材料は剛性領域と考えられるから境界条件は最初と同じであり, ただ T として刻々の値を用いればよい. 巾の広い型による圧縮 (第 1.2.1 図) においては素材側面の変形後の形は正確には知ることができないが B/T が 1 より十分大きいときは材料の刻々の厚さ T と, それから側面は直線を保つものと仮定して求めた B の値を用いてもあまり大きな誤りは生じないであろう.

1.2.2 盛上加工

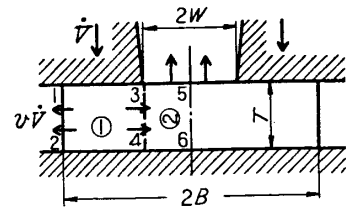
第 1.2.4 図の圧縮加工において, 中心軸から半分に切り左右を入れかえたような形のもものが第 1.2.6 図の開放型による盛上加工である. このとき一般に材料は両側面がふくれ出すとともに上型の凹み内に盛上る.

まず上下型面が滑らかな場合を考えよう. このとき図のように対称軸の片方に二つの単位矩形変形領域を考えると, 領域 ① に対しては縦横比 $a_1 = T/(B-W)$, 加圧面積 $B-W$, 加圧速度 \dot{V} であり, これに対する内部エネルギー消費率係数を e_1 とする. 領域 ② に対しては $a_2 = W/T$, 加圧面積 T であり, 面 34 上の加圧速度は側面 12 のふくれ出し速度を $v \cdot \dot{V}$ とすれば $[(B-W)/T] - v$ によって与えられる. この領域に対する e は e_2 としよう. そうすると, 上型の \dot{V} なる加圧速度に対応する全内部エネルギー消費率は中心軸の片側に対し

$$\dot{E} = 2k \cdot e_1 \cdot (B-W) \cdot \dot{V} + 2k \cdot e_2 \cdot T \cdot \left(\frac{B-W}{T} - v \right) \cdot \dot{V} \quad (1.2.3)$$

であるから素材単位面積当りの加圧力上界比は

$$\frac{\bar{p}}{2k} = \frac{\dot{E}}{2k \cdot B \cdot \dot{V}} = e_1 \left(1 - \frac{W}{B} \right) + e_2 \left(1 - \frac{W}{B} - \frac{T}{B} v \right) \quad (1.2.4)$$



第 1.2.6 図 開放型による盛上加工と領域区分



となる。いま二つの領域の境界面 34 上で ① の材料は上方に、② の材料は下方には動かないと考えられるから境界面 34 上に水平方向にのみ自由に動きうるきわめて薄く粗い剛体板があると仮想すれば ①, ② はそれぞれ第 1.1.1 表の srs および $srsr$ に当ると考えうる。もし上型口からすでに材料がいくらか出た後なら、この材料は剛性領域と見なされるから、領域 ② は $srsr(i)$ に相当する。第 1.1.1 表より $e_1=1$ である。(1.2.4) 式を見ると、 e_2 が有限のいかなる大いさであっても、 v が大きいほど (1.2.4) 式の値は小さくなることわかる。第 1.2.6 図のタイプで v の許しうる最大値は $(B-W)/T$ であるから、

(1.2.4) 式の最小値は

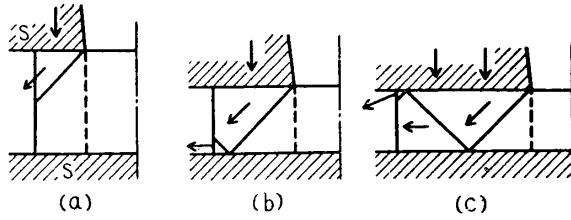
$$\bar{p}/2k = 1 - W/B \quad (1.2.5)$$

であり、領域 ① と ② の境界面は動かないことになる。したがって領域 ② は変形せず、盛上部分の下型よりの高さは最初の値 T のままである。第 1.2.7 図には対応する速度場を示した。

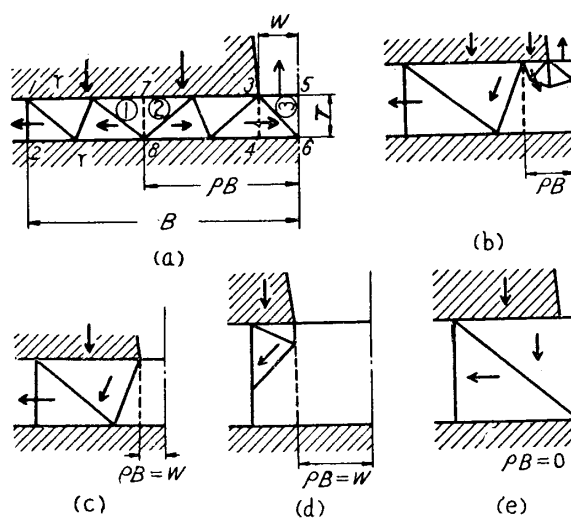
次に上型面が粗く下型面が滑らかな場合を考えよう。これは厚さ $2T$ の素材を上下同じ形の粗い型で加圧するときと同等である。今の場合第 1.2.8 図 (a) のように、ある考えられた加工段階で停止している面 78 を考え、全領域を ①, ②, ③ に分けて考える方が便利である。図中 ρB は無送り面の位置を表わす。前と同じように各領域について縦横比、加圧面積および加圧速度を考えると第 1.2.1 表のようになる。そこで加圧力上界は前と同じく

$$\begin{aligned} \bar{p}/2k &= \sum_{i=1}^3 e_i \cdot A_i (\dot{V}_i/B) \dot{V} \\ &= e_1(1-\rho) + (e_2+e_3)(\rho-W/B) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

第 1.2.8 図 (a)~(d) は T/B および W/B の色々な場合に対し、なるべく上式が小さくなるように考えて選んだ速度場の例である。(a) の場合は領域 ①, ②, ③ は第 1.1.1 表の $srs, srsr(i), srs$ または $srsr(i)$ (有限変形後) にそれぞれ相当する。



第 1.2.7 図 滑らかな開放型による盛上加工における最適速度場



第 1.2.8 図 粗い上型、滑らかな平面下型による盛上加工における種々の速度場

第 1.2.1 表 粗い開放型盛上加工解析のための領域区分と諸元

領域	縦横比 a_i	加圧面積 A_i	加圧速度 \dot{V}_i
①	$T/(1-\rho)B$	$(1-\rho)B$	\dot{V}
②	$T/(\rho - \frac{W}{B})B$	$(\rho - \frac{W}{B})B$	\dot{V}
③	W/T	T	$(\rho - \frac{W}{B})B \cdot \frac{\dot{V}}{T}$

(b) の速度場はいくらか複雑であるが、後述の定常押出加工に対する解析結果を利用することができる。(c) と (d) では $\rho = W/B$ である。(e) の形は他と異り、素材が全体として平らな上型で圧縮されるときと同じものである。

(1.2.6) 式および、すでに第 1.1 章で計算してある e_1, e_2, e_3 の値を用いて、 $T/B, W/B$ のいろいろな値に対する $\bar{p}/2k$ を求め、 ρ に関する極小値を計算したものが第 1.2.9 図である。すなわち $W/B=0.05, 0.10, 0.20$ のときは T/B の小さいところで第 1.2.8 図 (a) の速度場が $\bar{p}/2k$ を最低とする。しかし T/B が大きくなると第 1.2.9 図中・印の点で (c) の速度場に移る。破線は (e) に対応する $\bar{p}/2k$ で、 T/B が 1 に近ずき実線がこれと交ると × 点より右で (e) のタイプが起るようになる。

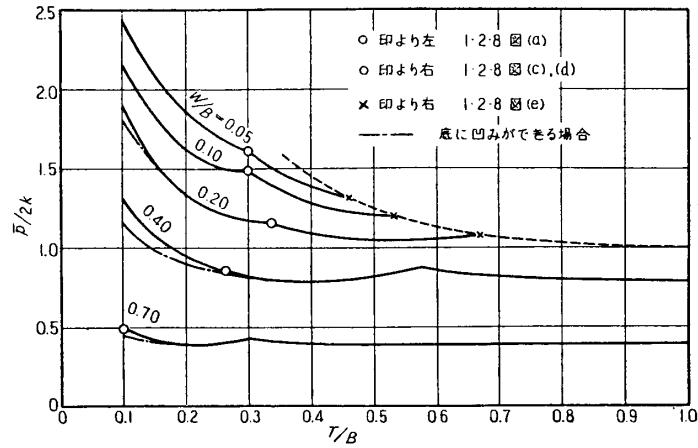
なお鎖線は、領域 ③ の底面 46 が下型面から持上り得る場合に対する $\bar{p}/2k$ である。この持上りによる凹み形成は、実際加工でもよく見られる欠陥と一致している。 $W/B=0.40, 0.70$ においては、第 1.2.8 図 (a) のタイプから (c), (d) のタイプへと移るが、(e) のタイプは今の範囲では生じない。またここに考えた範囲に対しては (b) のタイプは低い $\bar{p}/2k$ を与えなかった。

第 1.2.10 図には無送り点の位置 ρ をプロットしてある。ここで $\rho=0$ は第 1.2.8 図 (e) の速度場を意味する。 ρ の大きさがわかると、下型面に対する材料の上型口よりの盛上り速度は

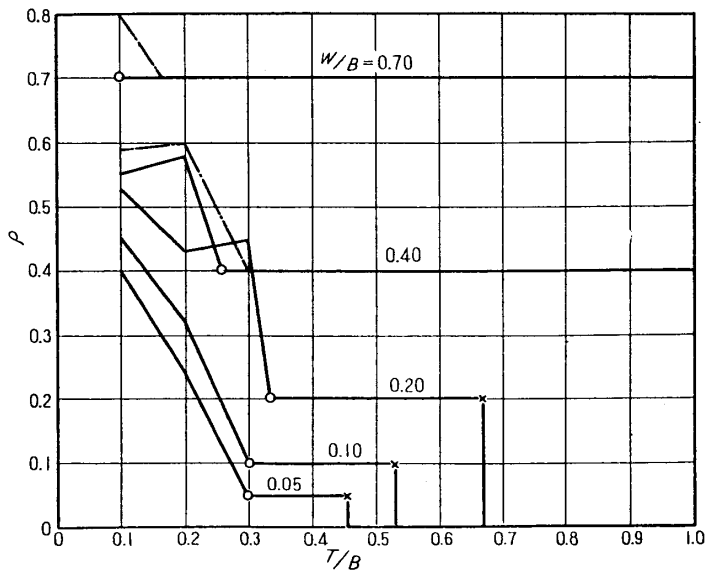
$$\dot{U} = (\rho \cdot B/W - 1) \dot{V} \tag{1.2.7}$$

によって得られる。

以上によって型面が粗い場合には、条件によっては型面の滑らかな場合と異り、盛上りがよくなることわかる。これは **Pomp, Munker** および **Lueg [27]** による軸対称型鍛造の実



第 1.2.9 図 粗い上型と滑らかな平面下型による盛上加工における圧力上昇比

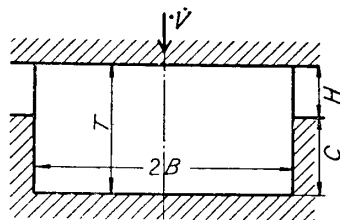


第 1.2.10 図 粗い上型と滑らかな平面下型による盛上加工における無送り点の位置

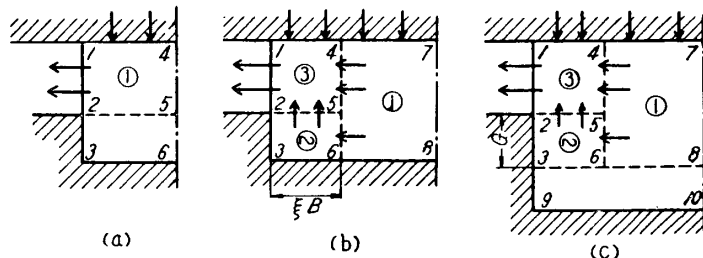
験結果と一致する。なお、盛上りをよくする方法として、素材側面のふくれ出しを部分的に拘束する、いわゆるフラッシュを有する半密閉型は落槌鍛造に広く利用されているが、今の場合は取扱わなかった。また、ここで述べたような形の製品を作るのに後で述べる押出鍛造による方法も考えられるが、これは盛上加工において素材の横移動を完全に阻止するものである。この場合には 1.5.1 節の各図からも明らかなように、製品台部の高さ H と巾 B および突起部の巾 ξ が一定ならば盛上げ加工に比べ加工所要圧力はかなり高くなる。例えば $W/B=0.1$ の場合には倍近くの圧力が必要である。したがって突起部（盛上り部）高さが低いものには盛上加工の方が有利である。一方突起部高さが高いものには、上述の半密閉型による鍛造かまたは押出鍛造によらざるを得ないであろう。

1.2.3 作頭加工

前節と類似のボルト形状の製品を作る場合にはしばしば第 1.2.11 図のように、素材の一部分を、それがぴったりはまるような下型の凹み内に保持し、平らな上型で加圧成形する作頭または据込加工が利用される。この凹み内の部分は加工中外形は変わらず、製品の柄の部分となるのである。



第 1.2.11 図 作頭加工



第 1.2.12 図 作頭加工解析のための変形領域区分

この問題を解析するに当たり、もっとも簡単な方法は第 1.2.12 図 (a) のように、素材は下型の面より上だけが変形すると仮定することである。そうすると問題は粗い平らな工具による圧縮と同等になる。事実、後でもわかるように B/H が 1 の近くまたはそれ以下なら、これは実際によく合うし、十分低い加圧力上界を与える。しかし B/H が大きくなると Ross [17] による解析によっても明らかなように、下型面以下の凹み内の材料も内部変形するものと思われるので、第 1.2.12 図 (b) のように、素材全体を 3 個の単位矩形変形領域に分けて見た。ここで 456 面は一樣に左方に動き、25 面も一樣に上方に持ち上げられると仮定する。前と同様にして、体積一定の条件と幾何学的考察により、各領域に対する縦横比 a_i 、加圧面積 A_i および加圧速度 \dot{V}_i は第 1.2.2 表のようになる。表中領域 ③ に対し 2

第 1.2.2 表 作頭加工解析のための領域区分と諸元

領域	縦横比 a_i	加圧面積 A_i	加圧速度 \dot{V}_i
①	$T/(1-\xi)B$	$(1-\xi)B$	V
②	$\xi \cdot B / (T-H)$	$T-H$	$(1-\xi)B \cdot \dot{V} / T$
③	$H/\xi \cdot B$ $H/\xi \cdot B$	$\xi \cdot B$ $\xi \cdot B$	$(1-\xi)(T-H)\dot{V}/\xi \cdot T$ V

種類の量があるのは、前者は底面 25 による押上げを、後者は上面 14 による押下げに対応するもので、後に見られるように、それぞれに対し別々の速度場を考えた方がよいので分けた。そこで各々に対する e_i

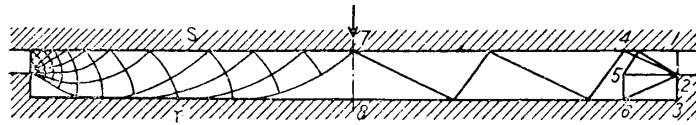
の大きさをそれぞれ e_3 および e_3' で表わす. 前と同様に, 素材断面積についての平均加工圧力上界は

$$\bar{p}/2k = e_1(1-\xi) + (e_2 + e_3)(1-\xi)(1-H/T) + e_3' \cdot \xi + f_{17}\xi(1-\xi)B/T \quad (1.2.8)$$

で与えられる. 上式の最後の項は, 上型面に迂り抵抗があるとき, 領域 ③ が領域 ① に押されて全体として $(1-\xi)B \cdot \dot{V}/T$ なる速度で左方に動くさい考慮すべき迂り仕事の分を表わす.

さてまず上型面が滑らかで下型凹み面が粗い場合を考えよう. 各領域間の相対迂りがなるべく少なくなるように速度場を選ぶと第 1.2.13 図右側のようなものになる. これらはそれぞれ第 1.1.1 表の $ssrr$ (i)

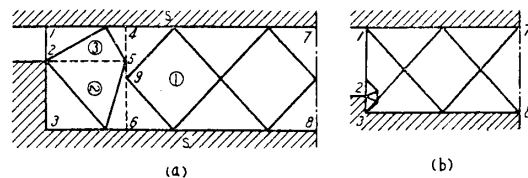
(領域 ①), $rrrr$ (ii) (領域 ②), rrs と rsr (領域 ③) に相当する. そこである与えられた T/H , B/H に対し ξ をいろいろに変え, 第



第 1.2.13 図 滑らかな上型, 粗い下型による作頭における剛性三角性速度場と迂り線場の比較

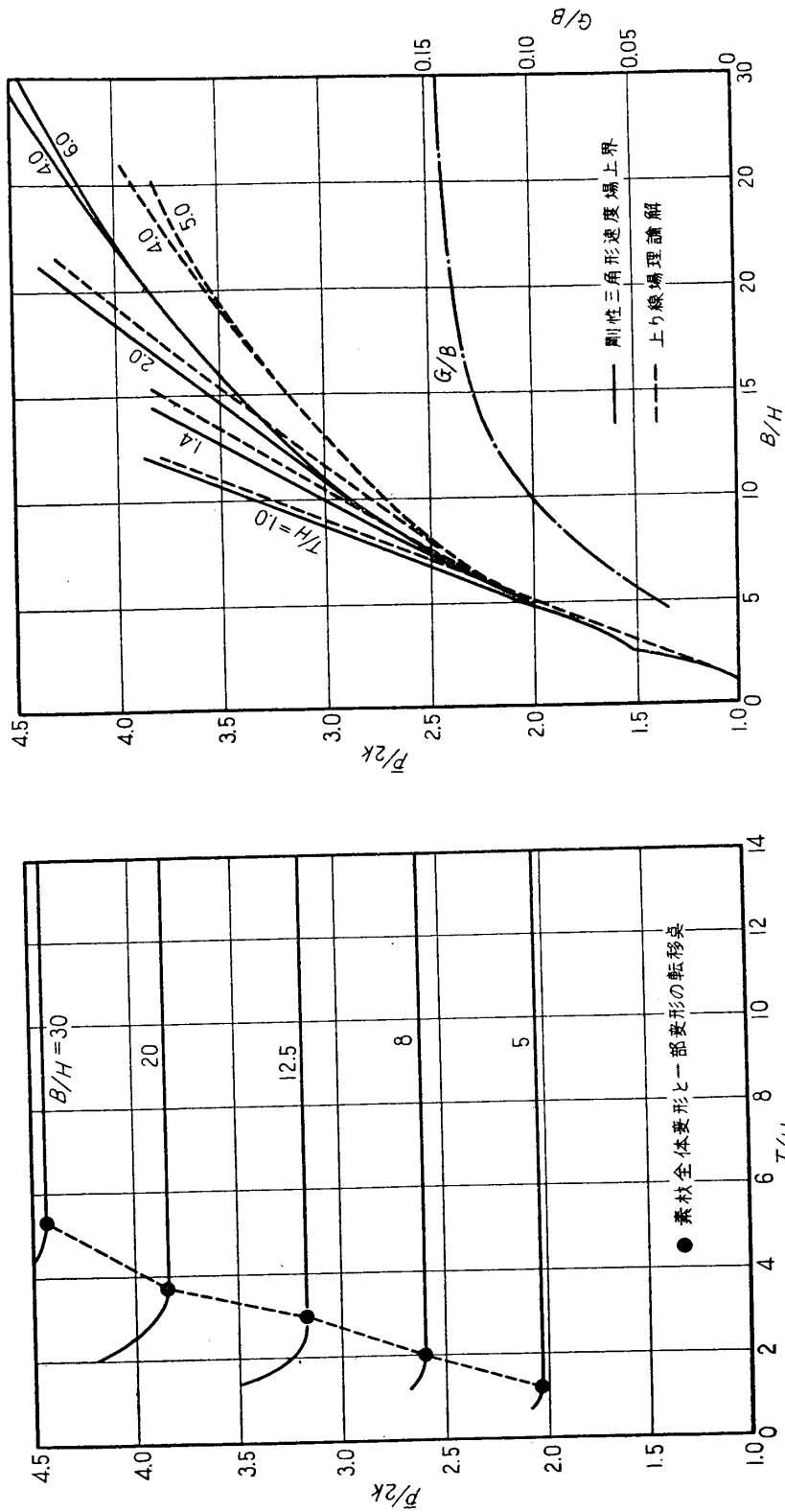
1.1.16 図に見られるような図表から各領域の e_i を求め (1.2.8) 式を極小にするようにすると, $\bar{p}/2k$ の極小値と T/H の関係は第 1.2.14 図 (a) のごとくなる. すなわち, ある与えられた B/H に対し T/H が 1 に近づくとも $\bar{p}/2k$ は高くなる. しかし逆に T/H が増すと, 極小点●印を経てふたたび上昇する. そこで●印より右では素材の下方の一部が剛性領域としてとどまり第 1.2.12 図 (b) よりむしろ (c) のように変形層の深さ G と H の和が, 上記の極小点の T に等しいような変形様式の方が低い $\bar{p}/2k$ を与えることがわかる. なぜなら, 剛塑性境界面 368 上においては, 迂り抵抗係数は粗い凹み底面上と同じく $1/2$ であるからである. したがって T/H が大ききなところでは $\bar{p}/2k$ は第 1.2.14 図 (a) のように水平線となる.

