

# 二次元および三次元粗さの層流に及ぼす影響<sup>†</sup>

谷 一 郎

## 概 要

二次元的ならびに三次元的な粗さの境界層の遷移に及ぼす影響について、著者の研究を中心として従来の研究を総合したものである。実験の結果を適当に分析して、与えられた粗さの存在のもとに生ずる遷移を推定できるような一般的な関係を導くことに重点をおいている。しかしこのことは、遷移の機構の理解の上に築かれねばならないので、同時に機構の正しい理解を深めることに努めた。簡単のために、低速の場合に限定している。

## 序 言

最近の空気力学の進歩は、翼や胴体の表面のかなりの部分を、層流境界層で蔽うような設計を可能にした。これは実際に、表面の大部分に圧力降下を与えることによって実現されている。さらに積極的な方法として、表面から境界層を吸込み、層流を安定にすることも提案されている。しかし実際に層流を保つことができたとしても、まず必要となるのは、表面が十分に平滑で、境界層の安定が乱されぬようなものでなければならないということである。表面に極めて僅かの粗さがあっても、そのために早期に、境界層が乱流に遷移する可能性がある。それで遷移を誘発しないような粗さの許容限界を推定することは、実際的に非常に重要な問題になるわけである。

1930年代においては、境界層内の粗さの影響について、Schiller [1] の提出した単純な想定が知られているだけであった。Schiller は物体のまわりの低いレイノルズ数の流れが、滑かな流れから渦の放出を伴う剥離する流れに変化する現象から類推して、粗さの高さと粗さの高さでの層流境界層の速度に関するレイノルズ数が、ある一定の臨界値を越えるとき、粗さの存在が遷移に影響するようになるのではないかと想像した。しかし臨界レイノルズ数の値は未知のままに残され、それがはじめて決定されたのは、筆者 [3] が 1940 年に、浜と三石の協力を得て行なった特別な実験によるものであった。圧力勾配のない平板の上に二次元的な粗さが取り付けられ、その下流の定まった位置におかれた表面ピトー管によって、境界層の遷移が検出された。粗さレイノルズ数の遷移点での値は、100 から 300 までの間にあり、平均としておよそ 200 であった。

もっともこの決定においては、臨界レイノルズ数に到達するまでは、何の変化も起らぬということが暗黙のうちに仮定されている。臨界レイノルズ数に到達すると、遷移点は突然に粗さの位置まで前進すると考えるわけである。しかし実際にはそのようなことはないで、それは間もなく Fage と Preston [4] によって、また独立に筆者と浜と三石 [6] によって明らかにされた。変化は急激なものではなく、粗さはかなり下流まで遷移に影響を及ぼすも

<sup>†</sup> Pergamon Press から出版される “Boundary Layer Control—Principles and Applications” (Editor: G. V. Lachmann) の一節として寄稿したものの草案。

のである。いま平板上の与えられた位置に与えられた粗さがおかれ、一様流の速度が次第に増加されるものと考え、遷移点は下流の位置から前進し、次第に粗さの位置に近づいて行く。筆者は、Taylor [2] の一様流の乱れによる遷移の理論の類推によって、実験の結果から遷移点を予知する実験公式を導くことができたが、実験結果の表示方式としては、その後 1953 年に Dryden [11] の提案したものがすぐれている。Dryden は筆者の実験結果を分析するのに、遷移点までの距離と一様流の速度に関する遷移レイノルズ数を、粗さの高さと粗さの位置での境界層の排除厚の比の函数として表示した。この表示方式は、圧力勾配のある流れの場合でも、等価平板の距離を用いて遷移レイノルズ数を定義すれば、そのまま同様に適用されることが、1954 年の筆者と井内と山本の実験 [13]、ならびに 1956 年の Feindt の実験 [17] によって明らかにされた。

孤立した三次元的な粗さの影響については、1950 年に Gregory と Walker [8]、1955 年に Klebanoff と Schubauer と Tidstrom [16] が測定を行なっている。その結果によると、三次元的な粗さの影響は、二次元的な粗さの影響と著しく異なっていて、むしろ臨界現象の性格をもち、遷移レイノルズ数と相対的な粗さの高さの Dryden 関係に従わない。与えられた粗さの影響は、一様流の速度がある臨界値に達するまではほとんど見られず、臨界値に達すると、遷移点は急に粗さの位置まで前進する。この行動は Schiller の想定にかなり近く、粗さレイノルズ数の臨界値は、600~700 という程度のものである。

以上は、現在までの粗さの研究の発達を要約したものである。以下の本文においてはさらに詳細に、まず二次元的な粗さの影響、次に三次元的な粗さの影響について記述する。なお考察を非圧縮性の流れに限ることにする。

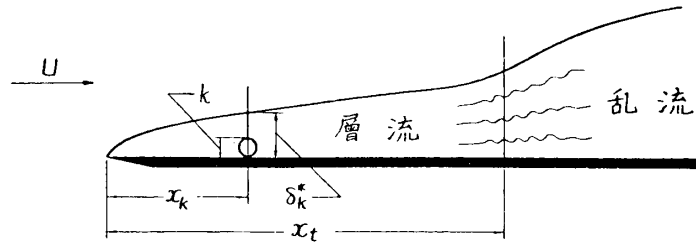
### 主要記号

$U$	境界層外側の速度、圧力勾配のない平板の場合には一様流の速度。
$\nu$	流体の動粘性係数。
$k$	粗さの高さ。
$x_k$	前端の淀み点から粗さの位置までの距離。
$x_t$	前端の淀み点から遷移点までの距離。
$\delta_k^*$	粗さの位置での境界層の排除厚。
$\delta_t^*$	遷移点での境界層の排除厚。
$u_k$	粗さの高さでの層流境界層の速度。
$R_k = ku_k/\nu$	粗さレイノルズ数。
$R_t = Ux_t/\nu$	遷移レイノルズ数。
$\bar{R}_t$	等価平板の遷移レイノルズ数。

### 二次元的な粗さの影響

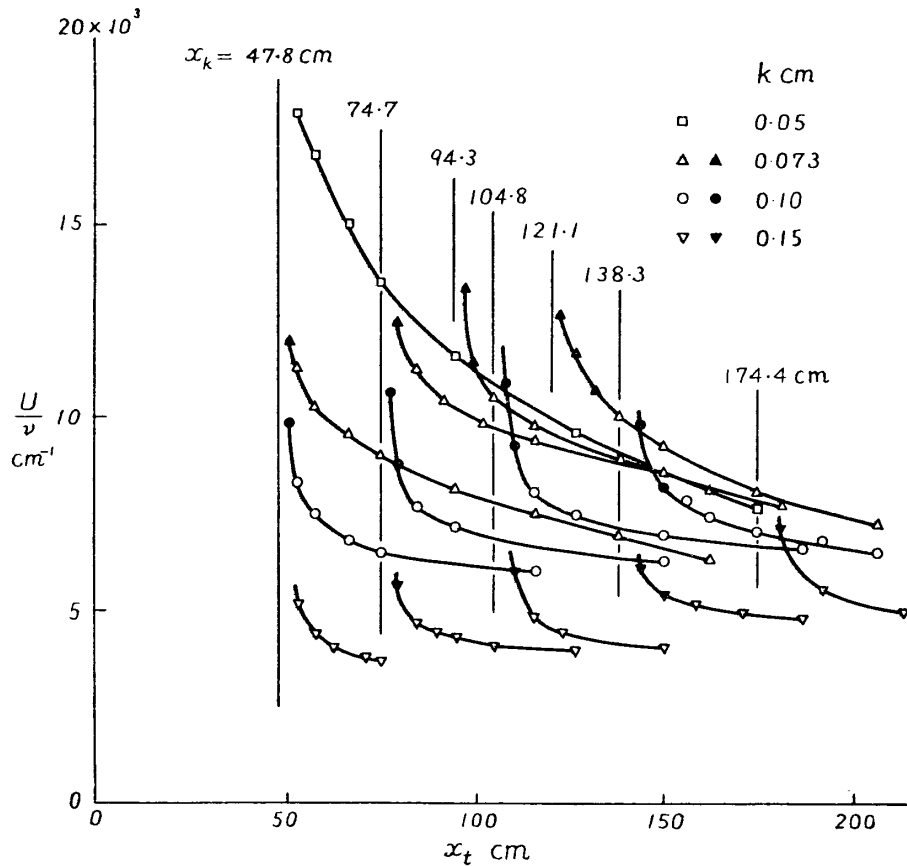
まず最初に、圧力勾配のない平板の境界層において、ただ一つの二次元的な粗さが、層流から乱流への遷移にどのような影響を及ぼすかを考える。特別に断わらぬ限り、粗さは円形断面の柱体、例えば針金のようなものとする。第1図に示すように、速度  $U$ 、動粘性  $\nu$

の一様な流体の流れに平行に平板がおかれ、前端の淀み点から距離  $x_k$  のところに、高さ  $k$  の粗さが存在するものとしよう。境界層の遷移は距離  $x_t$  のところで起こり、 $x_t$  は  $x_k$  より大きいが、速度  $U$  の増加とともに  $x_k$  に接近する。



