

構造要素の降伏の実物光弾塑性学的研究について

河 田 幸 三

概 要

弾塑性歪，応力の精密な実験的解析法を確立するためにその一方法として光弾性皮膜法をとり上げ，弾塑性解析に適する新しい皮膜材料 **epoxy-polysulfide** 系共重合体を開発し，皮膜の等色線次数その他の測定値よりの歪，応力の誘導法を考案した．この新皮膜材料および解析法を用い，二三の基本的形状の切欠を持つ帯板およびやや複雑なタービン翼根部等構造要素の降伏過程を実物光弾塑性学的に解析し，弾塑性応力集中係数および応力集中個所の主歪の荷重による変化の状況，流れ限度等を明らかにし，二三の新しい事実を見出した．この方法は複雑な構造要素の弾塑性域にわたる力学的挙動を定量的に解析し，塑性設計に必要な流れ限度を精密に決定する実験手段として有力であると考えられる．

1. 緒 言

構造要素内にはじめて降伏を生ずる時の荷重を基準として行なう弾性設計に対し，近時塑性設計 (**plastic design**) [1] の概念が提唱されている．これは一部に降伏が始まってもそれが局部的に止まっている限り，構造要素全体の変形は弾性変形程度の大きさに止まり，本来の機能を果すのに不足はないであろうとの立場に立つもので，弾塑性問題における荷重-変形線図での荷重の漸近値すなわち極限荷重に基礎をおく．前者においては弾性応力分布についての情報のみで十分であるが，後者においては降伏過程についての詳細な解析が必要である．弾塑性解析に関する理論的研究は **Prager** [2], **Hill** [3] らをはじめ諸家により近時著しく発展させられているが，理想的弾塑性体や剛塑性体においても実際の構造要素のように境界条件の複雑な場合や，あるいは理想化を行なわない実在の材料の特性を考慮に入れる場合などについては，実験的手段にまつべきものが多いようである．従って塑性設計の思想をとり入れるに当たっては，理論的解析法と平行して実験的解析法を確立しておく必要があると考えられる．

従来行なわれてきた実験的解析法として網目刻線法，**Photogrid** 法および脆性皮膜法について考察してみると，前二者では複雑な形状をもつ試験片の比較的小さい塑性歪の解析法としては，それに要する手数と時間は著しく増大するであろうし，脆性皮膜法は簡便な特徴を持つ反面定量性に解決すべき点が残されている．これらはむしろ塑性流動状況の定性的観察に使われることの方が多かったかの感がある．

以上の理由で著者は新しい弾塑性歪，応力の解析法として光弾塑性解析法をとり上げることをとした．いわゆる光弾性的方法による弾塑性解析法はモデル光弾塑性と皮膜法実物光弾塑性の二つの流れに大別することができる．前者は古く **Coker** [4] の発想にもとづき，応力-歪関係に塑性領域の存在する高分子固体，または結晶をモデル材料として用い，その光塑性

効果によって弾塑性歪、応力分布を解析しようとするもので、1951 年 Hetényi [5] のナイロンによる実験以来再び注目され、諸家 [6] の基礎研究が継続されている。目下のところ、実際の解析に具体的に应用される段階には至っていないが逐次進展を示しつつある。この方法には高分子光塑性材料の光塑性的挙動がかなり複雑であること、模型実験の特性として相似の点で研究の余地があり結果がやや抽象的となるのを免れぬことなど厄介な点もあるが、方法としては簡便であり従来の光弾性装置の直ちに適用できる特徴をもつ。これに対し皮膜法実物光弾塑性は、実際の構造物表面に接着された光弾性材料の薄膜の光弾性効果により、下地構造物の弾塑性歪、応力分布を解析するものであって、特殊の反射型光弾塑性装置を必要とし解析が表面に限定される反面、実物の解析の出来るところが特長であって材料の特性を忠実にとり入れた結果を直接与える。この両者はそれぞれの特長を生かすべく共に発展させる必要があるが、本報告に述べる研究結果は後者に関するものである。

皮膜法実物光弾塑性の現在に至る経過と問題点の所在について考察してみよう。光弾性皮膜法の提案は 1930 年 Mesnager [7] によりなされたが、当時は弾性解析を目標としていた。高分子化学の未だ発展していなかった当時としては感度の高くしかも金属表面に接着性の強い皮膜材料が得難く、方法の提案に止まった。1950~51 年のころ Scott および Linge [8] がこの方法を取り上げ、Marco resin の薄板を Araldite 101 で金属面に接着して弾塑性解析を試みた。用いた皮膜の最大伸びは精々 1.5% 止まりと見られ、この方法の成功を示すに至らなかった（公刊は 1956 年）。1955 年に至り D'Agostino, Drucker らのグループ [9] も塑性解析を試みた。実物光弾塑性解析の成否は光弾性皮膜材料のいかににかかっていることは明らかであろう。皮膜として D'Agostino らは Marco resin 28-C および 30-C, Polyester resin BRSQ-147 および BRSQ-136 等を用いたが、これらは何れも常温で硬い樹脂で最大伸びが小さく、結局硬いエポキシ樹脂をガラス転移点以上の高温でゴム弾性状態として使用し、この難点を回避することを試みた。かれらの実験によると、高温にすることにより最大伸びが大きくなる反面、下地金属との熱膨脹係数の差により熱応力が介入して誤差の原因をなすようである。1956 年 Zandman [10] もまた同種の研究を発表しているが皮膜の化学的本性については記述していない。これらの研究は皮膜法による実物光弾塑性解析が実験的手段として有力なものとなり得る事を示唆したもので、その点に大きい意義をもつものと考えられる。以上の研究では具体例の定量的解析結果を示すに至っていないようであるが、これは適切な皮膜材料の欠けていたことおよび等色線次数その他よりの弾塑性主歪、主応力各個の値の誘導法が確定されていなかったことによるものと思われる。

このような段階において、常温で歪感度と最大歪が大きくヤング係数の小さい皮膜用高分子材料の開発、および金属に接着された皮膜の基礎的性質、等色線その他の測定値からの下地金属の弾塑性主歪、主応力各個の解析法の決定が解決すべき問題であろう。これらの点について逐次研究を進めた結果、皮膜材料として常温でほぼ上記の特性を備えた epoxy-polysulfide 系共重合体*の導入、下地主歪、主応力の誘導法についての考案等により、上述の二

* Fessler および Haines (1958) [12] は通常の硬いエポキシ樹脂による皮膜法光塑性の研究を発表しているが、Fessler 教授は 1959 年 1 月 9 日付著者あて私信で epoxy-polysulfide 系共重合体を皮膜材料として採用したい旨述べている。

点についてほぼ満足すべき結果を得、この方法を定量的解析に適用し得る見通しを得た(1957~58) [11].

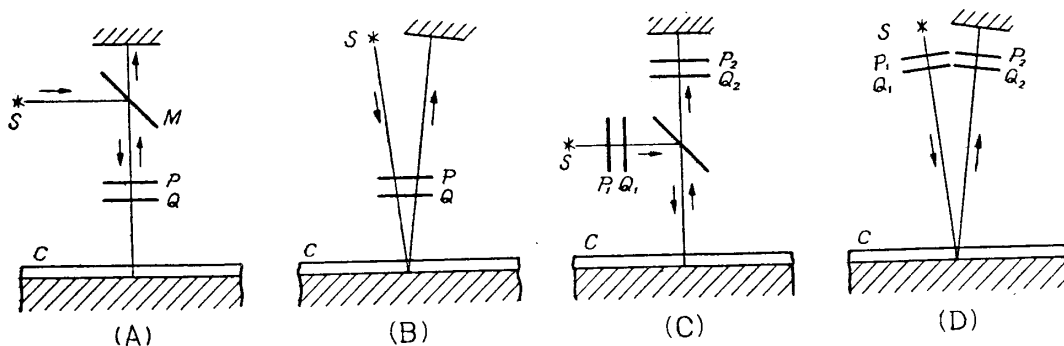
次に以上の光弾性皮膜材料、反射型光弾塑性装置、および歪、応力の誘導法等に関する基礎研究の結果を適用して、基本的形状の切欠をもつ帯板およびやや複雑な例としてのタービン翼根部等数種の構造要素の金属試験片が、引張荷重のもとで荷重の増大とともに、弾性限度内から逐次局部的降伏、塑性領域貫通の段階を経て破断に至る過程で示す塑性領域進展の様相、自由境界での主歪、主応力分布が明らかにされた。この実物光弾塑性学的解析の結果を用いて、降伏開始による応力分布の再編成を示す弾塑性応力集中の変化状況、荷重~応力集中個所の主歪線図が導かれ、さらにこの荷重~主歪線図または等色線縞貫通の直接観測による流れ限度 (flow limit) の決定、かくして得られる塑性設計荷重の弾性設計荷重との比較が行なわれた。また材料の特性を忠実に反映する計測法の特徴として、材料の応力-歪関係の降伏過程への影響も明らかにされた。

本報告においては、実物光弾塑性解析についてこれまで行なってきた基礎研究結果およびこの結果を適用し構造要素の降伏の研究を行なった結果について報告する。

2. 実物光弾塑性学についての基礎研究

2.1. 反射型光弾塑性実験装置

皮膜法を用いる場合には通常的光弾性またはモデル光塑性実験と異なり、反射型光弾塑性装置が必要である。その基本的型式としては第1図 (A), (B), (C), (D) の型式が考えられる。通常的光弾性実験が常に暗室内で行なわれるのとは異なり、実物光弾塑性実験ではフィ



第1図 反射型光弾塑性装置の諸型式

S: 光源, P: 偏光板, Q: 1/4 波長板, M: 半塗銀鏡, C: 光弾性皮膜

ールド・テストを行なうことも予想されるので、移動が簡単でしかも完全な暗室を必要としないことが望ましい。著者はこの趣旨により (B), (C), (D) 型の試作を行なった [11]. いずれも偏光板 P, 1/4 波長板 Q として 150 mmφ をとり、白色または $\lambda=5461 \text{ \AA}$ の円偏光により 150 mmφ 若しくはやや大きい面積を照明できるようにした。それぞれの型式の得失は次の通りである。(B) 型は最も単純だから実験経過を概観するに適するが、精度は原理上やや落ちる。(C) 型では半塗銀鏡の表面での反射により若干偏光するので、等傾線の測

定にはこの型は不向きと思われる。(D)型では入射, 反射両光束のなす角度を $10\sim 15^\circ$ 以内にはいるよう注意する必要がある. このようにとれば試験片の縁の隠れることによる誤差をほとんど無視し得る. 得られる等色線図等のコントラストは (C) 型より一般に良い. これらの装置を適切な注意のもとに使用すれば, 通常の透過型光弾性装置によると同程度の鮮明さをもつ等色線または等傾線図を撮影することができる. なおコントラストを良くするには装置に関する注意のほかに, 被写体である金属等試験体の表面状態を良くし反射を出来るだけ完全に注意が必要である. 以下の実験においては (D) 型を主用した.

2.2. 光弾性皮膜の基礎的性質

2.2.1 光弾性皮膜に要請される性質

光弾性皮膜法による実物光弾塑性解析においては, 金属その他の構造材料そのものの弾塑性歪をポリマーの光塑性効果でなく光弾性効果により直接検出するものである. この基本的性格から光弾性皮膜材料に要請される性質として以下のものを考慮すべきであろう [11].

- (1) 主屈折率差 Δn の主歪差 ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) との比例関係の成立すること,
- (2) 歪感度の高いこと,
- (3) 金属材料その他の塑性歪にあたる大きい歪まで破断せずに追従すること,
- (4) 応力と歪との比例関係が大きい歪まで保たれること,
- (5) 下地構造材料, 特に金属との接着性の完全なこと,
- (6) 一定歪または応力に保持したとき, 力学的, 光学的な緩和またはクリープの少いこと,
- (7) 下地構造材料の応力ないし歪分布になるべく影響を与えぬこと.

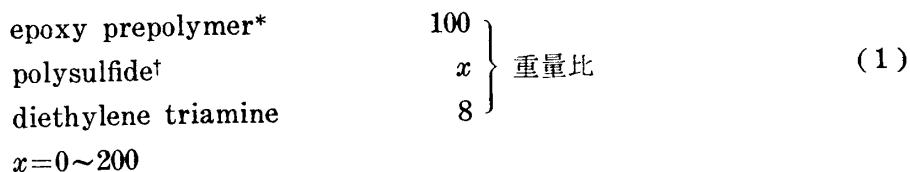
ここで, (1), (4) は正しい比例関係でなく幾分曲ってもよいが正しい比例関係の方が単純で望ましい. (7) は大切な条件であって, これを満たすためには皮膜材料のヤング係数は小さくなくてはならない. (3), (4) を同時にポリマーのガラス状弾性で満足させることは現状では無理のようである [13]. 一般にガラス状弾性では弾性的な最大歪は精々 2% 止まりである. (3) と (7) からゴム弾性状態のポリマーを使用するのが適当のように考えられる.

2.2.2 epoxy rubber 皮膜材料

金属その他の下地構造材料への接着性の点では一般にエポキシ系の樹脂は良好であるが, これまで二次元および三次元の通常的光弾性解析に使用してきたエポキシ-無水フタル酸系, またはアミン系のエポキシ樹脂では, 常温で硬く最大伸びは精々 2% である. D'Agostino, Drucker グループはこの難点を高温でのゴム弾性を使うことにより回避しようと試みたが, この高温法では下地金属と皮膜材料との熱膨脹係数の差により生ずる熱応力が介入して新しい誤差の原因となる [9].

以上の考察から常温でゴム状を呈するエポキシ系共重合体を導入すれば, 上記の要請がほぼ満足されるであろうことが予想される. 著者はこのようなエポキシ系共重合体数種を皮膜材料として試作したが, 以下にその中の一例, epoxy-polysulfide 系共重合体 (epoxy rubber と呼ぶことにする) について述べる [11].

共重合比は次のようにとった:



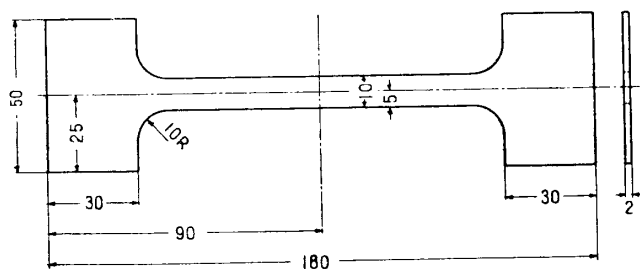
共重合は 20°C 程度の室温で十分に進行するが、約 24 時間放置後、 $40\sim60^{\circ}\text{C}$ に 2~5 時間程度空気恒温槽中で加熱し架橋を促進することもある。皮膜材料としての特性は共重合比により広汎に変えられるが、通常の硬い光弾性材料の場合と同様、加熱処理によっても若干は変えることができる。金属表面上に皮膜を構成するには次のようにした。まず注型により厚さ 1~2 mm の薄板を作り、上記のように配合した直後の原材料を接着剤として金属表面に接着するのである。直接塗布または吹付することも可能であるが厚さの調整が厄介なので上のようにした。

2.2.3 金属に接着された光弾性皮膜の基礎的性質についての実験

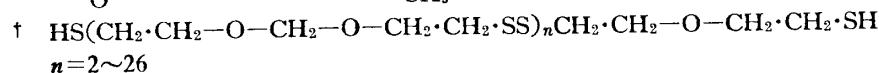
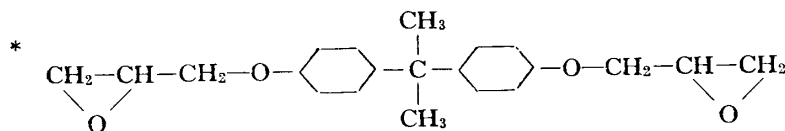
皮膜法による実物光弾塑性解析の研究においては、まず第一に金属に接着された光弾性皮膜の基礎的性質、すなわち下地金属の塑性域においても皮膜の等色線次数~下地主歪の関係は直線的であるか否か、および歪感度の大きさは十分か否かを検討する必要がある。このため、皮膜材料として epoxy rubber を、下地金属として軟鋼およびアルミ合金‡をとり、最も基本的な応力状態である単軸引張りおよび純粹曲げにより調べることを試みた。この結果金属に接着された皮膜の基礎的性質が明らかにされたので、実験経過および結果について以下に述べる。装置としては 2.1 の (D) 型を用い、 $\lambda=5461 \text{ \AA}$ の円偏光で暗視野として測定を行なった。

(1) 軟鋼単軸引張り

試験片の寸度は第 2 図に示すもので、10 mm 幅の部分の一部に長さ約 35 mm の epoxy rubber 皮膜を接着し、このすぐそばに後述の歪計をとりつけ、皮膜の等色線次数と下地軟鋼の歪を同時に測定した。接着前の皮膜厚さは 2.0 mm であるが、接着後は接着剤層の厚さが加わって 2.3~2.4 mm となった。皮膜の端面の一部は常に 0 次の縞が見られるよ

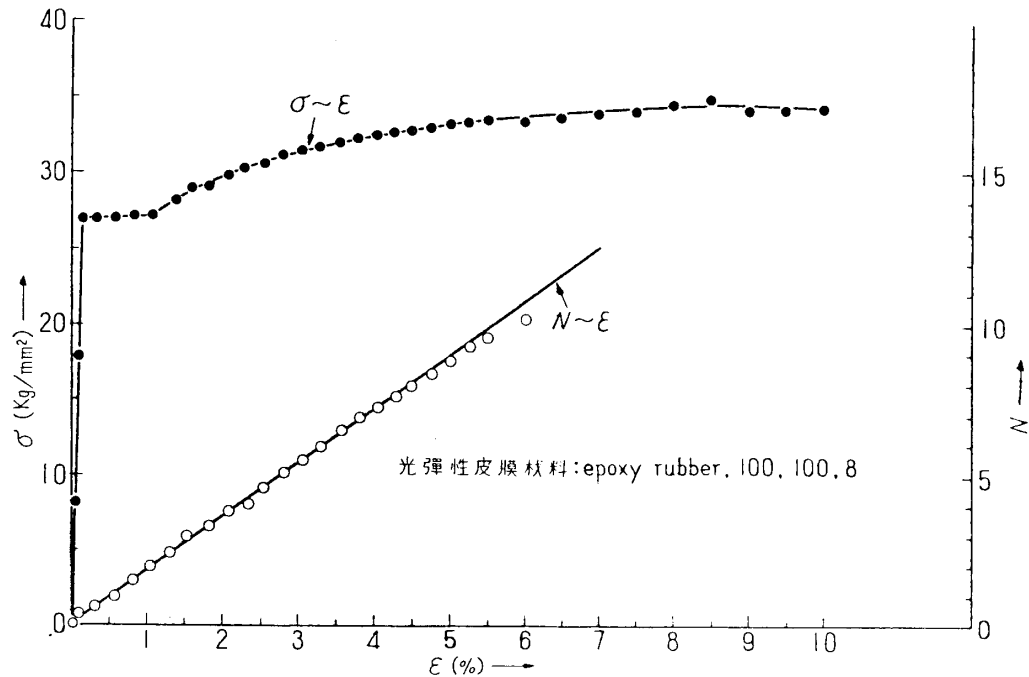


第 2 図 単軸引張り試験片



‡ 軟鋼. 硬度: VHN (10) 111. 分析値: C 0.07 %, Si 0.04 %, Mn 0.37 %. 圧延鋼材.
 アルミ合金. 硬度: VHN (10) 140. 分析値: Cu 3.93 %, Mg 0.46 %, Si 0.45 %, Fe 0.62 %, Mn 0.48 %. ジュラルミン, 17S-T4 に該当するものと考えられる。

う楔状に削り落しておき，等色線次数読みとりの便を計った．下地の歪測定用としては，市販の Okhuizen 型機械的歪計を改造して感度を 100 倍に落し，標点距離 20 mm，フル・スケール 2% 歪の塑性歪計を製作した．かくして得られた単軸引張りでの軟鋼の応力-歪関係および光弾性皮膜の等色線次数-下地軟鋼の歪関係は第 3 図に示すようである．光弾性皮膜は軟鋼試験片の破断まで剝離しなかった．等色線次数の測定値を 11 次辺までしかプロット