第 1.2.14 図 (a) のパラメータと横座標を交換してプロットしたものが第 1.2.14 図 (b) である. 図中, ある B/H に対して最低の曲線の縦座標はまた, 上述の議論からその曲線に附されている T/H よりも大なる T/H についても共通に適用される. $T/H=1$ なる曲線は粗い平らな下型で厚さ H なる素材を圧縮するのと同等である. 図にはまた変形層の深さ G と B の比も示してある. 図の破線は Ross による完全解であり, 著者の上界はこれに比べて実用上十分に近い. すなわち, B/H が大きくなるとともに差は大となるが, 最大 10% 程度である. 第 1.2.13 図の左側には Ross による迂り線場を示してあり, 右側の $\bar{p}/2k$ を最低にする著者の速度場に似ていることがわかる. なお上の結果は下型凹み側壁面が滑らかな場合に対しても共通である.



第 1.2.15 図 滑らかな上下型による作頭における速度場

次に上型および下型が滑らかな場合を考えよう. 前と同じく各領域間の相対迂りがなるべく小さいような速度場を第



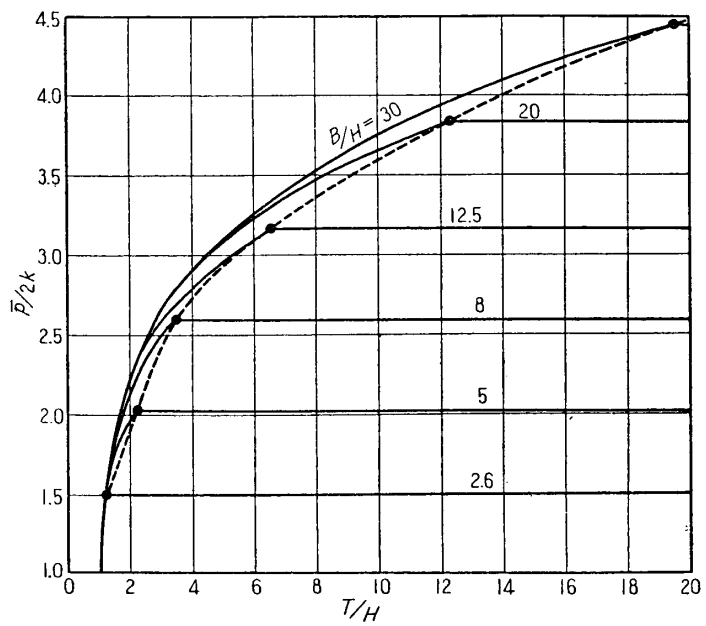
(a) 第1.2.14図 滑らかな上型, 粗い下型による作頭加工における圧力上昇比

(b)

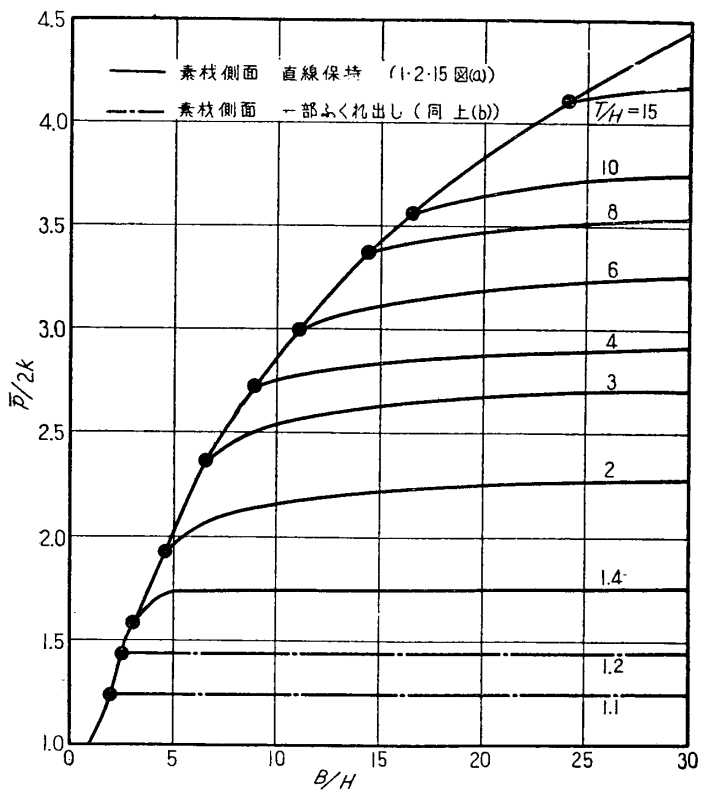
1.1.1 表から選ぶと第 1.2.15 図 (a) および (b) のようになる。(a) の場合, 領域 ①, ②, ③ は ssss (i), srsr (ii), rrs と rrs に相当する。なお図に見られるように, 第 1.1.1 表中の速度場をそのまま使用するときには領域 ① と ② または ③ との境界面上の一部 59 で相対迂りは避けられないから (1.2.8) 式に $|H-(T/2)|/2B$ なる補正項を加える必要がある。第 1.2.15 図 (b) は T/H が 1 に近いとき考えられるもので, このとき素材側面 12 は変形後平面を保たない。このような場合には, 素材全体 1378 を上面 17 による圧縮と, 下方側面 23 における半無限体への押込過程 (1.3.1 参照) と考えることができる。そうすると押込速度は $B\dot{V}/T$, 押込面積は $T-H$ であり, 押込圧力上界比は後述のように 2.65 ((1.3.2) 式) である一方, 素材全体の速度 \dot{V} なる圧縮に対する e の値はほぼ 1 (第 1.2.5 図) であるから

$$\bar{p}/2k \doteq 1 + 2.65 \frac{(1-H/T)}{(1.2.9)}$$

なる簡単な式を得る。同様に T/H が大きいときは変形過程を全体の圧縮と, 横方向の押出過程 (1.4.1 参照) と分



第 1.2.16 図 (a)



第 1.2.16 図 (b)

滑らから上下型による作頭における圧力上界

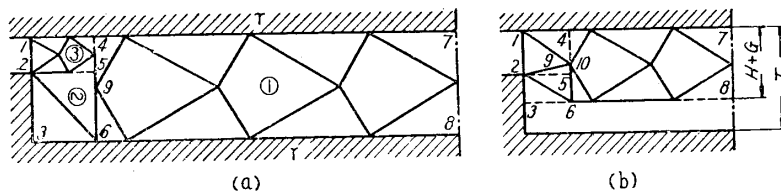
けて考えることができるが、これは第 1・2・15 図 (a) による上界よりも低い上界を与えなかった。

前と同様にして求めた $\bar{p}/2k$ の計算結果は第 1・2・16 図に示してある。この場合は (a) のように一定の B/T に対し T/H が増すと $\bar{p}/2k$ は一様に高くなる。この値が上型滑、下型粗で同じ B/T , $T/H=\infty$ に対する $\bar{p}/2k$ (第 1・2・14 図) に等しくなると (●印), 再び素材下方一部分は剛性領域となる。しかしこの移り変りの起る T/H の大きさは、前の場合に比べてかなり大きい。第 1・2・16 図 (b) において $T/H=1.1$ および 1.2 を鎖線にしたのは、この場合には第 1・2・15 図 (b) の速度場が対応したからである。この図の●印も前と同じく素材全体変形と一部変形の移り変りの点を示す。この図を第 1・2・14 図 (b) と比較すると、作頭加工においては、素材の入る下型の凹み内をも潤滑することはとくに凹みが浅いときは加工圧力低下のために有利であることがわかる。

最後に上、下型とも粗い場合を考える。この場合、考えられる速度場は第 1・2・17 図 (a), (b) のごとくである。第 1・2・15 図 (b) に似たタイプは、上型滑、下型粗の場合と同じく、計算した条件内では低い上界を与えなかった。図の場合は各領域に対し第 1・1・1 表の $srrr$ (i), $rrrr$ (ii), rrr と rrr が対応するが、領域 ① においては図のような速度場を用いるときは

$$e_1 = (\text{IV}) \text{ 式 } (H = a_1/2) + a_1/4 \quad (1.2.10)$$

を使わなくてはならない。また今の場合 (1.2.8) 式で $f_{1r} = 1/2$ となる。 $\bar{p}/2k$ を計算する



第 1・2・17 図 粗い上下型による作頭における速度場

には (1.2.8) 式にわずかな量ではあるがさらに境界面 456 上での相対送り (または相対送りがないこと) による補正項を付加する

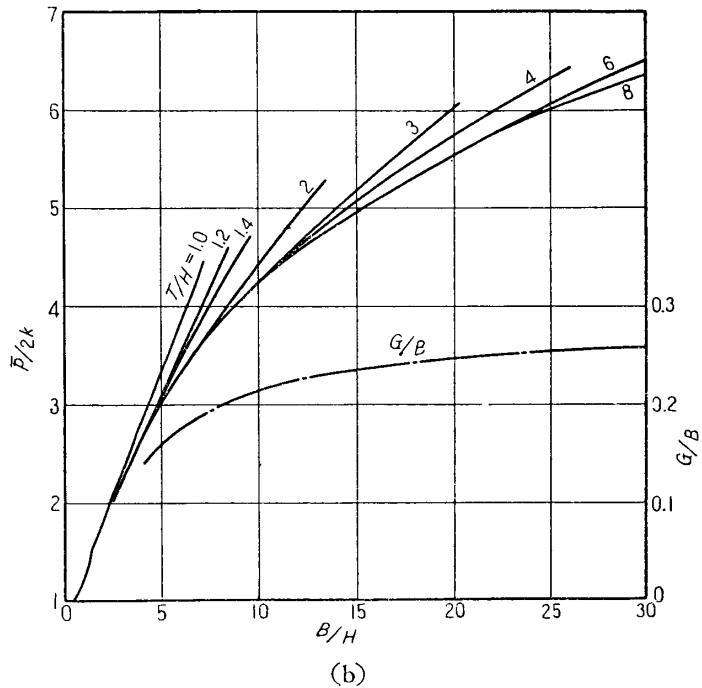
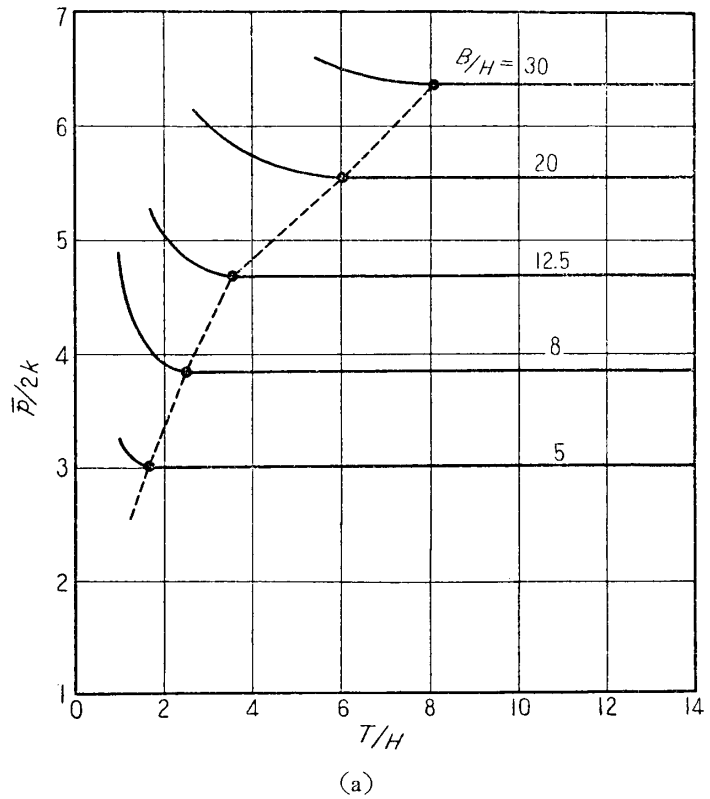
必要がある。これは第 1・2・17 図 (a) のタイプでは $-H/2B$ である。何故ならここで e_1 および e_3' に対して用いた式は面 45 上全体で粗い面に対して速度 \dot{V} なる相対送りが起る場合に対するものだからである。 $H/\xi \cdot B > 0.72$ においては領域 ③ の速度場は第 1・2・17 図 (b) のようになるが、このときの補正項は $3H/2 < T$ に対し $-3H/8B$, そうでないときには $(3H/8B) - (T/2B)$ となる。

計算結果は第 1・2・18 図に示されている。予想されるように $\bar{p}/2k$ は前の場合に比べて全体的に高い。 $\bar{p}/2k$ と T/H の関係は上型滑、下型粗のときと同じく計算上極小点が現われるので、その点より大きな T/H に対しては $\bar{p}/2k$ は一定となる。また第 1・2・18 図 (b)

の鎖線に示されるように、 $T/H = \infty$ のときの変形層の深さは、はじめの二つの場合よりも深い。またこの結果は下型凹み側壁が滑らかな場合に対しても共通である。

上述の諸結果は、下型凹みの側壁が滑らかならば、下型が二つの部分から成って上型と下型側面が静止し素材の底面を上方に押上げる逆作頭の場合にもそのまま適用できる。この逆作頭で側壁が粗い場合には (1.2.8) 式の $\bar{p}/2k$ に、凹み側壁上の迂り抵抗による分 $\{(T/B) - (H/B)\}/2$ を付加すればよい。

また、作頭工程が進んで、上下型面の上に頭部が形成された段階についても、その左側面が垂直平面と仮定してよいならこの部分の圧縮および全体としての左方への移動によるエネルギー消費率を考慮に入れることにより、加工圧力上界は簡単に求まる。この際、 $\bar{p}/2k$ を極小にする領域 ② と ③ の中 ξB の大きさは張出した頭部には影響されないから、上に求めた結果を利用することができる。しかし頭部のふくれ出し長さが H に比べて小さいときは材料のふくれ出し部と、型凹み直上部を一緒に考えた速度場の方がよい上界を与えるようである。



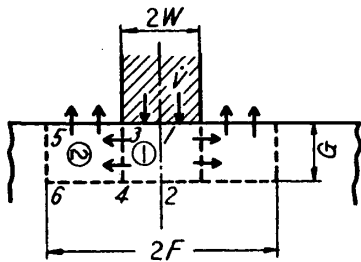
第 1.2.18 図 粗い上下型による作頭加工における圧力上界

1.3 押込加工

素材表面の一部分に工具で圧力を加え凹みをつける押込加工は、刻印、サイジング加工などにしばしば見られるものである。また解析的研究も本問題に対しては圧縮加工と並んでもっとも多く研究されている。

1.3.1 半無限体への押込

第 1.3.1 図に見られるように半無限体材料に平面ポンチを押込む問題は古くは Prandtl



第 1.3.1 図 半無限体への平面ポンチ押込みにおける領域区分

[30] により、また一般的には Hill [31] により取扱われた。これらの迂り線場解によると初期流れを生じさせる押込圧力と $2k$ の比は $1+(\pi/2)=2.57$ である。Shield および Drucker [13] は本問題を極限定理法で解き、上下解とも上と同じ値を得た。彼らの上界を求める際用いた速度場は 1.1.2.3 で述べた剛性三角-有心扇形速度場の特別な形式である。以下に、この問題を剛性三角形速度場のみで調べて見よう。

素材のポンチから遠い部分は剛性領域であるとする、

第 1.3.1 表 半無限体への押込解析のための領域区分と諸元

領域	縦横比 a_i	加圧面積 A_i	加圧速度 \dot{V}_i
①	G/W	G	\dot{V}
②	$(F-W)/G$	W	$W \cdot \dot{V}/G$

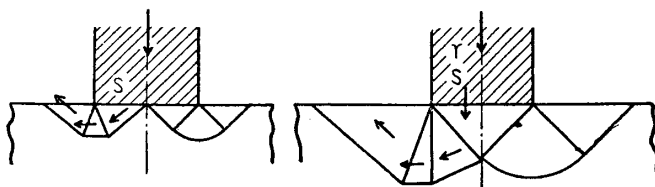
第 1.3.1 図のように中心軸の片側に二つの単位矩形変形領域 ①, ② を考えるのが自然である。これらのそれぞれに対する縦横比 a_i , 加圧面積 A_i , 加圧速度 \dot{V}_i は第 1.3.1 表のごとくなる。したがってそれぞれの領域に対する e の値を

e_1 および e_2 とすればポンチの圧力上界比は

$$\bar{p}/2k = \left(\sum_{i=1}^2 e_i \cdot A_i \cdot \dot{V}_i \right) / W \cdot \dot{V} = e_1 + e_2 \tag{1.3.1}$$

となる。いまポンチ面が滑らかならば、中心軸に対する対称性から領域 ①, ② は第 1.1.1 表の $ssrr(i)$ および $rrrr$ と考えてよいことがわかる。ところが (1.3.1) 式中の e_1 と e_2 はそれぞれ a_1, a_2 の函数であり、今の問題においては、 a_1 と a_2 はそれぞれ独立にどのような値をもとり得る。そこで e_1 と e_2 が各々最低になるような a_1, a_2 を選べば、 $G/W = \sqrt{7}/4$ または $4/\sqrt{7}$, $(F-W)/G = 4\sqrt{7}$ を得、このとき

$$\bar{p}/2k = \sqrt{7}/2 + \sqrt{7}/2 = 2.65 \tag{1.3.2}$$



(a) ポンチ面滑 (b) ポンチ面滑または粗
第 1.3.2 図 半無限体への押込における最適剛性三角形速度場と迂り線場の比較

を得る。これは上述の正解よりも 3% 高いだけである。第 1.3.2 図 (a), (b) の左側に、このような速度場を示すが、これらは Prandtl および Hill による迂り線場 (右

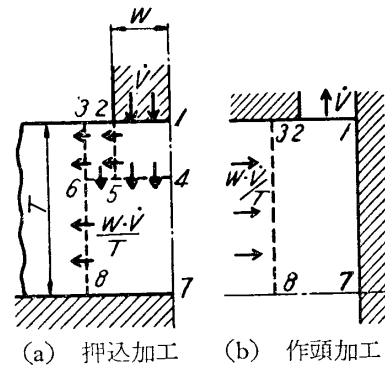
側)によく似ている。

ポンチ面が粗い場合は領域 ① は $srrr(i)$ であり, e_1 は縦横比 $D/W=4/\sqrt{7}$ (第 1.3.2 図 (b)) のときのみ極小となるが極小値はやはり前と同じなので $\bar{p}/2k$ も (1.3.2) 式で与えられる。