第 1 図 平板上の遷移に及ぼす粗さの影響の説明図

実験結果の代表的な例として、筆者のデータ [6] を第 2 図に示す。  $k$  と  $x_k$  の種々の値に対し、  $U/\nu$  を  $x_t$  の関数として表示してある。遷移点の決定は、表面に接触させたピトー



第 2 図 一様流の速度と動粘性の比の遷移位置による変化。圧力勾配のない境界層に、円形断面の二次元的な粗さがある場合。 [6] のデータによる。

管の指示による。速度を増加して行くとき、ピトー圧力が急に増加することによって、ピトー管の位置  $x_t$  で遷移が起こるものと判定される。黒く塗りつめた記号は、遷移が粗さのすぐ近くで起こる ( $x_t/x_k < 1.1$ ) 場合を表わしている。

5 個の変数  $k$ ,  $x_k$ ,  $x_t$ ,  $U$  および  $\nu$  の中には、長さと時間の単位が含まれるだけである

から、次元の考察によって、実験の結果は3個の独立な無次元のパラメータの間の函数関係で表わされることが判る。パラメータの選び方はいろいろあるが、もしそれらを適当に選ぶとき、そのうちの一つの影響がほとんど現われないようなことがあるかも知れない。しかしそういう選択を見いだすためには、現象の物理的な概念を利用する必要がある。

境界層外側の流れの乱れによる遷移に対して、Taylor [2] は Pohlhausen のパラメータに類推的な量が、遷移点で一定値を採るのではないかと考えた。もしこの想定が正しいとすると、遷移点で無次元の量

$$\left(\frac{u_T \theta}{\nu}\right) \left(\frac{\theta}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{U \theta}{\nu}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

が一定値を採ることになるが [4], ここで  $\theta$  は境界層の運動量厚,  $M$  は乱れを作る格子の眼の大きさ,  $u_T$  は乱れの最大速度である。筆者は粗さによる遷移においても、同じような無次元の量が存在するであろうと想像した。つまり  $M$  と  $u_T$  の代りに、それぞれ  $k$  と  $u_k$  (粗さの高さにおける層流境界層の速度) を用い、なお  $\theta = 0.664(\nu x/U)^{1/2}$  および  $u_k = 0.332 kU(U/\nu x_k)^{1/2}$ † であることに注意すると、遷移点において

$$R_t = \text{定数} \times \left(\frac{x_k}{k}\right)^{\frac{8}{7}} \left(\frac{x_t}{x_k}\right)^{\frac{3}{7}}$$

の関係が成立つことが予想される。 $R_t$  は遷移レイノルズ数  $Ux_t/\nu$  であって、遷移点までの距離と外側の流れの速度から作られるレイノルズ数である。

第2図に示した実験結果は、まず最初にこのような考え方に従って分析された [6]††。その結果は第3図に、遷移レイノルズ数  $R_t$  が無次元量  $(x_k/k)^{-8/7}(x_t/x_k)^{-3/7}$  の函数として表わされている。黒く塗りつめた記号は、第2図と同じように、 $x_t/x_k < 1.1$  となる場合を示す。これらの点を除いて考えるならば、実験結果は一本の曲線に乗り、上の方程式の定数に 320 という値を与える。なお最近に、Potter [21] は同じような分析を繰返し、その結果として

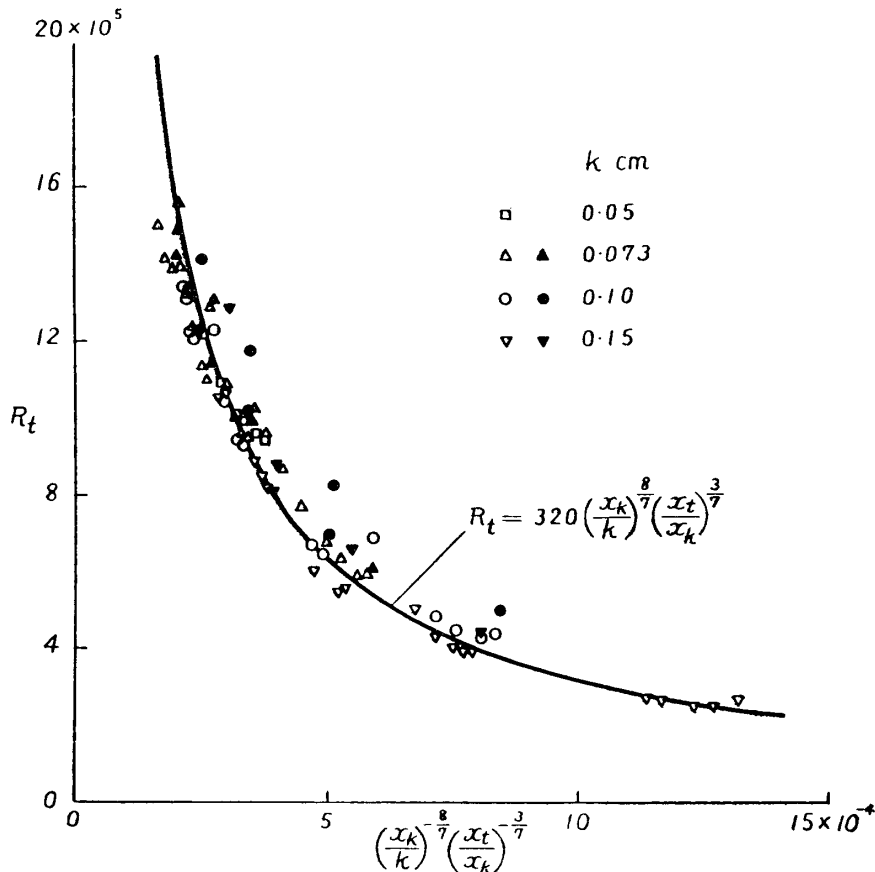
$$R_t = \text{定数} \times \left(\frac{x_k}{k}\right) \left(\frac{x_t}{x_k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

の関係を導いている。方法は最初の Taylor の仮定に従い、それを次元の考察で補ったものである。定数の値はおおよそ 780 に等しい。この関係は、筆者の得たものに比べていくらか簡単であるけれども、その間に本質的な差は認められない。

もう一つの物理的な概念は、管の流れに及ぼす粗さの影響が、境界層の厚さに相対的な粗さの高さに関係するという実験事実から出発する。Tollmien-Schlichting の境界層の不安定理論からも、この概念に対する支持が与えられる。つまり遷移が粗さからある距離の後に起こるような場合には、速度分布の変形はすでに消えていて、攪乱の量の増加だけが粗さの主要な影響として残留している。したがって、選択増幅の起る臨界周波数範囲の攪乱に対する粗さの寄与は、境界層の厚さに相対的な粗さの高さに関係するものと考えられる。Dryden

† この関係は近似的なものであるが、 $k$  が境界層の排除厚  $\delta^*$  より小さければ十分に正しくなりたつ。

†† 文献 [6] では、遷移点での条件が  $(k/x_k)(Ux_k/\nu)^{7/8} = \text{定数} \times (x_t/x_k)^{-1/2}$  の形で表わされ、定数の値として  $155 [= (320)^{7/8}]$  が与えられている。



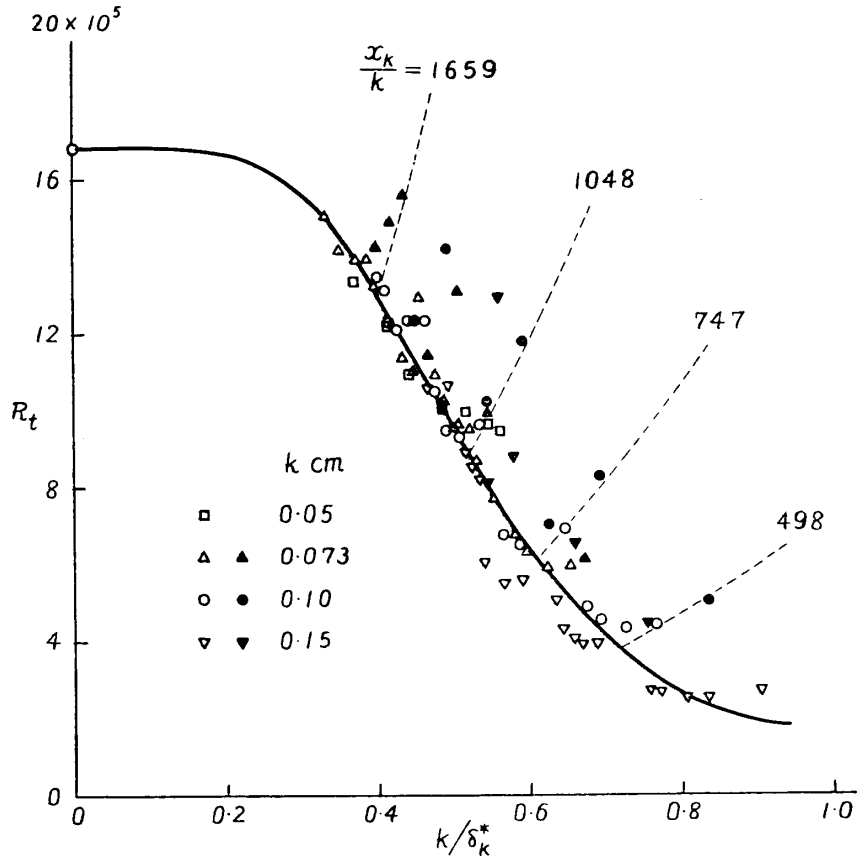
第 3 図 遷移レイノルズ数と  $(x_k/k)^{-8/7}(x_t/x_k)^{-3/7}$  の関係. 圧力勾配のない境界層に, 円形断面の二次元的な粗さがある場合. [6] のデータによる.