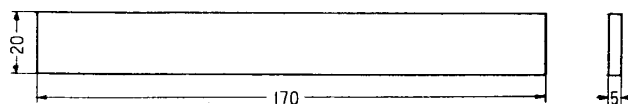


第 3 図 軟鋼の単軸引張りでの応力 σ -歪 ε 関係および光弾性皮膜の等色線次数 N -軟鋼歪 ε 関係

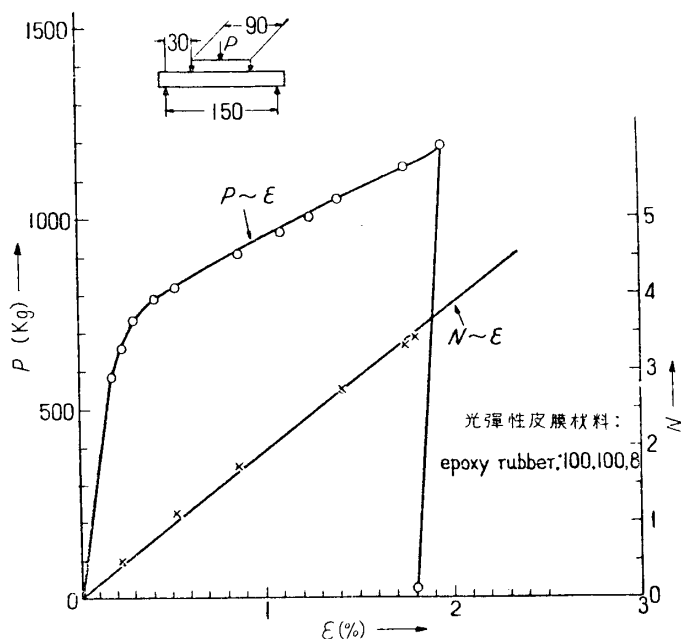
してないのは，この場合の使用光源が白色光にフィルター添加したものであるため精度が落ちるからプロットを打切ったもので，水銀灯を使用すれば当然破断附近まで測定できるものである．しかし実際問題としてはこの辺まで読取ればほぼ十分のように思われる．第 3 図から金属の塑性変形域に入っても皮膜の等色線次数 N は単軸引張方向の歪 ε にほとんど完全に比例することが知られたわけである．そしてここに得られたような関係図は，等色線写真から下地構造材料の主歪，主応力の分布を求める際に換算用スケールの役割を果す基本的重要性をもつものである．

(2) 軟鋼梁 4 点曲げ

次に軟鋼梁の 4 点曲げを行なった．試験片の寸度は第 4 図の厚さ 4 mm のもので，側面に epoxy rubber 皮膜を接着した．皮膜厚さは 2.3 mm，歪測定は前記の塑性歪計により圧縮側外縁で行なった．等色線図は弾性応力を求める通常の光弾性実験の場合のように中立面に平行でほぼ等間隔の縞模様として得られ [11]，塑性域においても曲げの際断面平面



第 4 図 4 点曲げ試験片



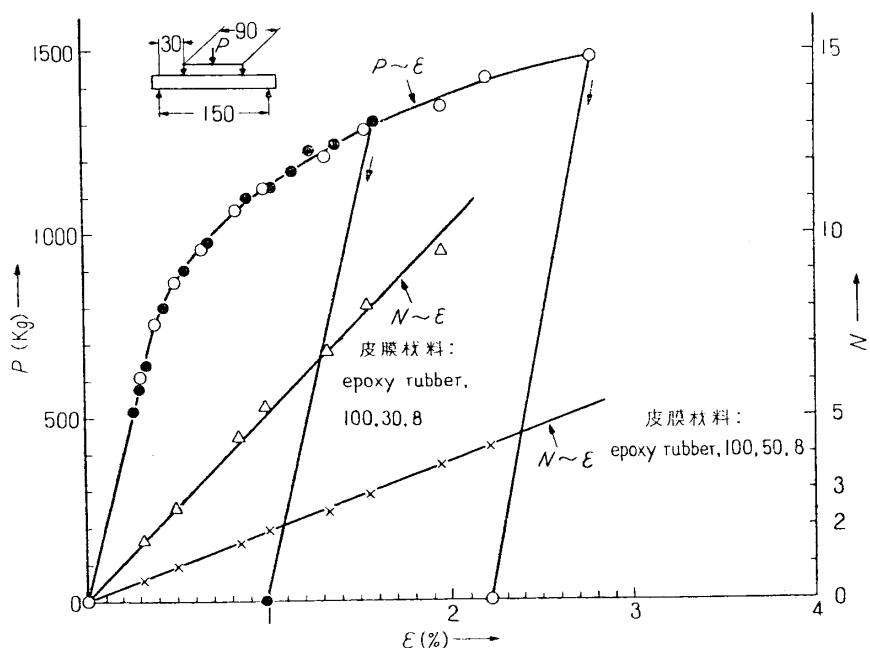
第5図 軟鋼梁4点曲げでの荷重 P -歪 ϵ 関係および
光弾性皮膜の等色線次数 N -軟鋼歪 ϵ 関係

の仮定がかなり良く成立することを示すもののである。荷重合計 P -外縁繊維方向歪 ϵ 関係および N - ϵ 関係は第5図に示すようである。 P - ϵ 関係がかなり屈曲してきてもやはり N - ϵ 関係はほとんど直線的に出て来ることが知られる。歪感度は(1)の単軸引張りで求めた値とほぼ完全に一致する*。

(3) アルミ合金梁 4点曲げ

アルミ合金でも第2図のような試験片を作り単軸引張りを数回試みたが、いづれも歪計取付部で局所的な収縮がおり満足な応力-歪線図が得られなかった。4点曲げの測定(試験

片厚さ 5 mm) を行なった。測定結果は第6図に示すように、軟鋼の場合と同様の傾向を示す。ここでは皮膜材料は epoxy rubber (100, 50, 8) および (100, 30, 8) を用いた。下



第6図 アルミ合金梁4点曲げでの荷重 P -歪 ϵ 関係および光弾性皮膜の
等色線次数 N -下地歪 ϵ 関係

* これは(2)の試験片が(1)と同様ほぼ平面応力状態にあることを示すものと考えられる。

地アルミ合金の引張りの応力-歪関係は **Herbert** の公式を用いて上述の測定値から導いた。この結果を第 7 図に示す。

以上試みた実験 (1), (2), (3) により金属表面に接着された光弾性皮膜の下地金属の弾性、塑性域にわたっての基礎的挙動が明らかとなったわけである。そしてこれらの方法は下地および皮膜の特性の検定法として十分である。

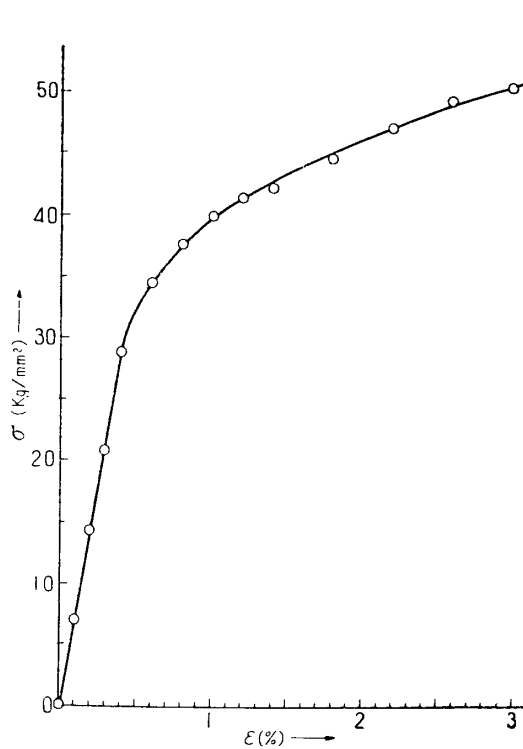
2.2.4 歪感度 β の共重合比による変化

皮膜材料の歪感度 β を次のように定義する：

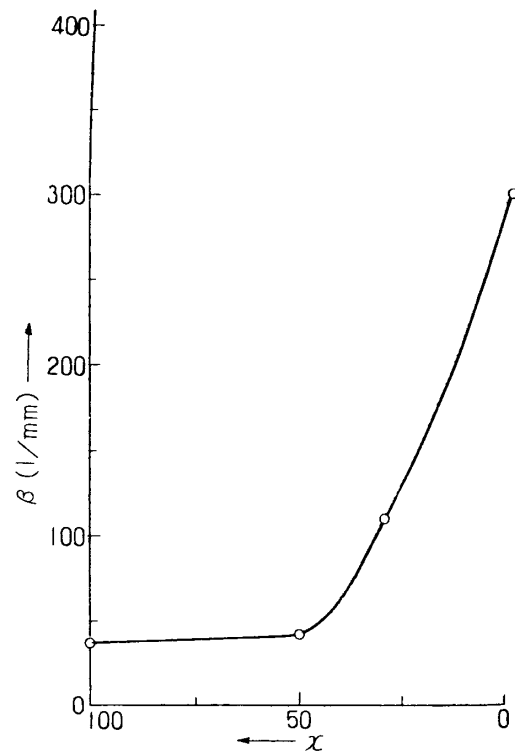
$$\beta = N / (\epsilon \cdot t) \quad (2)$$

ただし、

N ：等色線次数， ϵ ：歪， t ：光路程。



第 7 図 アルミ合金の引張応力-歪関係
(曲げの実測値から **Herbert** の
公式により導いたもの)



第 8 図 epoxy rubber 皮膜の歪感度の共重
合比による変化. x は (100, x , 8)
における polysulfide 含量

第 1 表 Epoxy rubber 皮膜特性の共重合比による変化

epoxy prepolymer 100 に対 する polysulfide の重量比	0	30	50	70	100
歪 感 度 β (1/mm) $T=16.5^{\circ}\text{C}$ $\lambda=5461\text{\AA}$	$\cong 300$	110.5	41.3	—	37~40
ヤング係数 E (kg/mm²) $T=18^{\circ}\text{C}$ $T=11.5^{\circ}\text{C}$	—	85 102	40 56	20 —	1.6 6
最大伸び ϵ_{\max} (%) $T=18^{\circ}\text{C}$ $T=11.5^{\circ}\text{C}$	—	18 7	— 10	20 —	58 20

前述の 2・2・3 の実験で epoxy rubber の各共重合比について得られた β の値を示すと、第1表および第8図のようになる。附記したヤング係数 E および最大伸び ε_{\max} はポリマーの特性としてかなりばらつきがあるので、平均値を示すに止どめた。

表記の最大伸びの値は局部的収縮による伸びを含むこともあるので、実際問題としてはその 1/2 程度の範囲内で使うものとしてみると、測定すべき下地構造材料の歪が比較的小さいとき（最大歪 1~2% まで）は polysulfide 30 程度以下の材料が使い良く、また下地の歪が比較的大きいとき（0.2% から 10~15% 程度に及ぶ）には polysulfide 50~100 位の材料が適当と考えられる。塑性加工のようにさらに大きい歪を問題とするときは polysulfide 100~200 位が適当であろう。皮膜材料単独の測定では若干クリープが認められ柔軟なほど増大する傾向を示すが、金属材料の表面に皮膜として接着して等色線を測定する場合には、光学的クリープは実用上ほとんど認められない*。ただし polysulfide 100 以上の軟い材料皮膜材料では、数日のうちには光学的緩和がおこるように見受けられる。

2・3 解析法について

2・2 において皮膜の基礎的性質は実験的に明らかにされたが、本節では解析法を確立するため、皮膜の光弾性法則 (strain-optic law) および測定値からの下地主歪、主応力の分析法などを考察してみよう。

2・3・1 光弾性皮膜の光弾性法則

光弾性皮膜の面内直応力、歪を σ, ε , 同主応力、主歪を $\sigma_1, \sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, ポアソン比を μ , ヤング係数を E とする。これに対応する下地構造材料の各値を ' をつけて表わす。皮膜面内の応力と歪について、

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E}. \quad (3)$$

主応力を主歪で表わすと、

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\mu \varepsilon_1 + \varepsilon_2). \quad (4)$$

光弾性皮膜の歪は下地構造材料の表面の歪と一致するから、

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1', \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_2'. \quad (5)$$

従って、

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \frac{E}{1+\mu} (\varepsilon_1' - \varepsilon_2'). \quad (6)$$

下地の弾性域内ではさらに、

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E(1+\mu')}{E'(1+\mu)} (\sigma_1' - \sigma_2') \quad (7)$$

が成立するが、塑性域に入ると適用出来ないことに注意すべきである。皮膜の等色線次数は皮膜の主応力差に比例するから結局下地構造材料表面の主歪差 ($\varepsilon_1' - \varepsilon_2'$) に比例する。

ゆえに、光弾性皮膜の光弾性法則は次式で与えられる：

* Drucker 教授は 1958 年 7 月 15 日付著者あて私信で、ゴム状皮膜のクリープについて懸念したため常温法よりも硬い樹脂の高温法をとった旨述べておられるが、金属材料の表面に接着された場合はほとんど心配なく、むしろ緩和が問題であるが、これも測定に要する時間が極めて長くない限り、実用上左程問題でないと考えられる。

$$\Delta n = 2Ct(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2CtE}{1+\mu} (\varepsilon_1' - \varepsilon_2'). \quad (8)$$

または

$$N = 2\alpha t(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2\alpha tE}{1+\mu} (\varepsilon_1' - \varepsilon_2'). \quad (9)$$

ただし, Δn : 主屈折率差,

C : 光弾性係数,

t : 皮膜厚さ (従って光路程は $2t$),

α : 光弾性感度,

N : 等色線次数.

さて, 下地構造材料に接着された光弾性皮膜の特性の検定 (calibration) を如何に行なうべきかは, 2.2.3 の実験から明らかであろう. 金属薄板に光弾性皮膜を接着し単軸引張りを行なう場合, 平面応力状態と考えてよいから,

$$\varepsilon_1' - \varepsilon_2' = \{1 - (-0.5)\} \varepsilon_1' = 1.5 \varepsilon_1'. \quad (10)$$

ただし, ε_1' は単軸引張り方向の主歪, ε_2' は金属薄板面内での単軸引張りに垂直方向の主歪. 従って, たとえば (平面応力的) 単軸引張りまたは純粹曲げで, ε_1' を単軸引張り方向の主歪または曲げの外縁繊維方向主歪にとり, $\Delta n \sim \varepsilon_1'$ 関係を求めればこのプロットから (8) 式の比例常数 $(2CtE)/(1+\mu)$ がひとまとめにして得られる. この際考慮すべき事項として歪による光弾性皮膜の厚さの変化がある. たとえば 10% 単軸引張りでは皮膜の厚さは 5% 減少するので, はじめの皮膜厚さで計算すると 5% の誤差を生ずる. 極めて大きい塑性歪を取扱う場合には考慮に入れておく必要がある.

2.3.2 主歪と主応力の分析

等色線その他の測定値から下地構造材料の表面の主歪, 主応力を分析する方法について考察しよう. 皮膜の光弾性法則から知られるように, 等色線次数から得られるのは下地表面の主歪差 $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^*$ であるから, 主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_2)$ を与える通常の光弾性解析の場合のように自由境界でも簡単には行かない.

平面歪の場合は, $\varepsilon_3 = 0$ とおくと, 下地構造材料の塑性域での三主歪 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の関係,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

から, $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ となり $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ の値から直ちに $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ の値を知ることが出来る.

平面応力の場合は, 一般に $\varepsilon_3 \neq 0$. ゆえに厚さ変化の測定から ε_3 を知れば, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を個別に求めることが出来る. 厚さ変化の測定によらず, 等傾線を用いることもできる. すなわち, 皮膜の等傾線は皮膜の主応力方向, 従って主歪方向を示し, これは同時に下地構造材料の主歪方向を示す. ゆえに等傾線のデータを併用して, **shear difference method** により皮膜の主応力を分析し, (3) 式により主歪各個の値を求めることができる. 等傾線を用いて下地の主歪方向を示す主歪線図を描くことができるのはいうまでもないであろう.

実用上最も重要な自由境界では, 平面応力問題でもより簡単な誘導法が使える [11]. 自由

* 以下簡単のために, 下地構造材料について ' を省く.

境界では、境界に平行の主応力 σ_1 が存在するのみで、境界に垂直の主応力 $\sigma_2=0$ であるから $\varepsilon_2=-0.5\varepsilon_1$ 。従って $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=1.5\varepsilon_1$ となり、自由境界の境界に平行方向の主歪 ε_1 を $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ の値から直接知ることができる。

主歪から下地構造材料の主応力を求めるには、その構造材料の応力-歪関係が必要になる。

3, 4 で取扱う平面応力問題での自由境界について考えてみると、境界に平行の主応力 σ_1 のみで境界に垂直の主応力 σ_2 および試験片厚さ方向の主応力 σ_3 は共に 0 であるから、Mises または Tresca の降伏条件を仮定すると、 $\sigma_1=\sigma_Y$ (単軸引張り降伏応力) で降伏する。一方、曲げのように応力分布が一様でない場合、軟鋼の降伏応力が近傍の状態の影響により多少高くなると推測されることが Cook, Robertson, 中西はじめ諸家 [14] により示唆されている。しかしこの点については今後精細な実験的事実の集積が必要で、一般的法則はまだ確立されていないようであるから、現段階では平面応力問題の自由境界応力の誘導に単軸引張りの応力-歪関係をとるのが穏当と考えられる。

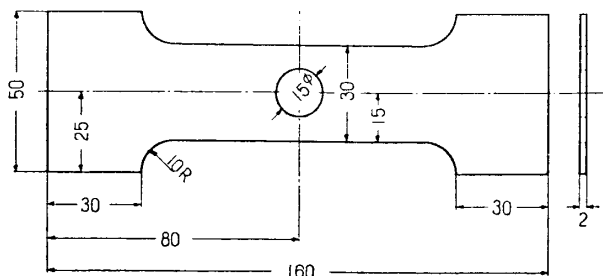
3. 基本的形状の切欠を持つ構造要素の降伏の実物光弾塑性学的解析について

通常の光弾性解析においては、弾性応力集中の値を求めることが主要な目標の一つであるが、ここに取り扱う実物光弾塑性解析では、金属の構造要素試験片は応力集中点の弾性応力が降伏点に到達したところで直ちに破断するわけではなく局部的に降伏を開始し、以後逐次弾塑性応力集中が変化する過程が追跡される。

ここにとり上げた円孔、90° 切欠、および半円切欠を持つ帯板の引張りによる降伏 (平面応力) は、切欠の形状は簡単であるが理論的に未だ解かれていない。実物光弾塑性解析によって、塑性領域進展の模様、歪、応力分布の変化状況が明らかにされ、この結果を用いて荷重に対する弾塑性応力集中係数や応力集中個所の主歪の変化状況が導かれた。流れ限度はこの荷重-歪線図のプロットにより決定されるが、塑性領域が試験片の全幅を貫通する瞬間を等色線の貫通として肉眼的に観察することによって決定してもよいことが示された。このようにして実験的に決定した流れ限度を塑性設計荷重としてとり、弾性設計荷重と比較してみると、かなり著しい差のあることが知られる。金属材料としては軟鋼とアルミ合金 (ジュラルミン) を選んだが、材料の応力-歪線図の如何により降伏過程での応力分布は明瞭に異なってくる。これら構造要素の降伏に関する諸種の事実が明らかにされた。

3.1 実験経過

試験片は第 9, 10, 11 図に示す形状のもので、材料は軟鋼およびアルミ合金 (2.2.3 に述べた

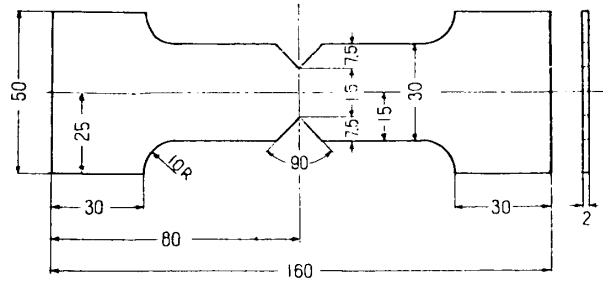


第 9 図 中央に円孔を持つ帯板引張り試験片

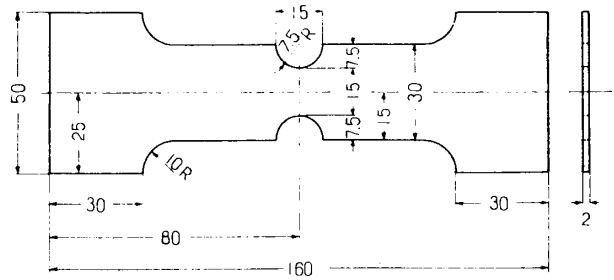
べた 応力-歪線図を求めたものと同じの材料) を選んだ。薄板であるからほぼ平面応力の実験と見てよいであろう。使用した光弾性皮膜は厚さ 2 mm の epoxy rubber (100, 100, 8) および (100, 30, 8) である。荷重試験機としては Olsen 10 ton 荷重試験機を使用し、逐次負荷を増大

する過程での等色線図を 2・1 に述べた反射型光弾塑性装置で、緑色光 ($\lambda=5461 \text{ \AA}$) の暗視野により撮影した。また若干の荷重において等傾線図も撮影した。これらの中代表的なものを第 12, 13, 14, 15 図に示す。