押込を深く行う場合については適当な速度場は今のところわからなかった。

1.3.2 有限厚さの素材への押込

押込加工を受ける素材板厚 T がある有限の大きさ以下になると変形領域が素材厚さ全体を貫いて下型面に達することが考えられる。下型面が滑らかであるか上下対称の押込加工ならば押込圧力上限および速度場は前章の作頭加工の解析結果をそのまま使用できる。すなわち第 1.3.3 図 (a) のように対称軸の片側のみ考えると 12 面を平面ポンチで押下げられることによりポンチ直下でない材料が外形を保ったまま全体として左方に動くものと仮定しよう。したがって、これは図 (b) に見られるように、滑らかな型の凹み中の長さが非常に長く巾 T なる素材を、滑らかな上型面 17 との間で作頭する初期過程の材料の流れの方向を反対にしたものと同等と考えてよい。なぜなら作頭加工に対して使用した速度場によれば図 (a) の 12 面は平面を保ったまま水平に上方に動くからである (第 1.2.13 図)。しかもこの面は上型面 17 に対して直角方向に動かないから、押込加工用ポンチの面が粗い場合にも上の類同は成立する。

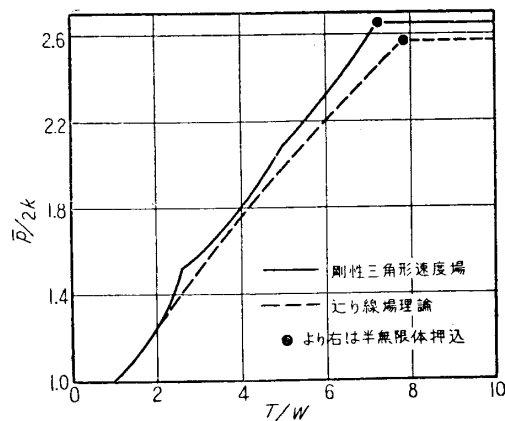


第 1.3.3 図 有限厚さの板への押込加工と作頭加工との類同

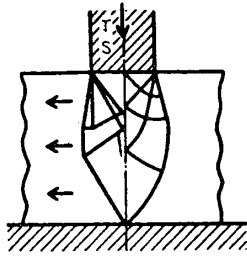
したがっていま両加工に共通の速度場を使用するときは, \dot{V} なる速度で押込を行う際の内部エネルギー消費率 \dot{E}_i は, 対応する寸法の作頭を $W \cdot \dot{V}/T$ なる速度で行う際の内部エネルギー消費率 \dot{E}_h に等しいはずである。それゆえ第 1.2.14 図 (b) において $T/H=\infty$, $B/H=T/W$ に対する上界比を $\bar{p}_h/2k$ とすれば, $\dot{E}_i = \dot{E}_h = (\bar{p}_h/2k) \times 2k \cdot W \cdot \dot{V}/T$ が得られ, したがって押込圧力最低上界比として

$$\bar{p}_i/2k = \dot{E}_i/2k \cdot W \cdot \dot{V} = \bar{p}_h/2k \quad (1.3.3)$$

を得る。そこで押込圧力上限比と T/W の関係は第 1.2.14 図 (b) から直ちに第 1.3.4 図実線のごとく得られる。ここで T/W が 8.3 以上になると半無限体に対する押込の上界比の方が低くなるので図のように水平線となる。この限界 T/W の値は, 押込試験で要求される T/W の最低値と大体一致している。図中にはまた Hill [32] による迂り線場理論の解が破線で示されているが, 実線はこれに十分よく一致



第 1.3.4 図 有限厚さ板への押込加工におけるポンチ圧力上限

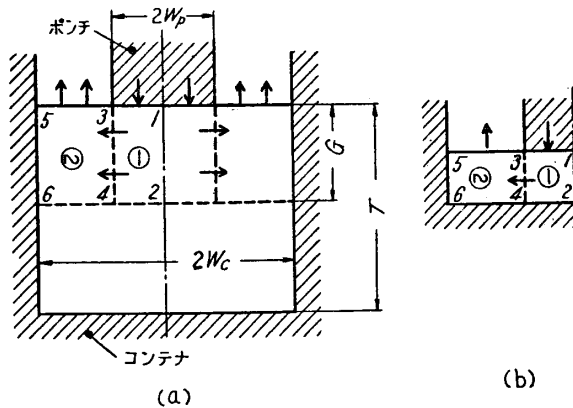


第 1.3.5 図
有限厚さ板への押込における最適剛性三角形速度場と迂り線場

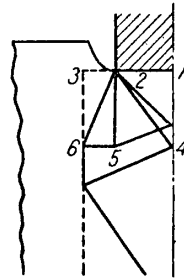
出た材料表面がポンチ面よりも上方にあるとしても、前と同じ速度場を使えば内部エネルギー消費率は変わらないからである。他方、板巾 $2B$ がポンチ巾 $2W$ に近づくとき第 1.3.7 図のような速度場が低い上界を与える。もし $T \geq B + W$ ならば、上界比は $(B + W)/2W$ に等しい。このような変形は自由穿孔や Ehrhardt 穿孔法の初期に見られるものに似ている [20] [34].

1.3.3 コンテナ内の素材への押込

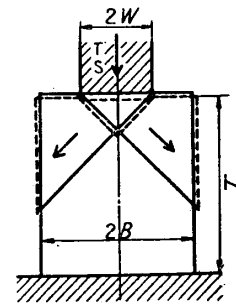
上に見たように有限寸法の素材に押込加工を行うと側面がひろがるので、それを防ぐため



第 1.3.8 図 コンテナ内の素材への押込加工解析のための領域区分



第 1.3.6 図
有限厚さの板への有限量押込後の状態



第 1.3.7 図
有限巾の素材への押込加工に対する一つの速度場

には素材をコンテナ中に入れ拘束押込加工を行う方法がとられる。いま第 1.3.8 図 (a) のように素材厚さ T が十分大きいときには、素材下部は剛性領域と見なし、第 1.3.1 図に似た領域 ① と ② を考えよう。そうすれば押込圧力上界として (1.3.1) 式をそのまま使用できる。ただしこの際、領域 ①, ② の縦横比 $a_1 = G/W_p$ と $a_2 = G/(W_c - W_p)$ の間には

$$a_2 = \frac{1-R}{R} \cdot \frac{1}{a_1} \quad (1.3.4)$$

なる関係がある。ここに $R = W_p/W_c$ で

することがわかる*。また彼の迂り線場と、著者の速度場を比較したものが第 1.3.5 図であるが、両者の間の類似は明らかである。

上に述べた押込と作頭加工の類同は Green [33] によっても指摘されている。もっとも彼は作頭でなく後章で述べる側方押出加工と押込加工を比べたのであるが、側方押出加工と逆作頭とはほとんど似ている。さらに第 1.3.4 図の Hill の圧力解と第 1.2.14 図 (b) の Ross の解とは $B/T = T/W$ とすれば彼らの示した線図から読み取れる精度内で両者は一致している。

ここに述べた上界および速度場は有限変形後にもまた使用できる。すなわち第 1.3.6 図に見られるように、ポンチ直下から外に

* 文献 [32] の $\bar{p}/2k$ の値および迂り線場は厚さ $2T$ なる素材を上下対称に押込加工する場合にのみ正解であり、第 1.3.3 図 (a) のように滑らかな下型の上で上方から押込を行う場合には圧力および迂り線場は修正を要することが Hill, *R. J. Mech. Phys. Solids*, **1** (1953), p 267 に述べられている。しかしこの $\bar{p}/2k$ の修正量はきわめて少い。

ある。したがって半無限体への押込の場合のように a_1 と a_2 を独立に選ぶことはできない。またコンテナ側面が滑らかなときは領域 ② の境界条件は rrs に相当する点が前と異なる。(1.3.1) および (1.3.3) 式を用い、さらにすでに第 1 章で求めてある e_1, e_2 の図表を使用すれば $\bar{p}/2k$ を最小にする変形層深さ G および最低上界比が得られる。

特別な場合としてポンチおよびコンテナ面が滑らかで R があまり小さくないときには第 1.1.1 表から e_1 および e_2 はそれぞれ a_1 および a_2 の同じ函数であることがわかる(第 1.1.1 表 $ssrr$ (i), rrs 参照)。この函数を単に e として表わせば (1.3.1) および (1.3.4) 式より

$$\bar{p}/2k = (e)_{a=a_1} + (e)_{a=(1-R)/Ra_1} \quad (1.3.5)$$

を得る。そこで e が (1.1.44) 式の形をもち、かつ小なる a に対して $g_i > c_i$ ならば a_1 に対する極小条件から

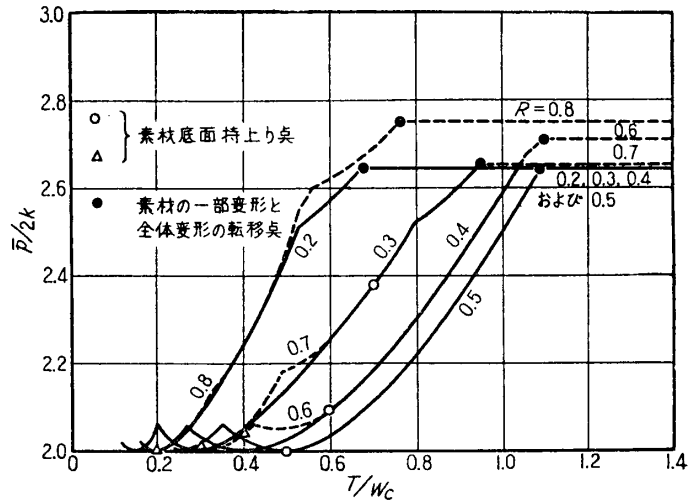
$$a_1 = a_2 = \sqrt{(1-R)/R} \quad (1.3.6)$$

でこのときの $\bar{p}/2k$ の極小値は $\bar{p}/2k = 2\sqrt{(1-R)/R} \times$

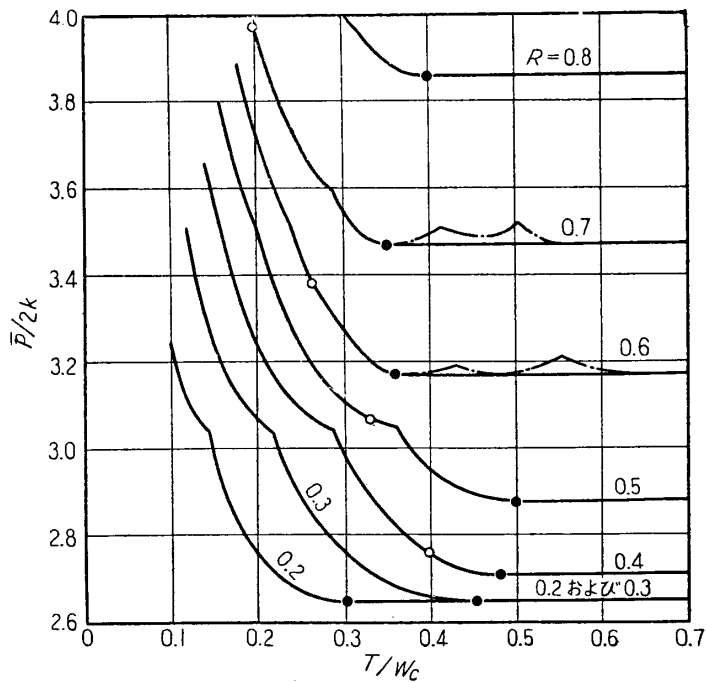
$$(e)_{a=\sqrt{(1-R)/R}} \quad (1.3.7)$$

により解析的に表示できる。第 1.3.9 および第 1.3.10 図の水平線はポンチとコンテナ面が滑らかな場合および粗い場合に対してそれぞれ求めた $\bar{p}/2k$ である。第 1.3.9 図において $R \leq 0.5$, 第 1.3.10 図において $R \leq 0.305$ に対しては半無限体の押込と同じになり素材自由面の一部のみが持上る。このとき $\bar{p}/2k$ は前と同じく 2.65 である。一方 R が大きくなるとともに上界比は高くなる。第 1.3.11 および 12 図 (a), (b) は対応する速度場を示した。

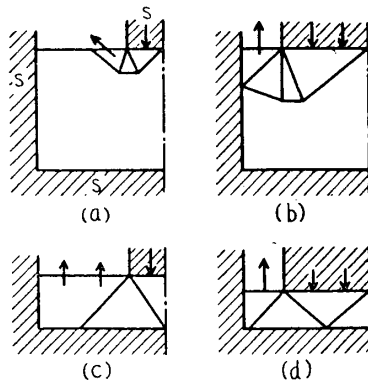
素材板厚 T が小さい場合には第 1.3.8 図 (b) のような



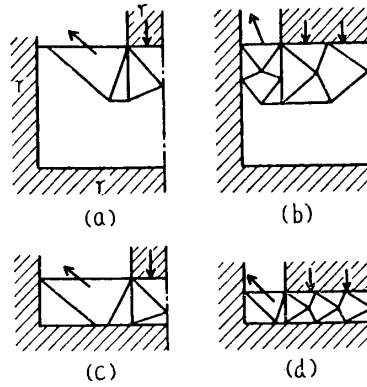
第 1.3.9 図 コンテナ内の素材への押込におけるポンチ圧力上界。滑らかな工具の場合



第 1.3.10 図 コンテナ内の素材への押込におけるポンチ圧力上界。粗い工具の場合



第 1.3.11 図 滑らかな工具による拘束押込加工における剛性三角形速度場



第 1.3.12 図 粗い工具による拘束押込みのさいの剛性三角形速度場

変形領域を考える。この場合には(a)のときの G の代りに T を用いるが(1.3.1)と(1.3.3)式は同じく成立する。また今の場合には領域②の底面4は下型面から離れて持上ることが許される。

第 1.3.9 および 1.3.10 図の \circ および Δ は (\circ は実線, Δ は破

線に対応), これより小さな T/W_c に対してはこの持上りが起ることを示している。前と同様にして $\bar{p}/2k$ を計算できるが, ここでは α_1 と α_2 は R と T/W_c が与えられれば定まるので計算は簡単である。第 1.3.9 図に見られるように, 工具面が滑らかなときは領域①と②の境界条件はそれぞれ $sssr(i)$ および srs に相当し, 計算した $\bar{p}/2k$ は T/W_c が小さいと②に収斂するが, T/W_c が増すとともに $\bar{p}/2k$ は上昇し, ついには $T/W_c = \infty$ に対する上界比と等しくなる (\bullet 点)。したがってこの点より大きな T/W_c に対しては第 1.3.8 図 (a) の変形様式の方が低い上界比を与える。第 1.3.9 図の \bullet 印より左方曲線はまた R が 0.2 と 0.8 の間ではある R と $1-R$ に対する $\bar{p}/2k$ はほぼ等しいことを示している。

工具面が粗い場合(第 1.3.10 図)は T/W_c が大きくなるとともに $\bar{p}/2k$ が低下するがこの値は同じ R で $T/W_c = \infty$ に対する値と一致する \bullet 点において極小となり, 第 1.3.10 図 (b) のように全体が変形するものとするときこれ以上の T/W_c に対して再び $\bar{p}/2k$ は上昇する。そこでこの場合には素材下方に剛性領域の残る第 1.3.8 図 (a) の速度場が対応すべきことがわかる。なお $R=0.6$ および 0.7 に対する鎖線は, 計算の結果, 計算誤差範囲内で同じ極小値をとる点が幾つもでてきたことを示す。このようなときは $\bar{p}/2k$ が一定となる T/W_c の値がいくらかは不明である。

薄い素材に対する速度場の例は第 1.3.11 図 (c), (d) および第 1.3.12 図 (c), (d) に示した。ここに見られるような素材両端部の持上りは実際の加工にもしばしば見られるものである。

なおこの押込加工で加工がある程度進むと後で述べる穿孔あるいは押出鍛造と同じことになる。また R が大きい場合には, 後章でも明らかなように素材単位面積当りの初期押込圧力上界は対応する条件の下での押出または押出鍛造圧力上界と一致する。一方 R が小さいとき, 押込過程から穿孔過程にどのように移るかを解析することは困難である。

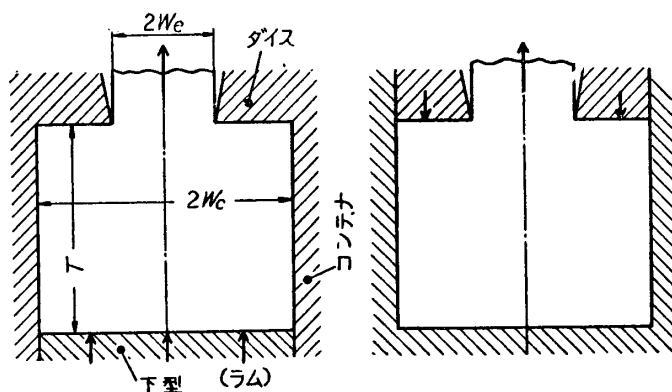
1.4 押出および上昇穿孔加工

素材がその表面の大部分を工具によって拘束されながら圧力を加えられ, 工具の間隙より

外部に流出させられるような加工は押出加工と呼ばれる。上昇穿孔加工とは後で見られるように作られる製品の形の上の名前で、本質的には押出加工である。本章においては素材の長さが十分長く、加工中その一端に設けられた工具の押出口の近傍の一定領域内でのみ変形が起るような定常過程のみを取扱う。このような状態は、棒、管、型材のような長い製品を作る押出、穿孔作業の最初および最後以外の中間段階において見られ、解析的研究も最近かなり進められてきた。なお以下ではすべて工具の面はコンテナ壁に直角または平行とし、いわゆるテーパダイスまたはテーパポンチは取扱わない。

1.4.1 押出加工

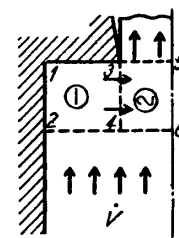
押出加工には第 1.4.1 図のごとくいわゆる前方押出と後方押出加工の区別がある。しかしながらコンテナ壁が滑らかであれば、材料の変形過程および所要圧力は両者でまったく同じである。



(a) 前方押出法

(b) 後方押出法

第 1.4.1 図 前方および後方押出法の区別



第 1.4.2 図 定常押出加工解析のための領域区分

本加工の解析に対しても差違って第 1.3.8 図 (a) と同じような領域区分を行うことにする

(第 1.4.2 図). 押出圧力は普通素材単位面積当りで示されるから、これに対する上界比は (1.3.1) 式を修正し

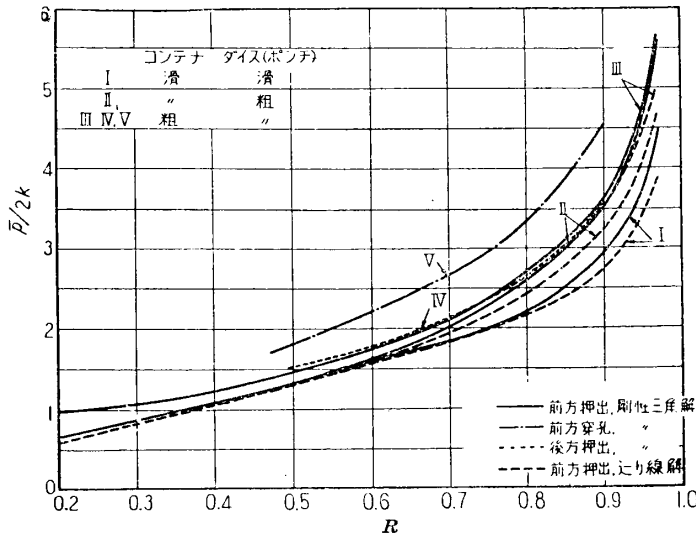
$$\bar{p}/2k = (e_1 + e_2)R \quad (1.4.1)$$