[11] はこのような論理に導かれて, 筆者のデータ [6] を分析するのに, 遷移レイノルズ数  $R_t$  を相対的な粗さの高さ  $k/\delta_k^*$  の関数として表示した.  $\delta_k^*$  は粗さの位置での境界層の排除厚であって,  $\delta_k^* = 1.721(\nu x_k/U)^{1/2}$  から計算される. 結果は第 4 図に示すようになり, ここでも黒く塗りつめた記号は,  $x_t/x_k < 1.1$  となる場合を表わしている. これから判るように, 遷移が粗さの位置の下流で, あまり接近していないような場合には, 実験の結果はほぼ一本の曲線に乗るものである.  $x_t$  が  $x_k$  に接近すると, 実験値はこの曲線から離れはじめ, それから  $x_t = x_k$  という極限の場合に相当する曲線, つまり  $R_t$  と  $k/\delta_k^*$  の対応では, 放物線

$$R_t = 2.96 \left( \frac{x_k}{k} \right)^2 \left( \frac{k}{\delta_k^*} \right)^2$$

に漸近して行く. 第 4 図には破線によって,  $x_k/k$  の実験値に相当する二三の極限曲線が示されている.

このようにして,  $R_t$  を  $k/\delta_k^*$  に対して描くことは, 遷移が粗さからある距離で起こる場合に, 実験結果のかなりよい相関を与えることが判る. 第 3 のパラメータ  $x_k/k$  の影響が現われるのは, 遷移が粗さの位置に接近する場合に限られる. この表示の方法は, 相対的な粗さの高さ  $k/\delta_k^*$ , ならびに  $x_t = x_k$  を表わす極限曲線について, 物理的な意味が明瞭である

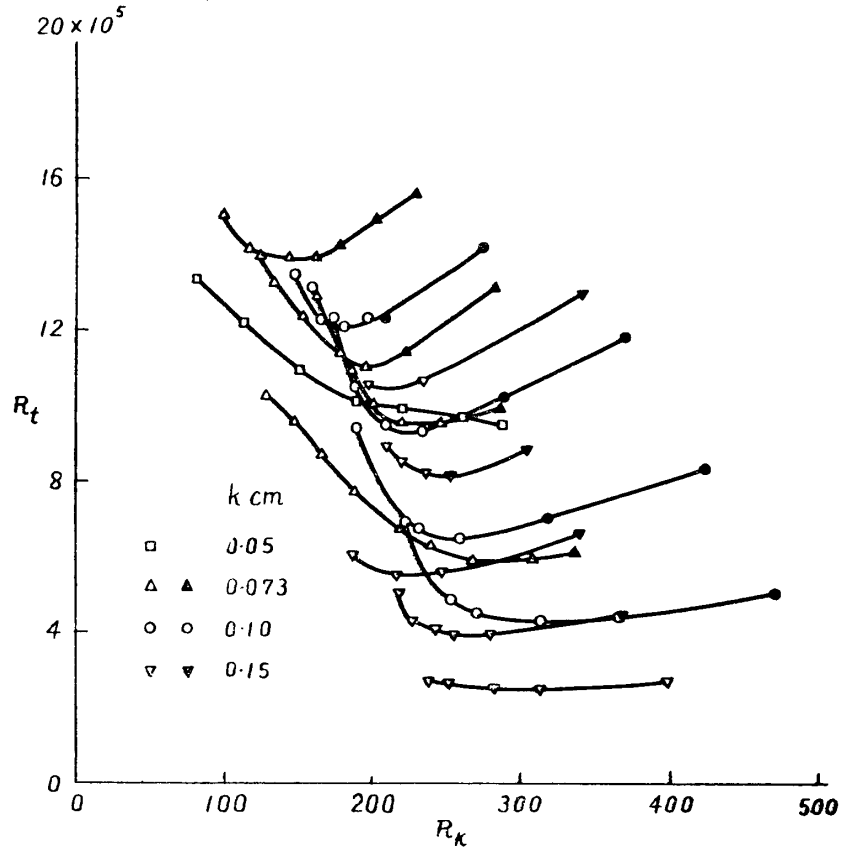


第4図 遷移レイノルズ数と相対的な粗さの高さの関係。圧力勾配のない境界層に、円形断面の二次元的な粗さがある場合。[6] のデータによる。

点がすぐれている。いま考察を具体的にするために、平板の前端から与えられた距離に、与えられた粗さがおかれ、一様流の速度が次第に増加されるものと考え、遷移点は下流から次第に前進し、遷移レイノルズ数  $R_t$  は、上に述べた  $R_t$  対  $k/\delta_k^*$  の単一曲線に沿って減少する。しかし一様流の速度のある値で、遷移レイノルズ数は最低値に達し、それからは速度の増加に従って、遷移レイノルズ数は増加を始める。それと同時に、単一曲線からの離別が起こるようになるのである。

第5図には第3の表示方式として、遷移レイノルズ数  $R_t$  が粗さレイノルズ数  $R_k (=ku_k/\nu)$  に対して示されている。この結果からみると、 $R_k$  が一定値を採るという Schiller の仮定は、実験結果のよい相関を与えないことが判る。しかしそれにしても、遷移レイノルズ数の最低値に相当する  $R_k$  の値がかなり狭い範囲、150 から 300 の範囲にあることは注目されてよい。このことは、 $R_k$  がある臨界値を越えるとき、粗さの後の流れにある変化が起こることを暗示する。

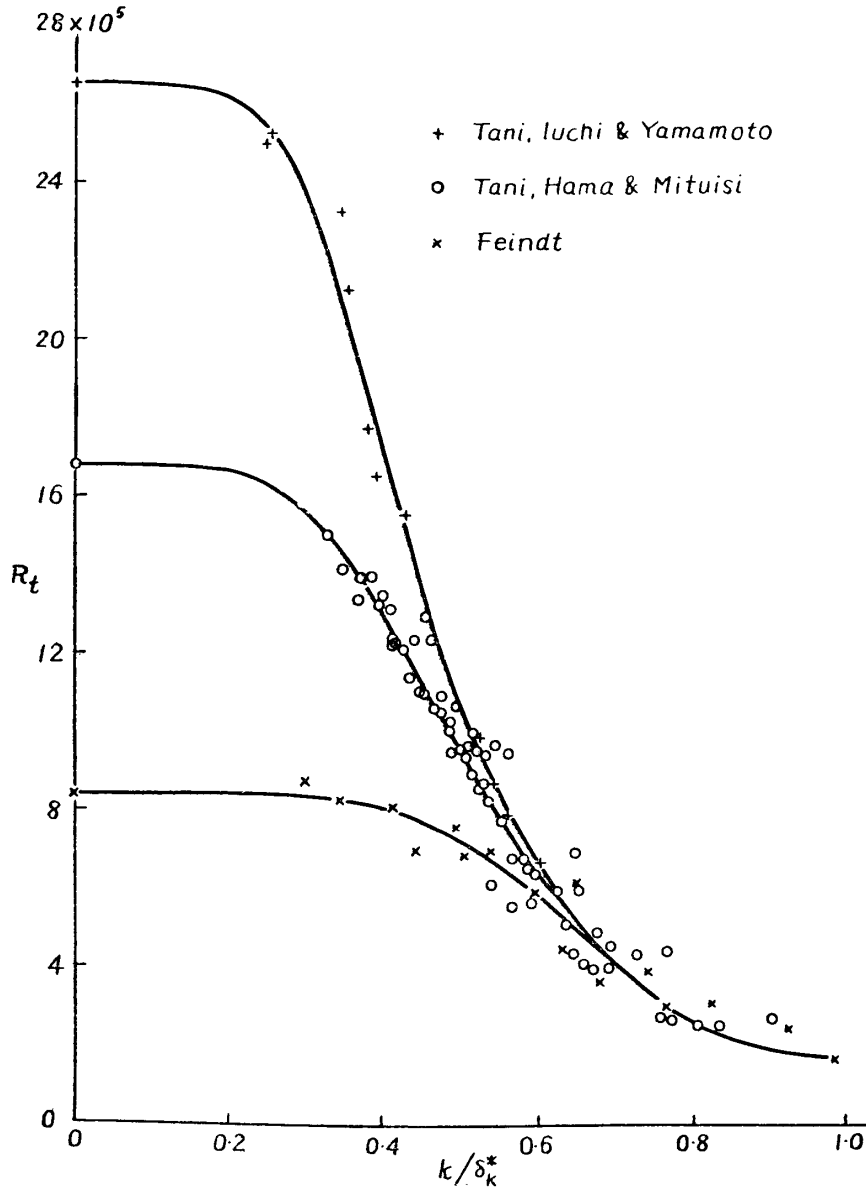
半円形断面の粗さの下流で、Liepmann と Fila [7] は平均速度の分布を測定している。ただ  $k/\delta_k^*$  の値はすべて大きく、最小のものでも 0.76 である。これに対して筆者と佐藤 [19] は、円形断面の二次元粗さ（針金）の下流で、 $k/\delta_k^* = 0.4 \sim 1.2$  の範囲で、平均および変動速度の詳細な測定を行なった。これらの研究の結果によれば、 $R_k$  が最低遷移レイノ



