

弾性殻の有限変位理論*

吉 村 慶 丸

Finite Displacement Theory of Thin Elastic Shells

By

Yoshimaru YOSHIMURA

Abstract: The theory of thin elastic shells, which undergo finite displacement under the condition of small strain, is developed, by basing on the results of the three-dimensional theory of finite elastic deformation recently obtained by the present author, and by making necessary approximations of their expansions with regard to the shell thickness. The theory is given a mathematical legitimacy by considering two categories of stress, similarly in the case of three-dimensional theory, one being the actual stress for the purpose of describing the equilibrium condition, the other the pseudo-stress for describing the elasticity law, closely related to the former. All the results obtained hold for any curvilinear coordinate system in the middle surface of the shell, whether orthogonal or not, and therefore, for example, for a oblique Cartesian coordinate system fitted to the case of parallelogram plates.

概 要

これは筆者の以前の殻の理論を改良したものである。

殻の板厚が中央面の曲率半径に比べて小さく、したがって微小歪の下で有限の変位を行なうという条件の下に、筆者によって既に得られている三次元有限変形弾性論を板厚に関して展開し適当な近似を採ることによって、殻体の有限変位理論を導いた。三次元理論の場合と同様に、平衡の条件を記述するための実応力と弾性法則を記述する疑似応力とを区別することによって、また基本ベクトルとして自然標構を採ることによって、理論が合理化される。歪、断面力、断面モーメント、平衡方程式、弾性エネルギー等すべての結果は中央面上の曲線座標の直交、斜交の如何に拘らず成立する。

1. 序 論

細い棒、薄い殻のように一つまたは二つの次元の寸法が他に比べて極めて小さい物体は一般に微小歪の下で有限の変位を行なうものである。したがって弾性殻の理論は自ら有限変位の理論であることが要請される。

一般の形をした殻に対するこのような有限変位理論を筆者は 10 年以上前に導入しておい

* 昭和 34 年 2 月 21 日、日本航空学会構造強度シンポジウムにおいて講演。

たが [1], 現在においても事態はそれ以上進んではない状態である. その理論は有限変位の立場からみた Love の理論 [2] の欠点を補い, かつ曲面の微分幾何学を用いることによって Love の方法をはるかに容易にかつわかりやすくしたものである. 当時は有限変位に対する理論では K. Marguerre のもの [3] があり, またやや異なった立場の殻理論等 [4] もあったようであるが, これらはいずれも, 有限変位の立場から見ても, 色々の意味で, Love の理論に劣るともまさらなものであった. このような状況の下において, Love の理論に基礎を置きそれを合理化すること以上のことは考えられなかったのである.

ところで最近にいたって筆者 [5] は, F. Murnaghan の研究に基づいて弾性変形に対する歪の概念, 歪変化の表式を明確化し, かつ実際の応力に対して疑似応力 (pseudo-stress) の概念を導入することにより, 三次元の連続体に対する合法的な有限変形理論を得た. この理論は各方面から検討して正しいものであり, これによって従来の有限変形に対する理論の混乱は解決されたものと思っている. 殻の有限変形理論もこの三次元有限変形理論と矛盾するものであってはならないのであって, この結果前に提出した筆者の殻の理論もその根本から考え直されなければならない状況に立ち至ったのである.

この研究の意味は上述の通りであるが, ここで問題となるのはその方法である. すなわち歪, 疑似応力等の基本概念において誤りのない殻の理論であるためにはどうすればよいかということである. これらの概念, 特に疑似応力の概念, は経験的事実に基づいてはいるが, 直観的なものではないので, われわれは, Love や筆者の理論において行なわれたように, 殻を殻そのものとして直観的に扱うことによって到底成功を望むことができないのである. 正当な結果に至るためにわれわれのとり得る唯一の方法は上記三次元理論を殻の中央面からの距離に関して展開し, 殻の厚さに応じて充分な近似をとることである.

2. 座標系と標構

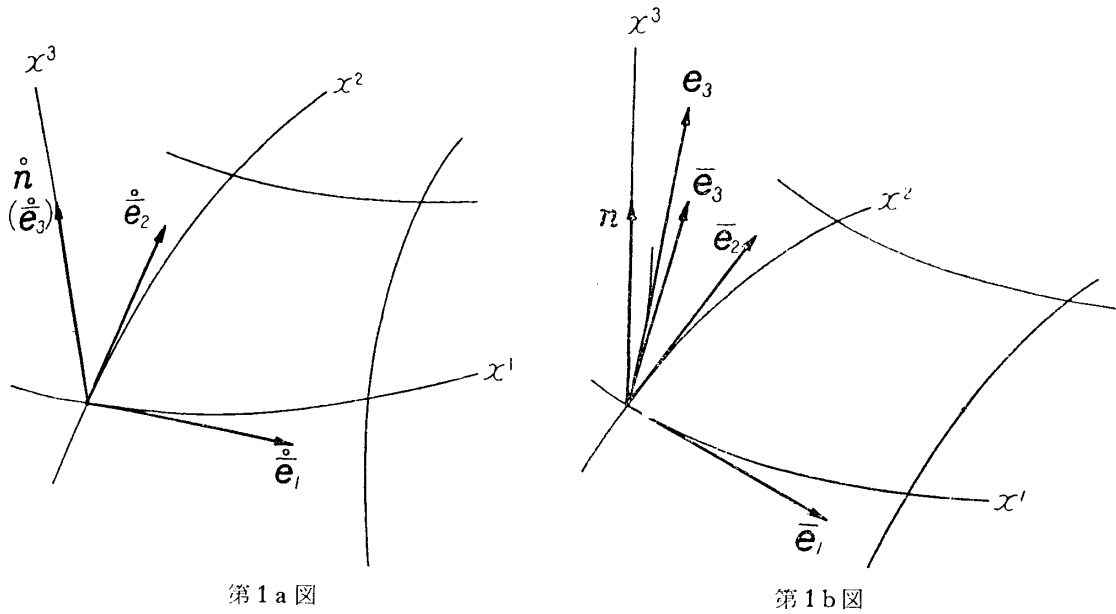
殻の中の物体点を表わすためにわれわれは, 変形前の状態において第 1 a 図に示すような Lagrange の座標系, すなわち中央面上の曲線座標系 $x^\lambda (\lambda=1, 2)$ (一般に斜交でよい) と中央面からの距離 x^3 を導入する. そうすると中央面に平行な面にも x^λ -曲線が存在し, それは中央面上の x^λ -曲線上において中央面に立てた一定の長さの法線の端をつなぐ曲線となる. これは Lagrange の座標系であるから, その媒介曲線は物体と共に変形し, 変形後は第 1 b 図のようになり, 同一の物体点は変形前も後も同一の座標 (x^1, x^2, x^3) で表わされる. 殻の一般的な変形を考えるならば, 変形前の状態において中央面に垂直な直線であった x^3 -曲線は変形後は第 1 b 図のような曲線になるはずである.

いまある物体点の変形前後の位置ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathbf{r}}, \mathbf{r}$, それに対応する中央面上の点の位置ベクトルを $\hat{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}$ とすれば*, 座標系 (x^λ, x^3) の変形前および後の標構 (reference frame) は一般点に関しては

$$\hat{\mathbf{e}}_\lambda = \partial_\lambda \hat{\mathbf{r}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = \partial_3 \hat{\mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{e}_\lambda = \partial_\lambda \mathbf{r}, \quad \mathbf{e}_3 = \partial_3 \mathbf{r}. \quad (2.2)$$

* 以後変形前の状態に対する量を示すのに“ $\hat{\cdot}$ ”を用いる. 中央面に関する量をそうでないものと区別する必要のある場合は“-”を用いるが, 必要のない場合は“-”を省略する.