で与えられる。ここに R は断面減少比で

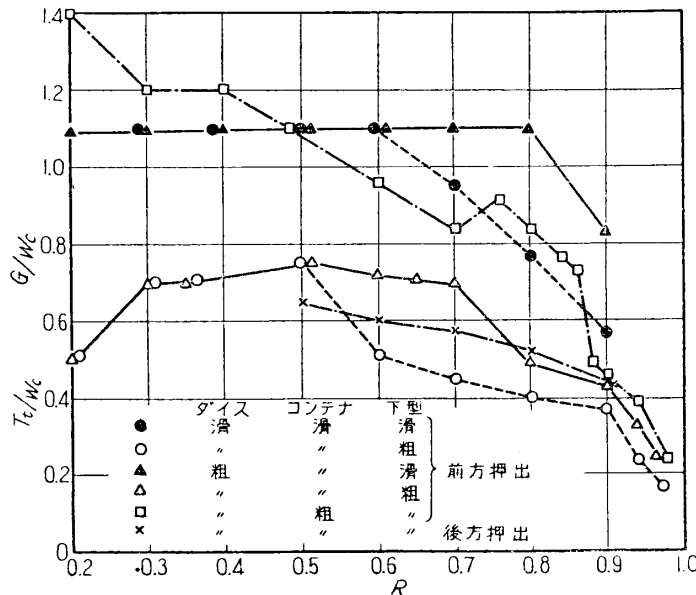
$$R = 1 - W_e/W_c \quad (1.4.2)$$

である。また a_1, a_2 の間には (1.3.4) 式が成立する。

まずコンテナが滑らかな場合を考えると領域 ② の境界条件は、上面 35 上ですでに押出された材料が剛性部分となって拘束を与えるから $rrsr(i)$ である。領域 ① に対してはダイス面が滑らかならば $ssrr(i)$ と考えることができ、ダイスが粗いときは $sr rr(i)$ である。(1.4.1), (1.3.4) 式および第 1.1.1 表とすでに求めてある e_1, e_2 の値から (1.4.1) を極小にする変形層の厚さ G を求め、(1.4.1) 式の極小値を計算すれば定常押出圧力の上界比が得られる。これらは第 1.4.3 図において R の函数として実線 I および II で示してある。両者は $R \leq 0.58$ でまったく一致する。なお (1.4.1) 式を極小にする G は定常変形層の厚さを示し、この値と W_e の比を第 1.4.4 図にそれぞれ \circ および \triangle 印で示してある。ダイス面が滑らかで $R > 0.6$ に対してはふたたび (1.3.6) および (1.3.7) 式が成立する。



第 1.4.3 図 定常押出, 上昇穿孔圧力上昇と断面減少比の関係



第 1.4.4 図 押出加工における定常変形層厚み G および定常より非定常への転移点 T_c

および G/W_c を求めたものが第 1.4.3 図の点線 IV および第 1.4.4 図の \times 点で示されている。

前方押出の場合には素材底面を下型(ラム)が押し上げて仕事を行う。この仕事の中には、素材を全体としてコンテナ壁に相対的に近らせるための仕事が含まれる。したがって下型面圧力上昇比は (1.4.1) 式を修正し

* Hill の押出に対する $\bar{p}/2k$ の線図は $R=0.2$ 近くで小さすぎるようである。そこで第 1.4.3 図には彼の穿孔ポンチ圧力解から換算したものをを用いた。

第 1.4.3 図にはまた Hill [35] および Johnson [36] が迂り線場理論で求めた対応する条件の下での押出圧力を破線で示してある*。ダイス面が滑らかな場合には両者の差は $R=0.45\sim 0.85$ においては 3% 以下できわめて良好である。また $R=0.20\sim 0.95$ では 10% 以下で実用上十分な精度を示す。しかしこの範囲外では差はさらに大となる。実線 I および II を Johnson にならって数式で表わせばコンテナおよびダイスが滑らかな場合

$$\bar{p}/2k \doteq 0.50 - 1.11 \ln(1-R) \quad (1.4.3)$$

コンテナ滑でダイス粗の場合は

$$\bar{p}/2k \doteq 0.30 - 1.47 \ln(1-R) \quad (1.4.4)$$

上式は $0.3 \leq R \leq 0.97$ においてそれぞれ計算された上界比を 5% 以内の精度で表示する。

次にコンテナ面およびダイス面が共に粗い場合を考えよう。この場合は前方および後方押出を区別する必要がある。後方押出においては領域 ① の境界条件は $rrrr(i)$, 領域 ② は前と同じく $rrsr(i)$ である。

上と同様の計算により $\bar{p}/2k$ お

$$\bar{p}/2k = (e_1 + e_2)R + f_c(T - G)/W_c \quad (1.4.5)$$

とする必要がある。ここに f_c はコンテナ壁上の迂り抵抗係数で、今の場合は $1/2$ とする。領域 ①, ② の境界条件はそれぞれ $rrrr(ii)$ および $rrsr(i)$ であるが、ここでは e_1, e_2 が G/W_c の函数であるとともに (1.4.5) 式の補正項も G を含むことに注意しなくてはならない。前と同じく G に関する極小値からラム圧力上界比を得るが、これは実際的前方押出過程にも見られるように T が減ると減少する。そこで便宜的に定常変形層の底面 246 上に作用する押出圧力上界比を求めたものが第 1.4.3 図の実線 III である。これは Johnson による解 (破線) と比較的よく合っているが、両者の値は定常変形層底面に対するもので、変形層の厚さが両者で異っているため、上の比較は余り意味がない。これは同じ摩擦条件の後方押出 (第 1.4.3 図点線 IV) と前方押出圧力の比較についても同じである。

前と同様実線 III は $0.3 < R < 0.97$ の範囲で

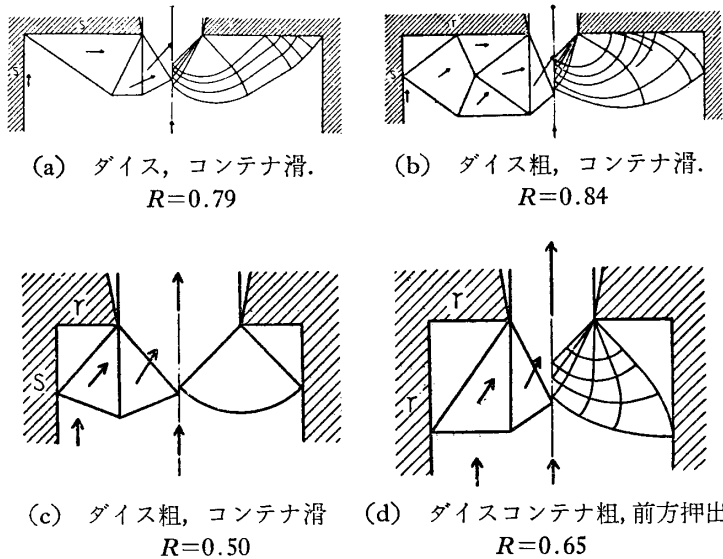
$$\bar{p}/2k \doteq 0.48 - 1.41 \ln(1 - R) \quad (1.4.6)$$

によって近似させることができる。

定常変形層深さ G と W_c の比は第 1.4.4 図に口と×印で示す。粗い工具による前方押出における G/W_c は R が大きくなると Johnson の求めた値 (第 1.5.6 図●印) に比べてかなり小さい。

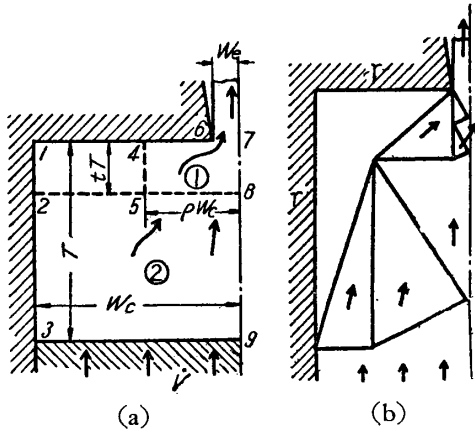
第 1.4.5 図には上にいろいろな条件の押出に対して得られた最適速度場を Hill および Johnson が求めた迂り線場と比較してある。図から明らかなように両者の速度場の間にはかなりの類似性が見られ、デッド・メタルや剛塑性境界線はほぼ一致している。

第 1.4.4 図および 1.4.5 図からわかることは一般に断面減少率が 1 に近くなると変形層の深さは減少し、またダイス面上のデッド・メタルは収縮する。この際粗いダイスの方が滑らかなダイスの場合に比べ変形層は深く、デッド・メタルも大きい。とくにダイスが滑らかなときは大きな R に対しデッド・メタルは存在しない。他方 R が小さくなると変形層深さは増し、ダイスが粗でも滑でも全面にデッド・メタルが付着する。コンテナが滑らかな場合には R が 0.5 以下で G はふたたび減少した。特にコンテナが滑らかでダイスが粗いときは G/W_c は $R=0.5$ に関して対称である。コンテナの粗い前方押出では変形層は比較的深く、デッド・メタルももっとも顕著である。これらの変形模様はすでに経験的に知られている押出加工中の変形状態とよく一致している。



第 1.4.5 図 押出加工における最適剛性三角速度場と迂り線場の比較

すでに述べたように粗い工具を用いたとき断面減少比の大きな前方押出では著者の解が迂り線場解とかなり違っていた。これを改善する試みの一つを次に述べる。いま R が大きいとき押出過程を第 1.4.2 図のような二つの単位矩形変形領域から成ると考えず、第 1.4.6 図のように ①, ② の二つの単位押出過程と見て見よう。この各々については前と同じくそれぞれ二個の単位矩形変形領域をもつとし、また領域 1245 は剛性領域で、押出領域 ①



第 1.4.6 図 断面減少比大なる押出に対する解の改良のための領域区分および速度場

に対しては粗いコンテナの役を、②に対しては粗いダイスの役を果しているとする。第 1.4.6 図の記号に従えば各押出領域の断面減少比 r_i および、押出速度 \dot{v}_i は

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= (\rho - 1 + R) / \rho, \quad \dot{v}_1 = \dot{V} / \rho, \quad \text{領域 ①} \\ r_2 &= 1 - \rho, \quad \dot{v}_2 = \dot{V}, \quad \text{領域 ②} \end{aligned} \right\} \quad (1.4.7)$$

となる。そこで各押出領域の底面 58 および 39 に加わる押出圧力上界比をそれぞれ $\bar{p}_1/2k$, $\bar{p}_2/2k$ とすれば、全内部エネルギー消費率を考えて第 1.4.6 図の前方押出を行うに必要なラム面圧力上界比は

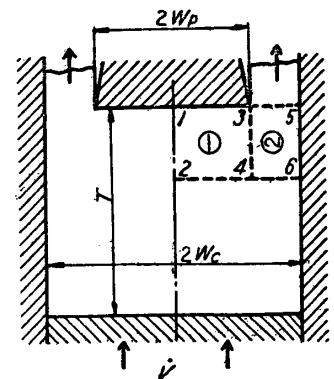
$$\bar{p}/2k = \bar{p}_1/2k + \bar{p}_2/2k \quad (1.4.8)$$

で与えられることがわかる。ここに $\bar{p}_1/2k$ は 45 面上の迂り抵抗のために領域 ① の深さ tT と ρW_c の比の函数でもある。また $\bar{p}_2/2k$ もコンテナ壁が粗いときは r_2 だけでなく $(1-t)T/W_c$ の函数である。したがって (1.4.8) 式は、一般に与えられた R と T/W_c について、 ρ および t に関する極小を求めなくてはならない。

$R=0.8$ および 0.9 で粗いコンテナおよびダイスによる前方押出に対し、この方法で押出圧力を求めたところ、前の簡単な速度場で計算したラム圧力上界比と比べ計算誤差範囲内で同じ結果を得た。そこでこの場合にはより低い上界は得られなかったが、対応する定常変形層の深さ G と W_c の比は $1.55 \sim 1.65$ であり、これは Johnson の解に一層近い、第 1.4.6 図 (b) にはこうして求めた速度場の一例を示してある。

1.4.2 上昇穿孔加工

第 1.4.7 図に見られるような上昇穿孔加工は、コンテナ壁が滑らかなときには図を対称軸から切って左右入れかえてつぎ合わせると押出加工とまったく同等になる。そこで速度場も、穿孔圧力上界も、前の結果をそのまま使うことができる。コンテナ壁が粗い場合には、この面上での迂り仕事を考えに入れる必要があり、(1.4.5) 式の第 2 項は $f_c T/W_c$ に改めなくてはならない。いま粗いコンテナによる前方穿孔の場合、定常変形層の底面に働く圧力上界比を前と同様に求めると、第 1.4.3 図に鎖線のようになる。今の場合、断面減少比は



第 1.4.7 図 上昇穿孔加工法解析のための領域区分

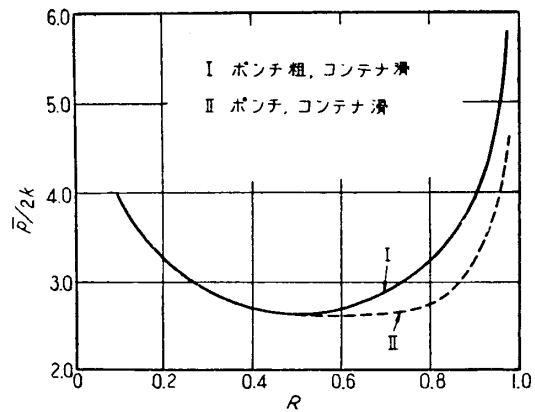
$$R = W_p / W_c \quad (1.4.9)$$

である。図を見ると R が大きいところでは同じ条件の押出加工（実線 I）と比べ所要圧力はかなり高いことがわかる。これは領域 ② のコンテナ壁との接触面 56 における相対すべり速度は、 R が大きくなると非常に高くなるためであり、薄肉容器の押出加工における潤滑の困難および重要性 [37] を裏書きしている。

なおコンテナ壁が粗い場合、ポンチ面より上方に流出した材料が垂直上方に案内されないときは、流出部が斜上方に進む方がわずかではあるがより低い上界を与えることは簡単にわかる。このような進み方は Green のプラスチックを用いた実験 [33] においても見られている。

穿孔加工においては、ポンチにもっとも高い応力が働くため、しばしばポンチ断面積に関する穿孔圧力が問題にされる。コンテナ面が滑らかな場合に対し第 1.4.3 図から ((1.3.5) 式参照) この圧力上界比を計算してプロットすると第 1.4.8 図のようになる。とくにポンチ面が粗いとき（実線）は、この値は $R=0.5$

に対して対称となることは Hill も述べている通りである [35]。このことは第 1.4.7 図で粗いポンチを用いて穿孔する過程は、 $W_e = W_p$ なる粗いダイス（第 1.4.1 図）で押出過程とまったく逆の過程であることを考えれば容易に理解できる。しかも滑らかなコンテナにおける穿孔と押出の同等性から断面減少比 R の穿孔ポンチ圧力上界比は断面減少比 $1-R$ のそれとまったく一致するはずである。ポンチが滑らかな場合には押出口での拘束の条件が異なるために上述の $W_e = W_p$ における押出と穿孔の類同は成立しない。



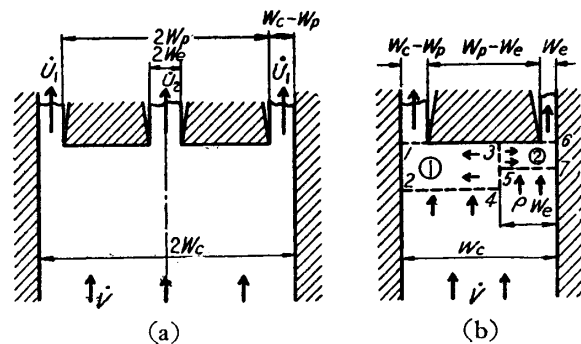
第 1.4.8 図 上界穿孔におけるポンチ圧力上界

第 1.4.8 図に示した対称性は、 R が 0 と 1 の近くではくづれるであろう。すなわち R が非常に小さいときには、 R が 1 に近い場合と異なり、ポンチ圧力が無限大になりそうもない。Bishop, Hill および Mott [38] は半無限体への円柱ポンチの深い押込を弾塑性問題として解き、材料降伏応力の約 5 倍のポンチ圧力を得、実験的に確めている。

1.4.3 特殊押出加工

1.4.3.1 並列押出

コンテナ内の一個の素材から、幾つかの押出口を有するダイスによって同時に何本かの棒材を押出す方法は、実際加工においても利用されている。Dodeja および Johnson [39] は 2 ないし 3 個の巾の等しい押出口が中心軸に対し対称に配列された平面ひずみ押出加工について、迂り線場理論による解をすでに得た。本



第 1.4.9 図 並列組合せ押出加工または非対称穿孔加工解析のための領域区分

節においては簡単のため、第 1.4.9 図 (a) のように中央に巾 $2W_e$ なる押出口があり、両側にコンテナ壁に沿って巾 $W_e - W_e$ なる押出口のあるような問題を取扱うことにする。ここで述べる議論はまた第 1.4.9 図 (b) のような非対称の上昇穿孔加工に対しても共通である*。さらにまた簡単のためにコンテナ壁が滑らか、もしくは後方押出という仮定を設ける。

まず第 1.4.9 図 (b) のように材料内に二つの単位押出領域を考えよう。面 354 は定常押出過程を通じて横方向には動かないとする。いま

$$R_1 = W_p/W_c, \quad R_2 = 1 - W_e/W_c \quad (1.4.10)$$

とすれば、 R_1 , R_2 は押出口がどちらか一方だけになったときの領域 ① および ② に対する断面減少比である。 R_1 , R_2 を用いれば第 1.4.9 図の全断面減少率は

$$R_t = R_1 + R_2 - 1 \quad (1.4.11)$$

で与えられる。また領域 ①, ② に対する断面減少率は

$$r_1 = (R_1 - \rho)/(1 - \rho), \quad r_2 = (\rho - 1 + R_2)/\rho \quad (1.4.12)$$

となる。そこでいまそれぞれの押出過程に対する押出圧力上界比を $\bar{p}_1/2k$, $\bar{p}_2/2k$ と表わせば、押出速度 \dot{V} における全内部エネルギー消費率は

$$\dot{E} = 2k \cdot \bar{p}_1/2k \cdot (1 - \rho) W_c \cdot \dot{V} + 2k \cdot \bar{p}_2/2k \cdot \rho W_c \cdot \dot{V} \quad (1.4.13)$$

であり、そこで素材断面に関する平均押出圧力上界比は

$$\bar{p}/2k = \dot{E}/2k W_c \dot{V} = \bar{p}_1/2k \cdot (1 - \rho) + \bar{p}_2/2k \cdot \rho \quad (1.4.14)$$

で与えられる。ダイス（もしくはポンチ）面が滑らかで、全断面減少比 R_t が小さくない場合にはすでに見られたように、領域 ① および ② に対する押出過程の速度場は、互の間の相対向きを生じない（第 1.4.5 図 (a) 参照）。そこで $\bar{p}_1/2k$ および $\bar{p}_2/2k$ はすでに普通押出加工または穿孔加工に対して得た結果（第 1.4.3 図）をそのまま使用できる。すなわち上式中の $\bar{p}_1/2k$ と $\bar{p}_2/2k$ は R したがって (1.4.12) 式により ρ のかん数であり、(1.4.14) 式を ρ に関して極小にすればもっとも低い押出圧力の上界を得ることができる。

いまさらに第 1.4.9 図 (a) においてはコンテナが滑らか、第 1.4.10 図 (b) においてはコンテナが滑または粗であると仮定すると、単位押出領域 ① と ② に対して摩擦境界条件が同一となるので、定常圧力上界比 $\bar{p}_1/2k$ および $\bar{p}_2/2k$ は R したがって r_1 , r_2 の同じ函数となる。そこで (1.4.12) 式を用い、(1.4.14) 式を ρ に関して微分し 0 と置けば、 $\bar{p}_1/2k$ が R に対して上方に凹なる函数である限り極小条件として

$$r_1 = r_2 = R_t \quad \text{または} \quad \rho = (1 - R_2)/(2 - R_1 - R_2) \quad (1.4.15)$$