第5図 遷移レイノルズ数と粗さレイノルズ数の関係。圧力勾配のない境界層に、円形断面の二次元的な粗さがある場合。[6]のデータによる。

ルズ数に相当する臨界値より小さいか大きいかに従って、遷移の性質が対照的に異なるものである。 $R_k$ が臨界値より小さい場合には、流れは粗さの上で剥離するが、下流で再び平板に附着し、層流の状態を持続する。つまり遷移は、再附着した境界層の中で起こるわけである。粗さからある距離の下流で、正弦的な速度変動が観察され、卓越する周波数は **Tollmien-Schlichting** 振動のものである。これに対して、 $R_k$ が臨界値より大きい場合には、遷移は粗さから剥離した流れの中で起り、再附着する境界層は乱流の状態になっている。剥離した流れの中で、正弦的な速度変動が観察されるが、その周波数は鋭い稜からの剥離流に固有のものである。

**外側の流れの乱れの影響** 第2図から第5図までの中で引用された実験結果は、滑かな平板の遷移レイノルズ数  $R_t$  が  $1.7 \times 10^6$  に等しい気流で得られたものである。粗さから生ずる攪乱は、気流中に既存の攪乱に重合されるわけであるから、一定の粗さによる遷移は、気流の乱れが著しいほど早く起こることが予想される。このような気流の乱れの影響は、第6図の遷移レイノルズ数  $R_t$  と相対的な粗さの高さ  $k/\delta_k^*$  の関係に示されている。引用された三つの測定のうち、二つは筆者 [6] [13]、一つは Feindt [17] のものである。滑かな平板の遷移レイノルズ数は、 $0.8 \times 10^6$  から  $2.6 \times 10^6$  までの範囲にわたり、遷移点の決定はすべて、表面に接触させたピトー管の指示による。なお遷移が粗さのすぐ下流で起る場合のも



第 6 図 遷移レイノルズ数と相対的な粗さの高さの関係。圧力勾配のない境界層に、円形断面の二次元的な粗さがある場合。一様流の乱れの強さの影響を示す。[6] [13] および [17] のデータによる。

のは省いてある。この結果から見ると、乱れの影響が著しく現われるのは、 $k/\delta_k^*$  の値が小さい場合だけであって、 $k/\delta_k^*$  が増加するに従って、 $R_t$  と  $k/\delta_k^*$  の関係は単一の曲線に収束する。この傾向は、Dryden [11] の最初の予想、つまり粗い平板の  $R_t$  と滑かな平板の  $R_t$  の比は、乱れの強さに無関係に  $k/\delta_k^*$  だけの普遍的な函数になるという予想、といくらか異なるようである。Dryden [26] は新しい論文で、粗さの影響と乱れの影響は、類似の性質をもつことを指摘している。もし両者の影響が加算的であり、なお滑かな平板の遷移レイノルズ数が、気流の乱れの強さの普遍的な函数であると仮定してよいならば、第 6 図の実験結果から、粗さの影響に等価の乱れの強さとして



$$\frac{\sqrt{u^2}}{U} = 0.044 \left( \frac{k}{\delta_k^*} \right)^3$$

が得られる。

なお第 6 図から窺われることは、遷移レイノルズ数  $R_i$  は  $k/\delta_k^*$  のある値 (0.2~0.3) までほぼ一定であり、この  $k/\delta_k^*$  の値は乱れの僅かな場合ほど小さいということである。しかも Smith と Clutter [24] が指摘したように、この臨界条件は  $R_k$  の一定値で与えられるらしく見える。Smith と Clutter は従来の実験結果の他に、さらに乱れの僅かな気流での実験を追加し、 $R_i$  が滑かな平板の値の 95% に減少するところを臨界条件として、それが  $R_k$  の値のおよそ 100 に相当することを見いだしている。

**圧力勾配の影響** ここまでに記した粗さの影響は、圧力勾配のない平板の境界層の遷移に関するものである。もっとも粗さの影響は、局所的な性格をもっているから、上に述べた遷移のデータの表示方式は、圧力勾配がほぼ一様に近く、しかも関係する物理量が境界層の局所状態に基づいたものである限り、圧力勾配のある境界層に適用することができそうに思われる。この意味において、遷移レイノルズ数を定義するのに、前端の淀み点から遷移点までの距離  $x_i$  を用いることは適当でなく、これを遷移点での境界層の排除厚  $\delta_i^*$  によって置きかえる必要がある。別の表現を用いれば、次の関係

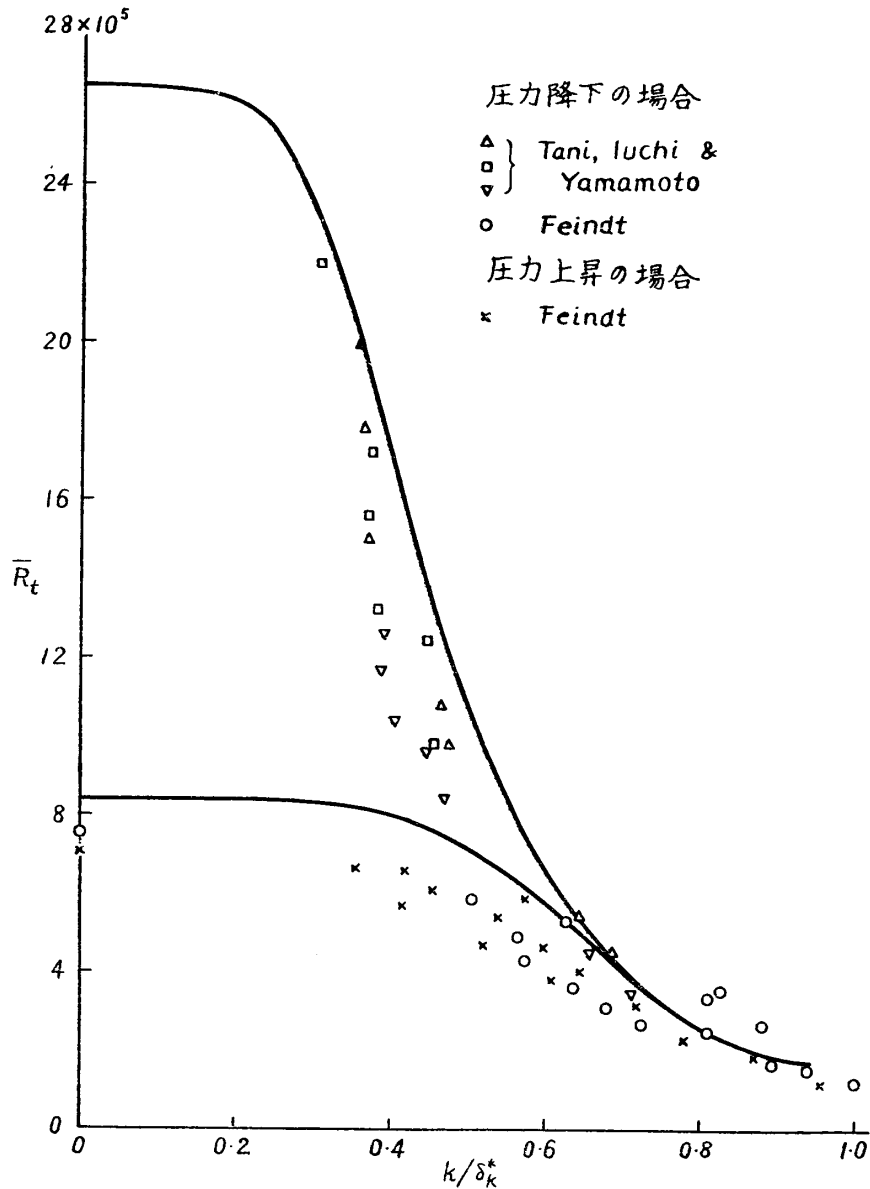
$$\bar{R}_i = \frac{1}{1.721^2} \left( \frac{U_i \delta_i^*}{\nu} \right)^2$$

で定義される等価平板の遷移レイノルズ数  $\bar{R}_i$  を採用することが妥当である。ここで  $U_i$  は、遷移点での境界層外側の流れの速度を表わす。

この表示方法は筆者 [13] によって、井内および山本と協同のもとに、圧力降下を伴う境界層で行なわれた測定の結果を整理するのに用いられた。遷移点の決定は、表面に接触させたピトー管の指示による。結果は第 7 図に示され、3 種類の圧力降下の場合について、等価平板の遷移レイノルズ数  $\bar{R}_i$  と相対的な粗さの高さ  $k/\delta_k^*$  の関係が与えられている。遷移が粗さのすぐ下流で起こる場合の測定値は省かれ、なお比較のために、圧力勾配のない流れに対する関係が実線で示されている。さらに同じ図に、その後に行なわれた Feindt [17] の実験結果が含まれているが、この実験は圧力降下の場合だけでなく、弱い圧力上昇を伴う流れについても行なわれたものである。このような結果を比較して見ると、 $\bar{R}_i$  と  $k/\delta_k^*$  の関係で表わされる限り、圧力勾配の影響はほとんど見られず、もしあったとしても、極めて僅かであることが判るわけである。