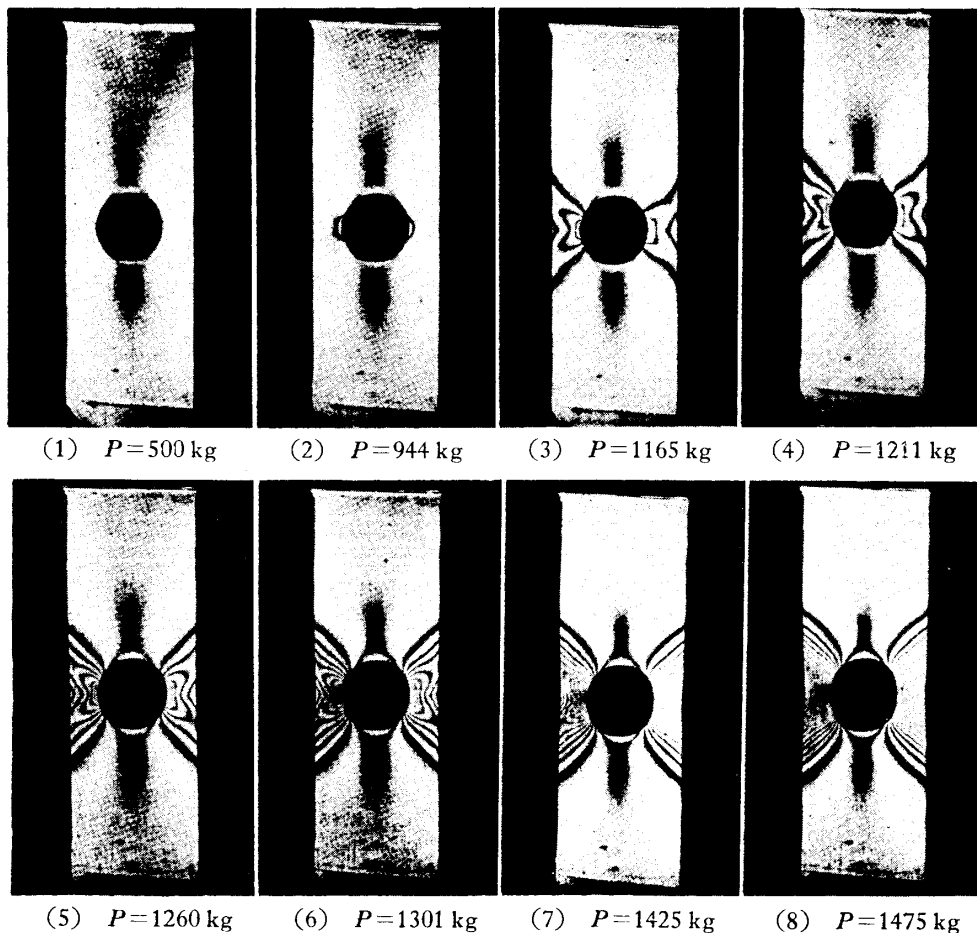
第 12 図は中央に円孔を持つアルミ合金帯板の引張りでの等色線図であるが、(2) は円孔の側壁で局部的降伏の始まった状態、(3) は降伏領域が試験片の外側壁まで貫通した状態、(4) 以後は負荷の増大するにつれさらに塑性領域の拡大する経過を示す。このように弾性応力最大の個所で生じた局部的降伏が、ある個所



第 10 図 90° 切欠を持つ帯板引張り試験片

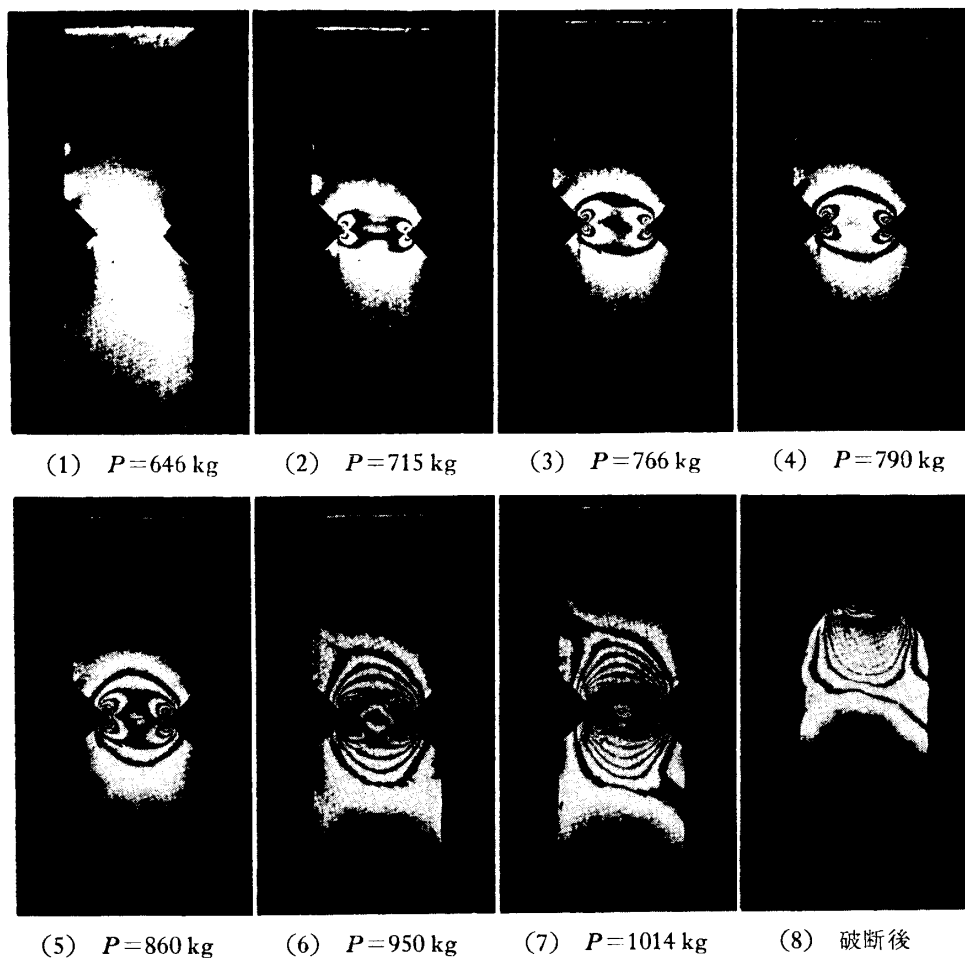


第 11 図 半円切欠を持つ帯板引張り試験片



(1) $P=500 \text{ kg}$ (2) $P=944 \text{ kg}$ (3) $P=1165 \text{ kg}$ (4) $P=1211 \text{ kg}$
(5) $P=1260 \text{ kg}$ (6) $P=1301 \text{ kg}$ (7) $P=1425 \text{ kg}$ (8) $P=1475 \text{ kg}$

第 12 図 円孔を持つアルミ合金帯板の引張りでの光弾性皮膜の等色線図



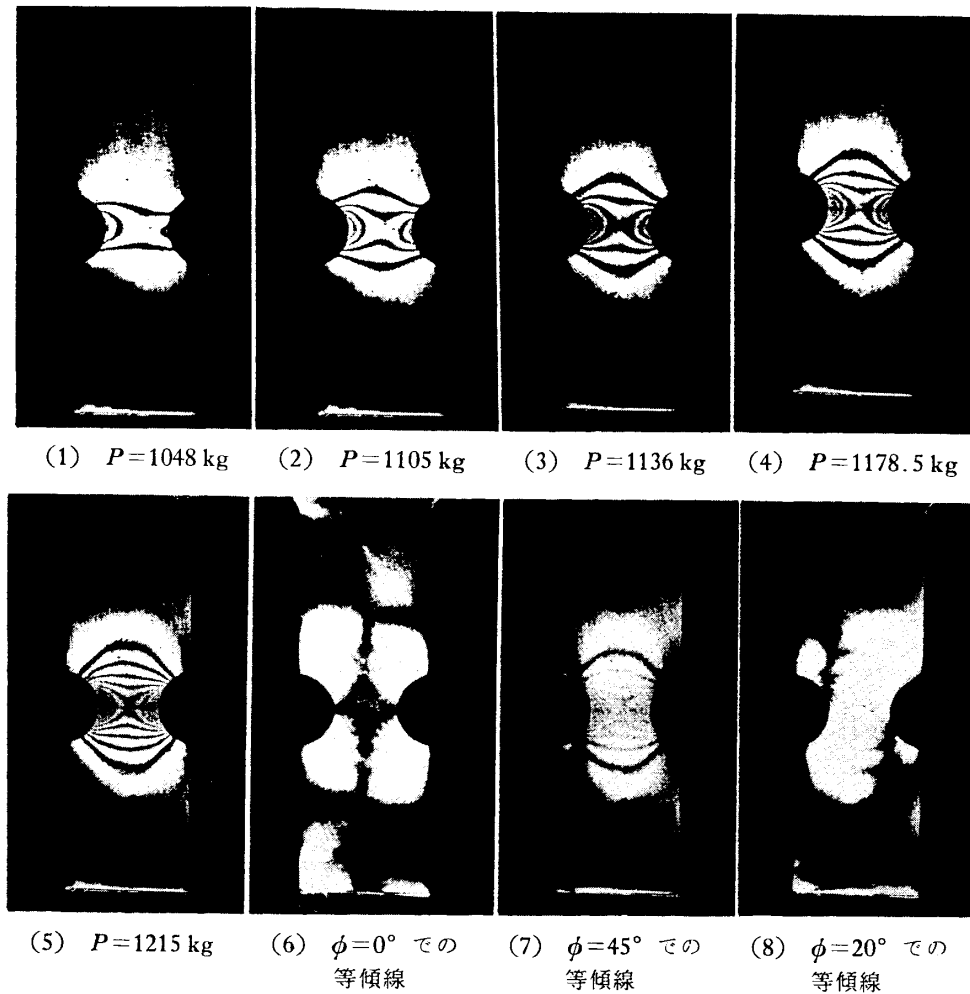
第 13 図 90° 切欠を持つ軟銅帯板の引張りでの光弾性皮膜の等色線図

で試験片全幅を貫通する瞬間も明らかに捕捉することができる。第 14 図の (6), (7), (8) は引張荷重方向を $\phi=0^\circ$ としてとった等傾線図であって、通常の光弾性と同様にして得られることが知られる。下地の主歪方向を示すものであることは、この例や 4 点曲げでの例から確認される。

3・2 自由境界での弾塑性主歪，主応力分布と弾塑性応力集中

上述の等色線図から 2・2・3 に示した epoxy rubber 皮膜を接着した軟銅およびアルミ合金の単軸引張りでの歪～等色線次数の検定曲線を用いて、自由境界での主歪差 ($\epsilon_1 - \epsilon_2$) を知り、さらに境界に平行の主歪 ϵ_1 を導くことができる。かくして求めた主歪 ϵ_1 の分布を第 16, 18, 20 図に示す。さらにこれらの自由境界での主応力分布を導くのに、各材料の単軸引張りでの応力-歪線図 (2・2・3) を用いてみる。かくして求めた自由境界での (境界に平行の) 主応力分布を第 17, 19, 21 図に示す。同じ形状の試験片について通常の二次元光弾性解析により得られる弾性応力分布と比べて、応力集中の著しく緩和されて行くことが一見して知られる。

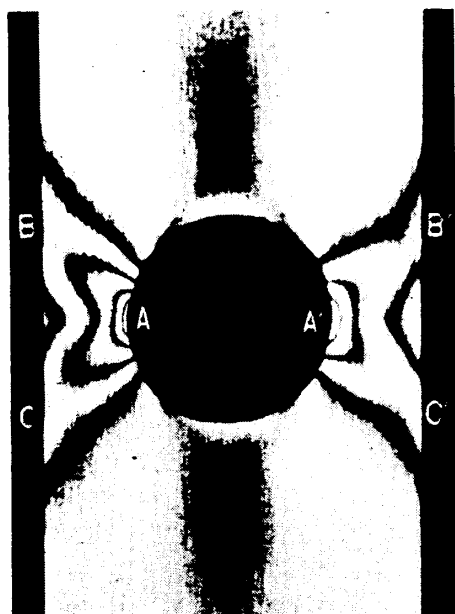
局部的降伏の発生しさらに逐次発達する過程での弾塑性応力分布の再編成の様子は、弾塑



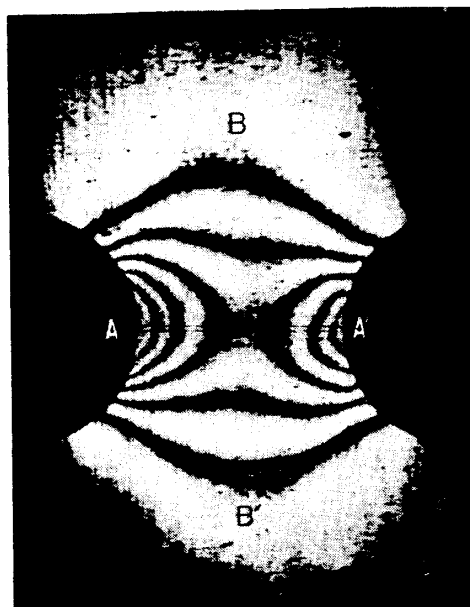
第 14 図 半円切欠を持つ軟鋼帯板の引張りでの光弾性皮膜の等色線図および等傾線図

性応力集中係数の変化に端的に示されるであろう。そこで、自由境界上での等色線次数最大の個所——円孔の側壁、 90° 切欠および半円切欠の底——での応力集中係数 σ/σ_0 が、荷重に対して如何に変化しているかを検討してみよう。ここで、 σ は集中応力で、集中係数を計算する基準応力 σ_0 としては、全引張荷重 P を最も狭い断面の断面積 S_0 で割った値をとる。この結果を第 22, 23, 24 図に示す。これらの図で $\sigma_0=0$ に示された弾性応力集中係数 (f) は、別に通常の二次元光弾性実験により求めたものである。矢印の位置は応力の最も高い個所での $\sigma=f\sigma_0$ が材料の引張降伏応力 σ_Y に初めて到達する σ_0 を示す。局部的降伏の進行により σ/σ_0 は弾性応力集中係数 f から徐々に下がり、ややばらつきはあるが大勢において 1 近辺の値に収束する傾向を示す。このことはいうまでもなく、弾性応力集中が緩和されて最狭断面での軸方向引張応力がほぼ一様分布に近くなることを示すものであるが、この場合 $\sigma/\sigma_0 > 1$ は自由境界の集中応力の方が内部より高く、 $\sigma/\sigma_0 < 1$ は内部の応力の方が高いことを示唆するものであろう。半円切欠を持つ軟鋼帯板の引張りで降伏の十分進行した場合は、弾性応力分布と逆に中高の応力分布となっているように推測される。

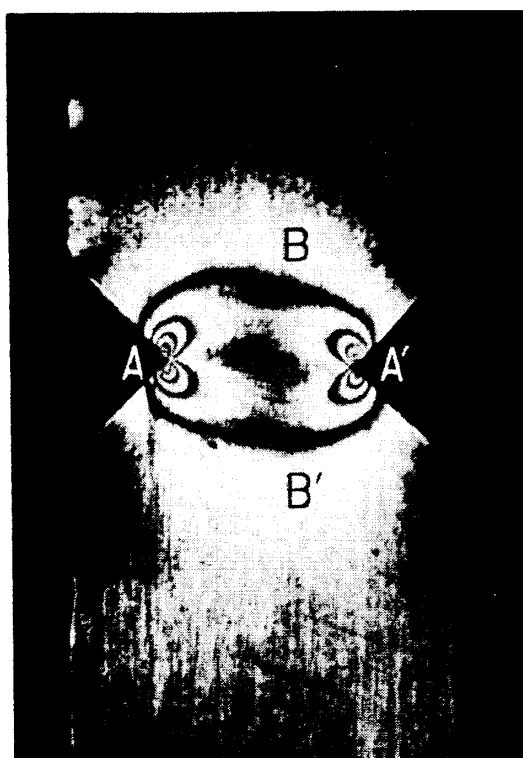
この $\sigma/\sigma_0 \sim \sigma_0$ 関係、換言すれば各 σ_0 での弾塑性応力分布が、材料の応力-歪線図によ



(1) 第12図(3)の拡大. 円孔の側壁 A, A' よりそれぞれほぼ 45° 上方および下方の B, C; B', C' に向け, 急激に等色線の発達したのを示す. これは降伏領域の外側壁への貫通を示す.



(2) 第14図(3)の拡大. 半円切欠の底 A, A' より水平に内部に向け降伏領域は既に貫通している. この荷重で B, B' 附近に引張り荷重に 45° 方向の滑りが無数に現われた.

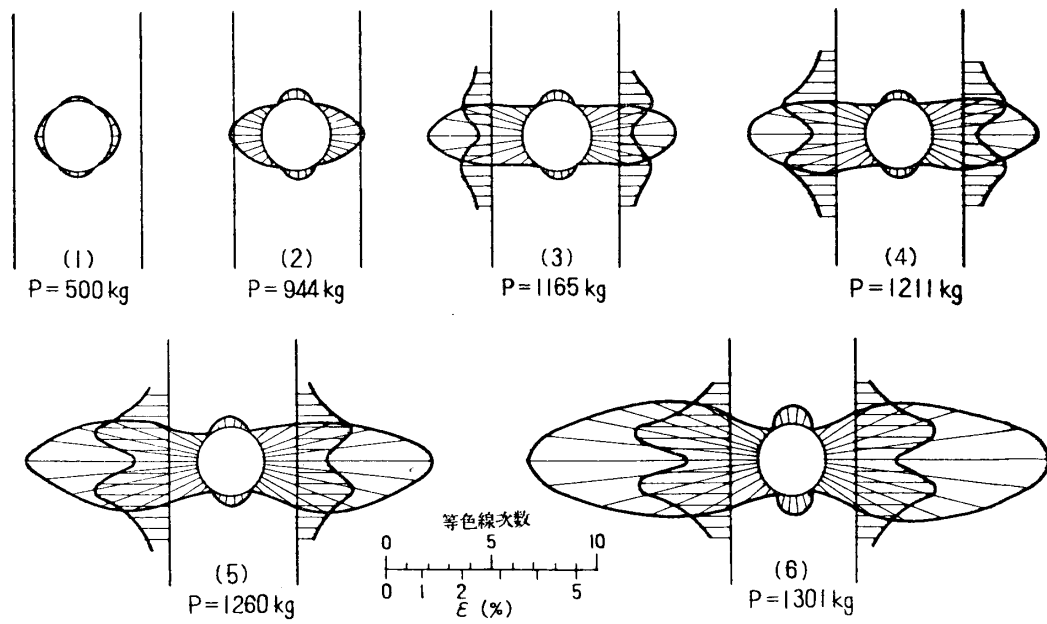


(3) 第13図(3)の拡大. 90° 切欠の底 A, A' より B, B' に向け, 等色線が既に貫通したあとを示す.

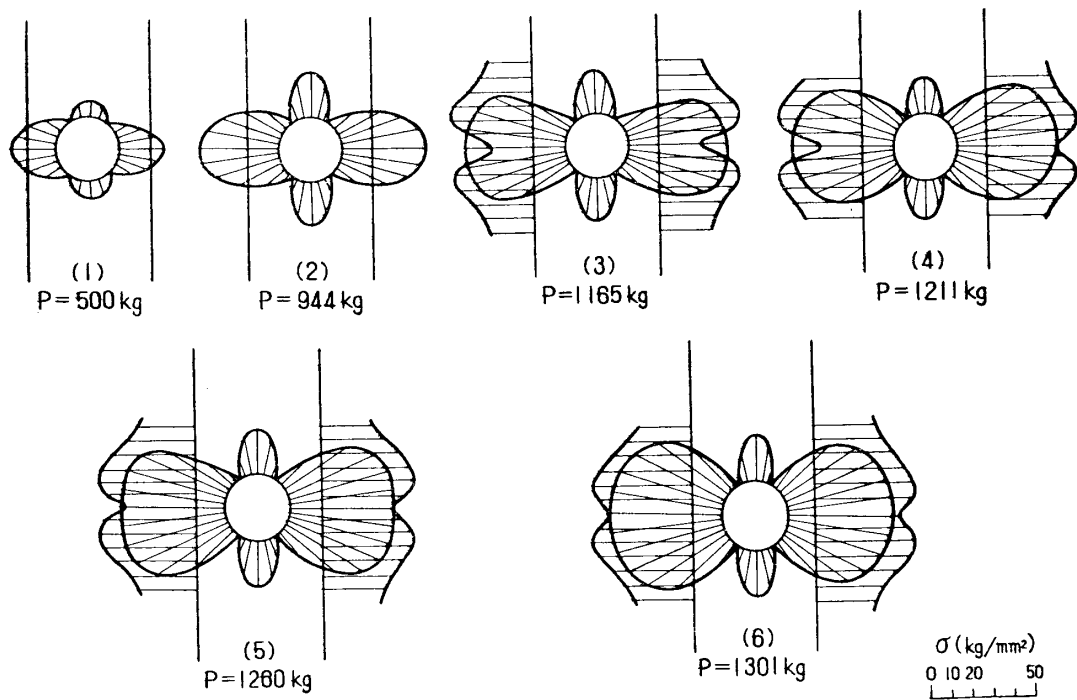


(4) 第13図(6)の拡大. CC' 附近に引張り荷重にほぼ 45° 方向の滑りが無数に現われた.