を得る。このとき (1.4.14) 式の極小値は

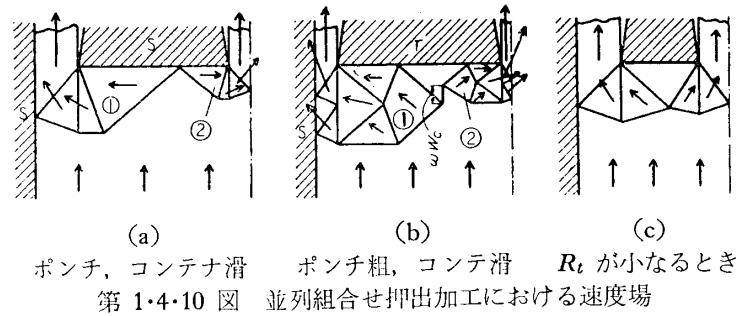
$$\bar{p}/2k = (\bar{p}_1/2k)_{R=R_t} \quad (1.4.16)$$

すなわち、上のような条件の下における組合せ押出圧力最低上界比は、同じ摩擦条件で断面減少比が R_t に等しい普通の押出における最低上界比と同じである。この上界に対する速度場の例を第 1.4.10 図 (a) に示す。

他方、 R が大で、ポンチ面が粗い場合には、すでに求めた普通押出圧力最低上界比に対応する速度場は第 1.4.10 図 (b) のごとくであり、この場合は両領域の材料の間に相対

* 非対称押出加工については文献 [33] の研究がある。

りが起る。この相対迂りがな
いように速度場を修正する
と、前の結果がそのまま使え
ないので、普通押出の速度場
をそのまま用いることにし、
その代り相対迂りにもとづく
付加項 $\omega/2$ を (1.4.14) 式
に加える。ここに ω は図の



ように、両領域間の相対迂り面の長さ W_e の比を表わす。 R が大きいと ω はきわめて
わずかな量なので、この場合にも (1.4.15) および (1.4.16) 式はほぼ成立する。

R が小さい場合には、ダイス面の粗さいかんにかかわらず両領域間の干渉の度合が大き
くなるから、例えば第 1.4.10 図 (c) のような、両領域の変形を同時に考えた速度場を用
いて計算をしないと良好な上界が得られないであろう。

極小条件から無迂り点の位置 ρ が知られば、それぞれの押出口からの下型面に対する
流出速度は

$$\dot{U}_1 = (R_1 - \rho) / (1 - R_1) \cdot \dot{V}, \quad \dot{U}_2 = (\rho - 1 + R_2) / (1 - R_2) \cdot \dot{V} \quad (1.4.17)$$

で与えられる。もし ρ が (1.4.15) で与えられるとすれば

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \quad (1.4.18)$$

を得る。

1.4.3.2 直列押出

第 1.4.11 図のようにダイスに段がついていて、途中で巾の異なる製品を押し出す場合を考え
る。この場合の上界は第 1.4.6 図について論じたように押出領
域を二つに分けて考えればよい。いま各押出領域に対し、断面
減少比はそれぞれ

$$R_1 = 1 - W_e / W_e', \quad R_2 = 1 - W_e' / W_e \quad (1.4.19)$$

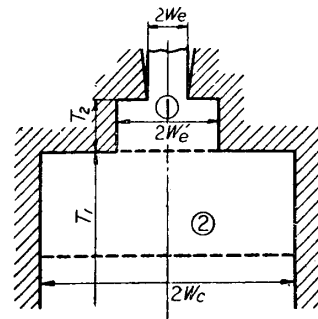
で与えられる。押出圧力上界は (1.4.8) 式から簡単に求められる。式中 $\bar{p}_1/2k$ および $\bar{p}_2/2k$ はコンテナおよびダイスの第一
段の凹みの側壁が粗いときにはそれぞれ R_1, T_1 および R_2, T_2 の関数である。もしコンテナおよび第 1 段の凹み側壁が滑
らかで、第 1 および第 2 段のダイス面が共に粗または滑であれば $\bar{p}_1/2k$ と $\bar{p}_2/2k$ は R_1, R_2 に関する同一の関数で与えら
れる。すでに述べたようにこのような関数は

$$\bar{p}_1/2k = \bar{p}_2/2k = m - n \ln(1 - R) \quad (1.4.20)$$

で近似されるから ((1.4.3), (1.4.4) 式参照), (1.4.8) 式に代入すれば

$$\bar{p}/2k = 2m - n \ln(1 - R_i) \quad (1.4.21)$$

を得る。この大きさは、ダイスが普通の段付でなく、断面減少比が $R_i = 1 - (W_e / W_e')$ に等
しい押出圧力の上界比に比べて m だけ大きい。 m はコンテナが滑らかならば 0.3~0.5 で
ある。これは段付ダイスにおいては、途中で材料の流れの向きが変えられるからであろう。

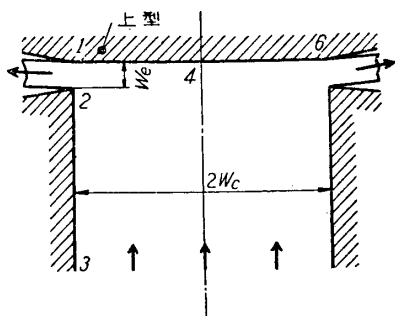


第 1.4.11 図 直列 2 段押出
加工における領域区分

段の深さ T_2 が小さくなると領域 ① と ② は互に独立した二つの押出過程よりもむしろ単一の押出過程に近ずき、押出圧力は (1.4.21) 式で与えられるものより小さくなり、 $T_2 \rightarrow 0$ の極限においては (1.4.20) 式で $R=R_i$ とした値をとる。

1.4.3.3 側方押出

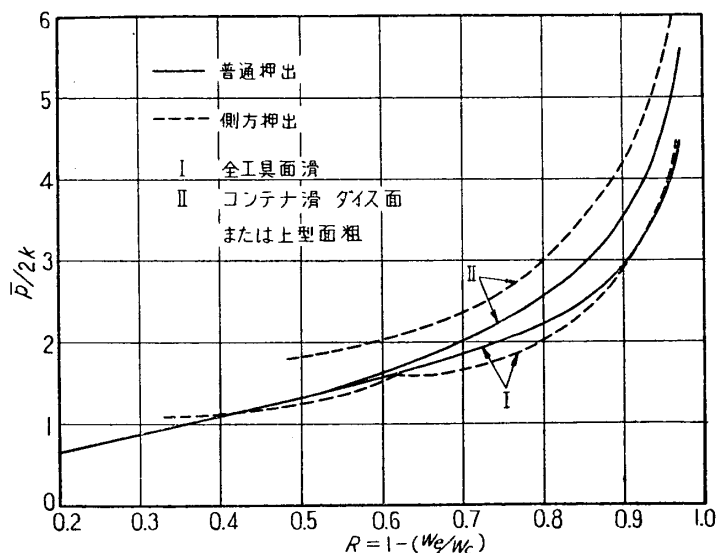
第 1.4.12 図のように、コンテナの一端に側方に押出口がある場合を考える*。これはすでに述べた作頭を底面を押上げて行う逆作頭初期の状態によく似ている。両者の相異は、押



第 1.4.12 図 側方押出加工

出加工においては、すでに押出された材料が押出口において変形領域内の材料に拘束を与える点である。しかし上型面 146 が滑らかな場合、および上型面が粗くても押出された材料の進行方向が第 1.4.12 図のように拘束されない場合には第 1.2.13, 1.2.15 および 1.2.17 図の速度場を適用しても出口においてすでに押出された材料と変形領域材料との間に相対迂りが生じないから、作頭の上界比をそのまま使用することができる。

第 1.4.13 図の破線はこのようにして第 1.2.16 図 (b)



第 1.4.13 図 普通押出と側方押出における
押出力上界の比較

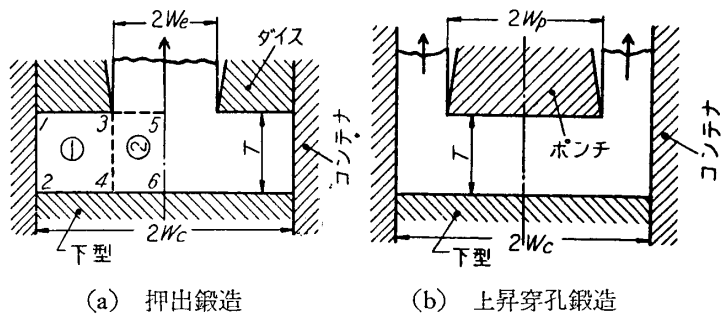
および第 1.2.18 図 (b) から読取った $T/H = \infty$ に対する $\bar{p}/2k$ を $R=1-(W_c/W_c)$ に関してプロットしたものであり、コンテナが滑らかな場合に対するものである。面白いことには、対応する摩擦条件の同一 R における普通押出圧力上界比 (実線) もほぼ同じ値を有することである。すなわち素材巾と押出口巾の比が一定なら、材料の流出方向が違ってても押出圧力はあまり変わらないことがわかる。

1.5 押出鍛造

コンテナ中の比較的短い素材の一部を工具によって押出し、押出部と押残り部が一体となったような製品を作る作業を定常的な過程の押出加工に対比して Sachs に習い押出鍛造と呼ぶことにしよう。最近広く行われるようになった衝撃押出加工は本法を機械プレスで高速に行うものである。第 1.5.1 図にはその概念図を示すが (a) はボルト状製品、(b) は底付容器状製品を作るものである。これらはそれぞれ前章で論じた長い素材の押出および上昇穿

* コンテナ途中に押出口があるものについての研究は文献 [33] に含まれている。

孔加工の終りの非定常段階に相当する。また (b) は第 1.3.8 図 (b) に見られるような薄い素材のコンテナ内での押込過程がある程度進んだものに相当する。いずれにしても押出, 上昇穿孔過程は本質的に同じものであるから, ここでは一括して押出鍛造としたが場合によっては穿孔鍛造を押し鍛造と区別した。

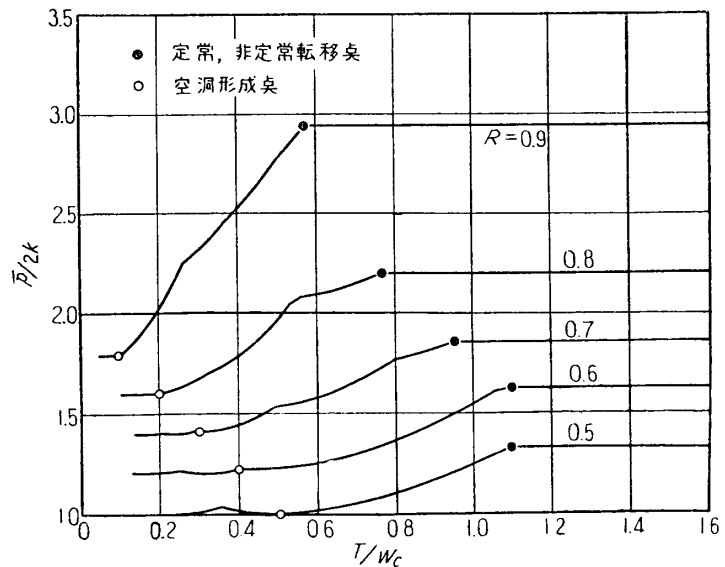


第 1.5.1 図 押し鍛造およびその解析のための領域区分

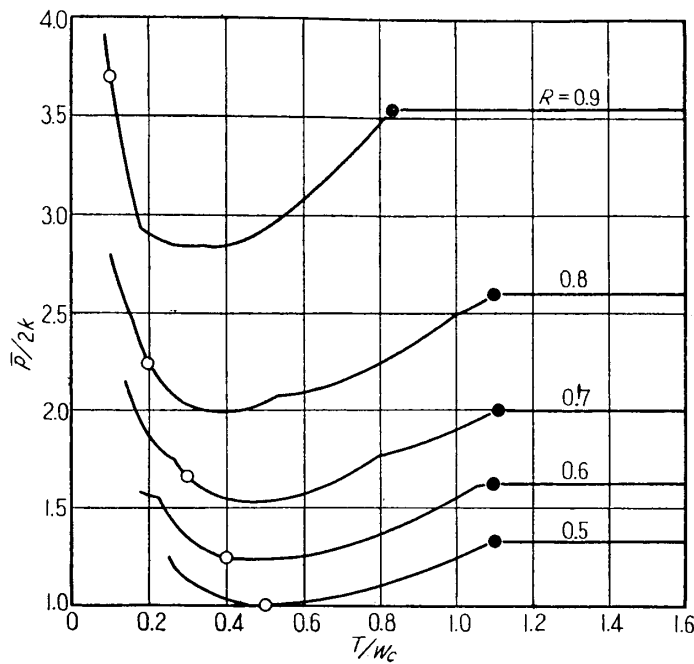
1.5.1 普通押し鍛造

本加工法の上界は, 第 1.3.8 図 (b) と同様の領域区分を行い, すでに押し出された材料による拘束を考慮に入れて (1.4.1) 式から前と同様の手続によって素材断面積についての加工圧力上界比を求めることができる。第 1.5.2~1.5.6 図はいろいろな潤滑および加工条件に対する $\bar{p}/2k$ と T/W_c の関係である。なおここに R は前章と同じ定義 ((1.4.2), (1.4.9) 式) である。これらにおいては T/W_c が 0 から大きくなるにつれて $\bar{p}/2k$ は増加または減少するが, あるところより上では, 前章でのべた定常押しまたは穿孔圧力上界比 (水平線で示されている) の方が低くなる (●点より右)。このことは, これより上の T/W_c に対しては, 素材全体が変形するよりも, 押出口より一定深さ G の領域のみが定常的に変形し, それよりも下方の材料が剛性領域としてとどまることを示している。そこでこの $\bar{p}/2k \sim T/W_c$ 線図はまた, 長い素材から押し加工を行う際の圧力変動曲線に相当する。

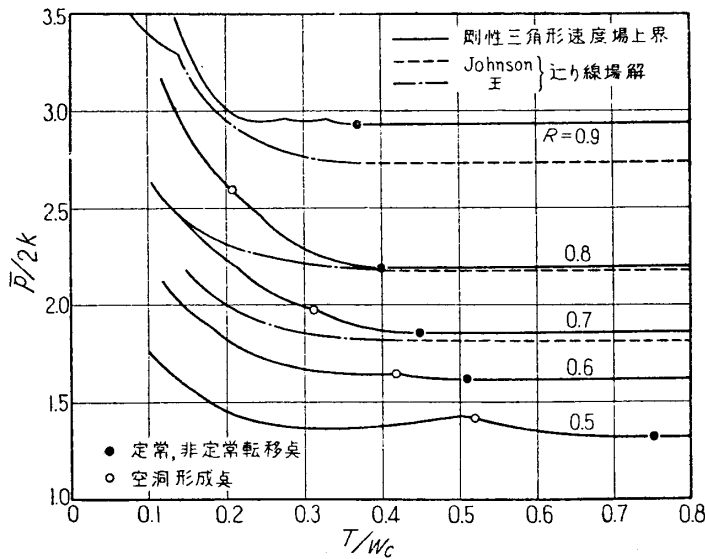
全工具面が滑らかであると (第 1.5.2 図), $\bar{p}/2k$ は T/W_c とともに減少し, 最後には $2R$ に収斂する。曲線中○印は, この点より小さな T/W_c で, 押出口の裏側にあたる素材が下型面から持ち上るとした方がより低い上界が得られることを意味する。コンテナおよび下型面が滑らかでダイス面が粗いとき (第 1.5.3 図) には, 非定常過程で $\bar{p}/2k$ の極小が見られる。



第 1.5.2 図 滑らかな工具による押し鍛造圧力上界



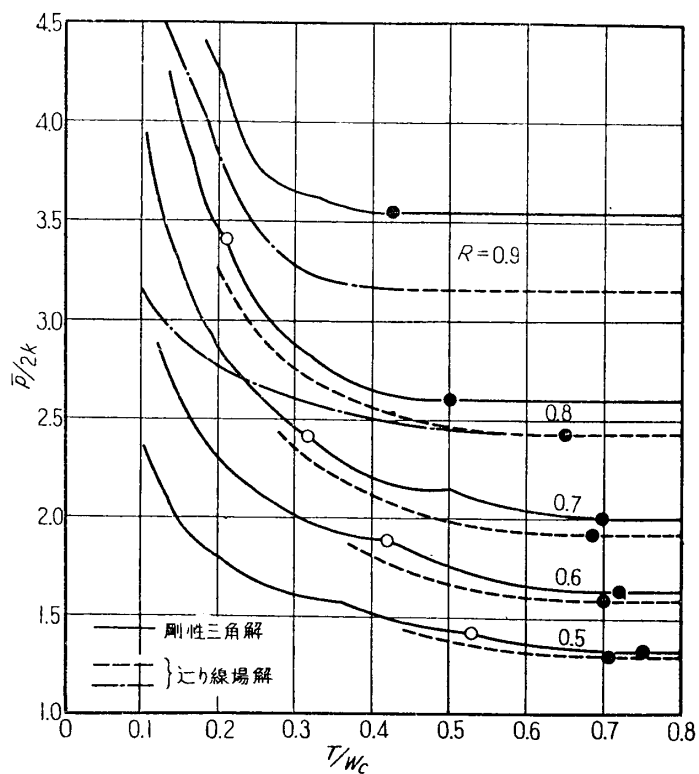
第 1・5・3 図 粗いダイス，滑らなコンテナ，下型による押出鍛造圧力上界



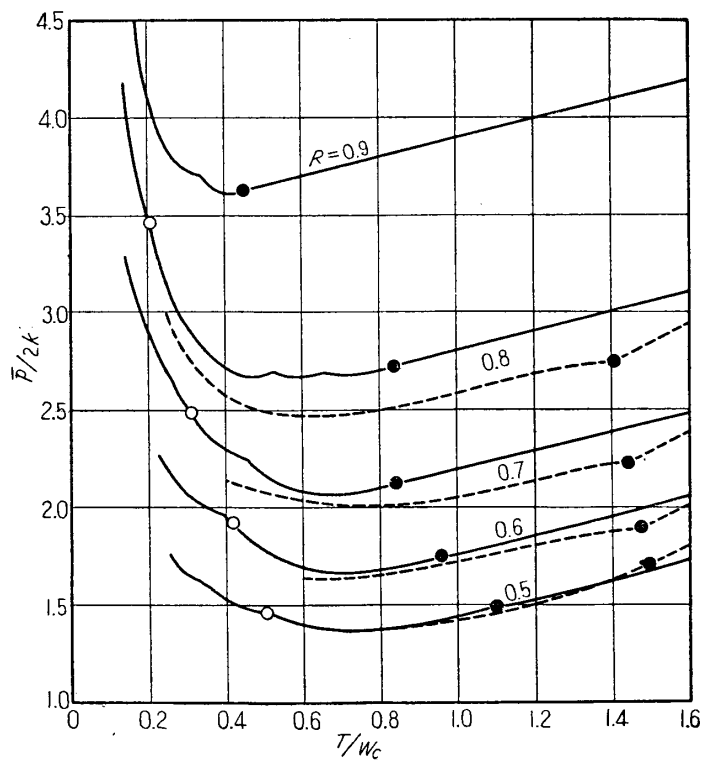
第 1・5・4 図 粗い下型，滑らかなダイス，コンテナによる押出鍛造圧力上界

コンテナとダイス面が滑らかでラムが粗い場合およびコンテナが滑らかでダイスと下型面が粗い場合(第 1・5・4 および 1・5・5 図)には非定常状態に入ってから後は $\bar{p}/2k$ は一様に上昇する。コンテナ面が粗い場合には前方および後方押出また押出と穿孔の上界は異なる。第 1・5・6 図 (a) は前方押出, (b) は後方押出, (c) は後方穿孔鍛造における圧力上界比を示す。前方押出ではすべに述べたように下型面圧力は定常状態でも T/W_c とともに変化する。