中央面上の点に関しては

$$\dot{e}_\lambda = \partial_\lambda \dot{\bar{r}}, \quad \dot{e}_3 = \partial_3 \dot{\bar{r}}, \tag{2.3}$$

$$\bar{e}_\lambda = \partial_\lambda \bar{r}, \quad \bar{e}_3 = \partial_3 \bar{r}, \tag{2.4}$$

ここに

$$\partial_\lambda \equiv \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \quad (\lambda=1, 2), \quad \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial x^3} \tag{2.5}$$

である。そこで中央面に立てた単位法線を変形前後の状態に対してそれぞれ \hat{n}, n とすれば*, 定義により

$$\dot{\bar{e}}_3 = \dot{e}_3 = \dot{\hat{n}} \tag{2.6}$$

であるが, \bar{e}_3, e_3, n は互いに相異なるのが一般である。 e_3 は x^3 の函数であるが, 殻の表面においては e_3 は n に平行となる。特に法線が保存される場合には板厚方向の伸び歪 ϵ_{33} (後出) だけの誤差の範囲内で

$$\bar{e}_3 = e_3 = n \tag{2.7}$$

である。薄い殻では近似的に法線が保存されると考えてよい。

上に導入した標構 $(\dot{e}_\lambda, \dot{e}_3)$ および $(\dot{\bar{e}}_\lambda, \dot{\bar{e}}_3)$ に相逆なベクトル $(\dot{e}^\lambda, \dot{e}^3)$ および $(\dot{\bar{e}}^\lambda, \dot{\bar{e}}^3)$ はそれぞれ

$$\dot{e}^\lambda \cdot \dot{e}_\mu = \delta_\mu^\lambda, \quad \dot{e}^\lambda \cdot \dot{e}_3 = 0, \quad \dot{e}^3 \cdot \dot{e}_\lambda = 0, \quad \dot{e}^3 \cdot \dot{e}_3 = 1 \tag{2.8}$$

$$\dot{\bar{e}}^\lambda \cdot \dot{\bar{e}}_\mu = \delta_\mu^\lambda, \quad \dot{\bar{e}}^\lambda \cdot \dot{\bar{e}}_3 = 0, \quad \dot{\bar{e}}^3 \cdot \dot{\bar{e}}_\lambda = 0, \quad \dot{\bar{e}}^3 \cdot \dot{\bar{e}}_3 = 1 \tag{2.9}$$

によって定義される。この場合当然

$$\dot{\bar{e}}^3 = \dot{e}^3 = \dot{\hat{n}} \tag{2.10}$$

である。

* \hat{n}, \bar{n} とすべきであるが, それは x^3 に independent であるから $\dot{\hat{n}}, n$ としよ。

3. 方 法

われわれは序論において、正当な殻の理論を導くためには三次元有限変形理論に基づきそれを殻の中央面からの距離 x^3 に関して展開する必要があることを述べた。このためには歪、応力等すべての量を x^3 について展開しなければならない。いま f によってそれらの量を代表させれば

$$f = \bar{f} + x^3 \overline{(\partial_3 f)} + \frac{1}{2!} (x^3)^2 \overline{(\partial_3)^2 f} + \dots \quad (3.1)$$

と書かれる。ここに $\bar{f}, \overline{\partial_3 f}, \dots$ は $f, \partial_3 f, \dots$ の中央面上の値を表わす。以下では特に薄い殻を考えるから、(3.1) の展開において x^3 の2次以上の項を省略することができる。

4. 歪 の 定 義

殻の物体点の変位を \mathbf{u} 、中央面上の点の変位を $\bar{\mathbf{u}}$ とすれば、

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{u}, \quad (4.1)$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \bar{\mathbf{u}} \quad (4.2)$$

であり、かつ前節に述べたことによって

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + x^3 \dot{\bar{\mathbf{e}}}_3 = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + x^3 \dot{\bar{\mathbf{n}}}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + x^3 \bar{\mathbf{e}}_3, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + x^3 \overline{\partial_3 \mathbf{u}} \quad (4.5)$$

のように展開できる。

(4.3), (4.4), (4.5) を (4.1) に入れ、(4.2) を用いれば

$$\overline{\partial_3 \mathbf{u}} = \bar{\mathbf{e}}_3 - \dot{\bar{\mathbf{e}}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3 - \dot{\bar{\mathbf{n}}}, \quad (4.6)$$

したがって (4.5) は

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + x^3 (\bar{\mathbf{e}}_3 - \dot{\bar{\mathbf{n}}}) \quad (4.7)$$

と書かれる。特に変形に際して中央面の法線が保存されるものと仮定すれば (2.7) により

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + x^3 (\mathbf{n} - \dot{\mathbf{n}}) \quad (4.8)$$

が成り立つ。法線が保存されない場合は、われわれは (4.7) を用いるよりも (4.8) に附加変位 \mathbf{X} を加えて

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + x^3 (\mathbf{n} - \dot{\mathbf{n}}) + \mathbf{X} \quad (4.9)$$

のように表わす方がより合理的であり、かつ後の計算に際しても好都合である。

次に後の必要上 $\dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda, \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda^2$ と $\dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda, \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda^2$ との関係を導いておく。(4.3) に ∂_λ を施せば (2.1), (2.3) により

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda = \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda + x^3 \partial_\lambda \dot{\bar{\mathbf{n}}} \quad (4.10)$$

したがって Weingarten の方程式 [6]

$$\partial_\lambda \dot{\bar{\mathbf{n}}} = -\dot{H}_\lambda{}^\mu \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\mu \quad (4.11)$$

により

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda = \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda - x^3 \dot{H}_\lambda{}^\mu \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\mu \quad (4.12)$$

が得られる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_\lambda^{\cdot\mu} &= \dot{g}^{\mu\nu} \dot{H}_{\lambda\nu}, \\ \dot{H}_{\lambda\mu} &= \partial_\mu \dot{e}_\lambda \cdot \dot{n}, \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\dot{g}^{\lambda\mu} = \dot{e}^\lambda \cdot \dot{e}^\mu, \quad (4.14)$$

である。 $\dot{H}_{\lambda\mu}$ は通常曲面の第2種の基本量と呼ばれるものであって、通常 $\dot{L}, \dot{M}, \dot{N}$ と記されるものである:

$$\dot{H}_{11} = \dot{L}, \quad \dot{H}_{12} = \dot{H}_{21} = \dot{M}, \quad \dot{H}_{22} = \dot{N}$$

(4.12) を

$$\dot{e}_\lambda = c_\lambda^{\cdot\mu} \dot{e}_\mu, \quad c_\lambda^{\cdot\mu} = \delta_\lambda^\mu - x^3 \dot{H}_\lambda^{\cdot\mu} \quad (4.15)$$

のように書くと、これから

$$\dot{e}^\lambda = \gamma_\mu^{\cdot\lambda} \dot{e}^\mu \quad (4.16)$$

が得られる。ここに $\gamma_\mu^{\cdot\lambda}$ は行列式 $|c_\lambda^{\cdot\mu}|$ の成分 $c_\lambda^{\cdot\mu}$ に対する reduced cofactor であって

$$\gamma_\mu^{\cdot\lambda} = \delta_\mu^\lambda (1 + x^3 \dot{H}_1^{\cdot 1} + x^3 \dot{H}_2^{\cdot 2}) - x^3 \dot{h}_\mu^{\cdot\lambda} \quad (4.17)$$

で与えられる。ただし $\dot{h}_\mu^{\cdot\lambda}$ は行列式 $|\dot{H}_\lambda^{\cdot\mu}|$ の成分 $\dot{H}_\lambda^{\cdot\mu}$ に対する cofactor である。

これだけの準備の後にわれわれは殻の歪の解析を行なうことができる。(4.1) により

$$d\mathbf{r} = d\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}, \quad (4.18)$$

ここに

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + \dot{\mathbf{V}}\mathbf{u}, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \dot{n}\dot{n}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{I}_1 = \dot{e}^\lambda \dot{e}_\lambda, \quad (4.21)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{e}^\lambda \partial_\lambda + \dot{n}\partial_3 \quad (4.22)$$

が得られる。 \mathbf{I}_1, \mathbf{I} はそれぞれ殻の一般点における中央面に平行な面内および三次元空間内の単位テンソルであるから当然

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \dot{e}^\lambda \dot{e}_\lambda = \dot{e}^\lambda \dot{e}_\lambda = \bar{\mathbf{I}}_1, \\ \mathbf{I} &= \mathbf{I}_1 + \dot{n}\dot{n} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \dot{n}\dot{n} = \bar{\mathbf{I}} \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