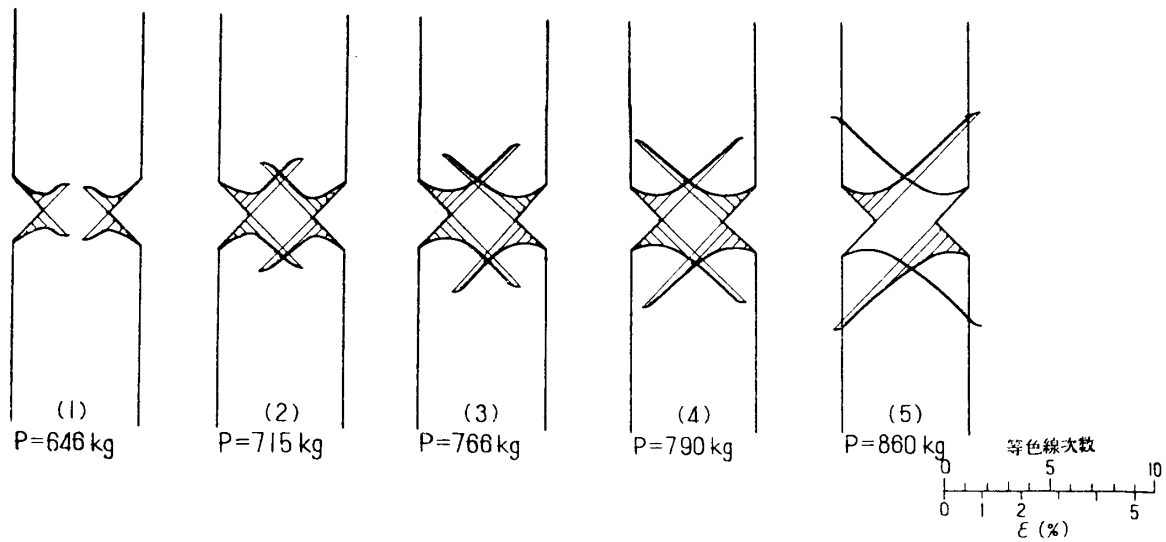
第15図 二三の等色線図の詳細



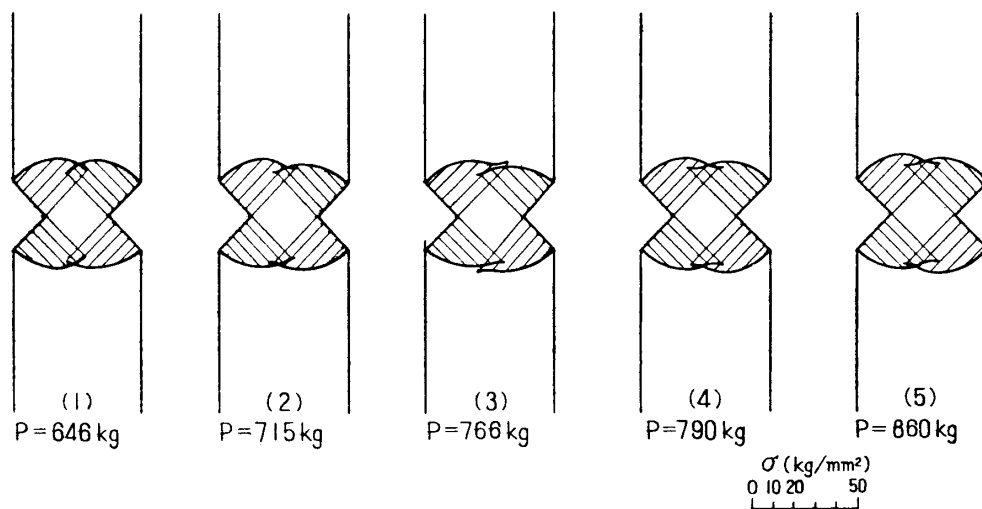
第 16 図 円孔を持つアルミ合金帯板の引張りでの自由境界歪分布



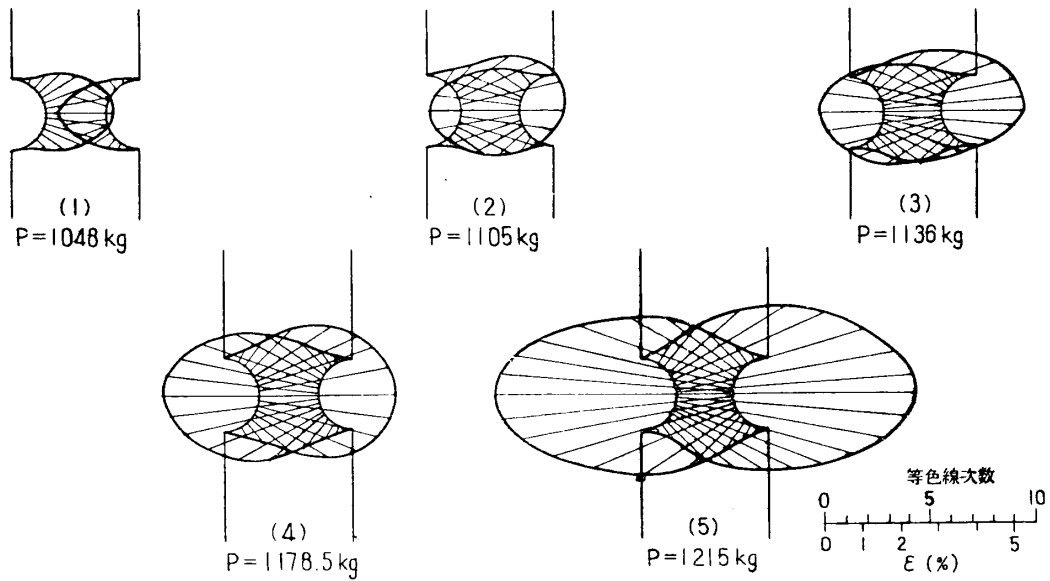
第 17 図 第 16 図の歪分布に対応する自由境界応力分布



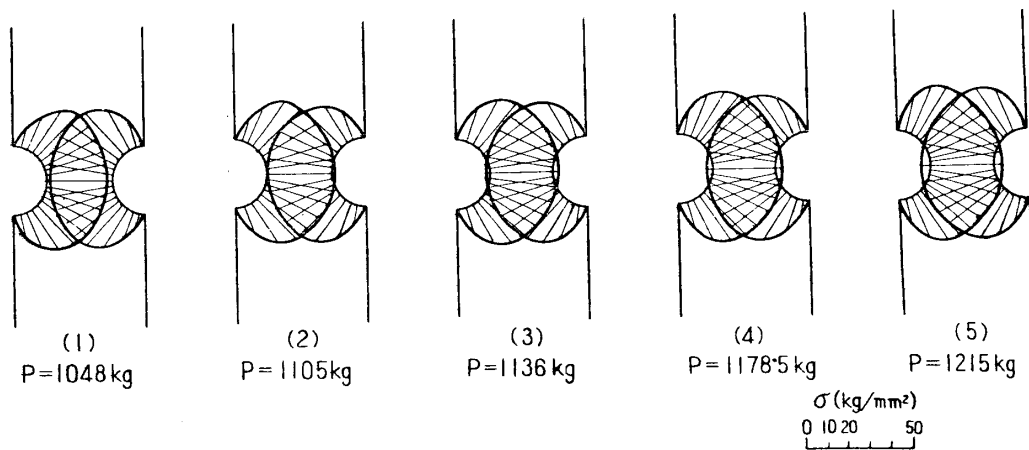
第 18 図 90° 切欠を持つ軟鋼帯板の引張りでの自由境界歪分布



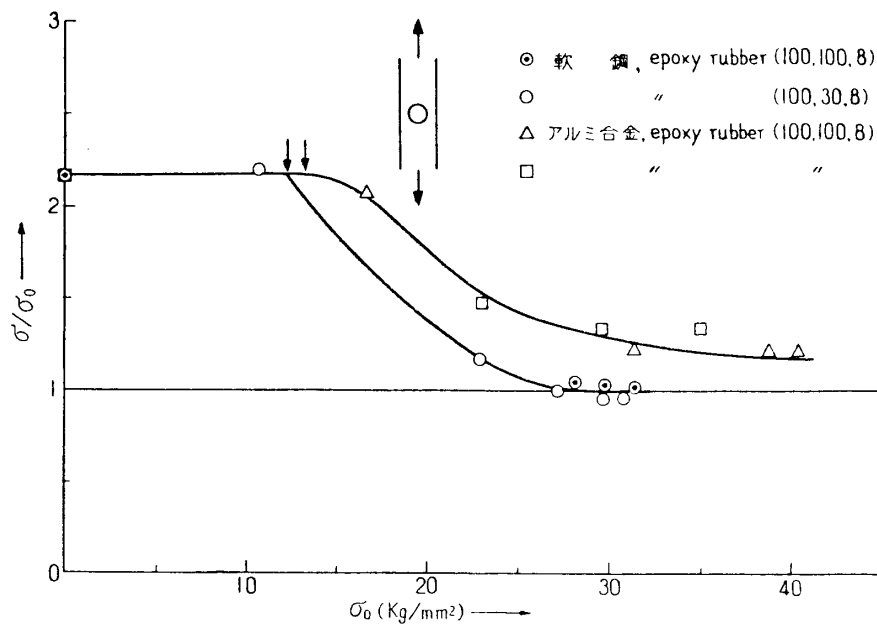
第 19 図 第 18 図の歪分布に対応する自由境界応力分布



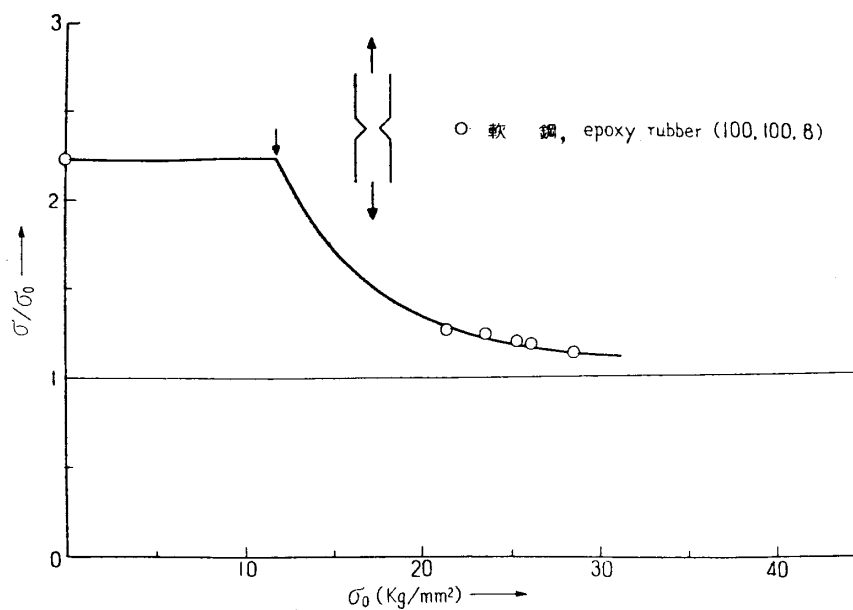
第 20 図 半円切欠を持つ軟鋼帯板の引張りでの自由境界歪分布



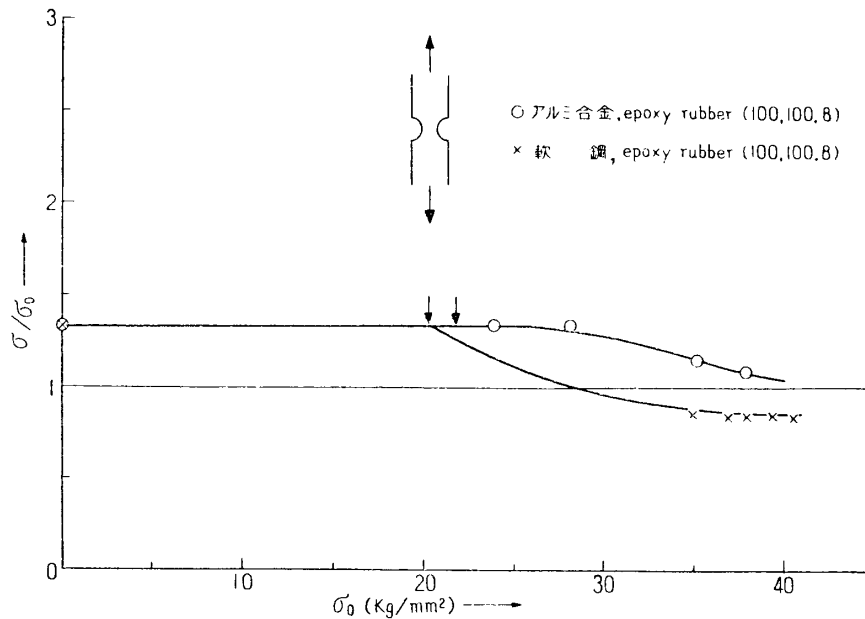
第 21 図 第 20 図の歪分布に対応する自由境界応力分布



第 22 図 円孔を持つ帯板の引張りでの弾塑性応力集中係数



第 23 図 90° 切欠を持つ帯板の引張りでの弾塑性応力集中係数



第 24 図 半円切欠を持つ帯板の引張りでの弾塑性応力集中係数

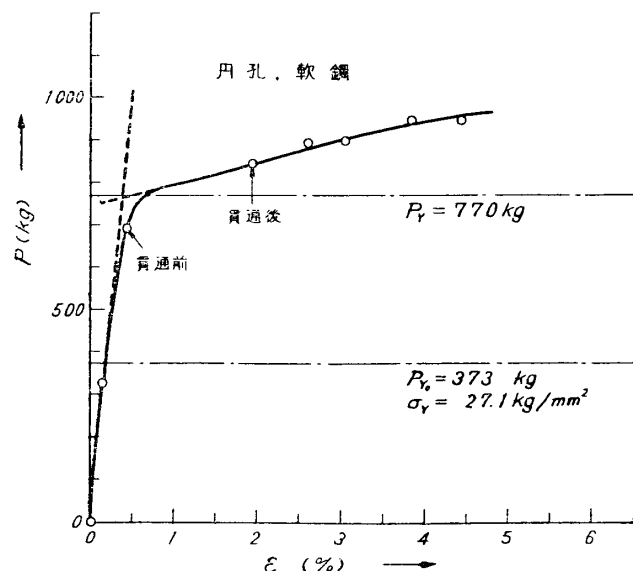
って判然と異なることは注目すべきである。ここに調べた範囲では、応力-歪線図に明瞭な降伏点と水平部の存在する軟鋼の $\sigma/\sigma_0 \sim \sigma_0$ 曲線は、水平部のなく常に加工硬化を示すアルミ合金のそれよりも下にくる。すなわち局部的降伏開始後さらに荷重の増大するに際しての応力集中係数の低下はアルミ合金より軟鋼の方が速かである。

3.3 塑性設計荷重の決定

上述の基本的形状の切欠を持つ試験片の、構造要素としての塑性設計荷重を 3.2 のデータから決定し、弾性設計荷重と比較してみよう。

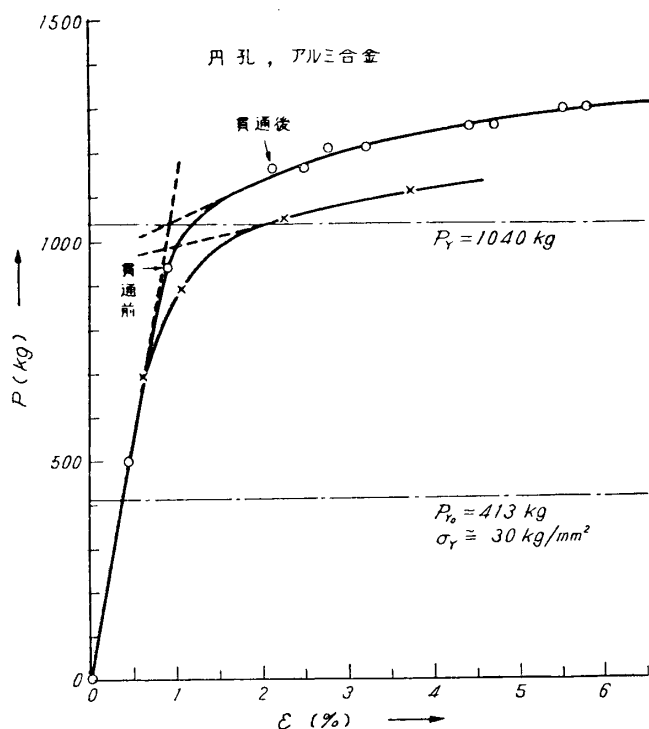
問題は結局流れ限度の決定になる。流れ限度は普通荷重-変形線図によるが、ここではさらに精度のよい荷重 P と自由境界の最大応力集中箇所（円孔側壁、 90° 切欠および半円切欠の底）の引張荷重方向主歪 ε との関係を求めて、それによってみよう。この代表的なプロットを示すと第 25, 26*, 27, 28 図の通りであるが、これらの図から次の事実が観察される。

(i) $P \leq P_{r0}$: すべての個所が弾

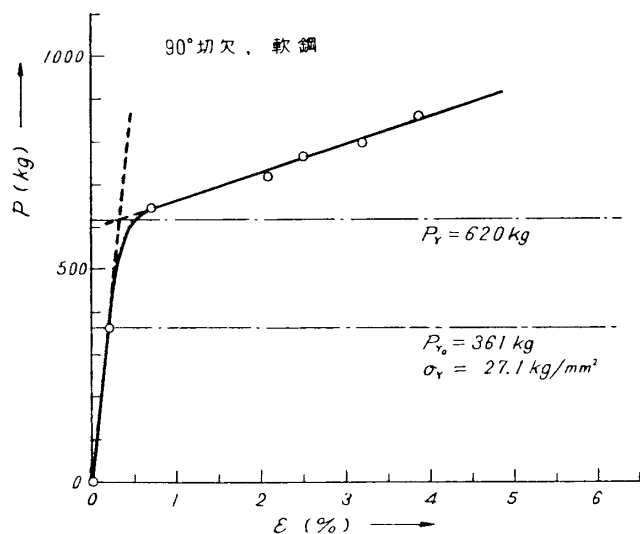


第 25 図 円孔を持つ軟鋼帯板の引張りでの荷重-主歪線図

* 第 26 図に示すように、同一の実験を数個の試験片について行なうと、 $P-\varepsilon$ 図は必ずしも完全に一致しないが、実際の金属試験片の降伏ではむしろ当然と考えられる。



第26図 円孔を持つアルミ合金帯板の引張りでの荷重-主歪線図



第27図 90°切欠を持つ軟鋼帯板の引張りでの荷重-主歪線図

弾性設計荷重 P_{Y0} を次に示す計算から求め、一方塑性設計荷重 P_Y を実測した $P \sim \epsilon$ 関係での流れ限度として実験的に決定し、比較すると第2表のようである。

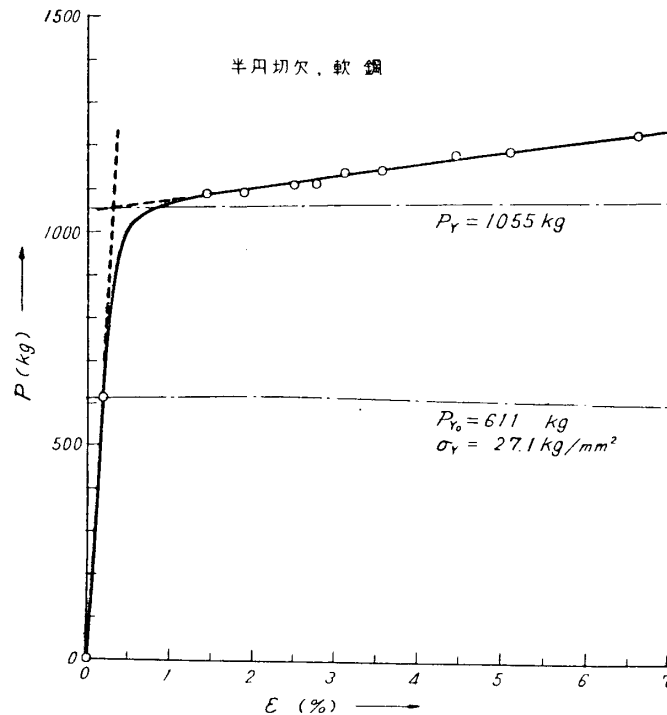
この表で知られるように、 P_Y と P_{Y0} との隔たりはかなり大きく、ここで実測した限りでは軟鋼で $P_Y/P_{Y0} = 1.7 \sim 2.1$ 、アルミ合金で $1.8 \sim 2.5$ 程度の範囲に納まっている。従って対象となる構造物の性格、たとえば航空機でいえば、非消耗的か消耗的かによって異なる

性域内にある場合には、 $\epsilon = aP$ 、 $a = \text{const}$ で、 ϵ は弾性変形であるから構造要素全体として弾性範囲内にある。

(ii) $P_{Y0} \leq P \leq P_Y$: 局部的降伏が始まっても降伏領域が試験片全幅を貫通していない場合には、 ϵ は $\epsilon = aP$ の直線関係よりやや大きくなっているが、直線 $\epsilon = aP$ よりのはずれは弾性変形と comparable の程度に止まっている。すなわち拘束された塑性変形を示す範囲であって、構造要素全体としては未だ荷重を受持つ能力を持つ。

(iii) $P_Y \leq P$: 降伏領域が P に垂直なある位置で試験片全幅を貫通すると、 ϵ は直線関係 $\epsilon = aP$ より急激に増大し始める。すなわち無制限の塑性流れが始まったのである。

(i) と (ii) の境界が弾性限度 P_{Y0} 、(ii) と (iii) の境界が流れ限度 P_Y であり、両者がそれぞれ弾性設計荷重および塑性設計荷重となる。構造要素の応力集中個所の応力および歪の荷重 P に対する挙動をそれぞれ (i)、(ii) および (iii) の領域に対応させて比較してみると、第30図の通りである。応力集中係数 σ/σ_0 については1に近づいているというほかには、流れ限度 P_Y を識別する明確な特徴を示さない。



第 28 図 半円切欠を持つ軟鋼帯板の引張りでの荷重-主歪線図

第 2 表 基本的形状の切欠を持つ帯板の引張り（平面応力）での、構造要素としての弾性および塑性設計荷重

切 欠	軟鋼 ($\sigma_Y = 27.1 \text{ kg/mm}^2$)				アルミ合金 ($\sigma_Y \approx 30 \text{ kg/mm}^2$)†			
	$P_{Y0} \text{ (kg)}$	$P_Y \text{ (kg)}$	P_Y/P_{Y0}	拘束係数	$P_{Y0} \text{ (kg)}$	$P_Y \text{ (kg)}$	P_Y/P_{Y0}	拘束係数
円 孔	373	770	2.06	0.95	413	985~1040	2.39~2.52	1.10~1.16
90° 切欠	361	620	1.72	0.76*	400	—	—	—
半円切欠	611	1055	1.73	1.30†	677	1200	1.77	1.33

ただし、 σ_Y ：材料の引張り降伏応力、 P_{Y0} ：弾性設計荷重、 P_Y ：塑性設計荷重、

$$P_{Y0} = \sigma_Y S_0 / f.$$

ただし、 f ：最大応力集中箇所の弾性応力集中係数（基準応力は最

狭断面での平均応力 σ_0)§,

S_0 ：最狭断面の断面積、

* 参考のため、平面歪の弾塑性問題としての数値計算結果 (Southwell & Allen [15]) を定性的であるにすぎないが一応挙げると、1.28.