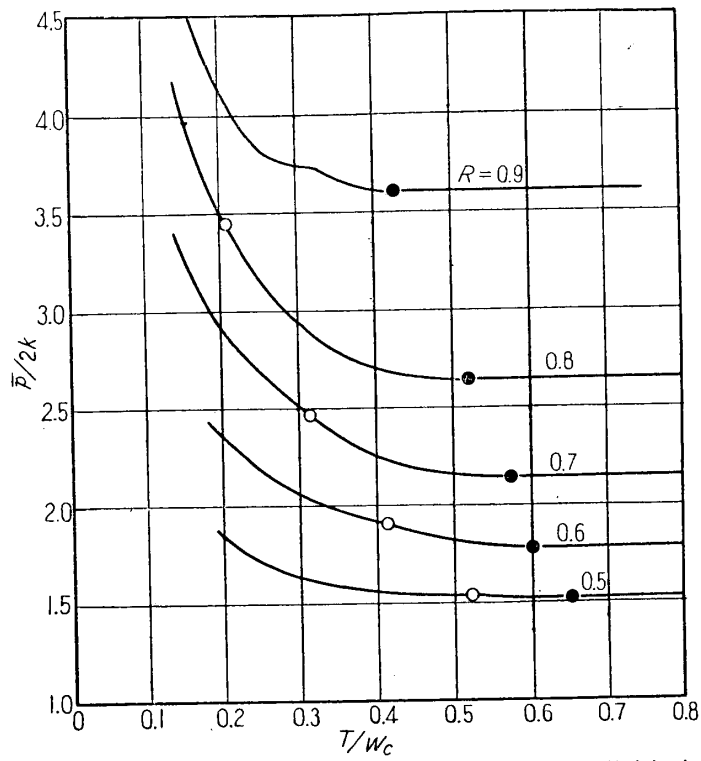
なお第 1・5・4, 1・5・5 および 1・5・6 図 (a) には王[40] および Johnson [41] による迂り線場理論の解をそれぞれ鎖線, 破線で示してある。著者の上界は Johnson の解に比較的近いが, 王の解はとくに T/W_c の小さいところでは $\bar{p}/2k$ があまりに低く, これは計算誤差ではないかと思われる。また第 1・5・6 図 (a) の Johnson の曲線は, 定常過程に対する直線部分の傾斜は過大であり ((1・4・5) 式参照), これは当然半分にするべきものである。それによって非定常過程に対する曲線



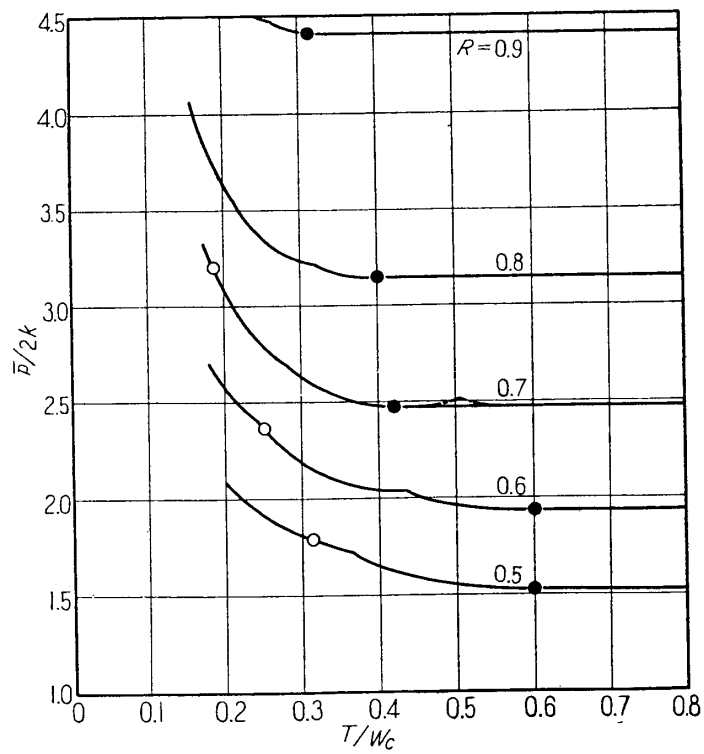
第 1・5・5 図 粗いダイス，下型，滑らかなコンテナによる押出鍛造圧力上界



第 1・5・6 図 (a) 粗い工具による押出鍛造圧力上界，前方押出



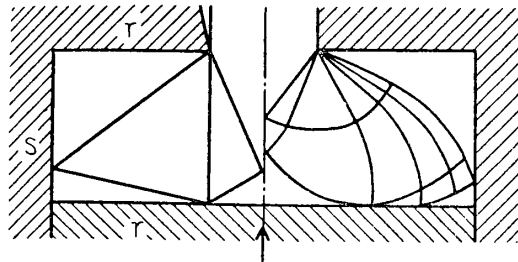
第 1・5・6 図 (b) 粗い工具による押出鍛造圧力上界. 後方押出



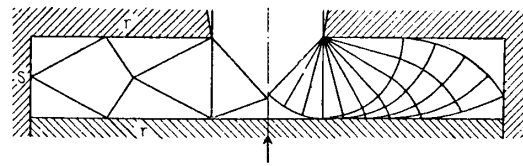
第 1・5・6 図 (c) 粗い工具による押出鍛造圧力上界. 後方穿孔

に滑らかに接しさせることができる。しかも Johnson は、この曲線から、非定常過程に移るときに押出圧力は急に低下すると考えて実験を行っており、これはいろいろな誤りの原因となっている*。

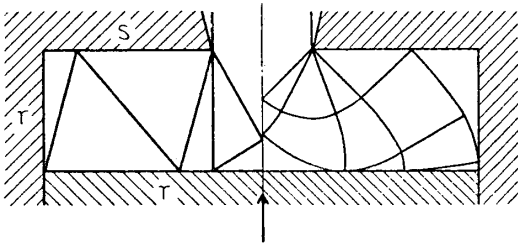
第 1・5・7 図には Johnson による迂り線場と著者の速度場を比較したが、ここでも両者は形がよく似ている。なお前章第 1・4・4 図には、定常から非定常過程に移る T/W_c を示して



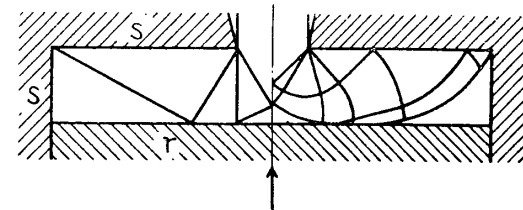
(a) ダイス, 下型粗, コンテナ滑,
 $R=0.76$, $T/W_c=0.73$



(b) ダイス, 下型粗, コンテナ滑,
 $R=0.78$, $T/W_c=0.49$



(c) ダイス滑, コンテナ, 下型粗, 前方押出,
 $R=0.71$, $T/W_c=0.42$



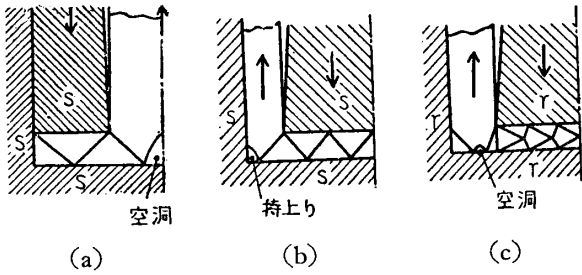
(d) ダイス, コンテナ滑, 下型粗,
 $R=0.84$, $T/W_c=0.33$

第 1・5・7 図 押出鍛造における最適剛性三角速度場と迂り線場の比較

ある。また第 1・5・8 図には、素材底面の一部が持上るさいの速度場を示した。(a) は押出製品に見られるいわゆるパイプ [42] および底付容器の角の持上り [37] として知られているものと一致する。このような欠陥が起るのは潤滑条件で異なるが大體素材厚さが押出のときは押出部の巾の半分 W_c , 穿孔のさいは押出部の巾 $W_c - W_p$ に等しくなったときである。粗いコンテナ壁による穿孔のときはこの持上りは生じにくいだが、 T が非常に薄くなるとやはり第 1・5・8 図 (c) のような欠陥を形成する。

パイプ形成に関しても著者は Johnson に対して異論をもっている。彼は非定常過程の始

* この点について Johnson は 1957 年 5 月の著者等への手紙において誤りであることを認めた。



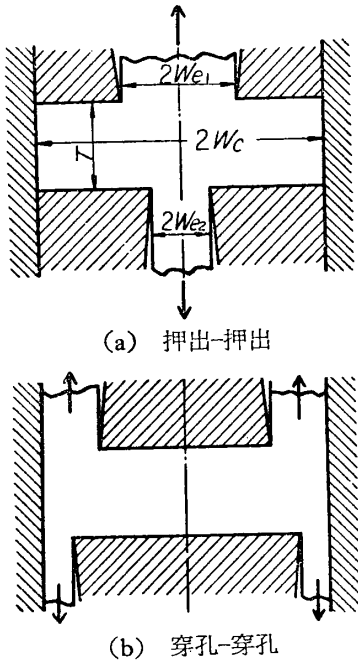
第 1.5.8 図 押出鍛造後期における材料空洞または持上り形成

まりとパイプ生成とを同時期と主張している。彼のいうパイプが凹みの生成ならば、これは第 1.5.2~1.5.6 図の ● および ○ 印の違いから正しくないといえる。またパイプが、素材底面表皮の捲込による欠陥生成を意味すればまた別の異議が成立する。これらについての詳細は後報の軸対称問題に対する実験的研究(4.3.2)に関連して論じることとする。

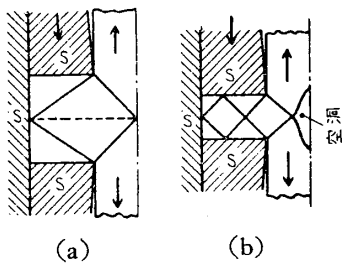
1.5.2 特殊押出鍛造

1.5.2.1 向合押出-押出鍛造

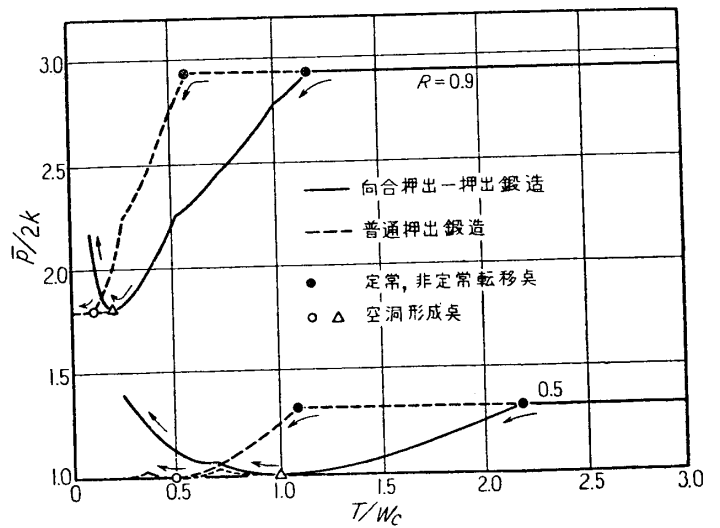
ここでは第 1.5.9 図のような上下両方に押出が行われるような場合を考える。両出口の距離が十分長いときは押出口の巾の広い方からのみ押出が行われて過程は定常的であろう。しかし素材長さが短くなったとき、どのような速度場が適しているかは W_{e1} キ W_{e2} については見出すことができなかった。 $W_{e1} = W_{e2}$ (第 1.5.10 図 (a)) とすると問題はきわめて簡単となり、対称性から滑らかな下型面により厚さ $T/2$ なる素材 2 個を同時に押出鍛造するのと同じことである。しかしながら T が W_e 以下になる場合は、単独の押出鍛造では底に凹みができるが、向合の場合には一般に凹みは許されない。そのため T の小さいところではかえって $\bar{p}/2k$ は上昇す



第 1.5.9 図 向合押出鍛造

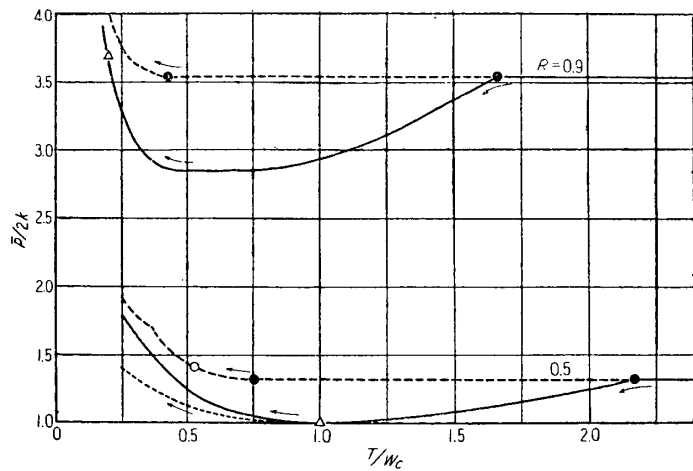


第 1.5.10 図 滑らかな工具による向合押出-押出鍛造における速度場



第 1.5.11 図 滑らかな工具による対称向合押出・鍛造圧力上昇

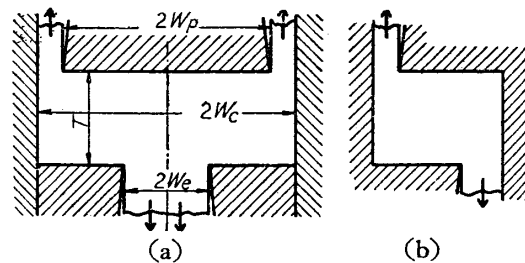
ると考えられる。第 1・5・11 図および第 1・5・12 図には前節の結果を用いて求めた $\bar{p}/2k$ と T/W_c の関係を実線で示し、また押出口が片方だけしかないときの $\bar{p}/2k$ を破線で示した。コンテナは滑らかであり、両押出口巾は等しいから両加工法に対する定常押出圧力上界比は等しくなるが、向合押出の場合の方が T/W_c のより大きな点で非定常過程となり、 $\bar{p}/2k$ は低下する。この低下の仕方はとくに上および下型面が粗いと著しい。もっとも滑らかな型の場合、向合押出における T として材料厚さの半分を用いるときは、一方向および向合押出鍛造に対する圧力上界曲線は底面空洞形成点まではまったく同一となる。しかし T/W_c が小さくなると上に述べたように $\bar{p}/2k$ は向合押出の方が高い。もし材料内部に第 1・5・10 図 (b) のような空洞がわずかなエネルギー消費で発生できるものなら Δ 点で空洞が発生し、 $\bar{p}/2k$ は第 1・5・11 図の点線のような経過をたどる。事実、この種の空洞は後に報告する軸対称押出加工の実験 (4・4・2) に見られた。



第 1・5・12 図 粗い上下型、滑らかなコンテナによる対称向合押出鍛造圧力上界

1・5・2・2 向合押出-穿孔鍛造

第 1・5・13 図のように上型が穿孔ポンチで下型が押出ダイスであるような場合を考えよう。この場合もちろん素材厚さ T が W_c に比べて大きければ定常状態であり、材料はもっぱら巾の広い押出口から流出するであろう。もっともコンテナ壁に摩擦があるときは、このことは必ずしも成立しない。以下においてはコンテナ壁を滑らかとし、非定常状態について考察する。



第 1・5・13 図 向合押出-穿孔鍛造

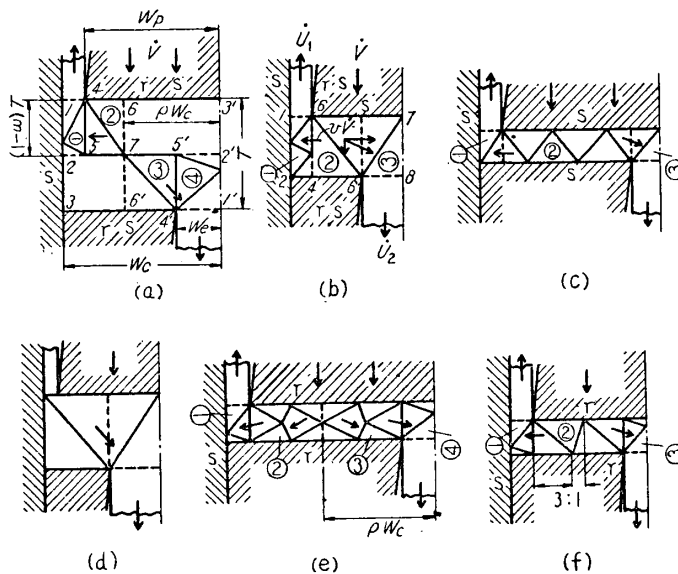
このような過程に対して考えられる速度場を第 1・5・14 図に示した。まず T が比較的大きいときに考えられるものは第 1・5・14 図 (a) である。これに対する内部エネルギー消費率は、すでに求めた押出加工の計算結果を修正利用することもできるが、それよりも図のように 4 個の破線で囲まれた単位矩形変形領域を考えると計算が簡単である。面 $676'$ はある考える瞬間には左右に動かないとしよう。そして領域 $2376'$ および $672'3'$ は剛性領域である。領域 ①, ②, ③, ④ に対する縦横比 a_i , 加圧面積 A_i および上型が \dot{V} なる速度で進む際の加圧速度 \dot{V}_i は第 1・5・1 表に示した。ここに (1・4・10) 式と同じく

$$R_1 = W_p/W_c, \quad R_2 = 1 - W_e/W_c \quad (1.5.1)$$

で、それぞれ押出口が上または下側だけとしたときの断面減少比に相当する。前と同様に、

第 1.5.1 表 向合押出-穿孔鍛造初期過程解析のための領域区分と諸元
(第 1.5.14 図 (a))

領域	縦横比 a_i	加圧面積 A_i	加圧速度 \dot{V}_i
①	$(1-R_1)W_c/(1-\omega)T$	$(1-\omega)T$	$(R_1-\rho)W_c \cdot \dot{V}/(1-\omega)T$
②	$(1-\omega)T/(R_1-\rho)W_c$	$(R_1-\rho)W_c$	\dot{V}
③	$\omega \cdot T/(R_2+\rho-1)W_c$	$(R_2+\rho-1)W_c$	\dot{V}
④	$(1-R_2)W_c/\omega \cdot T$	$\omega \cdot T$	$(R_2+\rho-1)W_c \cdot \dot{V}/\omega \cdot T$



第 1.5.14 図 向合押出-穿孔鍛造の解析に用いた速度場
(a)~(d) 滑らかな工具,
(a), (e), (f). 粗い上下型, 滑らかなコンテナ.

各領域に対する内部エネルギー消費率係数を e_i とすれば全内部エネルギー消費率

$$\dot{E} = 2k \sum_{i=1}^n e_i \cdot A_i \cdot \dot{V}_i$$

から次のごとき加工圧力上昇比が得られる.

$$\begin{aligned} \bar{p}/2k = & (e_1 + e_2)(R_1 - \rho) \\ & + (e_3 + e_4)(\rho - 1 + R_2) \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

いまコンテナ壁を滑らかと仮定したから, 上下型面がともに滑またはともに粗ならば境界条件の同一から e_1 と e_4 および e_2 と e_3 はそれぞれ縦横比のみの同じ函数となる. そうすると (1.5.2) 式は

$$\bar{p}/2k = \rho = \omega = (1 - R_2)/(2 - R_1 - R_2) \quad (1.5.3)$$

のときに極小となることを証明することができる. これは幾何学的には $\overline{16} : \overline{1'6'} = \overline{12} : \overline{1'2'} = \overline{14} : \overline{1'4'}$ なることを意味する. このとき (1.5.2) 式の極小値は $e_1 = e_4, e_2 = e_3$ から

$$\bar{p}/2k = \{(e_1)_{a=(1-R_1)W_c/T} + (e_2)_{a=T/R_1 \cdot W_c}\} \cdot R_1 \quad (1.5.4)$$

となる. ここに R_i は上下押出口が並列に並んだときの全断面減少比に相当する量で (1.4.11) 式で定義される. 領域 ①, ②, ③, ④ についてもっとも適当と思われる剛性三角形速度場を第 1.1.1 表から選んだものを第 1.5.14 図 (a) に示してある. この場合には材料は上下型面に対しては滑らかなから, 型面は粗でも滑でも同じ上昇比が得られる. また (1.5.4) 式からこのタイプの速度場では R_i が一定なら $\bar{p}/2k$ はある T/W_c に対し常に同一である.