**粗さの形状の影響** ここまでに述べたのは、もっぱら円形断面の柱状の粗さ、つまり針金の影響に関するものである。円形以外の断面の粗さについては、実験の結果が極めてすくなく、その影響を量的に見積もるのに充分でない。

Fage [5] は滑かな膨らみ、滑かな窪み、平たい稜など、いろいろの断面の粗さについて、弱い圧力降下を伴う流れで測定を行なった。その後 Cowled [14] も、同じような測定を繰返している。これらの結果は明らかに形状による影響の相違を示し、例えば平たい稜の影響は、同じ高さの滑かな膨らみまたは窪みに比べてはるかに大きい。Fage の実験結果を分析し直して見ると、高さ  $k$  の 40~60 倍の幅をもつ平たい稜の影響は、直径がおよそ  $\frac{2}{3}k$  に等



第7図 等価平板の遷移レイノルズ数と相対的な粗さの高さの関係。種々の圧力勾配をもつ境界層に、円形断面の二次元的な粗さがある場合。[13] および [17] のデータによる。

しい針金の影響と同等であることが判る。

**完全乱流のための最小粗さ** 二次元的な粗さの影響の記述を終る前に、粗さからすぐに遷移を生ずるような、粗さの高さの最小値について触れておきたい。Preston [25] は従来の実験結果を分析して、圧力勾配のない平板で完全に発達した乱流境界層が得られるためには、運動量厚に基づくレイノルズ数がおよそ320以上でなければならないことを見いだしている。この結果を用いると、最小の粗さの高さは、 $R_\theta + \Delta R_\theta = 320$  から推定されることになるが、ここで  $R_\theta$  は、粗さのない平板上で粗さの位置における運動量厚に基づくレイノルズ

数,  $\Delta R_\theta$  は粗さの抵抗による運動量厚の増加に相当するレイノルズ数である。後者は

$$\Delta R_\theta = \frac{1}{2} C_D \frac{kU}{\nu} \left( \frac{u_k}{U} \right)^2$$

の形で表わされるが,  $C_D$  は粗さの高さの位置の速度  $u_k$  に関する抵抗係数であって, 針金の場合にはおよそ  $3/4$  に等しい。このようにして最小粗さを推定した結果は, Dutton [18] や小松・半田 [29] の実験結果とかなりよく一致している。

### 三次元的な粗さの影響

層流で蔽われた表面の上に, 埃粒のような孤立した三次元的な粗さが存在すると, すぐその位置から遷移が起こり, 粗さを頂点とする楔(くさび)形の乱流部分が下流にひろがって行く。この現象は 1930 年代から知られており, もし粗さの高さ, または一樣流の速度を減少させると, 乱流の楔が粗さの位置からいくらか下流で始まることも観察されていた。

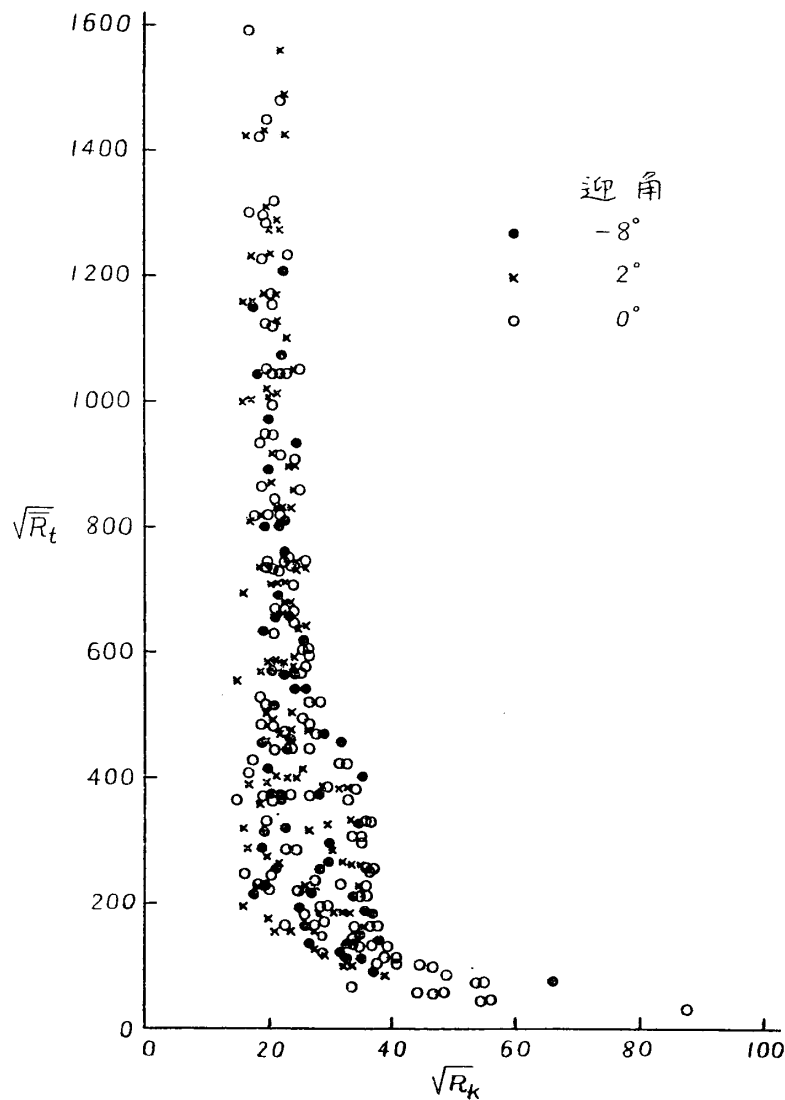
この種類の遷移を最初に系統的に調べたのは, Gregory と Walker [8] であるように思われる。彼らがある条件のもとに観察した陶土(china-clay)の記録においては, 粗さの下流の境界層に一对の渦糸の発生を暗示する線条が見られ, それが結局崩壊して, 乱流の楔となることが示されている。煙風洞で詳しく調べると, 馬蹄形の渦が粗さの前面をくるみ, 下流に伸びていることが判る。一樣流の速度, または粗さの高さを極めて僅か増加すると, 流れの型は一对の線条から突然に変わって, 粗さの位置から始まる完全乱流の楔となる。このような遷移点の急激な移動は, 三次元的な粗さの影響を特徴づけるもののものであって, 二次元的な粗さの場合には, 遷移点は速度の増加と共に徐々に前進する。

今日ではすでに, Fales [15], Weske [20], Hama, Long & Hegarty [23], Schubauer [27] などの研究によって, 二次元的な粗さは二次元的な渦を発生するが, 渦は三次元的な配置に発達してから, 最後に崩壊して乱流になることが知られている。三次元的な配置の渦の形成されることが, 乱流発生に不可欠の前提条件と考えられるわけで, このことが一樣流の速度を増すとき, 遷移点が徐々に前進することに説明を与える。これに反して, 三次元的な粗さは三次元的な渦を作るのにより卒直であり, 粗さから渦の放出が始まるや否や, 遷移点を急激に前進させることになるのであろう。

Gregory と Walker は, ゼロまたは僅かに負の圧力勾配をもつ翼型の表面に, 円柱状または円錐状の粗さを取りつけ, 粗さの位置から乱流の楔のひろがるときの粗さの高さの臨界値を, 陶土記録の技術によって決定した。実験結果をうまくまとめるには,  $(k/x_k) \times (Ux_k/\nu)^{1/2}/F$  を  $Ux_k/\nu$  の関数としてプロットすればよいことが見出されたが, ここで  $F$  は,  $(k/x_k)(Ux_k/\nu)^{1/2}$  が 1 になるときの  $(Ux_k/\nu)^{1/2}$  の値を表わしている。 $F$  は翼弦方向の位置の関数であるが, 二つの翼型で得られた結果から想像すると, その他の翼型でも, それとあまり違わないのではないかと考えられる。しかし  $F$  を一般的に決定する方法が与えられていないので, この整理の方式は, 実験された翼型に似た翼型で, しかも揚力係数の低い場合でなければ適用することができない。

三次元的な粗さの影響は, 臨界現象の性格をもつものであるから, 遷移点で粗さレイノルズ数が一定値をもつという Schiller の想定に従って, 実験の結果を整理することは魅力的

に考えられる. Klanfer と Owen [9] はこの試みを実行し, Gregory と Walker のデータを分析し直して, 粗さレイノルズ数  $R_k$  の平方根を, 境界層の排除厚に関するレイノルズ数  $U\delta_k^*/\nu$  の函数としてプロットしている. 臨界条件のもとでは, 遷移は粗さの位置で起こり, 従って  $x_t = x_k$ ,  $\delta_t^* = \delta_k^*$  であり, レイノルズ数  $U\delta_k^*/\nu$  は遷移レイノルズ数  $U\delta_t^*/\nu$  に等しい. 厚さ 13% の翼型 (迎角  $-8^\circ, 0^\circ, 2^\circ$ ) の表面の円錐状粗さについての結果は第 8 図に示されるが, ここでは等価平板の遷移レイノルズ数  $\bar{R}_t [=0.338(U\delta_t^*/\nu)^2]$  の平方根が,  $R_k$  の平方根の函数として表示されている. かなりの散乱はあるにしても, 平均の曲線を引くことができ,  $\bar{R}_t$  がおよそ  $500^2 = 25 \times 10^4$  以上のところでは,  $R_k$  は一定値  $21^2 = 440$  を採るように見える.