が成り立つ (実際に (4.15), (4.16) を (4.21) に入れて見れば明らか)。 \mathbf{J} に共軛なテンソル

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{I} + \mathbf{u}\dot{\mathbf{V}} \quad (4.24)$$

を導入すれば,

$$(d\mathbf{r})^2 = d\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_c \cdot d\dot{\mathbf{r}}, \quad (4.25)$$

したがって

$$(d\mathbf{r})^2 - (d\dot{\mathbf{r}})^2 = d\dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_c - \mathbf{I}) \cdot d\dot{\mathbf{r}} \quad (4.26)$$

が得られる。これから弾性歪は,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_c - \mathbf{I}) \quad (4.27)$$

で定義されることがわかる。これは三次元弾性理論における定義と全く同一である。

歪の定義 (4.27) の殻体に対する表現を得るためには、われわれは (4.27) を x_3 について展開すればよい。そのためにまず $\dot{\mathbf{V}}$ を展開する。すなわち

$$\vec{V} = \hat{V} + x^3(\overline{\partial_3 \hat{V}}) \quad (4.28)$$

であって、中央面に関する gradient \vec{V} は

$$\vec{V} = \hat{V}_1 + \hat{n}\hat{\partial}_3, \quad (4.29)$$

ここに

$$\hat{V}_1 = \hat{e}^\lambda \partial_\lambda \quad (4.30)$$

で与えられる。また $\partial_3 \hat{n} = 0$ および (4.16) により

$$\begin{aligned} \overline{\partial_3 \hat{V}} &= \overline{\partial_3(\hat{e}^\lambda \partial_\lambda + \hat{n}\hat{\partial}_3)} \\ &= [\partial_\mu{}^\lambda(\hat{H}_1{}^{\cdot 1} + \hat{H}_2{}^{\cdot 2}) - \hat{h}_\mu{}^{\cdot \lambda}] \hat{e}^\mu \partial_\lambda \end{aligned} \quad (4.31)$$

が得られるから、(4.28) は

$$\vec{V} = \hat{V}_1 + \hat{n}\hat{\partial}_3 + x^3[\partial_\mu{}^\lambda(\hat{H}_1{}^{\cdot 1} + \hat{H}_2{}^{\cdot 2}) - \hat{h}_\mu{}^{\cdot \lambda}] \hat{e}^\mu \partial_\lambda \quad (4.32)$$

と書かれる。

(4.20), (4.9), (4.32) を (4.19) に適用すれば \mathbf{J} は

$$\mathbf{J} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \hat{n}\hat{n} + \{\hat{V}_1 + \hat{n}\hat{\partial}_3 + x^3[\partial_\mu{}^\lambda(\hat{H}_1{}^{\cdot 1} + \hat{H}_2{}^{\cdot 2}) - \hat{h}_\mu{}^{\cdot \lambda}] \hat{e}^\mu \partial_\lambda\} [\bar{\mathbf{u}} + x^3(\mathbf{n} - \hat{n}) + \mathbf{X}] \quad (4.33)$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \bar{\mathbf{I}}_1 + \hat{n}\hat{n} + \hat{V}_1 \bar{\mathbf{u}} + x^3 \hat{V}_1 (\mathbf{n} - \hat{n}) + \hat{n}(\mathbf{n} - \hat{n}) + \hat{n}\hat{\partial}_3 \mathbf{X} \\ &\quad + x^3 [\partial_\mu{}^\lambda(\hat{H}_1{}^{\cdot 1} + \hat{H}_2{}^{\cdot 2}) - \hat{h}_\mu{}^{\cdot \lambda}] \hat{e}^\mu \partial_\lambda \bar{\mathbf{u}} + O((x^3)^2) \end{aligned}$$

のように展開される。右辺の最後と最後から第2番目の項とは省略することができるから

$$\mathbf{J} = \bar{\mathbf{I}}_1 + \hat{V}_1 \bar{\mathbf{u}} + \hat{n}\hat{n} + x^3 \hat{V}_1 (\mathbf{n} - \hat{n}) + \hat{n}\hat{\partial}_3 \mathbf{X} \quad (4.34)$$

となる。

(4.2) に ∂_λ を施して得られる関係

$$\hat{e}_\lambda = \hat{e}_\lambda + \partial_\lambda \bar{\mathbf{u}} \quad (4.35)$$

によって (4.34) の右辺の最初の部分は

$$\bar{\mathbf{I}}_1 + \hat{V}_1 \bar{\mathbf{u}} = \hat{e}^\lambda \hat{e}_\lambda \quad (4.36)$$

となる。また (4.34) の $\hat{V}_1(\mathbf{n} - \hat{n})$ には (4.11) およびそれに対応する、変形後の中央面に対する Weingarten の方程式

$$\partial_\lambda \mathbf{n} = -H_\lambda{}^{\cdot \mu} \hat{e}_\mu, \quad (4.37)$$

$$H_\lambda{}^{\cdot \mu} = \hat{g}^{\mu\nu} H_{\lambda\nu}, \quad H_{\lambda\mu} = \partial_\mu \hat{e}_\lambda \cdot \mathbf{n}, \quad (4.38)$$

$$\hat{g}^{\lambda\mu} = \hat{e}^\lambda \cdot \hat{e}^\mu \quad (4.39)$$

を適用する。そうすると (4.34) は

$$\mathbf{J} = \hat{e}^\lambda \hat{e}_\lambda + \hat{n}\hat{n} - x^3(H_\lambda{}^{\cdot \mu} \hat{e}^\lambda \hat{e}_\mu - \hat{H}_\lambda{}^{\cdot \mu} \hat{e}^\lambda \hat{e}_\mu) + \hat{n}(\partial_3 \mathbf{X}). \quad (4.40)$$

したがって

$$\mathbf{J}_c = \bar{e}_c \hat{e}^c + \mathbf{n}\hat{n} - x^3(H_c{}^{\cdot k} \bar{e}_k \hat{e}^c - H_c{}^{\cdot k} \hat{e}_k \bar{e}^c) + (\partial_3 \mathbf{X}) \hat{n} \quad (4.40')$$

となる。(4.40), (4.40') および (4.23) の \mathbf{I} , すなわち

$$\mathbf{I} = \hat{g}^{\lambda\mu} \hat{e}_\lambda \hat{e}_\mu \quad (4.41)$$

を \mathbf{E} の定義 (4.27) に入れて近似

$$x^3(\dot{H}_i \cdot \bar{e}_\lambda \cdot \dot{e}_\kappa + \dot{H}_\lambda \cdot \bar{e}_\mu \cdot \dot{e}_i) \doteq 2x^3 \dot{H}_{i\lambda}^*$$

および

$$x^3[\dot{H}_i \cdot \kappa(\mathbf{n} \cdot \dot{e}_\kappa) \dot{\mathbf{n}} \dot{e}^i + \dot{H}_\lambda \cdot \mu(\bar{e}_\mu \cdot \mathbf{n}) \dot{e}^\lambda \dot{\mathbf{n}}] \doteq 0^{**}$$

を行なえば

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{1}{2} [(\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{g}_{\lambda\mu}) - 2x^3(H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu})] \dot{e}^\lambda \dot{e}^\mu \\ & + \frac{1}{2} \bar{e}_\lambda \cdot (\partial_3 \mathbf{X}) (\dot{e}^\lambda \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}} \dot{e}^\lambda) + \mathbf{n} \cdot (\partial_3 \mathbf{X}) \dot{\mathbf{n}} \dot{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

のような結果が得られる。ここに $\dot{g}_{\lambda\mu}$, $\bar{g}_{\lambda\mu}$ はそれぞれ変形前後の中央面の計量テンソルで

$$\dot{g}_{\lambda\mu} = \dot{e}_\lambda \cdot \dot{e}_\mu, \quad \bar{g}_{\lambda\mu} = \bar{e}_\lambda \cdot \bar{e}_\mu \quad (4.43)$$