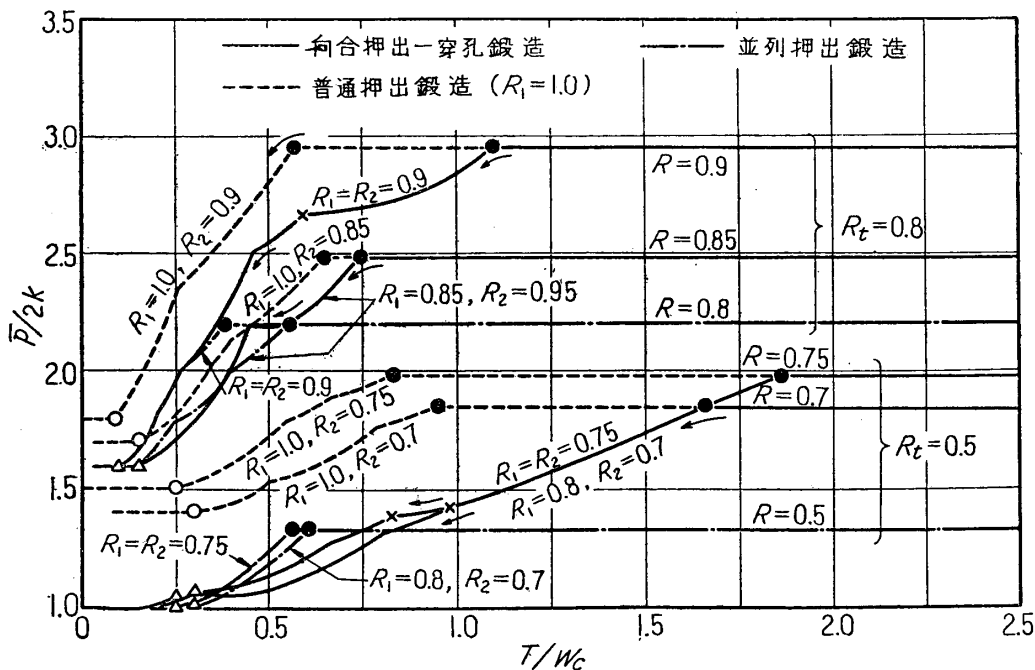
T/W_c がさらに小さくなると, 素材全体が変形領域に入ると考えられる. 工具面が滑らかな場合には, 無迂り面を考えて, そこで領域を区分するよりも第 1.5.14 図 (b) または (c)

のように三つの領域 ①, ②, ③ を考え, 領域 ② の左側面 34 の左方移動速度を $v \cdot \dot{V}$ とすることにより, 一層低い上界が簡単に得られる. すでに度々用いた手法により

$$\bar{p}/2k = e_1 \cdot v \cdot T/W_c + e_2 \cdot R_t + e_3 (R_t - v \cdot T/W_c) \quad (1.5.5)$$

が得られる. それゆえ上式は $R_1 = R_2$, したがって $e_1 = e_3$ のときには $\bar{p}/2k = (e_1 + e_2)R_t$ で v に無関係に一定となる. すなわち両出口からどのような割合で流出が行われても上界比は同じである*. つぎに $R_1 \neq R_2$ の場合を考えよう. 領域 ② の境界条件は $r s s r$ (ii) で第 1.1.1 表から a_2 のみの函数である. また e_1, e_3 の境界条件は $s r s r$ (i) で同じ a のかん数であり, a_1, a_3 がともに 1 より大きくない限り $R_1 > R_2$ なら $e_1 > e_3$, $R_1 < R_2$ なら $e_1 < e_3$ となる. そこで (1.5.5) 式は $v = 0$ または $R_t W_c/T$ のとき最小値をとる (無迂り面が 34 または 56 にくるのに相当). これは押出口の巾の狭い方からは材料は押出されないことを意味する. しかし例えば $R_1 > R_2$ とすると領域 ① は剛性領域となって高さ T は変わらないから, 上型面に対し相対的には \dot{V} なる速度で外部へ出てゆくことになる. a_1, a_3 がともに 1 以下になると押出口裏側の材料の持上りによって $e_1 = e_3$ となるから, $R_1 = R_2$ のときと同じ議論が成立する. 第 1.5.14 図 (b), (c) には上のような場合に対して考えた速度場の例を示す. さらに例えば R_1 が非常に 1 に近く, 他方 R_2 が比較的大きい場合には第 1.5.14 図 (d) のように巾の狭い出口からは材料がまったく流出しないような速度場が低い圧力上界を与えるであろう.

第 1.5.15 図にはこれらの速度場を用いて二三の場合について計算した上界比を示す. こ



第 1.5.15 図 滑らかな工具による向合押出-穿孔鍛造および並列押出鍛造圧力上界比.

●印は定常, 非定常転移点. ○, △印は空洞形成点

* 実際問題としてはわずかな摩擦, わずかな加工硬化によっても両方に対称に押出が行われるであろう.

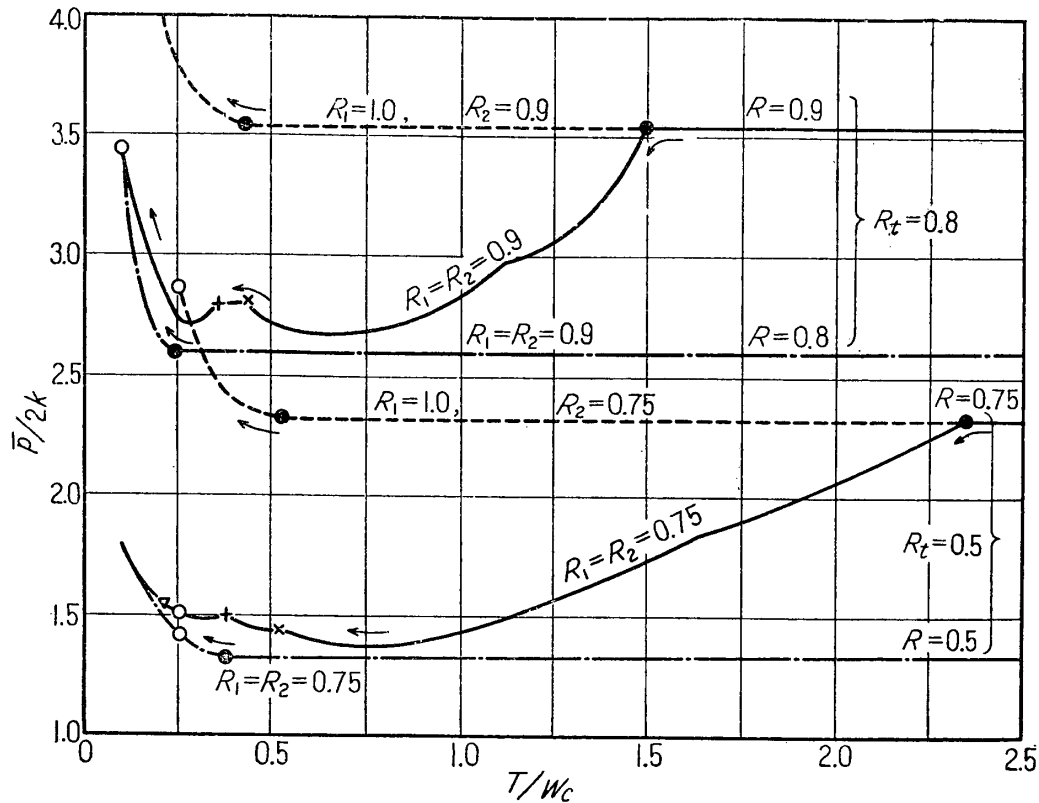
ここに $R_i=0.80$ の2本の実線はそれぞれ $R_1=R_2=0.90$ および $R_1=0.95, R_2=0.85$ のものである。 T/W_c が大きいところでこれらはそれぞれ $R=0.90$ および 0.85 の普通押出における定常圧力上界比に等しい。 $R_1=R_2=0.9$ の場合には T/W_c が減ると第 1.5.14 図 (a) の速度場の方が低い上界を与えるようになり、曲線は ● 点から低下し始める。さらに × 点より小さな T/W_c では第 1.5.14 図 (b), (c) の速度場に移る。△ 印は押出口の裏側に凹みのできる点である。 $R_1=0.95, R_2=0.85$ の場合には図 (a) の速度場は T/W_c のいかなる値においても最低の上界比を与えなかった。そこで ● 点より以下では速度場 (b) 次に (c) が対応する。なお破線は、それぞれ $R=0.90$ および 0.85 の普通押出および押出鍛造に対するものであり、向合押出の方が早期に非定常状態に入って加工圧力が低くなることわかる。第 1.5.15 図の $R_i=0.50$ の2本の実線はそれぞれ $R_1=R_2=0.75$ および $R_1=0.80, R_2=0.70$ の場合であり、やはり上と同じことがいえる。ただしこれらはともに第 1.5.14 図 (a) の速度場を経過する。第 1.5.15 図から、向合押出-穿孔鍛造では T/W_c がある程度小さくなると $\bar{p}/2k$ は R_1, R_2 の組合せいかんにかかわらず、 R_i によって大体きまると云えよう。

上下型面が粗い場合に対しては T/W_c の比較的大きなところでは第 1.5.14 図 (a) のタイプが考えられその上界比は、コンテナが滑らかなであれば上下型面が滑らかな場合に一致することはすでに述べた。第 1.5.14 図 (b) のタイプにおいては (1.5.5) 式の e_2 は領域 ② の上下面の迂り仕事を考えに入れる必要があるが、その大いさは $(T/2R_i W_c) + (R_i W_c/T)$ で与えられやはり v に無関係である。そこで上下型面が滑らかな場合に (1.5.5) 式に対して述べた議論はそのまま適用される。ただしこの際 $e_1=e_3$ となる時期は $a_1, a_3 > 0.96$ である。また第 1.5.14 図 (d) のタイプも考えることができる。

型面が粗く T/W_c が小なる場合については上に得たような簡単な結論は得られない。一般には第 1.5.14 図 (e) のように無迂り面 56 を考え、その左右に単位押出鍛造領域 ①, ② を取って計算を行うことができる。 T/W_c が十分小さければ前に押出鍛造について用いた速度場をそのまま用いても両領域間の相対迂りは起らないようにできるから (第 1.5.14 図 (e)), これらの $\bar{p}/2k$ の計算結果をそのまま利用できる。特別な場合として $R_1=R_2$ の場合には、上下型面が滑らかなときと異り、 $\bar{p}/2k$ の極小は $\rho=1/2$ において起ることを証明することができる。 $R_1=R_2$ で T/W_c が余り小さくないときには第 1.5.14 図 (f) のような速度場も低い上界を与えるようである。この速度場において領域 ② が左右に等速度でふくれるとすれば e_2 の極小値は $(3T/2R_i W_c) + (7R_i W_c/16T)$ で与えられる。そこで (1.5.5) 式で $e_1=e_3$ とし $\bar{p}/2k = (e_1+e_2)R_i$ を用いて上界比が計算できる。

第 1.5.16 図は上下型面が粗く $R_1=R_2$ の場合に対する計算結果である。第 1.5.15 図と同じく T/W_c が大きいところでは $\bar{p}/2k$ は押出口が単独の場合に対する定常押出圧力上界比と等しく、● 印より以下ではまず速度場第 1.5.14 図 (a) が対応する。 $R_1=R_2=0.90$ においては次に × 印のところで第 1.5.14 図 (f) の速度場が最小の $\bar{p}/2k$ を与え + 印以下では (e) の速度場が対応する。△ 印は押出口裏側材料の持上る点を示す。 $R_1=R_2=0.75$ においては × と + 印の間は第 1.5.14 図 (b) の速度場 (ただし領域 ② のみが同じ), + と ∇ の間は (f), ∇ 以下では (e) が対応する。この図から見ると、型面が粗いとき非定常状態

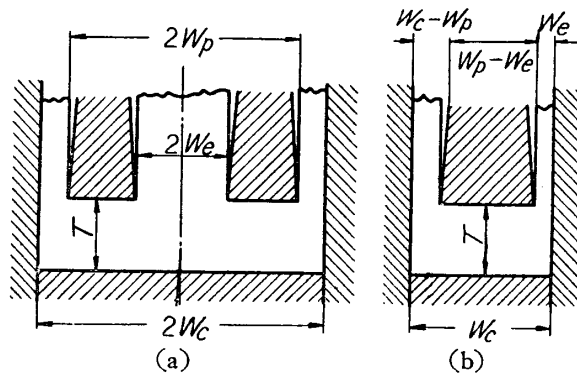
では、普通の押出（破線）に比べてとくに押出圧力上界が低下することがわかる。



第 1・5・16 図 粗い上下型、滑らかなコンテナによる向合押出-穿孔鍛造および並列押出鍛造圧力上界

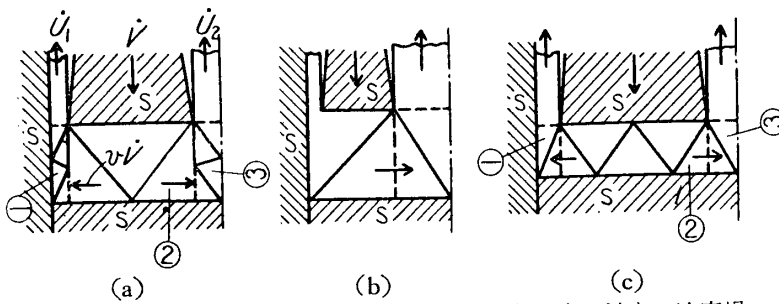
1・5・2・3 並列押出鍛造

本節においては第 1・5・17 図のように前節の下型の押出口を上型に設けたような場合を考える。これはまた 1・4・3・1 で考察した並列押出加工の最終非定常過程に相当する。この過程は前節の場合と非常に似ており、上下型面が滑らかな場合に対する速度場は第 1・5・18 図に示されている。このようにすると $\bar{p}/2k$ と押出口からの流出速度に対しては前節の (1・5・5) 式およびその検討結果がそのまま適用できる。ただし e_2 の値は T/W_c が比較的大きいときは前節の e_2 といくらか異なる。



第 1・5・17 図 並列押出鍛造および非対称穿孔鍛造

第 1・5・15 図の鎖線は $R_t=0.80$ で $R_1=R_2=0.90$ および $R_1=0.95, R_2=0.85$ ならびに $R_t=0.50$ で $R_1=R_2=0.75$ および $R_1=0.80, R_2=0.70$ に対する計算結果である。 $R_1=R_2$ のときには第 1・5・1 図 (b) に示した上昇穿孔鍛造とまったく同じである。これら



第 1.5.18 図 滑らかな工具による並列押出鍛造に対する速度場

は $R_1=R_2$ においてもっとも小さい。

上下型面が粗く、かつ $R_1=R_2$ とすれば穿孔鍛造の結果をそのまま引用でき第 1.5.16 図の鎖線はそれを表わす。型面が粗いときも滑らかなときも、 T/W_c が小さくなると向合押出-穿孔タイプも並列押出タイプも同一の R_1, R_2 に対し $\bar{p}/2k$ はほぼ等しくなる。

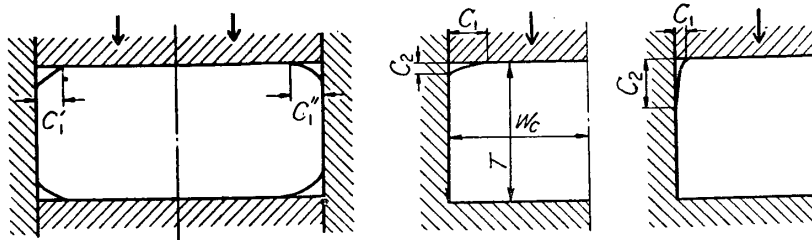
は R_i が一定なら定常状態においてはすでに 1.4.3.1 で述べたように、 R_1 と R_2 の組合せいかんにかかわらず $\bar{p}/2k$ は同じとなる。しかし非定常過程の始まる T/W_c の大いさ

1.6 密閉型による圧印加工

上に取り扱ってきた諸加工においては加工中素材表面の多少の部分は自由に開放されている。この部分の形をも規正するために、工具が完全に密閉されたようなものを用い、素材の全面に所定寸法を与えるような加工法がある。これは貨幣の製造等に見られるようないわゆる圧印加工である*。本章においては工具面が水平または垂直であるような場合に限り、幾つかの簡単な問題を取扱う。

1.6.1 平面型による角出し

普通の平行型による圧縮加工 (1.2.1) においても素材側面は実際問題として正しく平面を保たないから、もし側面がまっすぐで角部が鋭い製品が要求される場合には第 1.6.1 図



第 1.6.1 図 平面型による角出加工

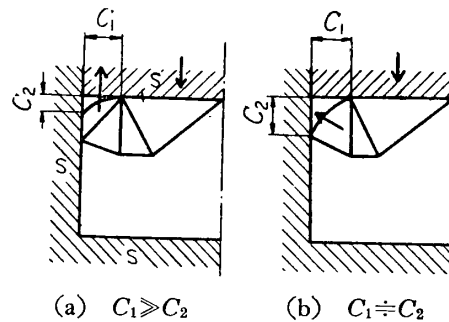
第 1.6.2 図 角出加工の解析

のようにコンテナ壁と上下型面によって角を出す必要がある。このような平面型による角出しは一般の圧印過程の基礎過程であるので本節ではこの問題を取上

げる。いま第 1.6.1 図の一つの象限のみ取上げたものが第 1.6.2 図である。まず (a) のように素材と型の未接触部寸法が $C_1 \geq C_2$ であるとする。所要圧力が問題になるのは C_1/W_c が小さい場合なので、この場合にはすでに 1.4 および 1.5 において穿孔または穿孔鍛造に対して用いた速度場をポンチ巾を $W_c - C_1$ とみなしそのまま使用すれば十分低い上界が得られる。そこですでに求めた色々な条件に対する穿孔(ないし押出)圧力上界比を $R = 1 - (C_1/W_c)$ と考えることによりそのまま利用できる。

* 圧印加工の定義は他にもいろいろあり明らかでない。

他方第 1.6.2 図 (b) のように $C_1 \ll C_2$ とすれば、これは厚さ T 、巾 W_c なる素材がその一部分 $T-C_2$ なる型の凹みに入れられて作頭される場合に相当する。したがってこの場合も作頭加工の結果がそのまま利用できる。さらに $C_1 \doteq C_2$ の場合には、例えば穿孔加工の速度場を第 1.6.3 図 (a) のようにそのまま使うよりも、これを図 (b) のように修正することによって一層低い上界が得られるであろうが、その低下量は C_1/W_c 、 C_2/W_c が非常に小さければきわめて小さくなると思われるのでここではとくに計算は行わなかった。そこでいま $1-(C_1/W_c)$ または $1-(C_2/W_c)$ を R とし両者の内いずれか小さい方の値をとること