第 8 図 等価平板の遷移レイノルズ数の平方根と粗さレイノルズ数の平方根の関係. 圧力勾配がゼロまたは僅かに負の境界層に, 円錐状粗さがある場合. [8] のデータによる.

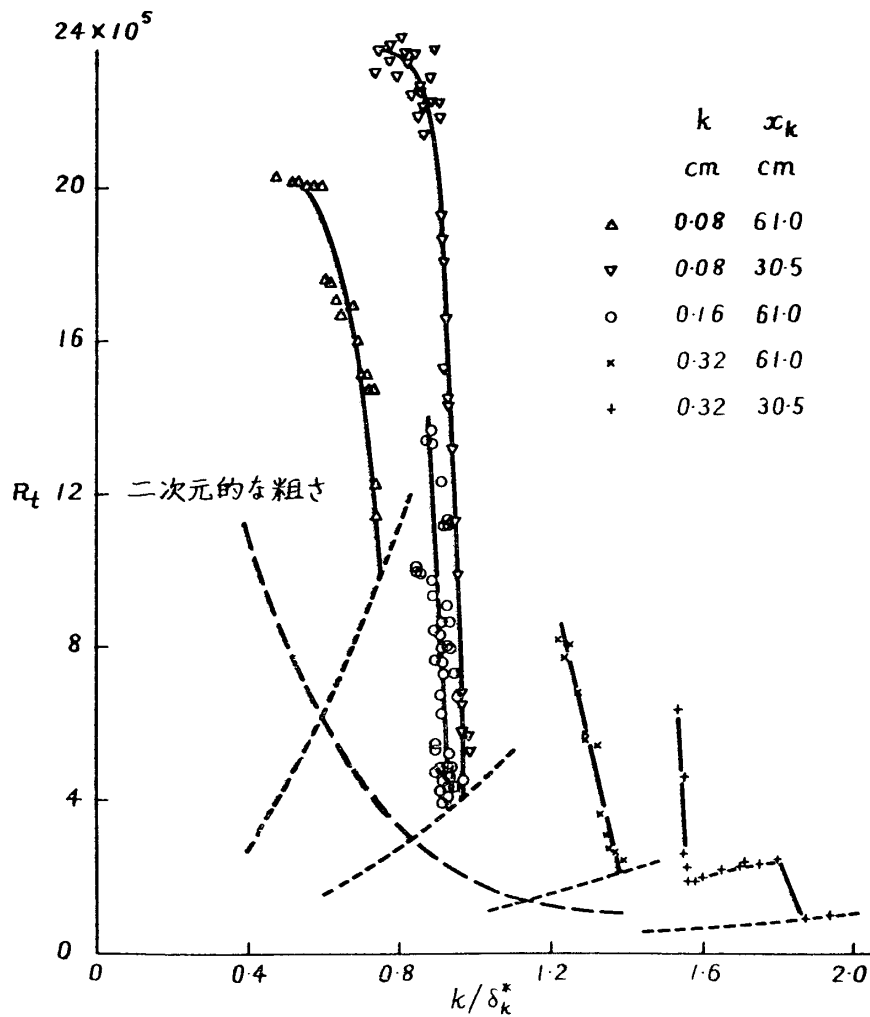
Klebanoff, Schubauer および Tidstrom [16] の測定は、圧力勾配のない平板の表面に、流れに垂直な横の一行に球状の粗さを配列した場合の影響を調べたものである。遷移の検出は、球の真後の下流で、熱線風速計を移動させることによって行なわれた。測定の結果は第9図および第10図に、それぞれ  $R_t$  と相対的な粗さの高さ  $k/\delta_k^*$  の関係、および  $R_t$  と粗さレイノルズ数  $R_k$  の関係として表わされている。  $x_l = x_k$  という極限の場合に相当する曲線

$$R_t = 2.96 \left( \frac{x_k}{k} \right)^2 \left( \frac{k}{\delta_k^*} \right)^2,$$

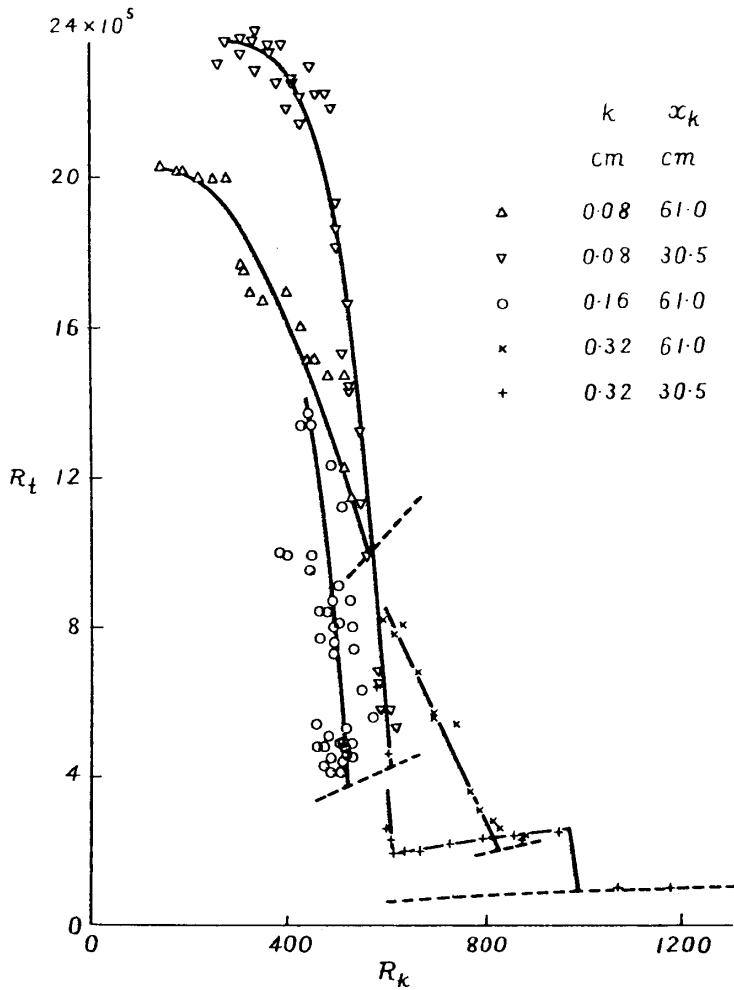
および

$$R_t = 2.08 \left( \frac{x_k}{k} \right)^{\frac{4}{3}} R_k^{\frac{2}{3}}$$

は、それぞれの図に破線で示されている。なお第9図には、二次元的な粗さに対する  $R_t$  と



第9図 遷移レイノルズ数と相対的な粗さの高さの関係。圧力勾配のない境界層に、横一行の球状粗さがある場合。[16] のデータによる。



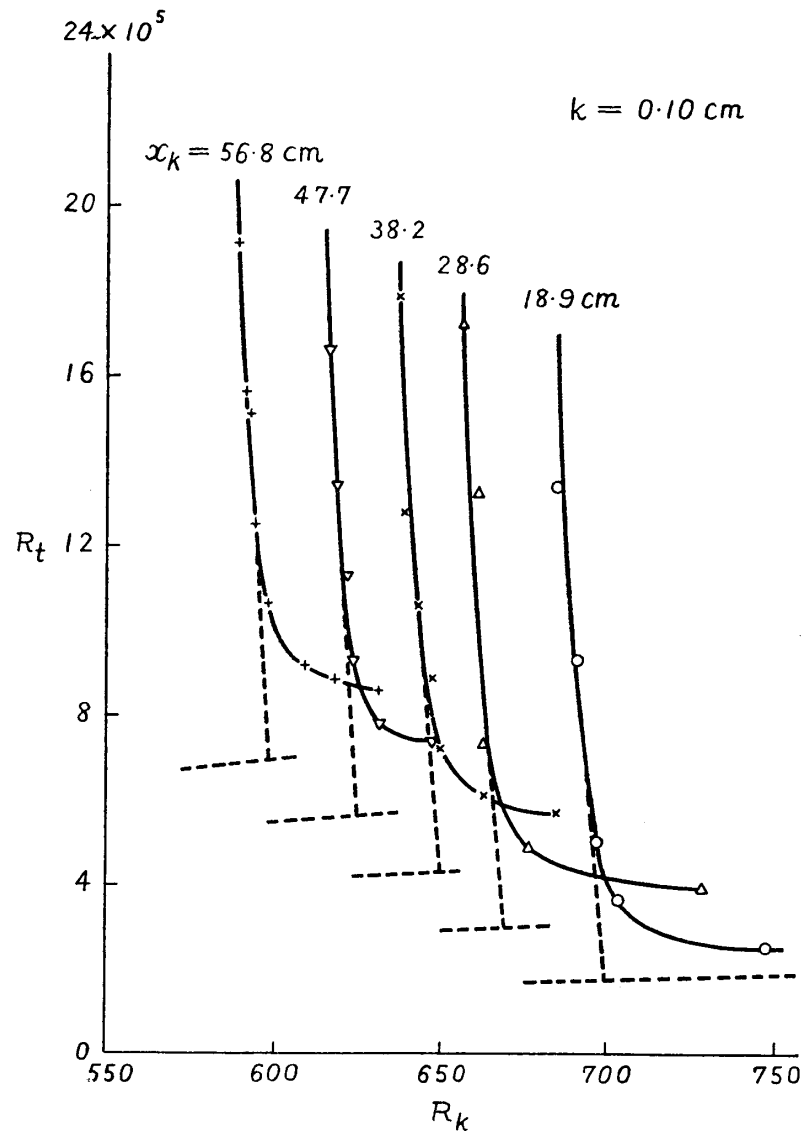
第 10 図 遷移レイノルズ数と粗さレイノルズ数の関係。  
 圧力勾配のない境界層に、横一列の球状粗さがある場合。[16] のデータによる。