で定義される。

(4.42) から、歪 \mathbf{E} の成分とその準拠すべき基本テンソルとは次のようなものであることがわかる：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \varepsilon_{\lambda\mu} \dot{e}^\lambda \dot{e}^\mu + \varepsilon_{\lambda 3} (\dot{e}^\lambda \dot{\mathbf{n}} + \dot{\mathbf{n}} \dot{e}^\lambda) + \varepsilon_{33} \dot{\mathbf{n}} \dot{\mathbf{n}}, \\ \varepsilon_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{g}_{\lambda\mu}) - x^3 (H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu}), \\ \varepsilon_{\lambda 3} &= \frac{1}{2} \bar{e}_\lambda \cdot (\partial_3 \mathbf{X}), \\ \varepsilon_{33} &= \mathbf{n} \cdot (\partial_3 \mathbf{X}), \end{aligned} \right\} \quad (4.44)$$

すなわち歪成分 $\varepsilon_{\lambda\mu}$ は中央面の伸縮による部分 $\frac{1}{2} (\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{g}_{\lambda\mu})$ とその曲げによる部分 $-x^3 \times (H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu})$ とからなることがわかる。いま

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{g}_{\lambda\mu}), \\ \kappa_{\lambda\mu} &= H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

とおけば $\varepsilon_{\lambda\mu}$ は

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} - x^3 \kappa_{\lambda\mu} \quad (4.46)$$

のように表わされる。通常 $\kappa_{\lambda\mu}$ は中央面の曲率変化と言われている量であるが、それは(4.45)に見られるように厳密な意味での曲率変化ではなく、中央面の第2種基礎量の変化である。附加変位を

$$\mathbf{X} = \xi_\lambda \bar{e}^\lambda + \xi_3 \mathbf{n} \quad (4.47)$$

のように表わせば

$$\partial_3 \mathbf{X} = (\partial_3 \xi_\lambda) \bar{e}^\lambda + (\partial_3 \xi_3) \mathbf{n}$$

したがって(4.44)の成分は

* (4.35) により $\bar{e}_\lambda \cdot \dot{e}_\mu = (\bar{e}_\lambda + \partial_\lambda \mathbf{u}) \cdot \dot{e}_\mu = \dot{g}_{\lambda\mu} + (\partial_\lambda \bar{\mathbf{u}}) \cdot \dot{e}_\mu \doteq \dot{g}_{\lambda\mu}$.

** (4.9) より $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{n}} + \partial_3 \bar{\mathbf{u}} - \partial_3 \bar{\mathbf{X}}$, したがって $\mathbf{n} \cdot \dot{e}_\lambda = (\partial_3 \bar{\mathbf{u}} - \partial_3 \bar{\mathbf{X}}) \cdot \dot{e}_\lambda \doteq 0$.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{\bar{g}}_{\lambda\mu}) - x^3(H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu}), \\ \varepsilon_{\lambda 3} &= \frac{1}{2}\partial_3 \bar{\xi}_\lambda, \\ \varepsilon_{33} &= \partial_3 \bar{\xi}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

と書かれる。

以上は歪成分の共変成分であり、本来歪の定義として第一義的なものであるが、反変成分はいうまでもなく

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}(\dot{\bar{g}}^{\lambda\kappa} \dot{\bar{g}}^{\mu\rho} \bar{g}_{\kappa\rho} - \dot{\bar{g}}^{\lambda\mu}) - x^3(\dot{\bar{g}}^{\lambda\kappa} \dot{\bar{g}}^{\mu\rho} H_{\kappa\rho} - \dot{H}^{\lambda\mu}), \\ \varepsilon^{\lambda 3} &= \dot{\bar{g}}^{\lambda\kappa} \frac{1}{2}\partial_3 \bar{\xi}_\kappa, \\ \varepsilon^{33} &= \partial_3 \bar{\xi}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

で与えられる。

5. 歪の解析的表示

前節で得られた歪 \mathbf{E} の成分 $\varepsilon_{\lambda\mu}$ を中央面の変位 $\bar{\mathbf{u}}$ とその導函数の函数として表わすことを考える。変位を

$$\bar{\mathbf{u}} = \dot{\bar{u}}^\lambda \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\lambda + \dot{\bar{u}}^3 \dot{\bar{\mathbf{n}}} \quad (5.1)$$

とおけば Gauss の方程式 [6]

$$\partial_\lambda \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\mu = \dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^\alpha \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\alpha + \dot{H}_{\lambda\mu} \dot{\bar{\mathbf{n}}}, \quad (5.2)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu &= \dot{\bar{g}}^{\nu\alpha} \dot{\Gamma}_{\lambda\mu,\alpha}, \\ \dot{\Gamma}_{\lambda\mu,\nu} &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda \dot{\bar{g}}_{\mu\nu} + \partial_\mu \dot{\bar{g}}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \dot{\bar{g}}_{\lambda\mu}), \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

および Weingarten の方程式 (4.11) により (4.35) は

$$\bar{\mathbf{e}}_\lambda = (\partial_\lambda^\kappa + \dot{\bar{V}}_{1\lambda} \dot{\bar{u}}^\kappa - \dot{\bar{u}}^3 \dot{H}_{\lambda^\kappa}) \dot{\bar{\mathbf{e}}}_\kappa + (\dot{\bar{u}}^\alpha \dot{H}_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda \dot{\bar{u}}^3) \dot{\bar{\mathbf{n}}} \quad (5.4)$$

となる。ここに

$$\dot{\bar{V}}_{1\lambda} \dot{\bar{u}}^\kappa = \partial_\lambda \dot{\bar{u}}^\kappa + \dot{\bar{u}}^\alpha \dot{\Gamma}_{\lambda\alpha}^\kappa \quad (5.5)$$

である。(5.4) を (4.43) の第2式に入れて、第1式を考慮すれば

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\lambda\mu} &= \dot{\bar{g}}_{\lambda\mu} + \dot{\bar{V}}_{1\lambda} \dot{\bar{u}}_\mu + \dot{\bar{V}}_{1\mu} \dot{\bar{u}}_\lambda - 2\dot{\bar{u}}^3 \dot{H}_{\lambda\mu} \\ &\quad + (\dot{\bar{V}}_{1\lambda} \dot{\bar{u}}^\alpha - \dot{\bar{u}}^3 \dot{H}_{\lambda^\alpha}) (\dot{\bar{V}}_{1\mu} \dot{\bar{u}}_\alpha - \dot{\bar{u}}^3 \dot{H}_{\mu\alpha}) \\ &\quad + (\dot{\bar{u}}^\alpha \dot{H}_{\lambda\alpha} + \partial_\lambda \dot{\bar{u}}^3) (\dot{\bar{u}}^\beta \dot{H}_{\mu\beta} + \partial_\mu \dot{\bar{u}}^3) \end{aligned} \quad (5.6)$$

が得られる。薄い殻においては $\dot{\bar{u}}^\lambda$ とその導函数は $\dot{\bar{u}}^3$ とその導函数に比べて小さいから、上式の2次の項のうち $(\dot{\bar{u}}^3)^2 \dot{H}_{\lambda^\alpha} \dot{H}_{\mu\alpha}$ および $(\partial_\lambda \dot{\bar{u}}^3)(\partial_\mu \dot{\bar{u}}^3)$ 以外は省略してよい。そうすると、(4.45) により

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}(\bar{g}_{\lambda\mu} - \dot{\bar{g}}_{\lambda\mu}) \\ &= \frac{1}{2}[\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}_{\mu} + \dot{\bar{V}}_{1\mu}\dot{\bar{u}}_{\lambda} - 2\dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\mu} + (\dot{\bar{u}}^3)^2\dot{H}_{\lambda\cdot\alpha}\dot{H}_{\mu\alpha} + (\partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3)(\partial_{\mu}\dot{\bar{u}}^3)]\end{aligned}\quad (5.7)$$

が得られる。ここに

$$\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}_{\mu} = \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}_{\mu} - \dot{\bar{u}}_{\alpha}\dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\alpha}\quad (5.8)$$