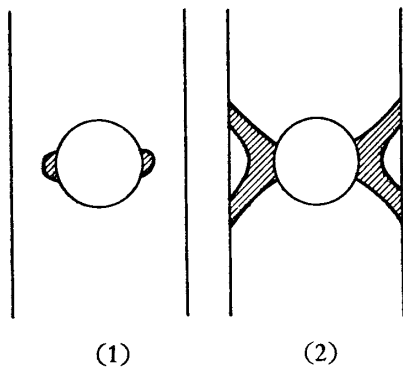
† 同上、1.22.

‡ σ_Y の値として、特に応力-歪線図が直線から外れる際の応力をとった。慣例のように 0.2% 永久歪をとれば 35 kg/mm^2 程度となる。

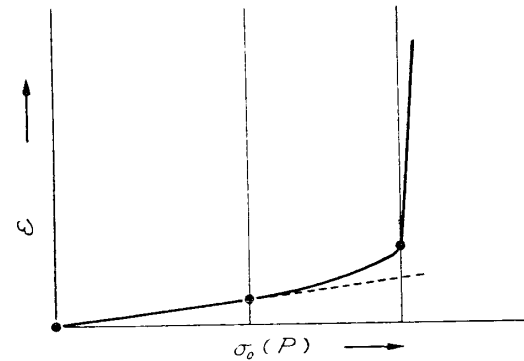
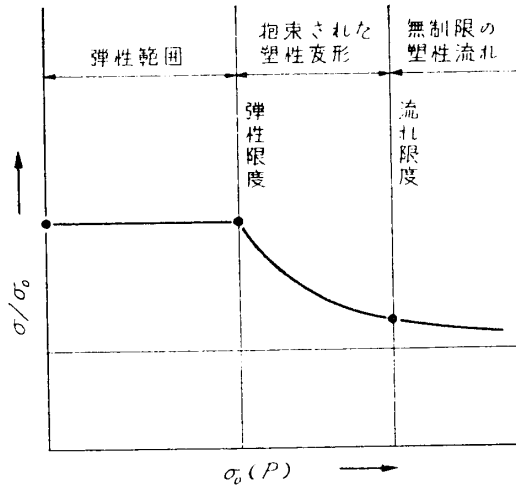
§ 二次元光弾性解析で求めた値は、円孔：2.18、90° 切欠：2.25、半円切欠：1.33。90° 切欠の値が一見やや低く感じられるが、切欠底には實際上小さい曲率半径がつくのでこの程度となる。

であろうが、弾性設計荷重よりもかなり大きいところまでとってよい場合のあるであろうことが知られる。

さて、流れ限度 P_Y を求めるのに、上述するところでは $P \sim \varepsilon$ 関係のプロットによったが、実用的には降伏領域が試験片全幅を貫通する瞬間が等色線の急激な貫通として肉眼的に明瞭に認められるので、この時の荷重を読取っておけば十分である。この塑性領域貫通の検出による決定法が、 $P \sim \varepsilon$ 関係



第 29 図 降伏領域の試験片全幅の貫通。円孔を持つ帯板の引張りでの状況を模式的に示す。(1) 局所的降伏、(2) 貫通。第 12 および 15 図参照。



第 30 図 応力集中係数 σ/σ_0 および最大応力集中箇所の主歪 ε の基準応力 σ_0 または荷重 P による変化状況の概括。

のプロットでの急激な屈曲点としての決定法とほとんど同じ結果を与えることは第 25~28 図から明らかであろう。

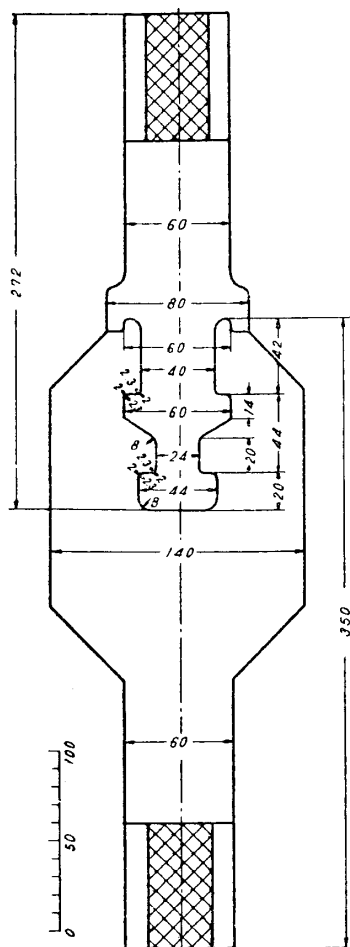
以上のように、皮膜法実物光弾塑性解析は実際の構造要素の塑性設計荷重 P_Y の精密な実験的解析法としても適切であることが確認された。

4. やや複雑な構造要素：タービン翼根部の降伏の実物光弾塑性学的解析について

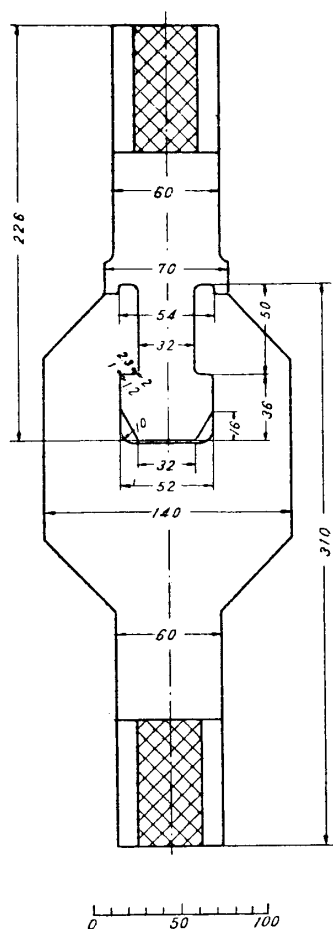
3 に述べた構造要素よりさらに複雑な構造要素としてタービン翼根部をとり上げ、引張り荷重をうける時の弾塑性的挙動を研究するのに実物光弾塑性学的解析法を適用した結果、その複雑な挙動が 3 におけると同様の過程で簡明かつ適確に解析されることが明らかとなったので、以下に報告する。

4.1 実験経過

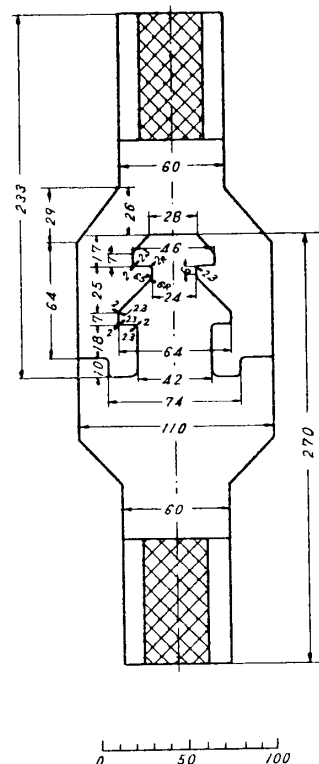
鋼製試験片は第 31, 32, 33 図に示す形状 (厚さ約 15 mm) のもので、材質は SF-50, そ



第 31 図 鋼製試験片 B



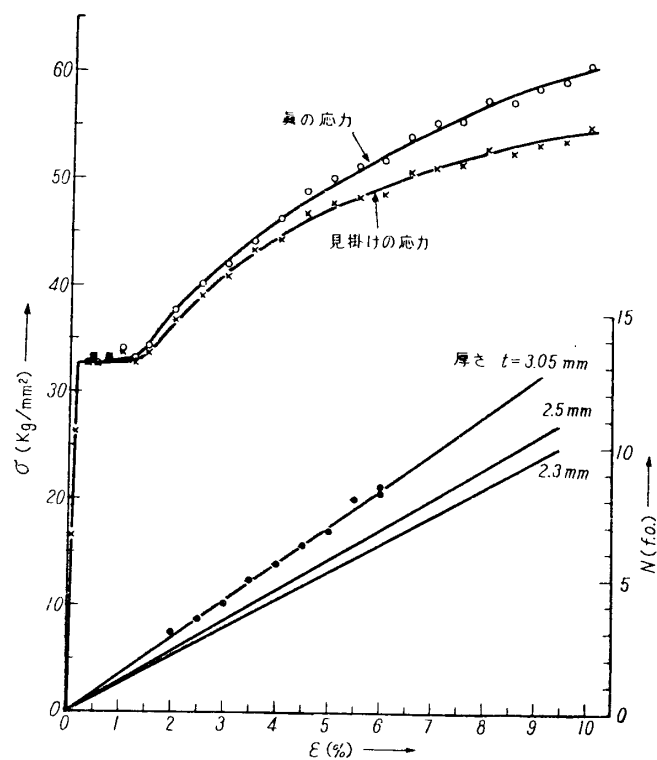
第 32 図 鋼製試験片 C



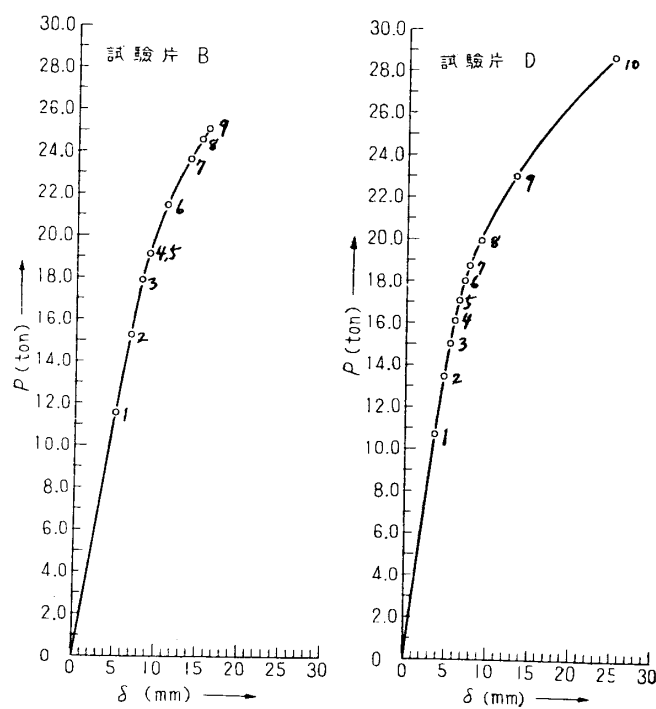
第 33 図 鋼製試験片 D

の特性は第 34 図に示すようである (引張り降伏応力 $\sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2$)。光弾性皮膜としてはなるべく広範囲の歪を測定出来るように, epoxy rubber (100, 100, 8) を選び, 公称厚さ 2 mm にとった。接着剤は同材料の prepolymer である。皮膜は試験片の要所をすべて被覆するよう接着したが, かなり広い面積にわたる関係上完全に均一の厚さに接着することは困難なので, 接着後の厚さを各所について測定し, 等色線次数から下地の歪分布を導く際膜厚の補正を行なった。SF-50 および接着された皮膜の特性検定用試片 A (平行部の幅 20 mm, 厚さ 4 mm) の単軸引張りで得られた両者の特性は第 34 図に示す通りで, これを後述の等色線図から下地の歪, 応力の分布を導く基準とした。

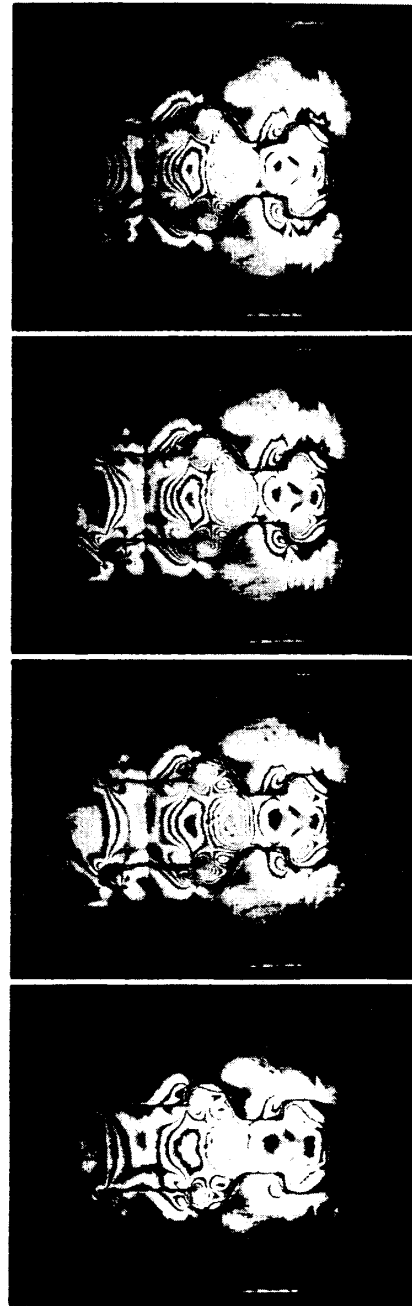
荷重試験機としては Amsler 50 ton 荷重試験機を用い, 負荷を逐次増大する過程での試験片 B, C および D の等色線図を 2・1 に述べた反射型光弾塑性装置 ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$, 暗視野) で撮影した。カメラのレンズは $f = 210 \text{ mm}$, $F : 4.5$ を用いた (実験温度 24°C)。かくして得られた荷重-伸び関係および等色線図を第 35, 36, 37, 38 図に示す。ここに示す荷重-伸び関係の伸びは, Amsler 試験機に附属の記録装置で記録されたものであり, 摺みの位置での滑りを混入しないよう注意した。十分精密とは考えられないが参考のために附記してお



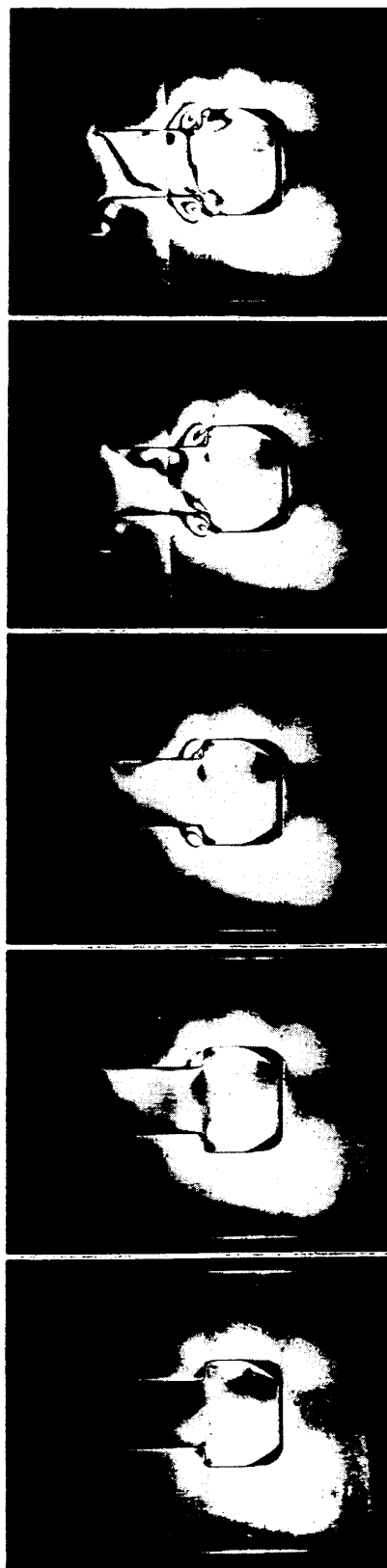
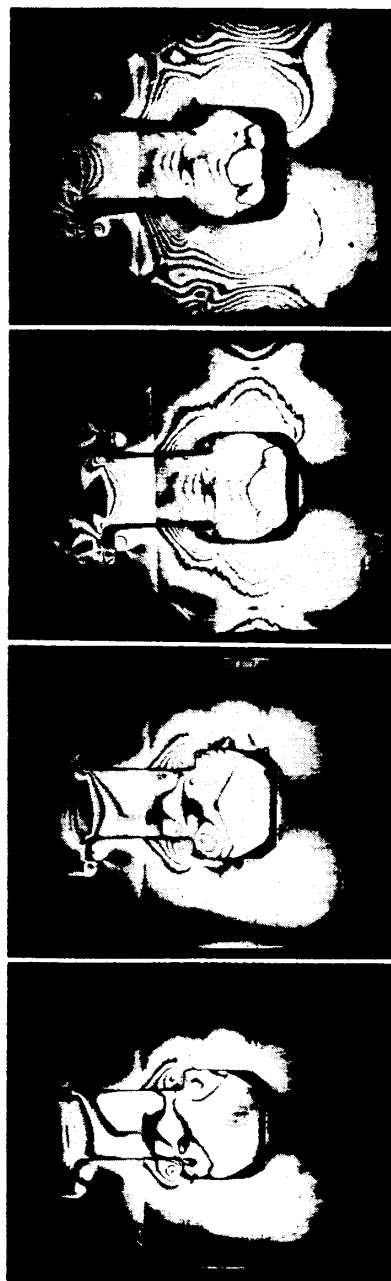
第 34 図 SF-50 の単軸引張りでの応力-歪関係および充弾性皮膜の等色線次数-SF-50 歪関係 ($T=22^{\circ}\text{C}$)