$k/\delta_k^*$  の関係も、長い破線で示されている。この比較から見ると、三次元的な粗さは二次元的な粗さに比べて、遷移を起すのに弱力であることが判る。しかもその遷移は、二次元的な粗さに対して確立された  $R_t$  と  $k/\delta_k^*$  の Dryden 関係に従わず、むしろ  $R_k$  が一定値 (500~800) を採ることで支配されるように見える。この粗さレイノルズ数の値は、Gregory と Walker の実験から導かれた値 440 に比べていくらか大きい。二つの実験の相違、ことに粗さの型、流れの乱れと圧力勾配、臨界粗さレイノルズ数の定義などの相違を考えると、妥当な比較を得ることは困難のように思われる。

このような事情にかんがみ、筆者 [28] は最近に菰田と井内の協力を得て、圧

力勾配のない平板の上に単一の孤立した粗さをおき、その影響を広範囲にわたって調べることを試みた。粗さは高さが直径に等しい円柱で、平板の裏側にある磁石によって平板に附着させた。接着剤を必要としないので、粗さの高さを十分に正確に調節することができる。遷移の検出には、粗さの真後の下流で熱線風速計を移動させ、指示変動の間欠係数がおおよそ 50% を示すところを遷移点と定めた。測定結果の代表的な例は、第 11 図に示されるが、ここでは第 10 図と同様に、 $R_t$  が  $R_k$  に対してプロットされている。乱流の楔がちょうど粗さの位置から始まる臨界状態は、破線のように測定値を延長し、極限曲線と交わる点を求めることによって定められる。

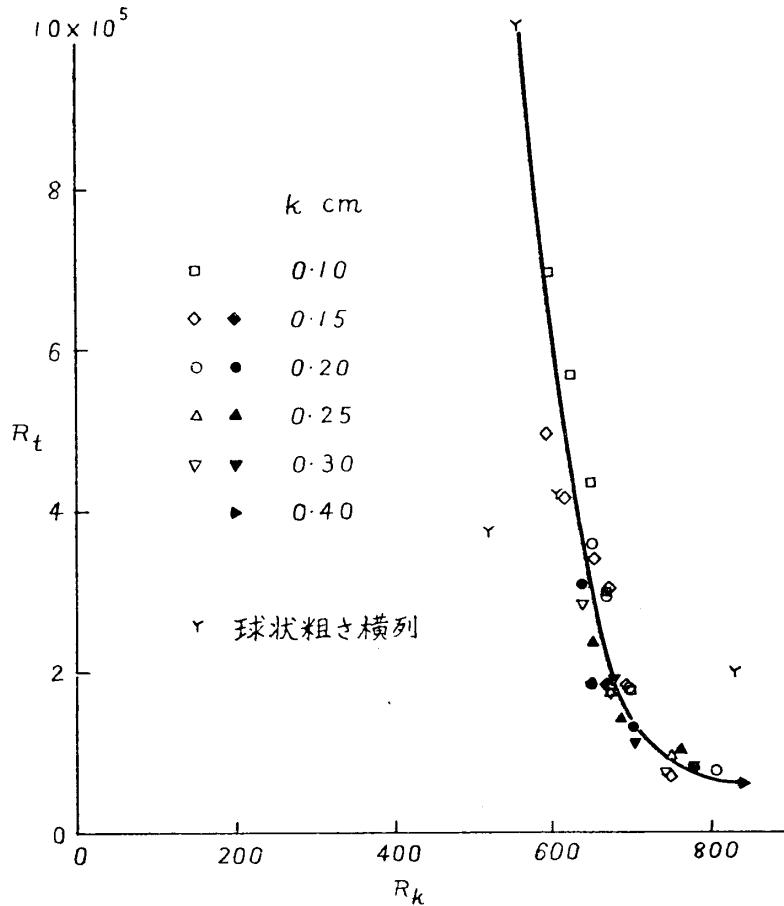
第 12 図には、臨界状態における遷移レイノルズ数  $R_t$  と粗さレイノルズ数  $R_k$  の対応が集められている。中空の記号は一樣流の乱れが 0.05%、中実の記号は 0.2% の場合のものである。なお同じ図に、Klebanoff, Schubauer および Tidstrom の横一列の球状粗さの測定結果も記入されている。この図のデータから、遷移レイノルズ数が低下すると、臨界



第 11 図 遷移レイノルズ数と粗さレイノルズ数の関係。圧力勾配のない境界層に、高さ 0.1 cm の円柱状粗さがある場合。一様流の乱れの強さ 0.05%。[28] のデータによる。

粗さレイノルズ数が僅かに増加することが認められる。 $R_t$  の低い値における  $R_k$  の増加は、明らかに層流境界層の安定に関連するもので、微小振動に対する中立安定の臨界レイノルズ数は、理論的に  $6 \times 10^4$  と与えられている。それにしても、臨界粗さレイノルズ数の測定値が 600 から 800 という、かなり狭い範囲に含まれることは注目されてよい。一様流の乱れの強弱は、この臨界値にほとんど影響を与えない。なお図には記されていないが、円柱状粗さを横列にならべるとき、間隔があまり狭くなければ、単一粗さに比べて、 $R_k$  は僅かに減少するに過ぎない。圧力勾配の存在も、 $R_k$  の値に僅かに影響を及ぼすだけである。

**粗さの伴流の流れの模様** すでに述べたように、Gregory と Walker は煙および陶土の技術を用いて、単一の粗さの伴流の流れを観察している。低いレイノルズ数では、粗さの

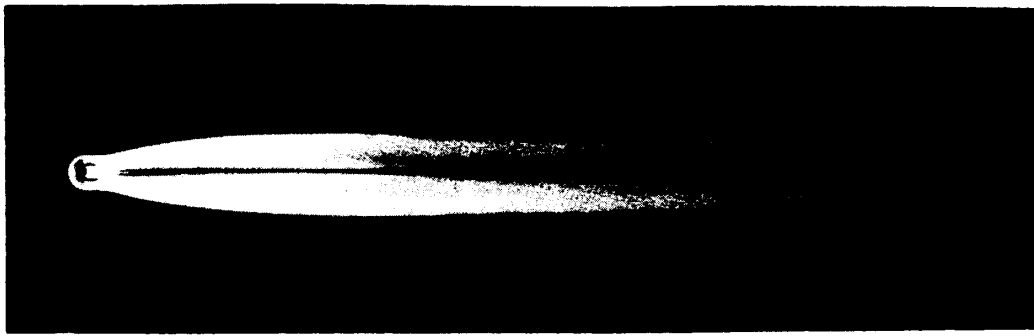


第12図 遷移レイノルズ数と臨界レイノルズ数の関係。圧力勾配のない境界層に、単一の円柱状粗さ、または横一列の球状粗さがある場合。[16] および [28] のデータによる。

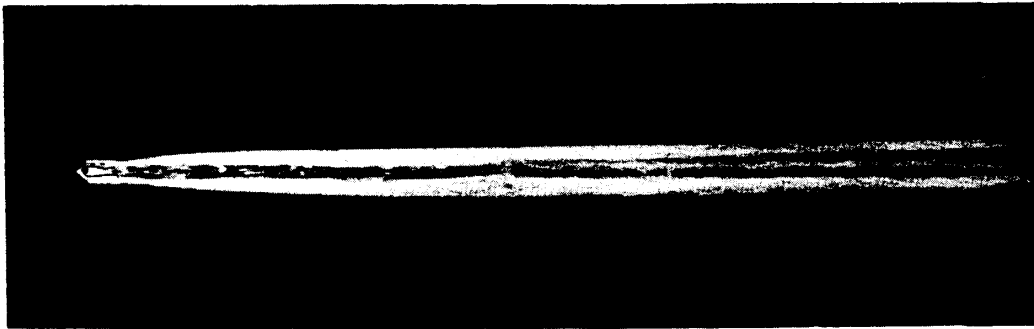
すぐ後の表面から垂直に、一対の細い渦糸が立上り、粗さの高さに達すると流れに捉えられて、極めて僅かの間隔を保ったままで下流に伸びて行く。場合によっては分解されず、一本の線条のように見えることもある。レイノルズ数が増加すると、乱流の楔状のひろがりが増え、粗さのない場合の遷移位置より上流に進み始める。さらに大きいレイノルズ数では、粗さの前面をくるむ馬蹄形の渦が現われるが、この渦の起原は、粗さの上流の境界層内の二次流に求めることができる。さらにレイノルズ数が増加すると、粗さの高さから伸びる細い渦糸は崩れ、渦の放出が起り、また乱流の楔は前進して、頂点が粗さの位置に達する。楔はこれを詳細に見ると、いくつかの対の渦から成り立っていて、粗さの前面から生ずる対が最も強く、その外側の対は、下流にある間隔をおいて発生し、全体として半頂角  $7^\circ \sim 14^\circ$  の楔を形成する。