である。

次に $\kappa_{\lambda\mu}$ の表示を導かなければならない。そのためには (4.38) で定義される $H_{\lambda\mu}$ を計算すればよい。まず (5.4) から

$$\begin{aligned}\partial_{\mu}\bar{e}_{\lambda} &= [\partial_{\mu}(\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}^{\kappa} - \dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\cdot\kappa}) \\ &\quad + \dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\kappa} + (\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}^{\rho} - \dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\cdot\rho})\dot{\Gamma}_{\mu\rho}^{\kappa} - (\dot{\bar{u}}^{\rho}\dot{H}_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3)\dot{H}_{\mu\cdot\kappa}] \dot{e}_{\kappa} \\ &\quad + [\dot{H}_{\lambda\mu} + (\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}^{\rho} - \dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\cdot\rho})\dot{H}_{\mu\rho} + \partial_{\mu}(\dot{\bar{u}}^{\rho}\dot{H}_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3)] \dot{n}\end{aligned}\quad (5.9)$$

が得られる。次に \dot{n} は

$$\dot{n} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2|}\quad (5.10)$$

によって計算される。 $\bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ は (4.35) により

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \dot{e}_1 \times \dot{e}_2 + \dot{e}_1 \times \partial_2 \bar{u} + \partial_1 \bar{u} \times \dot{e}_2 + \partial_1 \bar{u} \times \partial_2 \bar{u}\quad (5.11)$$

のように書かれる。この右辺の最後の項は省略することができ、かつ

$$\left. \begin{aligned}\dot{n} &= \frac{1}{\sqrt{\dot{g}}}\dot{e}_1 \times \dot{e}_2 \\ \sqrt{\dot{g}} &= |\dot{e}_1 \times \dot{e}_2| = [\dot{e}_1 \cdot \dot{e}_2 \dot{n}] = \sqrt{\dot{g}_{11}\dot{g}_{22} - (\dot{g}_{12})^2}\end{aligned}\right\}\quad (5.12)$$

であるから微小量を省略することによって

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \doteq \sqrt{\dot{g}} \{ [1 - \dot{\bar{u}}^3(\dot{H}_1 \cdot 1 + \dot{H}_2 \cdot 2)] \dot{n} - \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3 \dot{e}^{\lambda} \},\quad (5.13)$$

したがって

$$|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2| \doteq \frac{1}{\sqrt{\dot{g}}} [1 + \dot{\bar{u}}^3(\dot{H}_1 \cdot 1 + \dot{H}_2 \cdot 2)]\quad (5.14)$$

が得られる。(5.13), (5.14) を (5.10) に入れることによって

$$\dot{n} \doteq \dot{n} - \partial_{\omega}\dot{\bar{u}}^3 \dot{e}^{\omega}\quad (5.15)$$

を得る。したがって (4.38) により

$$H_{\lambda\mu} \doteq \dot{H}_{\lambda\mu} + (\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}^{\rho} - \dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\cdot\rho})\dot{H}_{\mu\rho} + \partial_{\mu}(\dot{\bar{u}}^{\rho}\dot{H}_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3) - \partial_{\kappa}\dot{\bar{u}}^3\dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\kappa},\quad (5.16)$$

ゆえに

$$\kappa_{\lambda\mu} = H_{\lambda\mu} - \dot{H}_{\lambda\mu} = (\dot{\bar{V}}_{1\lambda}\dot{\bar{u}}^{\rho} - \dot{\bar{u}}^3\dot{H}_{\lambda\cdot\rho})\dot{H}_{\mu\rho} + \partial_{\mu}(\dot{\bar{u}}^{\rho}\dot{H}_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}\dot{\bar{u}}^3) - \partial_{\rho}\dot{\bar{u}}^3\dot{\Gamma}_{\lambda\mu}^{\rho}\quad (5.17)$$

が得られる。

(5.7) および (5.17) によって (4.48) で与えられた歪成分 $\varepsilon_{\lambda\mu}$ が中央面の変位成分によって解析的に表わされる。

6. 応力, 断面力, 断面モーメント

殻の中の一点に実際に作用している応力を \mathbf{S} とすれば, それは三次元弾性論における応力テンソルと何等異なるものではなく, その点における標構に関して

$$\mathbf{S} = s^{\lambda\mu} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu + s^{3\lambda} (\mathbf{n} \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\lambda \mathbf{n}) + s^{33} \mathbf{n} \mathbf{n} \quad (6.1)^\dagger$$

のように表わすことができる. この場合の成分 $s^{\lambda\mu}, s^{3\lambda}, s^{33}$ は考える点における断面積 e^λ および \mathbf{n} 当りの力の \mathbf{e}_μ および \mathbf{n} 成分である.

エネルギーの表現において, したがって応力・歪関係, 平衡方程式等すべての場合に, 応力ではなくて応力密度テンソルが合理的であることをわれわれは既に三次元弾性論 [5] において知っている. いま

$$\sqrt{g} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \doteq [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{n}] \quad (6.2)$$

とおけば, \mathbf{S} に対する応力密度テンソルは

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} &= \sqrt{g} \mathbf{S} = t^{\lambda\mu} \mathbf{e}_\lambda \mathbf{e}_\mu + t^{3\lambda} (\mathbf{n} \mathbf{e}_\lambda + \mathbf{e}_\lambda \mathbf{n}) + t^{33} \mathbf{n} \mathbf{n}, \\ t^{\lambda\mu} &= \sqrt{g} s^{\lambda\mu}, \quad t^{3\lambda} = \sqrt{g} s^{3\lambda}, \quad t^{33} = \sqrt{g} s^{33} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

で与えられる. \mathbf{e}_λ と $\bar{\mathbf{e}}_\lambda$ との間には (4.12) と同様の関係

$$\mathbf{e}_\lambda = \bar{\mathbf{e}}_\lambda - x^3 H_\lambda^\alpha \bar{\mathbf{e}}_\mu \quad (6.4)$$

(H_λ^μ は (4.38) で定義される) が成り立つから, (6.4) を (6.3) に用いることによって \mathbf{T} を中央面上の点における標構 $\bar{\mathbf{e}}_\lambda, \mathbf{n}$ に関して表わすことができる. そうした場合の \mathbf{T} の成分を $\tau^{\lambda\mu}, \tau^{3\lambda}, \tau^{33}$ で表わせば

$$\mathbf{T} = \tau^{\lambda\mu} \bar{\mathbf{e}}_\lambda \bar{\mathbf{e}}_\mu + \tau^{3\lambda} (\mathbf{n} \bar{\mathbf{e}}_\lambda + \bar{\mathbf{e}}_\lambda \mathbf{n}) + \tau^{33} \mathbf{n} \mathbf{n} \quad (6.5)$$

と書かれる. \sqrt{g} は (6.4) によって

$$\sqrt{g} \doteq \sqrt{\bar{g}} (1 - x^3 H_\alpha^\alpha), \quad \sqrt{\bar{g}} = [\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \mathbf{n}] \quad (6.6)$$

であるから, 大体 $\sqrt{g} = \sqrt{\bar{g}}$ ととってよい.

われわれはまた三次元弾性理論 [5] において, 平衡方程式を記述する応力と弾性法則を記述する応力とは同じものではなく, 前者は実応力 (actual stress) であるのに対して後者は疑似応力 (pseudo-stress) であることを知っている. この関係は殻体においてもそのまま成り立ち, 疑似応力は

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = \mathbf{J}_c^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{J}^{-1} \quad (6.7)$$

で定義される. \mathbf{J} は (4.40) で与えられるテンソルであるが, ここではその x^3 の掛かった項および $\dot{\mathbf{n}}(\partial_3 \mathbf{X})$ を省略してよい. そうすると

$$\mathbf{J}^{-1} = \bar{\mathbf{e}}^\lambda \bar{\mathbf{e}}_\lambda + \mathbf{n} \mathbf{n}, \quad \mathbf{J}_c^{-1} = \bar{\mathbf{e}}_\lambda \bar{\mathbf{e}}^\lambda + \dot{\mathbf{n}} \mathbf{n} \quad (6.8)$$

となるから, (6.7) は

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = \tau^{\lambda\mu} \bar{\mathbf{e}}_\lambda \bar{\mathbf{e}}_\mu + \tau^{3\lambda} (\dot{\mathbf{n}} \bar{\mathbf{e}}_\lambda + \bar{\mathbf{e}}_\lambda \dot{\mathbf{n}}) + \tau^{33} \dot{\mathbf{n}} \mathbf{n} \quad (6.9)$$

となる. (6.5) の \mathbf{T} の成分と (6.9) の $\overset{*}{\mathbf{T}}$ の成分とは上記の \mathbf{J} の微小項を省略する限り

[†] 殻体では s^{33} , したがって後に出て来る $t^{33}, \tau^{33}, T^{33}$ はいずれも 0 であるが, ここでは一般的にそれを一応考えた表現を与える.