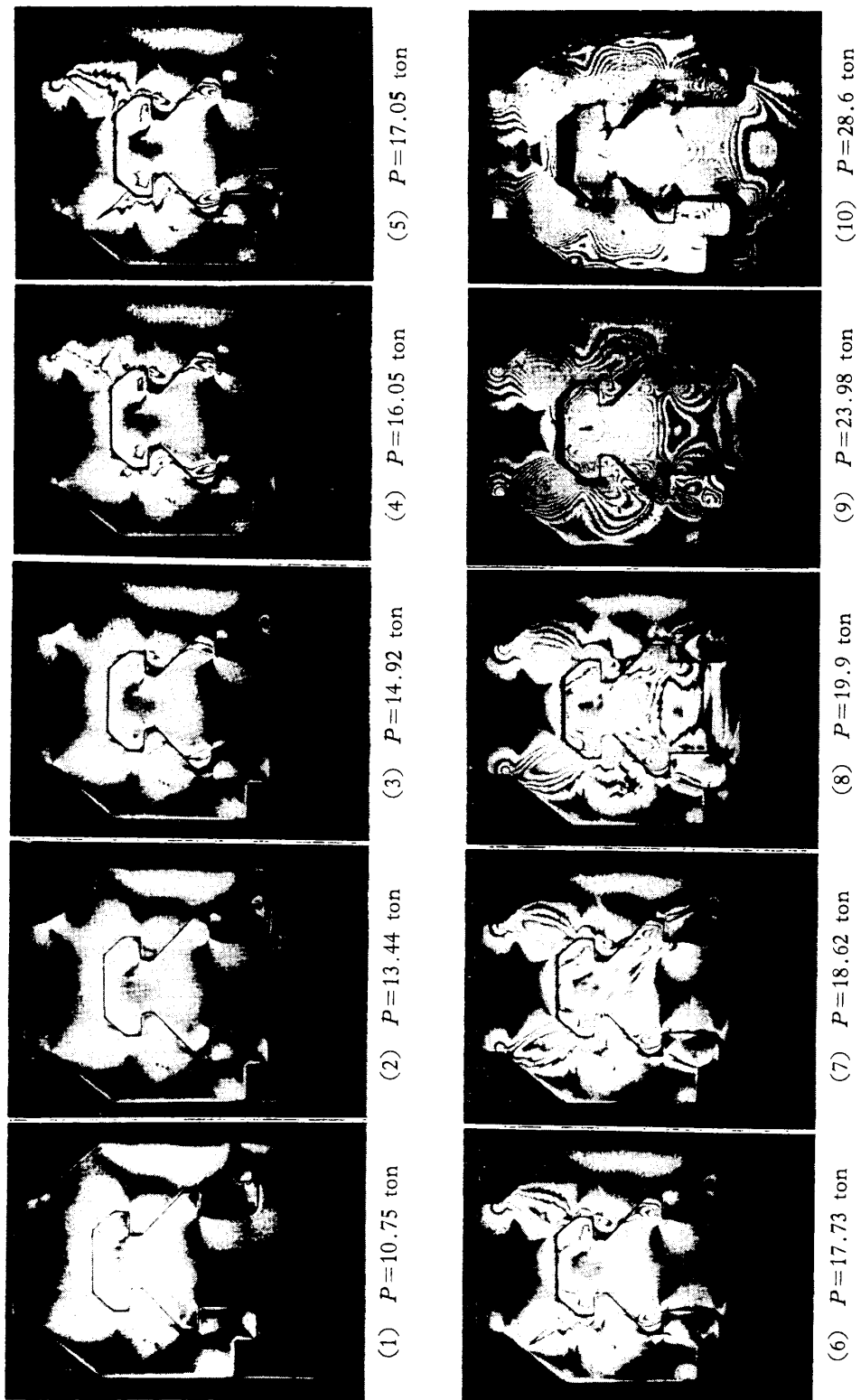
第 35 図 試験片 B, D の荷重 P -伸び δ 線図。図中測定点につけた番号はそれぞれ第 3, 5 表の等色線写真番号と一致する。

(1) $P=11.5$ ton(2) $P=15.2$ ton(3) $P=17.85$ ton(4) $P=19.07$ ton(5) $P=19.11$ ton(6) $P=21.38$ ton(7) $P=23.55$ ton(8) $P=24.51$ ton(9) $P=24.85$ ton

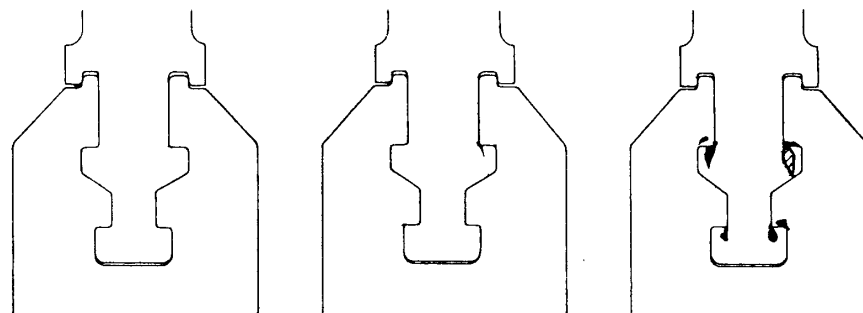
第 36 図 試験片 B の引張りでの等色線図. 第 3 表の各部降伏状況説明を参照されたい.

(5) $P=14.66$ ton(4) $P=13.66$ ton(3) $P=13.22$ ton(2) $P=12.8$ ton(1) $P=9.0$ ton(9) $P=18.42$ ton(8) $P=18.4$ ton(7) $P=16.7$ ton(6) $P=15.5$ ton

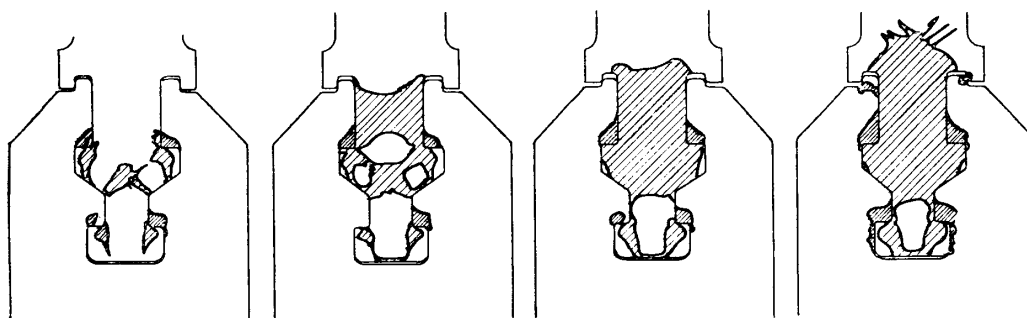
第 37 図 試験片 C の引張りでの等色線図. 第 4 表の各部降伏状況説明を参照されたい.



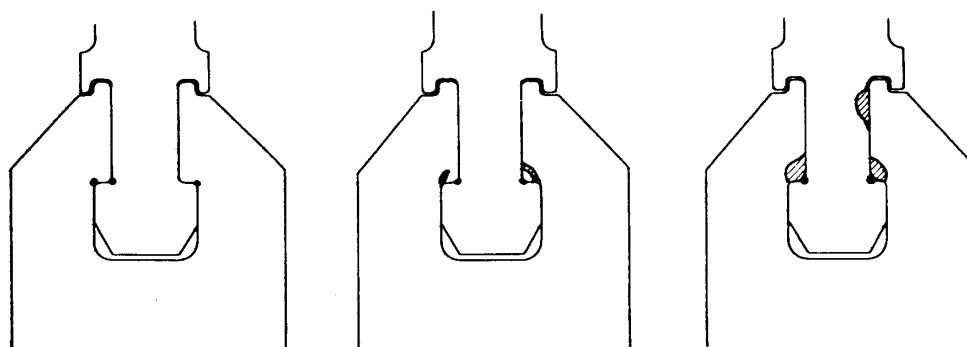
第 38 図 試験片 D の引張りでの等色線図. 第 5 表の各部降伏状況説明を参照されたい.

B-1. $P=11.50$ tonB-2. $P=15.20$ tonB-3. $P=17.85$ ton

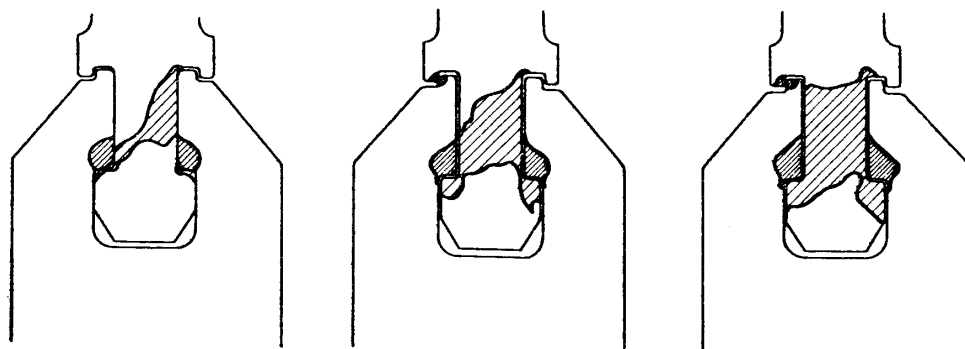
第 39 図-1 試験片 B の塑性領域進展図

B-4. $P=19.07$ tonB-5. $P=19.11$ tonB-6. $P=21.38$ tonB-7. $P=23.55$ ton

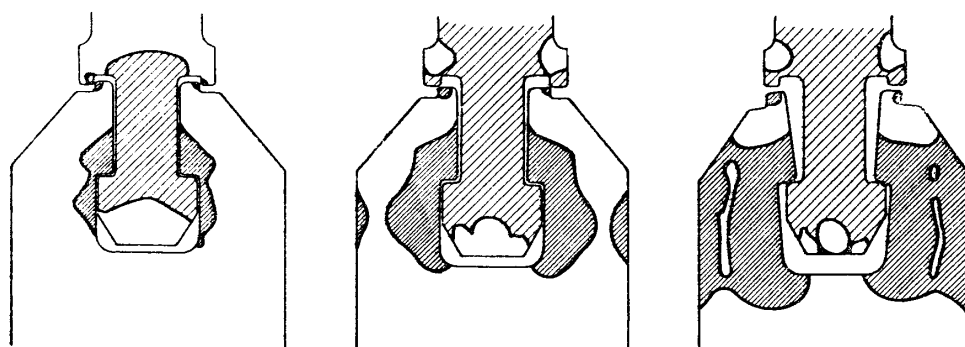
第 39 図-2. 試験片 B の塑性領域進展図

C-1. $P=9.00$ tonC-2. $P=12.80$ tonC-3. $P=13.22$ ton

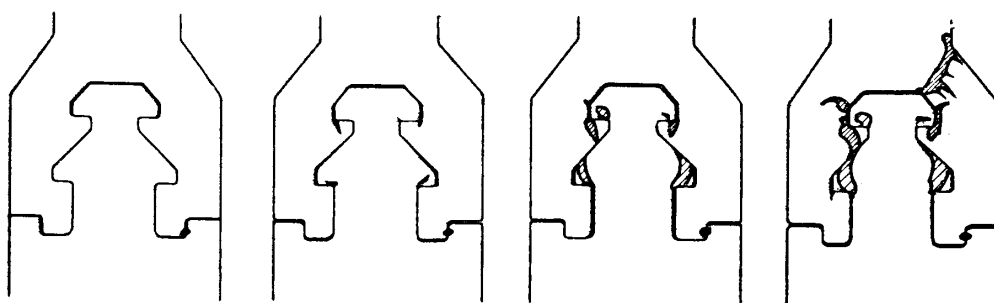
第 40 図-1. 試験片 C の塑性領域進展図

C-4. $P=13.66$ tonC-5. $P=14.66$ tonC-6. $P=15.50$ ton

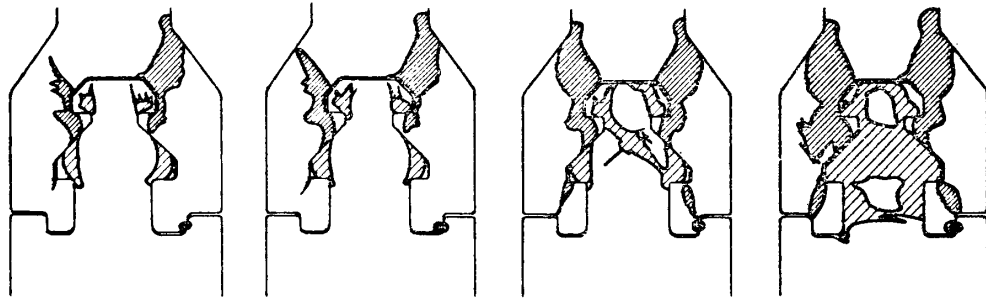
第 40 図-2. 試験片 C の塑性領域進展図

C-7. $P=16.70$ tonC-8. $P=18.40$ tonC-9. $P=18.42$ ton

第 40 図-3. 試験片 C の塑性領域進展図

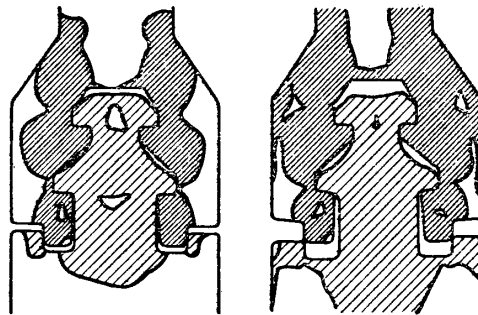
D-1. $P=10.75$ tonD-2. $P=13.44$ tonD-3. $P=14.92$ tonD-4. $P=16.05$ ton

第 41 図-1. 試験片 D の塑性領域進展図



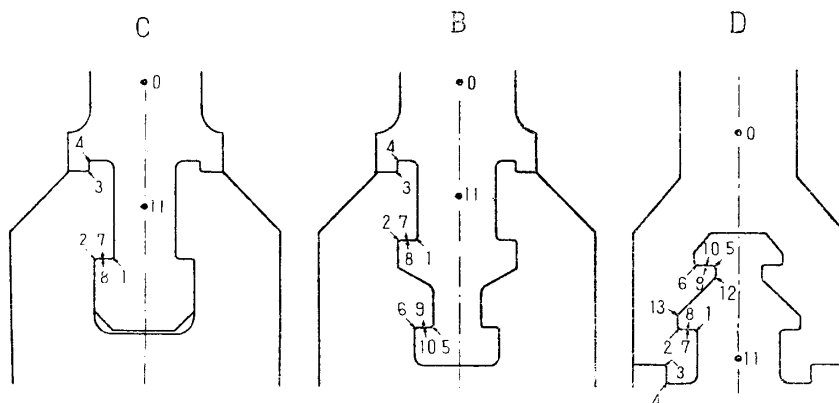
D-5. $P=17.05$ ton D-6. $P=17.73$ ton D-7. $P=18.62$ ton D-8. $P=19.90$ ton

第 41 図-2. 試験片 D の塑性領域進展図



D-9. $P=23.98$ ton D-10. $P=28.60$ ton

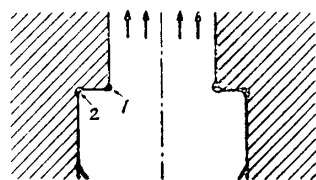
第 41 図-3. 試験片 D の塑性領域進展図



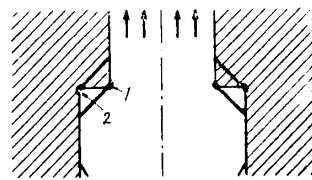
第 42 図 試験片の主要点の番号

く、塑性領域進展図として示したスケッチ第 39, 40, 41 図は等色線次数で 1 次以上のところを塑性領域として表示したもので、厳密な意味では上の表現は正確ではないが、大勢を把握するには役立つと考えられるので、ここに示した $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 1/\beta t$ 以上の領域を表示したものと解釈すれば正確である。

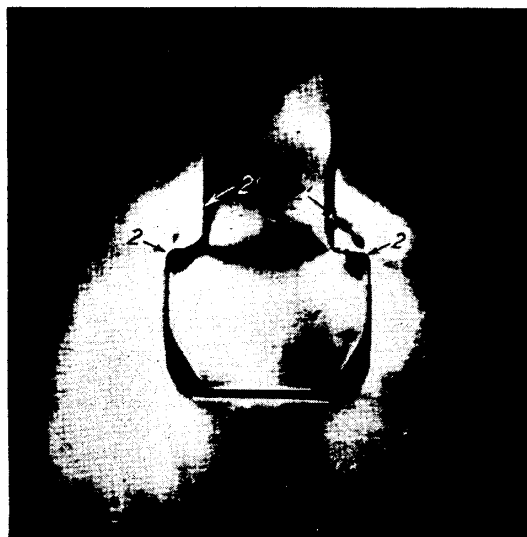
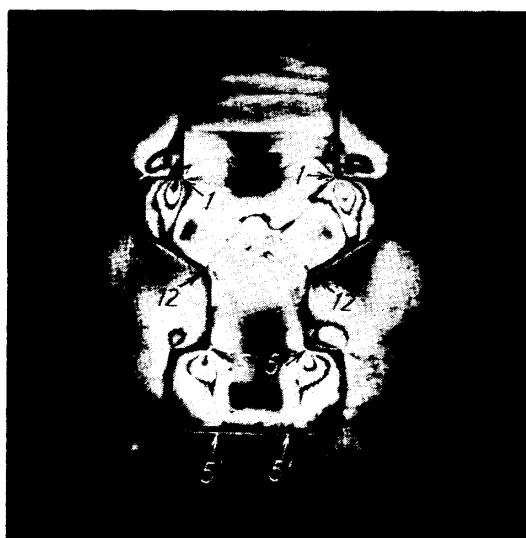
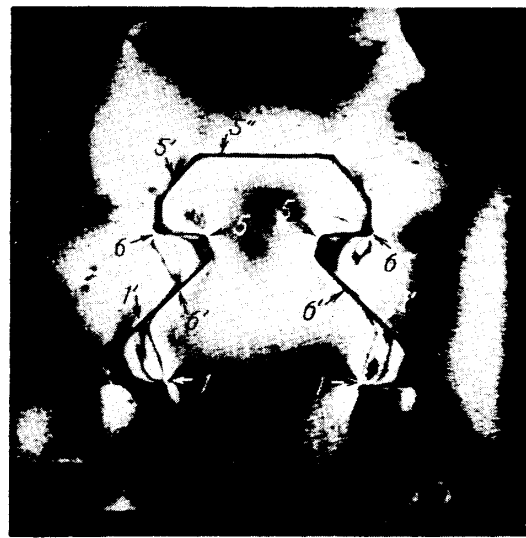
等色線図と塑性領域進展図を観察すれば直ちに知られるように、最初局部的降伏の起こり、次に降伏領域の貫通する過程が明瞭に捕捉出来る。たとえば、試験片 C のブレード側およびローター側の肩の附根の応力集中個所 1, 2 の附近での降伏の様子は、第 37 図 (2), (3)



(1) 1, 2 での局部的降伏

(2) 1, 2 より, 荷重にほぼ 45° の方向に巨視的な滑り帯が生じ貫通する

第 43 図 試験片 C の肩の部分の降伏の様式

(1) 第 37 図 (2) の拡大
2 より 2' に向けて急速に貫通する(2) 第 36 図 (3) の拡大
 $1 \rightarrow 1'$, $2 \rightarrow 2'$, $6 \rightarrow 6'$, $5 \rightarrow 5'$ (3) 第 36 図 (4) の拡大
 $12 \text{ 左} \rightarrow 1 \text{ 右}$, $12 \text{ 右} \rightarrow 1 \text{ 左}$, $5 \rightarrow 5''$ (4) 第 38 図 (3) の拡大
 $6 \rightarrow 6'$, $5 \rightarrow 5'$, $5''$, $1 \rightarrow 1'$

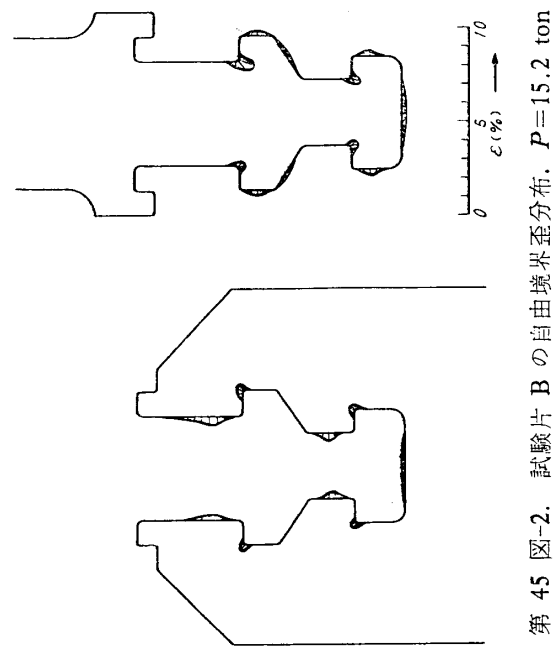
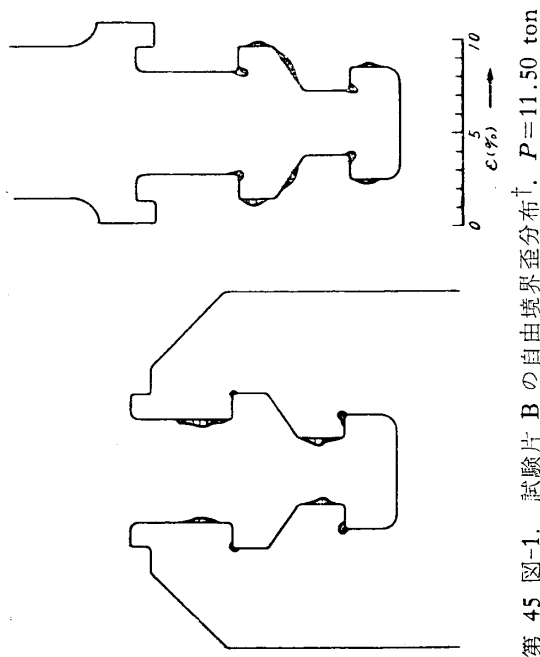
第 44 図 等色線図についての巨視的滑り帯の説明

に写真でまた第 43 図に模式的に示すように、まづ 1, 2 を中心とする小さい領域で局部的に降伏が起こり、続いて荷重に対しほぼ 45° 方向に巨視的な滑り帯が生じて貫通し、これが逐次拡大するという過程をとる。これと類似の過程は、試験片 B の等色線図 (1), (2), (3) や、試験片 D の等色線図 (1), (2), (3) 等において、ブレード側およびローター側の肩の附根に見られる。これらは拡大した等色線図第 44 図において詳細に見られる。拡大写真においてさらに次の事実が見られる。すなわち、この巨視的滑り帯はたとえば第 44 図 (2) の $1 \rightarrow 1'$ に起こった後、第 44 図 (3) で $12 \rightarrow 1$ のようにも起こる。第 44 図 (4) では同時に $5 \rightarrow 5'$, $5 \rightarrow 5''$ が見られる。このように荷重の増大につれ、巨視的滑りの面は同一の個所から複数の方向に発生することもあり、降伏進行時の様相は決して単純ではないことが知られる。