第13図は、筆者[28]が菰田および井内と撮影した写真で、円柱状の粗さを取りつけた平板を水槽の中で曳航した場合のものである。流れを見えるようにするために、平板に設けた小さい孔からミルクを流出させた。写真は粗さレイノルズ数の増加する順にならべてあるが、すべて馬蹄形の渦が出現してからのものである。(a)では、馬蹄渦は安定で直線状に





(a)



(b)



(c)

第 13 図 円柱状の粗さ（黒円で示される）のまわりの水の流れの観察。[28] による。

伸びるが、(b) では裾の方を振りはじめ、(c) では、乱流の楔が粗さの位置からはじまっている。

もっともこのような観察だけでは、細い渦糸が遷移の機構にどのような影響をもつか明らかでない。しかしその影響は、少なくとも馬蹄形の渦が現われてからは、第二義的になるのではないかと考えられる。実際に馬蹄渦の影響は、粗さのかなり下流まで、境界層の速度分布の変形として検出されるものである。このように流れの場が三次元的に変ることは、三次元の粗さに特徴的な、遷移点の急激な前進を招来することになるのであろう。

## 結 言

二次元的な粗さでも、三次元的な粗さでも、粗さレイノルズ数が臨界値を越えるとき、そ

のまわりの流れの性質に変化を生ずることは確かである。しかし、二次元的な粗さは二次元的な攪乱を生じ、それが三次元的な配置に発達して後に、崩れて乱流に変わるものと考えられる。このことは一方において、一様流の速度が増加するとき、遷移点が徐々に粗さの位置に近づく現象に説明を与えるが、また他方において、遷移点が粗さレイノルズ数の一定値で支配されるという Schiller の想定の不成立を理由づける。遷移の機構は実はもう少し複雑なものであるが、ただ遷移レイノルズ数を相対的な粗さの高さに対してプロットすると、実験結果の良好な相関が得られるようである。これに反して、三次元的な粗さは直接に三次元的な攪乱を発生するので、速度がある臨界値を越えると、遷移点は急激に前進して粗さに接近する。この行動は、むしろ Schiller の想定に近いもので、粗さレイノルズ数の臨界値は 600~800 の程度である。

二次元的な粗さと三次元的な粗さの影響の相違は、それを正しく認識することによって、遷移の本質に関する多数の知識をもたらしている。しかしそれにしてもなお、充分に理解されない多くの現象が存在する。一層詳細な研究を進めることは、許し得る粗さの最大限度を正確に予知するばかりでなく、遷移の基本的な機構をよりよく理解するためにも、極めて重要であろうと思われる。

1959 年 3 月 航空力学部

#### 文 献

- [1] Schiller, L.: *Strömung in Röhren. Handbuch der Experimentalphysik, Vol. 4, Pt. 4, pp. 189, 192, Leipzig, 1932.*
- [2] Taylor, G. I.: *Statistical Theory of Turbulence, Pt. 5. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 156, pp. 307-317, 1936.*
- [3] 谷 一郎・浜 良助・三石 智: *On the Permissible Roughness in the Laminar Boundary Layer. 東大航研報告 No. 199, Oct. 1940.*
- [4] Fage, A. and Preston, J. H.: *On Transition from Laminar to Turbulent Flow in the Boundary Layer. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 178, pp. 201-227, 1941.*
- [5] Fage, A.: *The Smallest Size of a Spanwise Surface Corrugation Which Affects Boundary-Layer Transition on an Aerofoil. A. R. C., R. & M. No. 2120, 1943.*
- [6] 谷 一郎・浜 良助: *平板層流境界層の許容粗さに関する実験. 戦時研究報告 I-4, March 1945; 後に [10] および [12] として発表.*
- [7] Liepmann, H. W. and Fila, G. H.: *Investigations of Effects of Surface Temperature and Single Roughness Elements on Boundary-Layer Transition. N. A. C. A. Tech. Rep. No. 890, 1947.*
- [8] Gregory, N. and Walker, W. S.: *The Effect on Transition of Isolated Surface Excrescences in the Boundary Layer. A. R. C. Tech. Rep. 13, 436, 1950; published as A. R. C., R. & M. No. 2779, 1956.*
- [9] Klanfer, L. and Owen, P. R.: *The Effect of Isolated Roughness on Boundary Layer Transition. R. A. E. Tech. Memo. No. Aero. 355, March 1953.*
- [10] Tani, I. and Hama, F. R.: *Some Experiments on the Effect of a Single Roughness Element on Boundary-Layer Transition. J. Aero. Sci., Vol. 20, pp. 289-290, Apr. 1953.*
- [11] Dryden, H. L.: *Review of Published Data on the Effect of Roughness on Transition from Laminar to Turbulent Flow. J. Aero. Sci., Vol. 20, pp. 477-482, July 1953.*
- [12] 谷 一郎・浜 良助・三石 智: *On the Effect of a Single Roughness Element on Boundary-Layer Transition. 東大理工研報告 Vol. 8, pp. 125-133, May 1954.*
- [13] 谷 一郎・井内松三郎・山本一夫: *Further Experiments on the Effect of a Single Roughness*

- Element on Boundary-Layer Transition. 東大理工研報告 Vol. 8, pp. 171-178, Aug. 1954.
- [14] Cowled, E. H.: Experimental Determination of the Critical Heights of Surface Irregularities. Australian A. R. L., Aerodyn. Note No. 138, Nov. 1954.
- [15] Fales, E. N.: A New Laboratory Technique for Investigation of the Origin of Fluid Turbulence. J. Franklin Inst., Vol. 259, pp. 491-515, June 1955.
- [16] Klebanoff, P. S., Schubauer, G. B. and Tidstrom, K. D.: Measurements of the Effect of Two-Dimensional and Three-Dimensional Roughness Elements on Boundary-Layer Transition. J. Aero. Sci., Vol. 22, pp. 803-804, Nov. 1955.
- [17] Feindt, E. G.: Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages laminar-turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung. Jahrb. d. Schiffbautechn. Ges., Vol. 50, pp. 179-203, 1956.
- [18] Dutton, R. A.: The Accuracy of Measurement of Turbulent Skin Friction by Means of Surface Pitot-Tubes and the Distribution of Skin Friction on a Flat Plate. A. R. C., R. & M. No. 3058, Sept. 1956.
- [19] Tani, I. and Sato, H.: Boundary-Layer Transition by Roughness Element. J. Phys. Soc. Japan, Vol. 11, pp. 1284-1291, Dec. 1956.
- [20] Weske, J. R.: Experimental Study of Detail Phenomena of Transition in Boundary Layers. Tech. Note BN-91, Inst. Fluid Dyn. & Appl. Math., Univ. Maryland, Feb. 1957.
- [21] Potter, J. L.: Subsonic Boundary-Layer Transition Caused by Single Roughness Elements. J. Aero. Sci., Vol. 24, pp. 158-159, Feb. 1957.
- [22] Hama, F. R.: An Efficient Tripping Device. J. Aero. Sci., Vol. 24, pp. 236-237, March 1957.
- [23] Hama, F. R., Long, J. D. and Hegarty, J. C.: On Transition from Laminar to Turbulent Flow. J. Appl. Phys., Vol. 28, pp. 388-394, Apr. 1957.
- [24] Smith, A. M. O. and Clutter, D. W.: The Smallest Height of Roughness Capable of Affecting Boundary-Layer Transition in Low-Speed Flow. Douglas Aircraft Co., Rep. ES 26803, Aug. 1957.
- [25] Preston, J. H.: The Minimum Reynolds Number for a Turbulent Boundary Layer and the Selection of a Transition Device. J. Fluid Mech., Vol. 3, pp. 373-384, Jan. 1958.
- [26] Dryden, H. L.: Combined Effects of Turbulence and Roughness on Transition. Z. angew. Math. Phys., Vol. 9b, pp. 249-258, June 1958.
- [27] Schubauer, G. B.: Mechanism of Transition at Subsonic Speeds. Grenzschichtforschung, Symposium Freiburg i. Br., August 1957, pp. 85-109, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
- [28] 谷 一郎・菰田広之・井内松三郎: Some Experiments on the Effect of an Isolated Roughness on Boundary-Layer Transition. 東大航研報告に発表の予定.
- [29] 小松安雄・半田尚子: 乱流境界層の最小レイノルズ数について. 日大工学彙報に発表の予定.