において等しくなる。

殻の板厚を t とすると、実断面力 \mathfrak{T} および疑似断面力 \mathfrak{T}^* は

$$\mathfrak{T} = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{T} dx^3, \quad \mathfrak{T}^* = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{T}^* dx^3 \quad (6.10)$$

のように定義される。いま

$$\mathfrak{T} = T^{\lambda\mu} \bar{e}_\lambda \bar{e}_\mu + T^{3\lambda} (\mathbf{n} \bar{e}_\lambda + \bar{e}_\lambda \mathbf{n}) + T^{33} \mathbf{n} \mathbf{n} \quad (6.11)$$

とおけば定義により

$$T^{\lambda\mu} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{\lambda\mu} dx^3, \quad T^{3\lambda} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{3\lambda} dx^3, \quad T^{33} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{33} dx^3 \quad (6.12)$$

が成り立つことがわかる。この同じ $T^{\lambda\mu}, T^{3\lambda}, T^{33}$ を用いて \mathfrak{T}^* は

$$\mathfrak{T}^* = T^{\lambda\mu} \dot{e}_\lambda \dot{e}_\mu + T^{3\lambda} (\dot{\mathbf{n}} \dot{e}_\lambda + \dot{e}_\lambda \dot{\mathbf{n}}) + T^{33} \dot{\mathbf{n}} \dot{\mathbf{n}} \quad (6.13)$$

のように表わされる。

\bar{e}_κ に垂直な断面 \bar{e}^κ に作用する応力ベクトルは $\bar{e}^\kappa \cdot \mathbf{T}$ であるから、その応力ベクトルによるその断面に対するモーメントは

$$\mathfrak{M}^\kappa = - \int_{-t/2}^{t/2} \bar{e}^\kappa \cdot \mathbf{T} \times x^3 \mathbf{n} dx^3 = \bar{e}^\kappa \cdot \left(- \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{T} \times x^3 \mathbf{n} dx^3 \right) \quad (6.14)$$

で与えられる。したがって

$$\mathfrak{M} = - \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{T} \times x^3 \mathbf{n} dx^3 \quad (6.15)$$

とおけば

$$\mathfrak{M}^\kappa = \bar{e}^\kappa \cdot \mathfrak{M} \quad (6.16)$$

が成り立つ。 \mathfrak{M} と \mathfrak{M}^κ との関係は応力テンソルと応力ベクトルとの関係と全く同等であるから、(6.15) で定義される \mathfrak{M} をわれわれは断面モーメントテンソルと称することができる。

(6.15) は (6.5) によって

$$\mathfrak{M} = - \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{\lambda\mu} x^3 dx^3 \bar{e}_\lambda \bar{e}_\mu \times \mathbf{n} - \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{3\lambda} x^3 dx^3 \mathbf{n} \bar{e}_\lambda \times \mathbf{n} \quad (6.17)$$

のように表わされるから

$$M^{\lambda\mu 3} = + \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{\lambda\mu} x^3 dx^3, \quad M^{3\lambda 3} = + \int_{-t/2}^{t/2} \tau^{3\lambda} x^3 dx^3 \quad (6.18)^\dagger$$

とおけば

$$\mathfrak{M} = - M^{\lambda\mu 3} \bar{e}_\lambda \bar{e}_\mu \times \mathbf{n} - M^{3\lambda 3} \mathbf{n} \bar{e}_\lambda \times \mathbf{n} \quad (6.19)$$

と書くことができる。したがって、これに

$$\sqrt{\bar{g}} \epsilon_{\nu\mu 3} \bar{e}^\nu = \bar{e}_\mu \times \mathbf{n} \quad (6.20)$$

を適用すれば

$$\mathfrak{M} = - m^{\lambda \cdot \nu} \bar{e}_\lambda \bar{e}^\nu - m^{3 \cdot \nu} \mathbf{n} \bar{e}^\nu \quad (6.21)$$

ここに

$$m^{\lambda \cdot \nu} = \sqrt{\bar{g}} M^{\lambda\mu 3} \epsilon_{\nu\mu 3}, \quad m^{3 \cdot \nu} = \sqrt{\bar{g}} M^{3\lambda 3} \epsilon_{\nu\lambda 3} \quad (6.22)$$

[†] $M^{3\lambda 3} = 0$ であることが後に示されるが、ここでは一応一般性をもたすためにそれを考えておく。

のように表現される。ただし $\sqrt{\hat{g}}$ は (6.6) で与えられ、 $\epsilon_{\nu\mu 3}$ は順列テンソル $\epsilon_{\nu\mu\kappa}$ において $\kappa=3$ とおいたものである。 $\sqrt{\hat{g}}$ は重さ1の相対スカラーであり、 $\epsilon_{\lambda\mu 3}$ は重さ-1の相対テンソルであるから $m^{\lambda,\mu}$ は $M^{\lambda\mu 3}$ と同様に重さ1の相対テンソル成分である。

7. 歪と断面力、断面モーメントの関係

弾性法則を記述するものは歪と実際の応力ではなくて、歪と疑似応力テンソルであること、をわれわれは三次元弾性論 [5] の結果から知っている。殻においては変位は有限でも歪は微小であるから、われわれはわれわれの考察を微小歪の範囲内に限定することができる。この場合には弾性法則として Hooke の法則を考えればよいから

$$\mathbf{T}^* = \sqrt{\hat{g}} (\lambda I_1 \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}) \quad (7.1)$$

が成り立つ。ここに λ, μ は Lamé の常数、 I_1 は歪 \mathbf{E} の1次のスカラー不変量

$$I_1 = \hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu} + \epsilon_{33} \quad (7.2)$$

$$\text{また} \quad \sqrt{\hat{g}} \doteq \sqrt{\hat{g}} (1 - x^3 \hat{H}_\alpha \cdot \alpha), \quad \sqrt{\hat{g}} = [\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{n}] \quad (7.3)$$

である。(7.1) を成分方程式に分ければ

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\lambda\mu} &= \sqrt{\hat{g}} (\lambda I_1 \hat{g}^{\lambda\mu} + 2\mu \epsilon^{\lambda\mu}), \\ \tau^{3\lambda} &= \sqrt{\hat{g}} 2\mu \epsilon^{3\lambda}, \\ \tau^{33} &= \sqrt{\hat{g}} (\lambda I_1 + 2\mu \epsilon^{33}) \end{aligned} \right\} \quad (7.1')$$

と書かれる。

殻においては

$$\tau^{33} = 0$$

と考えるとよいから、(7.1') の第3式により

$$\epsilon^{33} = \epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu} = -\frac{\nu}{1-\nu} \hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu}. \quad (7.4)$$

したがって (7.2) から

$$I_1 = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu} \quad (7.5)$$

が得られる。ここに ν はポアソン比を表わす。この式で $\hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon_{\lambda\mu}$ は $\hat{g}^{\lambda\mu} \epsilon^{\lambda\mu}$ と書いてもよいことはいうまでもない。(7.5) により (7.1') は

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\lambda\mu} &= \sqrt{\hat{g}} \lambda \left(\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \hat{g}^{\kappa\rho} \epsilon^{\kappa\rho} \hat{g}^{\lambda\mu} + 2\mu \epsilon^{\lambda\mu} \right), \\ \tau^{3\lambda} &= \sqrt{\hat{g}} 2\mu \epsilon^{3\lambda}, \quad \tau^{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\lambda\mu} &= \sqrt{\hat{g}} \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \hat{g}^{\kappa\rho} \epsilon^{\kappa\rho} \hat{g}^{\lambda\mu} + (1-\nu) \epsilon^{\lambda\mu}], \\ \tau^{3\lambda} &= \sqrt{\hat{g}} 2G \epsilon^{3\lambda}, \quad \tau^{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6')$$