4.2 自由境界での弾塑性主歪、主応力分布と弾塑性応力集中

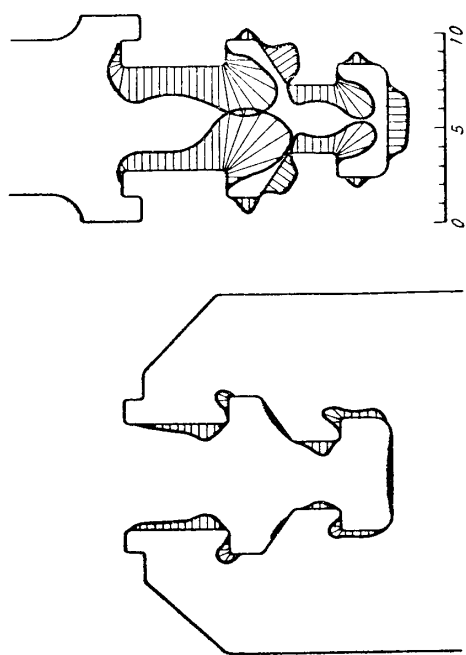
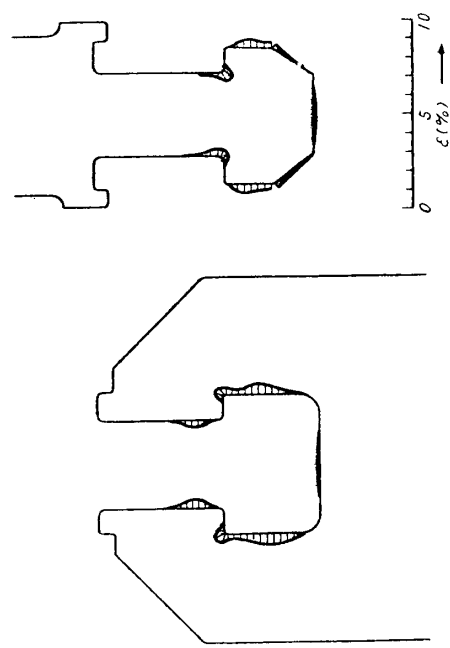
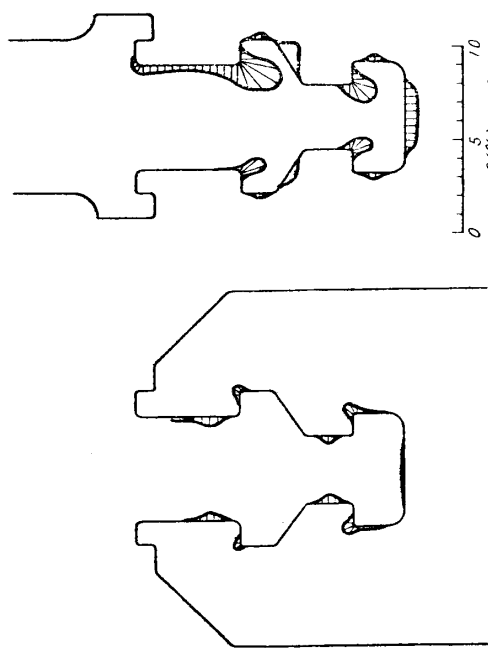
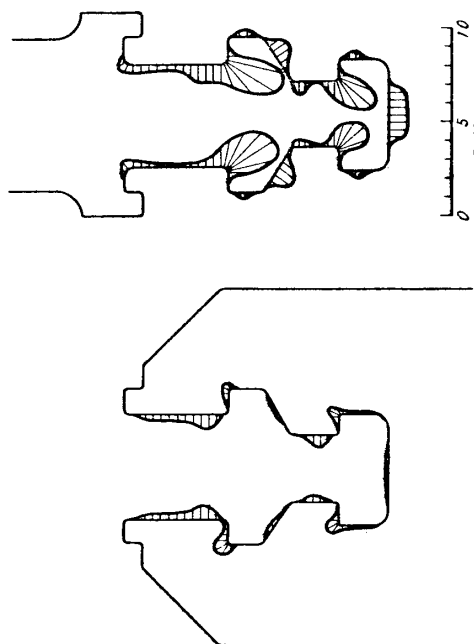
3 までに述べたのと同様にして自由境界での弾塑性主歪および主応力分布を求めた。その二三を第 45~50 図に示す。

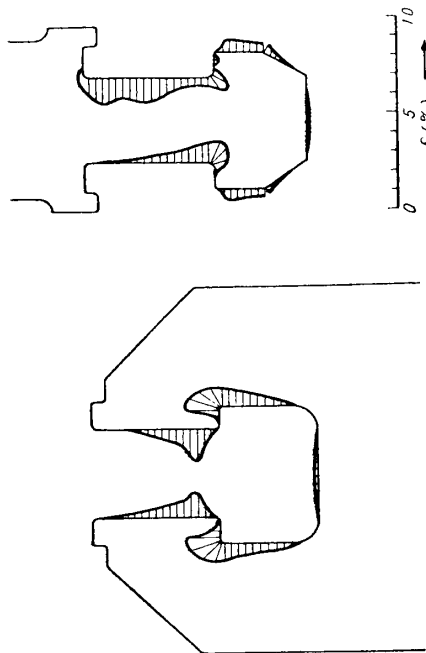
次に、主として注意すべき応力集中個所の弾塑性応力集中係数の荷重による変化を検討しよう。集中係数を求めた基準応力 σ_0 は第 42 図に 0 で示した試験片平行部の平均応力である。この結果を第 51, 52, 53 図に示す。横軸にほぼ平行な*弾性領域、局部的降伏の開始により基準応力に対し双曲線的に減少する領域（応力-歪線図の下降伏点の水平部に当る）、さらに基準応力の増大するに伴い僅かに増大する加工硬化域と大別されることが知られる。



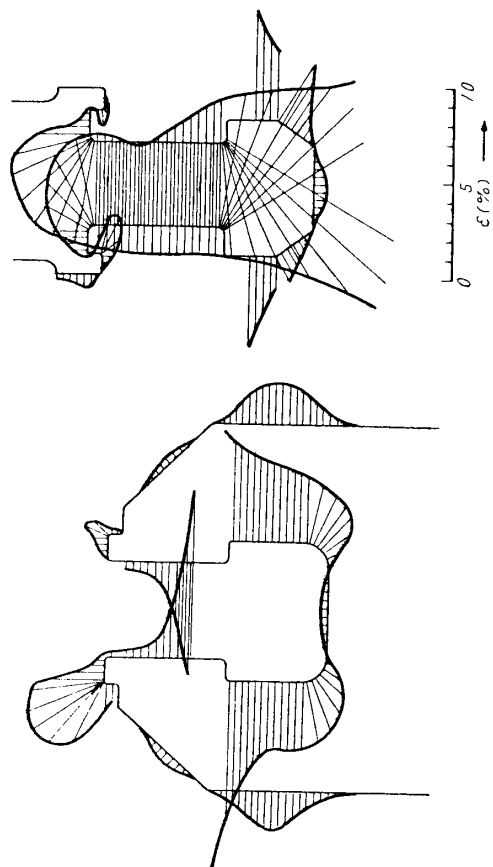
* 嵌合部の弾性応力集中係数は変形に依存するため、弾性域内でも荷重により僅かに変化を示す。

† 面圧部は自由境界ではないが繰回数よりの換算値をプロットした。

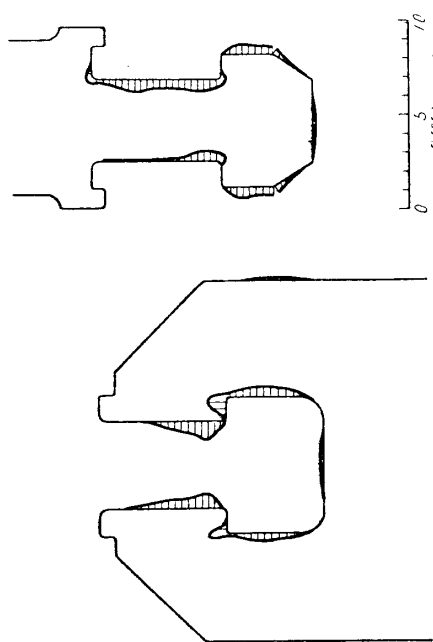
第 45 図-5. 試験片 B の自由境界歪分布. $P=19.11$ ton第 46 図-1. 試験片 C の自由境界歪分布. $P=9.00$ ton第 45 図-3. 試験片 B の自由境界歪分布. $P=17.85$ ton第 45 図-4. 試験片 B の自由境界歪分布. $P=19.07$ ton



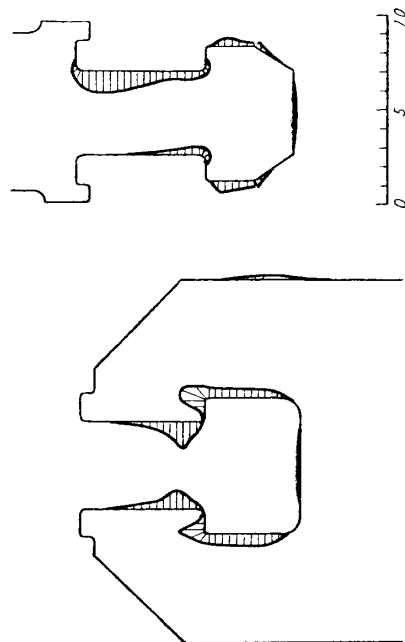
第 46 図-4. 試験片 C の自由境界歪分布. $P=13.66$ ton



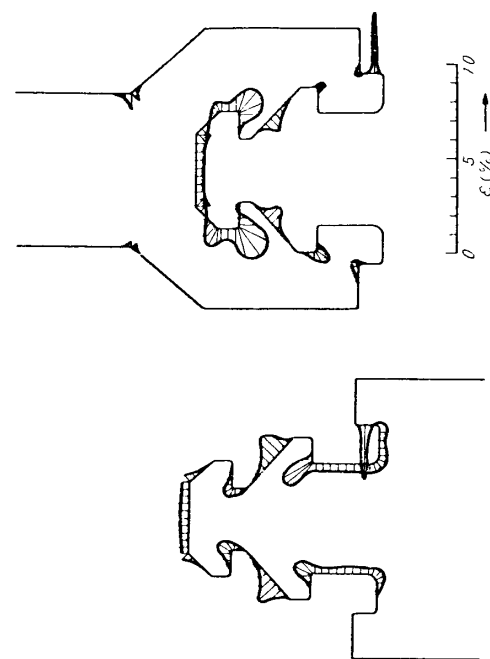
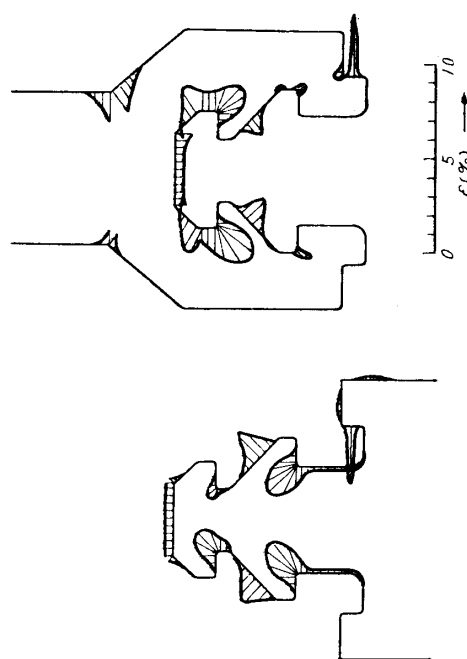
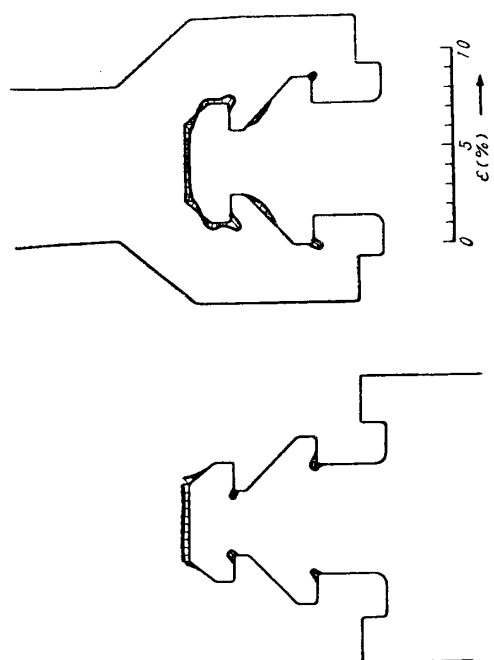
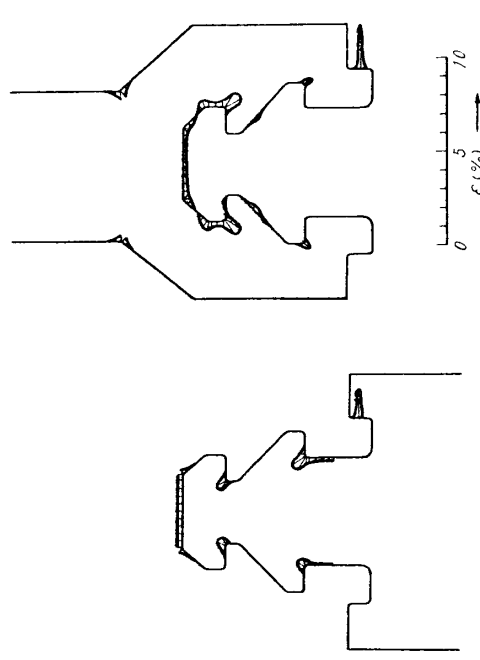
第 46 図-5. 試験片 C の自由境界歪分布. $P=18.40$ ton

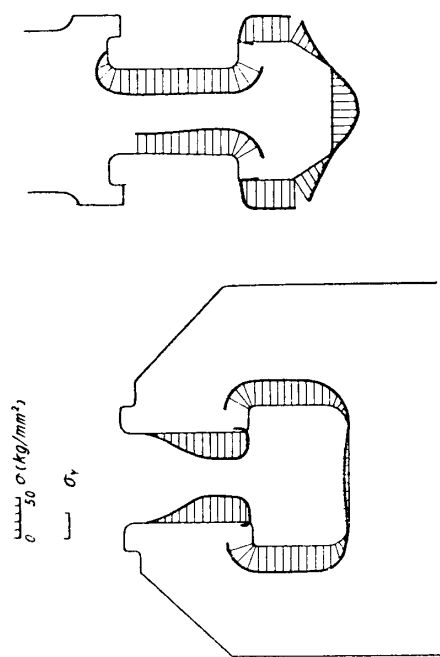


第 46 図-2. 試験片 C の自由境界歪分布. $P=12.80$ ton

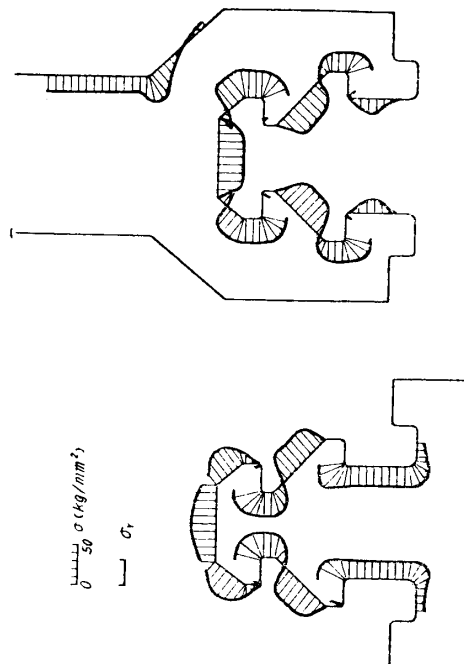


第 46 図-3. 試験片 C の自由境界歪分布. $P=13.22$ ton

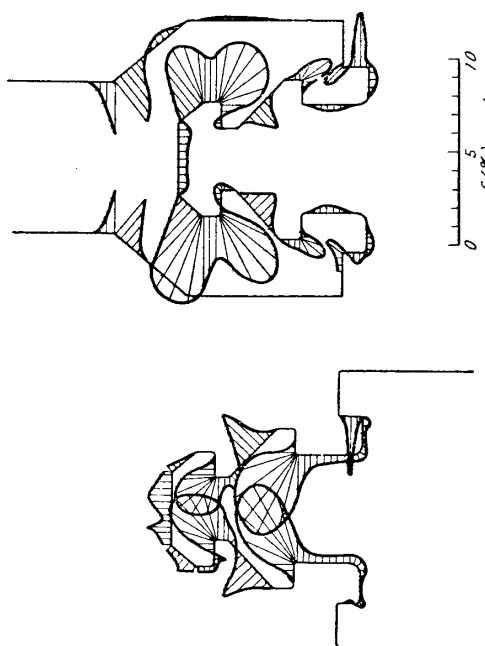
第 47 図-3. 試験片 D の自由境界歪分布. $P=14.92$ ton第 47 図-4. 試験片 D の自由境界歪分布. $P=16.05$ ton第 47 図-1. 試験片 D の自由境界歪分布. $P=10.75$ ton第 47 図-2. 試験片 D の自由境界歪分布. $P=13.44$ ton



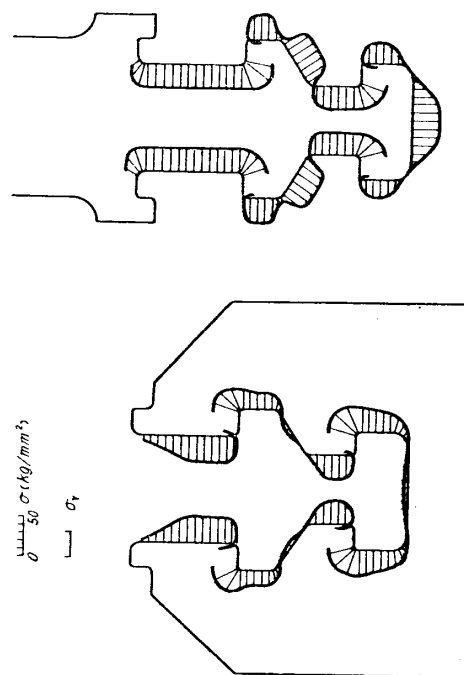
第 49 図 試験片 C の自由境界応力分布の一例。
C-2, $P=12.8$ ton



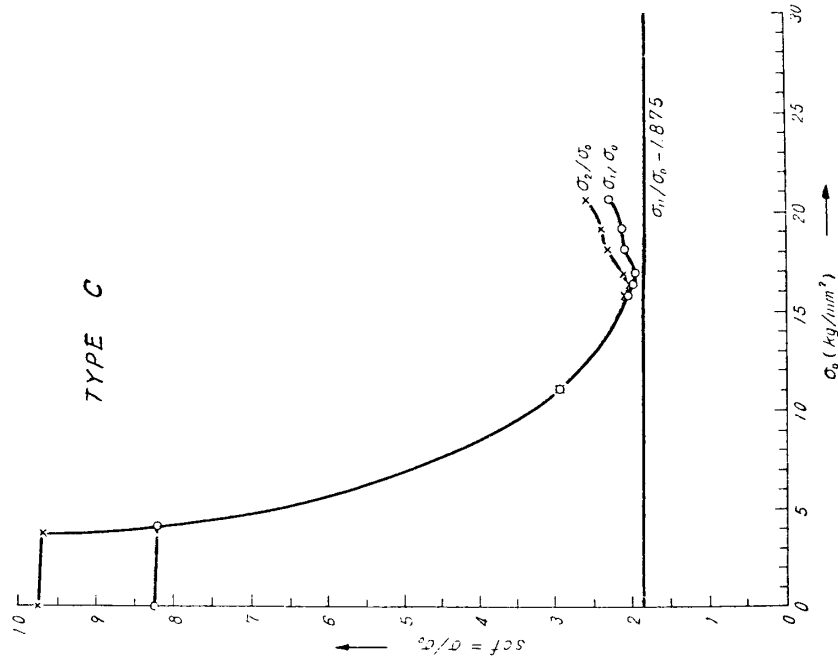
第 50 図 試験片 D の自由境界応力分布の一例。
D-3, $P=14.92$ ton