第 1.6.3 図 角出加工における速度場

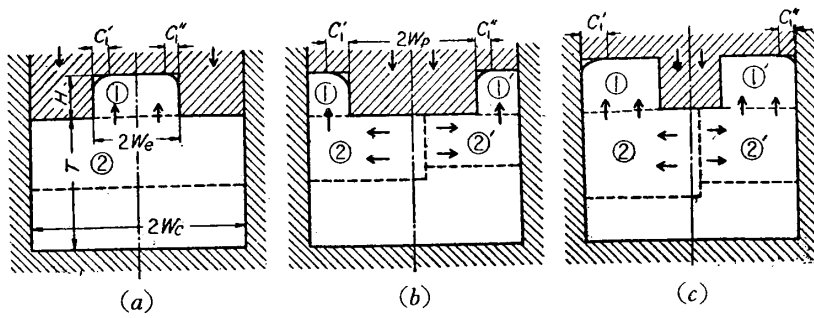
にすれば R と圧印圧力上界比 $\bar{p}/2k$ の関係はコンテナが滑らかでかつ素材厚さ T が十分大きければ第 1.4.13 図によって与えられる。ただし $R < 0.5$ に対してはさらにもっと低い圧印圧力上界比が得られるであろう。図より明らかなように、圧印圧力は C_1 、 C_2 の内大きな方の値と W_c の比によってほぼ決ってくる。例えば滑らかな工具で、 T が大なるとき C/W_c が 0.1 ならば $\bar{p}/2k$ は約 2.9、 C/W_c が 0.05 で $\bar{p}/2k$ は約 3.8、 C/W_c が 0.03 ならば $\bar{p}/2k$ は約 4.5 である。ここで C は C_1 、 C_2 のうち大きな方を意味する。理論的に言えば C_1 、 C_2 を完全に 0 にするには無限大の圧力が必要である。

素材厚さ T が W_c に比べて小さい場合にも上と同じに考え、前に求めた押出鍛造および作頭に対する結果がそのまま転用できる。この場合、上下型面が滑らかであれば同じ C/W_c に対し T/W_c が小なるほど圧印圧力上界比は低下する(第 1.2.16 および 1.5.2 図参照)。他方上下型面が粗ければ逆のことが成立つ(第 1.2.18, 1.5.5 および 1.5.6 図)。

実際加工において、途中の大きな変形過程を受けた素材においては、型と接触しない部分の長さは四隅によって異なるのが普通である。このような場合には第 1.6.1 図で $C_1' \neq C_2'$ とすれば上と同じ考え方から 1.4.3.1 の並列押出もしくは 1.5.2.3 の並列押出鍛造の結果が利用できる。1.4.3.1 において述べた議論から例えば T が大であれば、このときの圧印圧力上界は $R=1-(C_1'+C_2'')/2W_c$ として再び第 1.4.13 図からただちに求まる。そこでもし製品の角の未接触長さの最大値がある値以下になるように要求されているときには、 C_1' と C_2'' の差が大なるほど完成圧力が高いことになる。すなわちこの種の加工では、材料をできるだけ対称的に変形させることが大切である。なお上述のごとき速度場を用いる場合には、圧印過程が進行しても C_1/C_2 は一定に保たれる。しかし C_1'/C_1'' の比は一定に保たれない。例えば T が大きくコンテナ面が滑らかならばすでに (1.4.18) 式で示したように $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ であるから、 C_1' 、 C_1'' の内小さい方が先に 0 となる。

1.6.2 凹みを有する型による圧印

第 1.6.4 図のように下型は平面で上型は凹みを持つ場合を考えよう。加工の初期は押込、押出、穿孔もしくは押出鍛造が行われる。加工の後期になると図のように角出し過程が附加えられる。まず T/W_c および H/W_c もしくは $H/(W_c - W_p)$ が 1 よりも余り小さくないと考えよう。また $C_1' \gg C_2'$ 、 $C_1'' \gg C_2''$ と仮定する。そうすると第 1.6.4 図 (a) は二つの



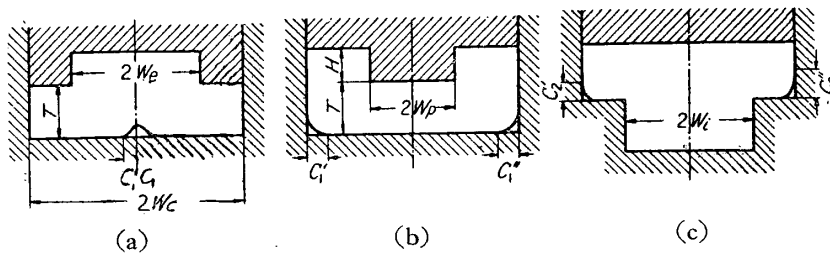
第1.6.4 図 凹みまたは突起を有する型による圧印加工

$$\frac{\bar{p}}{2k} = 2m - n \ln \frac{C_1' + C_1''}{2W_c} \quad (1.6.1)$$

によって与えられる。コンテナおよび上型凹みの側面が滑らかな場合には (1.4.3) および (1.4.4) 式によって m の値は $0.5 \sim 0.3$ であるから、(1.6.1) 式は平面型で同じ C_1' 、 C_1'' に対する角出圧力上界比よりも $0.5 \sim 0.3$ だけ高いに過ぎない。第1.6.4 図 (b) および (c) 図のような場合には $C_1' \neq C_2''$ であれば図のように二つの直列押出加工領域の並列組合せを考える必要がある。しかしながらこのような場合にも直列および並列押出加工に関して述べた議論から、圧印圧力是对応する条件で断面減少比が $1 - (C_1' + C_1'')/2W_c$ の定常押出圧力よりもいくらか高いと云う結論が得られる。またこの場合にも前節と同じく過程が左右対称に行われること、言いかえると、両側で同時に変形を修了させることが加工圧力を下げる上に望ましいと云える。

H が凹みの中に比べて小さい場合、極限において H が 0 のときは、前節の平型による角出し圧印に対する上界が適用できるであろうから、おそらく小さな H に対する加工圧力は大きな H に対する場合よりも幾らか低いはずである。上型凹み側壁面が粗いときにはこのことは一層著しいであろう。またここで述べた議論および結論は $C_2 \geq C_1$ 、 $C_2 \doteq C_1$ の場合にも同じように成立するであろう。

T が W_c に比べて小さい素材の場合は前と比べて過程は複雑になる。もし上型の凹み内の空洞が第1.6.4 図のように最後まで満されずに残っているものとすれば、この場合にはふたたび直列、並列の押出鍛造領域と押出加工領域にわけて同様の議論を行うことができる。しかしながら加工初期に素材の底面の持上りが起って (1.3.3 参照)、この部分が最後の空洞として残るような場合には事情が少し異ってくる。このような例は第1.6.5 図に示してある。



第1.6.5 図 凹みまたは突起を有する型による印圧加工

単位押出 (または穿孔) 領域と考えることができ、1.4.3.2 の直列押出に対する結果が利用できる。すなわち (1.4.21) 式を用いて、圧印圧力上界比は

図 (a), (b) は薄い巾 $2W_c$ なる板を素材とした場合に見られ、(c) は巾 $2W_c$ なる素材を下型凹み内に入れ、作頭加工を行う最終段階に見られる。これらの場

合について、空洞を満す過程に対し前に用いた押出鍛造もしくは作頭加工の速度場はそのまま

ま使用できない。なぜならば、すでに凹みにつまっている部分が存在するからである。この問題に対しての詳しい解析は行わなかったが、次のようなことは言えるであろう。すなわち第 1・6・5 図 (b) を例にとると、上型面の凹み深さ H が 0 であれば、これは平らな型による角出加工であり、このときの圧印圧力は、素材厚さが T で押出口の中がそれぞれ C_1' , C_1'' なる押出鍛造のそれとほとんど等しい。いま上型面が滑らかであるとし、このような押出鍛造に対する加工平均圧力比を \bar{p}_f とすれば、 H が 0 でない場合の圧印圧力 \bar{p}_c はこの凹みにつまっている材料からの拘束によって \bar{p}_f よりも当然高くなるはずである。しかし上型が粗い場合には、この凹みの部分の材料はすでに作頭加工において見たように完全に剛性でなく内部変形が可能であるから \bar{p}_c は $H=0$ の押出鍛造の場合、すなわち凹みの部分が完全剛体でしかも表面の粗い工具で満されている場合の \bar{p}_f に比べいくらか低くなると考えてよい。もちろんここで述べた普通押出鍛造（または平型による角出）と凹みをもつ型による圧印に対する圧力の差は W_p/W_c が大きいほど、また T/W_c および $H/(W_c - W_p)$ が小さいほど減少するであろう。

総 括

1. 鍛造および押出加工の力学的研究の第一歩として、まず平面ひずみ問題を取上げ所要力、変形を少い手間と十分な精度をもって解析する方法を考えた。これは極限定理の上界を低下させるやり方であるが、材料を加工硬化しない剛塑性体と仮定し、与えられた速度の境界条件を満足する速度場のうち、剛性三角形集合体より成るような速度場が計算が楽な上に他の速度場に比べて低い内部エネルギー消費率したがって低い上界を与えることがわかった。そこで第 1・1・1 図に示すような単位矩形変形領域なる概念を導入し、これにおけるいろいろな境界条件と縦横比に対してもっとも内部エネルギー消費率を低くする剛性三角形の組合せ配置と、それに対する消費率を図表にした。

2. 加工中の材料内を適当な単位変形領域に区分して上の図表を使用することにより、圧縮、作頭、開放型による盛上、押込、押出、穿孔、並列および直列組合せ押出、側方押出、押出鍛造、向合および並列組合せ押出鍛造、圧印加工等の所要力、変形が比較的簡単に得られた。

3. 上に得られた解の内、圧縮、押込、作頭、普通押出および押出鍛造等の結果の一部ないし全部はすでに迂り線場理論によって知られているものである。そこでこれらの比較によって、本研究で用いた方法による結果が厳密解に比べてほとんどの場合 5 ないし 10% 以上は高くないことがわかり、本解析法が十分な精度を有することを確め得た。

4. 解析的に得られた新しい知識の主なものとしては次のごとくであった。

a) 盛上加工（第 1・2・6 図）においては滑らかな工具を用いるときは、型孔直下の材料は変形せず、型面下の材料のみが圧縮され外方に拡がり、盛上り部の全高は素材の最初の高さのままである。型が粗く、かつ W/B および T/B が十分小さければ型孔からの押出が行われるが、そうでなければ滑らかな工具と同じになり、さらに W/B が小さく T/B が 1 に近づけば素材全体が圧縮される。所要力は後の押出鍛造による場合よりは低い。

b) 作頭加工（第 1・2・11 図）においては H/B が小さいときには素材下型凹み内の部分

も一部または全体が変形するため、所要力は下型凹み内材料が変形しないと考えた場合より低下する。とくに下型凹み面が滑らかなであると、かなり深い凹みのときも素材全体の変形が起る。

c) 有限厚さ板への平面ポンチの押込は作頭加工のまったく逆過程と考えることができ所要力および変形は直ちに求められた。

d) コンテナ内の素材への平面ポンチ押込(第 1.3.8 図)において R ((1.4.9) 式) が増すとともにポンチ圧力は増したが、 R がある値以下では半無限体への押込圧力と等しい一定値をとる。素材が高いときはその上方の一部分のみが変形するが、低ければ全体が変形し、ときには素材のポンチ直下でない部分が持上る。低い素材を滑らかな工具で押込む場合のポンチ圧力は R および $1-R$ に対するものはほぼ一致した。

e) 並列押出(第 1.4.9 図)における押出圧力は、全押出口が一緒になった普通押出圧力にまったく等しいかほぼ等しく、コンテナが滑らかならば押出口の巾が違っていても押出される材料の速度は等しい。直列押出(第 1.4.11 図)の押出圧力は、段のないダイスによるものよりいくらか高い。側方押出(第 1.4.12 図)は作頭過程と同じであり、押出圧力は断面減少比が同じ普通押出の場合とほぼ同じである。

f) 押出鍛造(第 1.5.1 図)における所要圧力と素材長さの関係は摩擦条件によっても色々である。長い素材に対する定常押出過程から非定常押出鍛造過程に移る点も様々であり、工具がすべて滑らかならば非定常過程に入るとともに圧力は下る一方であるが、粗い工具だと一様に増加する。素材押残り長さが押出口の巾に近くなると押出口直下の材料底部に凹みを生じる。

g) 上下対称に押出を行う際(第 1.5.10 図)は非定常状態は普通押出に比べて素材のより長い点で起り始め、加工圧力も低下する。しかし素材が非常に薄くなると逆になる。上型押出、下型穿孔(第 1.5.13 図)の場合は加工圧力は一般に押出口が片方だけの普通押出に比べてかなり低くなるが、素材が短くなるとともに、上下押出口の巾の和に等しい巾をもつ普通押出に近くなる。上下押出口からの流出速度は型面が滑らかな場合非定常過程初期では等しいが、次に押出口の巾の広い方から速く出る。これは並列押出鍛造(第 1.5.17 図)に対しても同様である。

h) 完全密閉型で製品の角を鋭くする圧印加工(第 1.6.1 図)における所要圧力は押出ないし作頭加工に対するものと同じと考えることができ、材料と工具の未接触部長さとコンテナ巾の比によって定まる。同じように型に凹みまたは突起がある場合(第 1.6.4 図)も取扱うことができる。

5. 本研究に用いた解析法をさらに有効なものとするためには、こんごもっと広い範囲の速度場についての研究を行う必要が認められた。例えばテーパ・ダイスによる押出は矩形変形領域の概念では扱いにくい。

謝 辞

以上の研究を通じ、始終、御指導、援助ならびに激励を賜った東京大学航空研究所福井伸二教授に厚く御礼を申し上げます。また研究室の清野次郎、滝田巖君および岩崎通信機株式

会社の亀谷成君には数値計算および原稿校正にあたって多大の援助をいただき感謝いたします。また本研究の費用の一部は文部省総合科学研究費に負うものであります。

1958 年 8 月 14 日 材 料 部

文 献

- [1] 例えば a) Siebel, E.: “*Die Formgebung in bildsamen Zustand*”, Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf, 1932, b) Sachs, G.: “*Spanlose Formung der Metalle*”, *Handbuch d. Metallphysik*, 3, Leipzig, 1935.
- [2] a) Hill, R.: “*The Mathematical Theory of Plasticity*”, Clarendon Press, Oxford, 1950, b) ヒル, R.: “塑性学” (鷲津, 山田, 工藤訳), 培風館, 東京, 1954.
- [3] a) Prager, W., Hodge, P. G.: “*Theory of Perfectly Plastic Solids*”, John Wiley & Sons, N. Y., 1951, b) プラガー, W., ホッジ, P. G.: “塑性学” (安倍, 宮本訳), 丸善, 東京, 1954.
- [4] 文献 2. b), p. 171.
- [5] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), p. 269.
- [6] Johnson, W.: *Jr. Inst. Met.*, 85 (1956-7), p. 403.
- [7] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 5 (1957), p. 281.
- [8] 文献 2. b) p. 258.
- [9] Shield, R. T.: *Proc. Roy. Soc., London, A*, 233 (1955), p. 267.
- [10] Jordan, T. F., Thomsen, E. G.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), p. 184.
- [11] 例えば a) Hodge, P. G.: *Jr. App. Mech.*, 17 (1950), p. 257, b) 文献 3. b) p. 165.
- [12] 例えば a) 文献 3. b), p. 187, b) Drucker, D. C., Prager, W., Greenberg, H. J.: *Quart. App. Math.*, 9 (1951), p. 381.
- [13] Shield, R. T., Drucker, D. C.: *Jr. App. Mech.*, 20 (1953), p. 453.
- [14] 文献 3. b), p. 129.
- [15] 例えば工藤英明: 東大理工研報告, 8 (1954), p. 153.
- [16] Prandtl, L.: *Zeits. Ang. Math. Mech.*, 3 (1923), p. 401.
- [17] Ross, E. W.: *Jr. App. Mech.*, 24 (1957), p. 457.
- [18] 文献 2. b), p. 232.
- [19] Hill, R.: 文献 20 中に紹介.
- [20] Green, A. P.: *Phil. Mag.*, Ser. 7, 42 (1951), p. 900.
- [21] Watts, A. B., Ford, H.: *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, (B), 1 B (1952-3), p. 448.
- [22] Muvdi, B. B., Tong, K. N.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), p. 121.
- [23] 文献 2. b), p. 223.
- [24] Alexander, J. M.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 3 (1955), p. 233.
- [25] 王仁: 北京大学学報, (自然科学), (1956), p. 443.
- [26] Nye, J. F.: *Jr. App. Mech.*, 19 (1952), p. 337.
- [27] Pomp, A., Münker, T., Lueg, W.: *Mitt. K.-W.-I., Eisenf.*, 20 (1938), p. 265.
- [30] Prandtl, L.: *Nachr. Ges. Wiss., Göttingen*, (1920), p. 74.
- [31] 文献 2. b), p. 250.
- [32] 文献 2. b), p. 252.
- [33] Green, A. P.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 3 (1955), p. 189.
- [34] 久能木真人: 日本機学論文集, IV, 22 (1956), p. 429.
- [35] a) Hill, R.: *Jr. Iron Steel Inst.*, 158 (1948), p. 177, b) 文献 2. b), p. 179.
- [36] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 4 (1956), p. 191.
- [37] Fukui, S., Kudo, H., Seino, J.: *Rep. Inst. Sci. Tech., Univ. Tokyo*, 11 (1957), p. 91.
- [38] Bishop, R. F., Hill, R., Mott, N. F.: *Proc. Phys. Soc.*, 57 (1945), p. 147.
- [39] Dodeja, L. C., Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 5 (1957), p. 267.
- [40] 王仁: 中国力学学報, 1 (1957), p. 95.

[41] Johnson, W.: *Jr. Mech. Phys. Solids*, 5 (1957), p. 202.

[42] Pearson, C. E.: "*The Extrusion of Metals*", Chapman and Hall, London, 1944, p. 98.

Abstract

Hideaki KUDO, *Study on Forging and Extrusion Processes. Part I—Analysis on Plane Strain Problems*. In the first part of the present work, a method was developed to analyse the plane strain forging and extrusion problems with minimum labor and sufficient accuracy. This was done by reducing the so called 'upper bound' for working pressure as low as possible without accounting for the lower bound.

To begin with, a conception of 'unit rectangular deforming region' was introduced (Fig. 1.1.1). The surrounding bodies of the region was considered to be rigid, and the relative slip resistance on each interface or boundary surface was assumed either zero ('smooth') or k ('rough'). A magnitude 'coefficient of internal energy dissipation' e was then calculated for each frictional boundary condition and height-width ratio a of the rectangular region by deviding the rate of internal energy dissipation \dot{E} by $2k \times (\text{top surface area}) \times (\text{pressing speed})$. After comparing several types of velocity field, the type which was composed of rigid triangles (Figs. 1.1.4, 5, 6, 9, 10, 14 and 15) was found most suitable for the present purpose. The expressions for minimum e and the corresponding types of triangle velocity field were tabulated in Table 1.1.1, the values of e being graphed as functions of a as shown in Fig. 1.1.16.

In the next, the upper bounds for working pressure as well as the most suitable velocity fields in various working processes, such as 'compression' (Figs. 1.2.1 (a) and 4 (a)), 'open-die extrusion' (Fig. 1.2.6), 'heading' (Fig. 1.2.11), 'indentation' (Figs. 1.3.1, 3 (a), 7 and 8), 'extrusion' (Fig. 1.4.1), 'piercing' (Fig. 1.4.7), 'combined extrusion' (Figs. 1.4.9 and 11), 'sideways extrusion' (Fig. 1.4.12), 'extrusion-forging' (Fig. 1.5.1), 'combined extrusion-forging' (Figs. 1.5.9, 13 and 17) and 'closed-die coining' (Figs. 1.6.1, 4 and 5), were analysed by deviding the work material into several 'unit rectangular deforming regions' and by using the above calculated values of e . Certain new informations on many working processes were thus obtained. On the other hand, some of the results were compared with the orthodox 'slip-line' solutions already reported by others, and general good agreements were found. (See Figs. 1.2.2, 14, 1.3.4, 1.4.3, 1.5.5 and 6, in which the author's upper bounds and the exact solutions are indicated by solid and broken lines respectively. See also the velocity field comparisons, Figs. 1.2.13, 1.3.2, 1.3.5, 1.4.5 and 1.5.7.)