のように表わされる。 $\epsilon^{\lambda\mu}, \epsilon^{3\lambda}$ は (4.48) で与えられる。

(7.6') の $\tau^{\lambda\mu}, \tau^{3\lambda}$ を (6.12) に入れば

$$\left. \begin{aligned} T^{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \frac{Et}{1-\nu^2} [\nu \dot{g}_{\kappa\rho} \dot{\varepsilon}^{\kappa\rho} \dot{g}^{\lambda\mu} + (1-\nu) \dot{\varepsilon}^{\lambda\mu}], \\ T^{3\lambda} &= \sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \frac{Et}{1+\nu} \varepsilon^{3\lambda}, \quad T^{33} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

が得られる。これらの式の両辺の基本テンソルは $\dot{\varepsilon}_\lambda \dot{\varepsilon}_\mu$ および $\dot{n} \dot{\varepsilon}_\lambda$ であって、相一致していることを忘れてはならない。もし疑似断面力でなくて、実際の断面力をとればこの一致が成り立たないのである。

次に断面モーメントの成分は (7.6') を (6.18) に入れることによって

$$M^{\lambda\mu 3} = -\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} B [\nu \dot{g}_{\kappa\rho} \kappa^{\kappa\rho} \dot{g}^{\lambda\mu} + (1-\nu) \kappa^{\lambda\mu}], \quad M^{3\lambda 3} = 0 \quad (7.8)$$

のように得られる。ここに B は曲げ剛性,

$$B = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.9)$$

である。特に直角デアルト座標の場合には

$$\left. \begin{aligned} M^{113} &= -\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} B (\kappa^{11} + \nu \kappa^{22}), \\ M^{223} &= -\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} B (\kappa^{22} + \nu \kappa^{11}), \\ M^{123} &= M^{213} = -\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} B (1-\nu) \kappa^{12} \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

となる。 \mathfrak{M} の成分 $m^{\lambda, \mu}$ は (6.22) により

$$\left. \begin{aligned} m^{1,1} &= \sqrt{g} M^{123}, \quad m^{1,2} = -\sqrt{g} M^{113}, \\ m^{2,1} &= \sqrt{g} M^{223}, \quad m^{2,2} = -\sqrt{g} M^{213}, \\ m^{3, \nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

で与えられる。

次に後の便宜のために, (7.7), (7.8) を $\dot{\varepsilon}^{\lambda\mu}, \kappa^{\lambda\mu}$ で解いた形を導いておく。(7.7) の第1式の両辺に $\dot{g}_{\lambda\mu}$ を乗じて縮約すれば

$$T^{\lambda\mu} \dot{g}_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \frac{Et}{1-\nu} \dot{g}_{\lambda\mu} \dot{\varepsilon}^{\lambda\mu}. \quad (7.12)$$

これを (7.7) に入れば

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \dot{\varepsilon}^{\lambda\mu} &= \frac{1+\nu}{Et} \left(T^{\lambda\mu} - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{g}_{\kappa\rho} T^{\kappa\rho} \dot{g}^{\lambda\mu} \right), \\ \sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \varepsilon^{3\lambda} &= \frac{1+\nu}{Et} T^{3\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

が得られる。

同様に (7.8) の両辺に $\dot{g}_{\lambda\mu}$ を乗じて λ, μ について縮約すれば

$$\dot{g}_{\lambda\mu} M^{\lambda\mu 3} = -\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} B (1+\nu) \dot{g}_{\lambda\mu} \kappa^{\lambda\mu}. \quad (7.14)$$

したがってこれを (7.8) に入れることによって

$$\sqrt{\frac{g}{\dot{g}}} \kappa^{\lambda\mu} = \frac{1}{B(1-\nu)} \left(-M^{\lambda\mu 3} + \frac{\nu}{1+\nu} \dot{g}_{\kappa\rho} M^{\kappa\rho 3} \dot{g}^{\lambda\mu} \right) \quad (7.15)$$

を得る。

8. 平衡方程式

弾性法則を記述するものが歪と疑似応力とであるのに対して、釣合の条件を記述するものは実際の応力であることをわれわれは三次元弾性論 [5] の結果から知っている。すなわち力およびモーメントの釣合の条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} = 0 \quad (8.1)$$

および

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0 \quad (8.2)$$

で与えられる。ここに \mathbf{T} は (6.3) で与えられる応力テンソル密度、 ρ は変形後の状態の密度、 \mathbf{F} は外力のベクトル、また \sqrt{g} は (6.2) で与えられるスカラー密度である。もし仮りに \mathbf{T} が絶対テンソルであるならば、grad の演算子 ∇ は (4.22) と同様に $\nabla = \mathbf{e}^i \partial_i + \mathbf{n} \partial_3$ と定義されるが、ここでは \mathbf{T} がテンソル密度であるので grad は

$$\left. \begin{aligned} \nabla &= \nabla_1 + \sqrt{g} \mathbf{n} \partial_3 \sqrt{g}^{-1}, \\ \nabla_1 &= \sqrt{g} \mathbf{e}^i \partial_i \sqrt{g}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

でなければならない [6].

まず殻体に対する力の平衡方程式から始める。(8.1) は殻体内の任意の点で成立するから、殻の板厚を t とすれば

$$\int_{-t/2}^{t/2} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \sqrt{g} \rho \mathbf{F}) dx^3 = 0 \quad (8.4)$$

したがって (8.3) により

$$\int_{-t/2}^{t/2} (\nabla_1 \cdot \mathbf{T} + \sqrt{g} \rho \mathbf{F}) dx^3 + \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{g} \mathbf{n} \cdot \partial_3 (\sqrt{g}^{-1} \mathbf{T}) dx^3 = 0 \quad (8.5)$$

が成立する。(8.5) の第2項の積分を部分積分して、(6.6) すなわち

$$\partial_3 \sqrt{g} = -H_\alpha \cdot \alpha \sqrt{g} \quad (8.6)$$

を用い、かつ

$$\partial_3 \mathbf{n} = 0 \quad (8.7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = 0 : x^3 = \pm \frac{t}{2} \quad (8.8)$$

を考慮すれば、結局 (8.5) は

$$\int_{-t/2}^{t/2} [\nabla_1 \cdot \mathbf{T} + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} + H_\alpha \cdot \alpha \sqrt{g} \mathbf{n} \cdot (\sqrt{g}^{-1} \mathbf{T})] dx^3 = 0 \quad (8.9)$$

のようになる。

(3.1) にしたがって、(8.9) の各々の量を x^3 について展開し

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T} &= \bar{\mathbf{T}} + x^3 \partial_3 \bar{\mathbf{T}}, \\ \mathbf{F} &= \bar{\mathbf{F}} + x^3 \partial_3 \bar{\mathbf{F}}, \\ \nabla_1 &= \bar{\nabla}_1 + x^3 \partial_3 \bar{\nabla}_1, \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

ここに

$$\bar{V}_1 = \sqrt{\bar{g}} \bar{e}^\lambda \partial_\lambda \sqrt{\bar{g}}^{-1} \quad (8.11)$$

と書くことができる。また (6.6) により

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} &= \sqrt{\bar{g}} (1 - x^3 H_\alpha \cdot \alpha) \\ \sqrt{g}^{-1} &= \sqrt{\bar{g}}^{-1} (1 + x^3 H_\alpha \cdot \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

である。なお ρ は一定 ($\partial_3 \rho = 0$) と考えておく。これ等を (8.9) に入れれば、 x^3 の項の積分はすべて消失し

$$\bar{V}_1 \cdot \mathfrak{T} + \rho_1 \bar{F} + H_\alpha \cdot \alpha n \cdot \mathfrak{T} = 0 \quad (8.13)$$