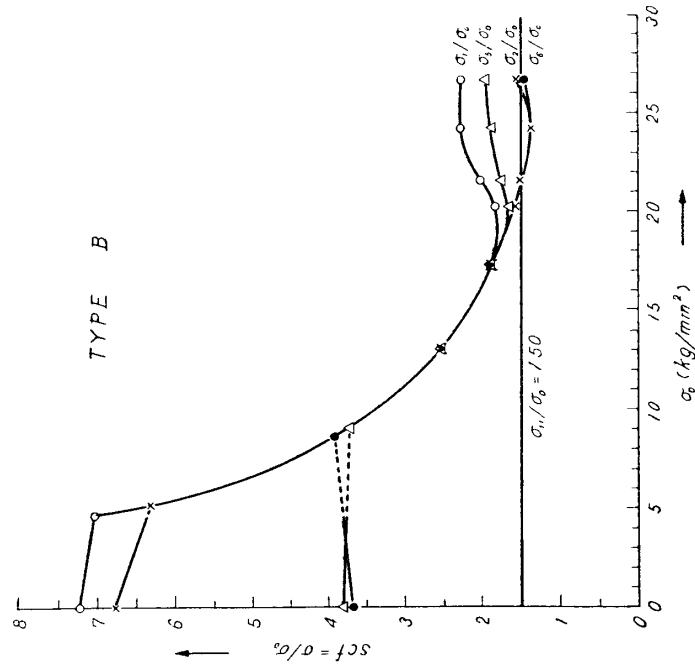
第 47 図-5. 試験片 D の自由境界歪分布. $P=18.62$ ton



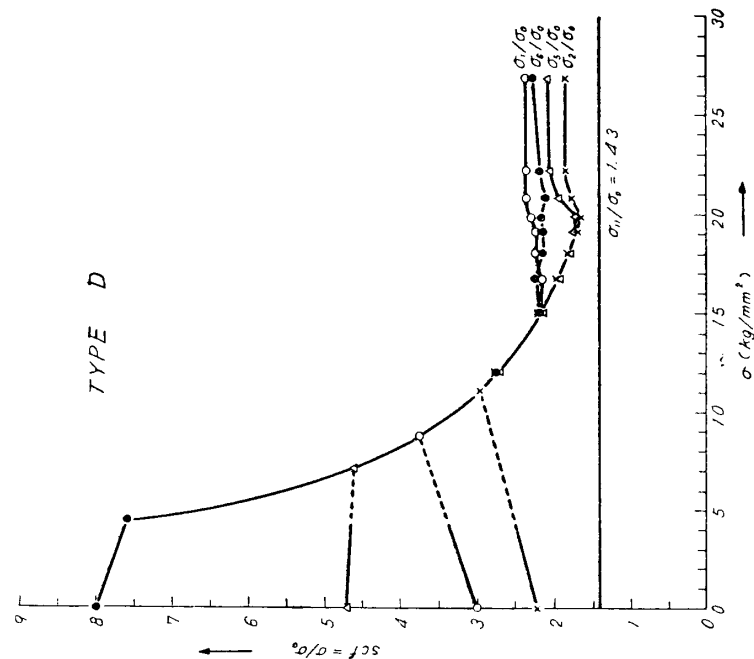
第 48 図 試験片 B の自由境界応力分布の一例。
B-3, $P=17.85$ ton



第 52 図 試験片 C の引張りでの弾塑性応力集中係数



第 51 図 試験片 B の引張りでの弾塑性応力集中係数



第 53 図 試験片 D の引張りでの弾塑性応力集中係数

4.3 塑性設計荷重の決定

以上のデータにより塑性設計荷重を決定し弾性設計荷重と比較してみよう。応力集中個所の逐次降伏する状況の要約を表示すると、第 3, 4, 5 表の通りである。基準断面はいずれもブレードの幅 60 mm の平行部 (0) をとってある。この表中一番上の欄は、最大応力集中個所の応力が $\sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2$ に到達する σ_0 および P を弾性応力集中係数より計算した値を示し、この P は P_{Y0} となる。 P_Y は第 54, 55, 56 図に示すように荷重 P と各応力

第 3 表 試験片 B 特定点の降伏状況

試験片厚さ { ローター: 14.6 mm $S_0 = 60 \times 14.7 = 882 \text{ mm}^2$
 ブレード: 14.7 mm 材料の引張り降伏応力 $\sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2$

等色線 写真番号	荷重 P (ton)	基準応力 σ_0 (kg/mm ²)	各部降伏状況
	4.14	4.69	点 1 局部的降伏, $P_{Y0} = 4.14 \text{ ton}$
1	11.5	13.05	点 1 よりの巨視的滑り帯貫通, $\approx P_Y$. { 点 1 よりの巨視的滑り進行, 点 2, 5, 6 よりの巨視的滑り始まる ブレード第 1 段目の肩下端附根と点 1 の間に巨視 的滑り帯貫通, 点 11 の降伏おこる 以下これらの滑り逐次進行
2	15.2	17.25	
3	17.85	20.25	
4	19.07	21.6	
5	19.11	21.65	
6	21.38	24.25	
7	23.55	26.7	
8	24.51	27.8	
9	24.85	28.2	

第 4 表 試験片 C 特定点の降伏状況

試験片厚さ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ローター: } 13.5 \text{ mm} \quad S_0 = 60 \times 13.5 = 810 \text{ mm}^2 \\ \text{ブレード: } 13.5 \text{ mm} \quad \sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2 \end{array} \right.$

等色線 写真番号	荷重 P (ton)	基準応力 σ_0 (kg/mm ²)	各部降伏状況
	2.74	3.38	点 2 局部的降伏, $P_{Y0}=2.74 \text{ ton}$
1	9.00	11.1	
2	12.80	15.8	点 2 より約 45° 斜上方に巨視的滑り帯貫通, $\approx P_Y$.
3	13.22	16.35	点 11 局部的降伏
4	13.66	16.9	点 11 巨視的滑り帯貫通
5	14.66	18.1	点 1 より約 45° 斜下方に巨視的滑り帯貫通
6	15.50	19.15	以下これらの滑り逐次進行
7	16.70	20.6	
8	18.40	22.7	
9	18.42	22.75	

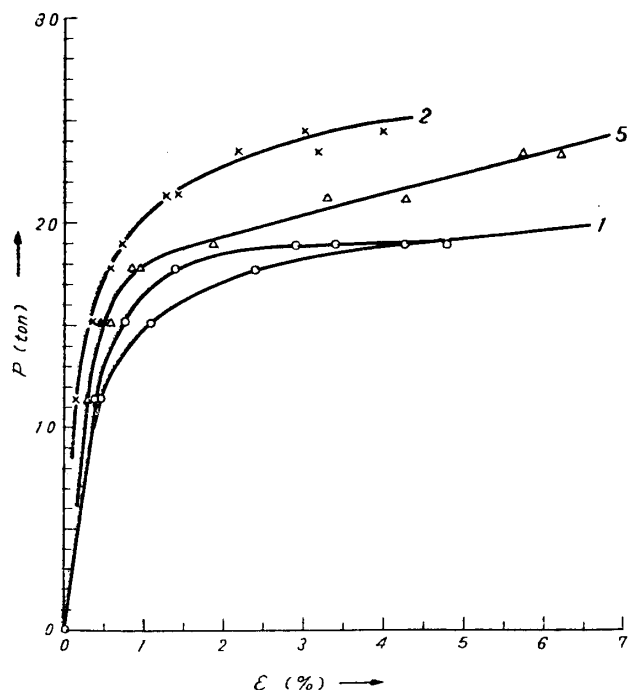
第 5 表 試験片 D 特定点の降伏状況

試験片厚さ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ローター: } 14.8 \text{ mm} \quad S_0 = 60 \times 14.9 = 894 \text{ mm}^2 \\ \text{ブレード: } 14.9 \text{ mm} \quad \sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2 \end{array} \right.$

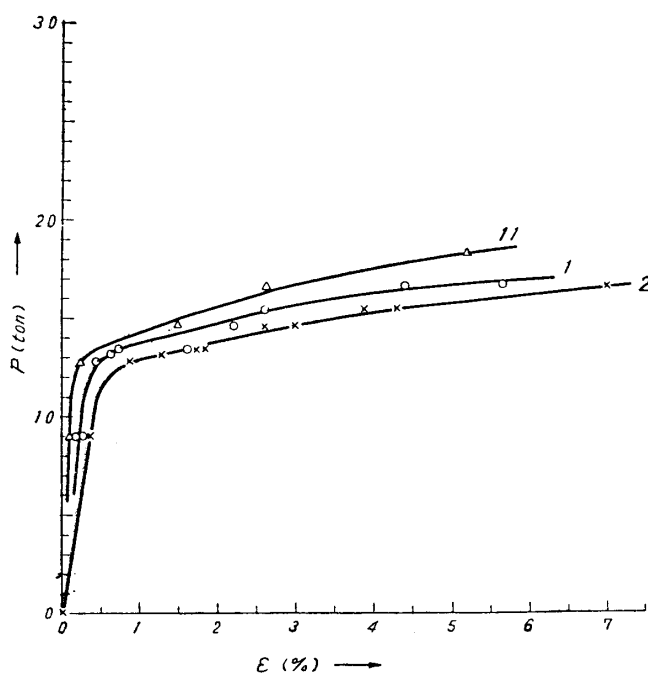
等色線 写真番号	荷重 P (ton)	基準応力 σ_0 (kg/mm ²)	各部降伏状況
	3.86	4.32	点 6 局部的降伏, $P_{Y0}=3.86 \text{ ton}$
1	10.75	12.0	
2	13.44	15.0	点 6, 1 より巨視的滑り帯貫通, $\approx P_Y$
3	14.92	16.7	点 5 より巨視的滑り帯貫通
4	16.05	18.0	{ ブレード側切込部右上端よりブレード附根へ巨視 的滑り帯貫通
5	17.05	19.1	
6	17.73	19.8	同上
7	18.62	20.8	点 2 より巨視的滑り帯貫通
8	19.90	22.2	
9	23.98	26.8	点 11 巨視的滑り
10	28.6	32.0	

第 6 表 タービン翼根部の弾性
および塑性設計荷重

種類	SF-50($\sigma_Y = 32.8 \text{ kg/mm}^2$)		
	P_{Y0} (ton)	P_Y (ton)	P_Y/P_{Y0}
B 型	4.14	15.2	3.67
C 型	2.74	12.8	4.67
D 型	3.86	13.4	3.47



第54図 試験片Bの引張りでの荷重-主歪線図



第55図 試験片Cの引張りでの荷重-主歪線図

集中個所の自由境界に平行の主歪 ε との関係のプロットでの屈曲点として求められるが、**3** にも述べたように実用的には巨視的滑り帯の貫通するときの荷重として、降伏状況の観測結果 (第 **3**, **4**, **5** 表) より簡明に求められる。以上の結果を要約して第 **6** 表に示す。この表からわかるように、 P_Y は P_{Y0} の **3** 倍以上となっている。実際の設計に当って P_Y と P_{Y0} の間のどの辺の荷重まで許容するかは、他の設計要素も考え合わせて定めるべきであろうが、とにかく比較的複雑な境界条件の場合でも、簡明に P_Y の決定されることが明らかとなった。

塑性領域の試験片全幅を貫通する瞬間の荷重を検出するには、荷重-変形線図では上述の荷重-応力集中個所の主歪線図に比し精度が悪いようである。このことは第 **35** 図においては後者ほど尖鋭な屈曲点の見られないことから知られるが、試験片全体の変形としては試験片の一部分の塑性変形に試験片の残り大部分の弾性変形が加算されたものとして現われてくるから、当然であろう。またタービン翼根部のように嵌合部のある場合には、嵌合部での当りの不均一がなじむ過程での変形も混入し得ると考えられるので、屈曲点にことに不明瞭となっているのでなかろうか。いずれにしろ、 $P \sim \varepsilon$ 線図による方式ではこれらの影響をうけないことは明らかである。

なおこの実験では試験片の個数が1個ずつであったため用いた皮膜が一種類に限定されたのは止むを得ないが、慫をいえば同一試験片を少なくとも2個以上作製し、それぞれ比較的硬く歪感度の高い皮膜および歪感度が比較的低くても最大伸びの大きい皮膜の2種類により、

比較的小さい歪の範囲と比較的大きい歪の範囲に分けて測定を行なえば、弾性限度附近までの精度はさらに良くなるであろう。

5. 結 言

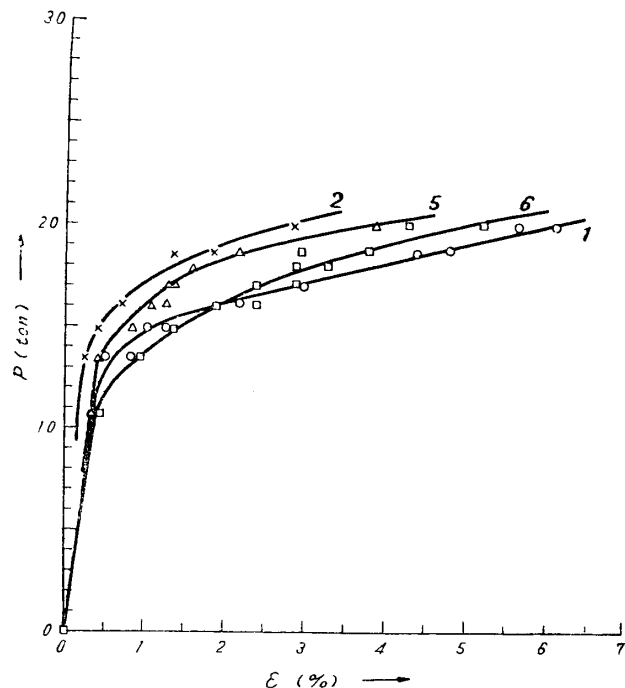
以上、構造要素の降伏の実物光弾塑性学的研究について述べたが、得られた結果の要約は次のようである。

(1) 光弾性皮膜法による実物光弾塑性解析の基礎を確立するため、反射型光弾塑性装置、光弾性皮膜材料、金属表面に接着された皮膜の基礎的性質、等色線その他の測定値よりの下地の歪、応力の誘導法について研究した。反射型光弾塑性装置については、3種の型式を試作しその

利害得失を明らかにした。光弾性皮膜材料としては新しく epoxy-polysulfide 系共重合体 (epoxy rubber と仮称) を開発し、歪感度、最大伸び、ヤング係数等の特性についてほぼ満足すべき結果を得た。この皮膜を金属表面に接着して、下地の塑性域においても等色線次数-下地歪関係の直線的に得られることを明らかにした。次に解析法の面では、下地の塑性域では等色線次数は下地表面の主歪差に比例する strain-optic law を導き、また測定値より下地の歪、応力を誘導する方法を考案した。

(2) この基礎研究の結果をまづ比較的簡単な構造要素：円孔、90°切欠および半円切欠を持つ帯板の単軸引張りでの降伏（平面応力）の解析に適用した。自由境界での弾塑性歪、応力分布が決定され、このデータを用いて、弾塑性応力集中係数および応力集中個所の主歪の荷重による変化の状況が明らかにされた。さらに後者を用いて流れ限度が決定されたが、荷重-変形線図によるより精度はよいと考えられる。降伏領域が試験片の全幅を貫通する瞬間は等色線の貫通として明瞭に観測されるので、この観測によりさらに簡単に流れ限度が決定できる。降伏過程での応力分布は下地材料（軟鋼およびアルミ合金）の応力-歪線図により明瞭に異なることが明らかにされた。塑性設計荷重としての流れ限度 P_Y と弾性設計荷重 P_{Y0} との比較を行ない、ここに調べた例では $P_Y/P_{Y0}=1.7\sim2.5$ 程度に納まることが知られた。

(3) 次に、やや複雑な構造要素としてタービン翼根部の降伏を実物光弾塑性学的に (2) と同様の過程で解析した。このように複雑な境界を持つ場合には、降伏の進行状況はかなり複雑であるが、この手法で簡明に解析できることが明らかとなった。この例では $P_Y/P_{Y0}=3.5\sim4.7$ 程度の値が得られた。また肩の降伏様式については興味ある事実が観察された。



第 56 図 試験片 D の引張りでの荷重-主歪線図

(4) 上述のように、新皮膜材料 **epoxy rubber** と考案した解析法とが実際の弾塑性解析に有効に適用されることが明らかにされた。皮膜法実物光弾塑性は現在実験的弾塑性解析の一つの有力な手段であるといえる。今後研究を進めるべき事項としては、塑性加工のように極めて大きい塑性歪を取扱う場合の解析、自由境界の内部の主応力の分析および弾性歪の精度のよい解析を可能にするさらに歪感度の高い皮膜材料の開発等が挙げられよう。

本研究を行なうに当って懇切な御指導を頂いた東大航空研究所福井伸二教授、理化学研究所において終始変らぬ御指導を頂いた辻二郎博士、西田正孝博士、鈴木新嗣副主任研究員、測定値よりの主歪、主応力の誘導法の決定について懇切な御教示と討論を頂いた東大工学部鵜戸口英善教授の諸先生に厚く御礼申上げる。本研究に要した費用の一部は文部省総合科学研究費によるものである。この点に関し御配慮頂いた東大航空研究所池田健教授に厚く御礼申上げる。タービン翼根部の実験に当っては、川崎重工業株式会社の依託をうけ種々御援助を頂いた。技術研究所長矢野正巳氏、同第二研究室長宮崎光氏、技術室長前田宗雄氏、技術室造船課長徳永満氏、技術研究所三木三省氏はじめ関係各位の御好意に厚く御礼申上げる。畏友植村益次助教授には随時適切な討論をお願いした。御好意に深く感謝の意を表する。また実験を行うに当り御援助いただいた清野次郎技官、横尾久明君、井上宏起君、市田和夫君に感謝の意を表する次第である。

1959 年 8 月 15 日 材 料 部

文 献

- [1] たとえば, V. d. Broek: *Theory of Limit Design*, John Wiley and Sons, Inc., 1948.
- [2] W. Prager, P. G. Hodge, Jr.: *Theory of Perfectly Plastic Solids*, John Wiley and Sons, Inc., 1951. 安倍浩二, 宮本博訳, 塑性学, 丸善, 1954.
- [3] R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, 1950. 鷲津久一郎, 山田嘉昭, 工藤英明訳, 塑性学, 培風館, 1954.
- [4] E. G. Coker, K. C. Chakko: *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A 221 (1922), 139.
- [5] M. Hetényi: *Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* (1952), 499.
- [6] R. Hiltscher: *Z. VDI*, **95** (1953), 23; **97** (1955), 49.
B. Fried, N. H. Shoup: *Tech. Rep. No. 3*, Washington State College, Institute of Technology (1953).
S. E. A. Bayoumi, E. K. Frankl: *Brit. J. Appl. Phys.*, **4** (1953), 306.
M. M. Frocht, R. A. Thomson: *Office of Ordnance Research, U. S. Army Ordn. Project No. TB 2-0.001 (1283), Contract No. DA-11-022-ORD-1609, Technical Report No. 5* (1957); *Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* (1958), 533.
M. Nisida, M. Hondo, T. Hasunuma: *Proc. 6th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* (1957), 137.
河田幸三: 科学研究所報告, **30** (1954), 103; 同上, **31** (1955), 記事 31.
副島吉雄, 三木 教: 第4回応用物理学連合講演会予稿集 (1957), 162; 第5回応用物理学連合講演会予稿集 (1958), 205; 第6回応用物理学連合講演会予稿集, 第1分冊 (1959), 5.
E. Moench, R. Jira: *Z. Angew. Phys.*, **7** (1955).
- [7] M. Mesnager: *Compt. Rend.*, **190** (1930), 1249.
- [8] J. R. Linge: *Coll. of Aeronautics, Cranfield, Rep. No. 97* (1956).
- [9] J. D'Agostino, D. C. Drucker, C. K. Liu, C. Mylonas: *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*,

- 12, No. 2 (1955), 115.
- [10] F. Zandman: *Analyse des Contraintes*, 2, No. 6 (1956), 3.
F. Zandman, M. R. Wood: *Product Engineering*, 27 (1956), 167.
- [11] 河田幸三: 第4回応用物理学連合講演会予稿集 (1957), 186.
鈴木新嗣, 河田幸三: 科学研究所報告, 33 (1957), 171.
河田幸三, 鈴木新嗣: 同上, 33 (1957), 177.
K. Kawata: *Proc. 7th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.* (1958), 149.
K. Kawata: *J. Scientific Research Institute*, 52 (1958), 17.
河田幸三: 機械学会誌, 61 (1958), 1055.
- [12] H. Fessler, D. J. Haines: *Brit. J. Appl. Phys.*, 9, No. 7 (1958), 278.
- [13] 河田幸三: 理化学研究所報告, 35 (1959), 5.
- [14] G. Cook, A. Robertson: *Engineering*, 92 (1911), 783.
A. Robertson, G. Cook: *Proc. Roy. Soc. A*, 88 (1913), 462.
G. Cook: *Engineering*, 132 (1931), 343; *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 230 (1931), 103;
Proc. Roy. Soc. A, 137 (1932), 559; *Trans. Engineers and Shipbuilders in Scotland*, 81 (1937), 371.
J. A. Pope: *Engineering*, 164 (1947), 284.
中西不二夫: 東大航究研究所報告, 72 (1931); 機械学会誌, 53 (1950), 62.
吉村慶丸, 植村益次: 東大理工学研究所報告, 6 (1952), 149.
- [15] R. V. Southwell, D. N. de G. Allen: *Phil. Trans. Roy. Soc., London, A*, 242 (1950), 379.