のような結果を得る。ここに

$$\rho_1 = \sqrt{\bar{g}} \rho t \quad (8.14)$$

である。 \mathfrak{T} は (6.11) のような表現をもつ。ただし $T^{33} = 0$ である。

$$\bar{F} = \bar{F}^\lambda \bar{e}_\lambda + \bar{F}^3 n \quad (8.15)$$

とおき、(6.11)、(8.11) を (8.13) に適用すれば、(4.37) および

$$\partial_\lambda \bar{e}_\mu = \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \bar{e}_\alpha + H_{\lambda\mu} n, \quad (8.16)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\nu = \bar{g}^{\nu\alpha} \Gamma_{\lambda\mu,\alpha},$$

$$\Gamma_{\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu} + \partial_\mu \bar{g}_{\nu\lambda} - \partial_\nu \bar{g}_{\lambda\mu}), \quad (8.17)$$

$$\partial_\lambda \sqrt{\bar{g}}^{-1} = -\Gamma_{\lambda\rho}^\rho \sqrt{\bar{g}}^{-1} \quad (8.18)$$

を考慮することによって [6], \bar{e}_λ および n 方向の微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{1,\mu} T^{\lambda\mu} + T^{3\mu} H_\mu \cdot \lambda + \rho_1 \bar{F}^\lambda &= 0, \\ \partial_\lambda T^{3\lambda} + T^{\lambda\mu} H_{\lambda\mu} + \rho_1 \bar{F}^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

を得る。ここに $\bar{V}_\mu T^{\lambda\mu}$ はテンソル密度成分 $T^{\lambda\mu}$ の殻の曲面内の共変微分係数

$$\bar{V}_{1,\mu} T^{\lambda\mu} = \partial_\mu T^{\lambda\mu} + T^{\mu\rho} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \quad (8.20)$$

である。

特に矩形平板に対しては、平衡方程式 (8.19) は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + T_{3x} \kappa_{xx} + T_{3y} \kappa_{xy} + \rho_1 \bar{F}_x &= 0, \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + T_{3x} \kappa_{xy} + T_{3y} \kappa_{yy} + \rho_1 \bar{F}_y &= 0, \\ \frac{\partial T_{3x}}{\partial x} + \frac{\partial T_{3y}}{\partial y} + T_{xx} \kappa_{xx} + 2T_{xy} \kappa_{xy} + T_{yy} \kappa_{yy} + \rho_1 \bar{F}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

と書かれる。 $T_{xx}, T_{xy}, T_{yy}, T_{3x}, T_{3y}$ は Love の記号ではそれぞれ $T_1, S_1 = -S_2, T_2, N_1, N_2$ に対応する実断面力テンソル密度の成分である。

円筒形殻 (半径 a) に対しては、軸方向に x , 周方向に角度 θ をとれば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{xx} &= 0, \quad \dot{H}_{x\theta} = \dot{H}_{\theta x} = 0, \quad \dot{H}_{\theta\theta} = a \\ \dot{H}_x \cdot x &= 0, \quad \dot{H}_x \cdot \theta = \dot{H}_\theta \cdot x = 0, \quad \dot{H}_\theta \cdot \theta = \frac{1}{a} \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

したがって

であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{x\theta}}{\partial \theta} + T^{3x}\kappa_x \cdot x + T^{3\theta}\kappa_\theta \cdot x + \rho_1 \bar{F}^x &= 0, \\ \frac{\partial T^{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial T^{\theta\theta}}{\partial \theta} + T^{3x}\kappa_x \cdot \theta + T^{3\theta} \left(\frac{1}{a} + \kappa_\theta \cdot \theta \right) + \rho_1 \bar{F}^\theta &= 0, \\ \frac{\partial T^{3x}}{\partial x} + \frac{\partial T^{3\theta}}{\partial \theta} + T^{xx}\kappa_{x,x} + 2T^{x\theta}\kappa_{x\theta} + T^{\theta\theta}(a + \kappa_{\theta\theta}) + \rho_1 \bar{F}^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

が得られる。

次に殻体に作用するモーメントの平衡に対しては (8.2) したがって

$$\int_{-t/2}^{t/2} [\bar{V} \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} \times \mathbf{r}] dx^3 = 0 \quad (8.24)$$

が成立する。これに (8.3) を用いて, (8.5) で行なったと同様に積分

$$\int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{g} \mathbf{n} \cdot \partial_3 (\sqrt{g}^{-1} \mathbf{T} \times \mathbf{r}) dx^3$$

について部分積分を行なう。条件 (8.6), (8.7), (8.8) を考慮すれば (8.24) は

$$\int_{-t/2}^{t/2} [\bar{V}_1 \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} + \sqrt{g} H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot (\sqrt{g}^{-1} \mathbf{T} \times \mathbf{r})] dx^3 = 0 \quad (8.25)$$

となる。

力の平衡の場合と同様に, (8.10), (8.11), (8.12) および, さらにこの場合には, (4.4) すなわち

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + x^3 \mathbf{n} \quad (8.26)$$

を (8.25) に入れて, 被積分函数を x^3 について展開すれば

$$\begin{aligned} & \bar{V}_1 \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) + \sqrt{g} \rho \mathbf{F} + \sqrt{g} H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot (\sqrt{g}^{-1} \mathbf{T} \times \mathbf{r}) \\ &= \bar{V}_1 \cdot (\bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}}) + x^3 [\partial_3 \bar{V}_1 \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{r}) + \bar{V}_1 \cdot (\partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}}) + \bar{V}_1 \cdot (\bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n})] \\ & \quad + (x^3)^2 [\partial_3 \bar{V}_1 \cdot (\partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}}) + \partial_3 \bar{V}_1 \cdot (\bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n}) + \bar{V}_1 \cdot (\partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n})] \\ & \quad + \sqrt{g} \rho \bar{\mathbf{F}} \times \mathbf{r} + x^3 \sqrt{g} \rho [-H_\alpha \cdot \alpha \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{r}} + \partial_3 \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{F} \times \mathbf{n}] \\ & \quad + (x^3)^2 \sqrt{g} \rho [-H_\alpha \cdot \alpha \partial_3 \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{r}} - H_\alpha \cdot \alpha \bar{\mathbf{F}} \times \mathbf{n} + \partial_3 \bar{\mathbf{F}} \times \mathbf{n}] \\ & \quad + H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}} + x^3 H_\alpha \cdot \alpha [H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{n} \cdot \partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n}] \\ & \quad + (x^3)^2 H_\alpha \cdot \alpha [H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \bar{\mathbf{r}} + H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \partial_3 \bar{\mathbf{T}} \times \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (8.27)$$

のようになる。ここに $\partial_3 \bar{V}_1$ は (4.31) を導いたのと同様の手続きにより (異なるのはこの場合 \bar{V}_1 が相対テンソルに作用する grad であることである。)

$$\partial_3 \bar{V}_1 = -h_\mu \cdot \lambda \sqrt{g} \bar{e}^\mu \partial_\lambda \sqrt{g}^{-1} + \sqrt{g} \bar{e}^\lambda \partial_\lambda \sqrt{g}^{-1} H_\alpha \cdot \alpha \quad (8.28)$$

のように得られる。ただし $h_\mu \cdot \lambda$ は行列式 $|H_\lambda \cdot \mu|$ の成分 $H_\lambda \cdot \mu$ に対する cofactor である。

被積分函数 (8.27) の x^3 に関する 1 次の項は x^3 で積分されて 0 となるから, x^3 の 0 次と 2 次の項だけを考えればよい。なお殻の板厚はその曲率半径に比べて極めて小さいと仮定すれば $(x^3)^2$ の項の中で $H_\alpha \cdot \alpha$ の掛かった項, したがって $\partial_3 \bar{V}_1$ の掛かった項がすべて省略できる。このようにして (8.27) の省略できる項をすべて省略すると (8.24) は結局

$$\int_{-t/2}^{t/2} \{ \bar{v}_1 \cdot (\bar{T} \times \bar{r}) + \sqrt{g} \rho \bar{F} \times \bar{r} + H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \bar{T} \times \bar{r} \\ + (x^3)^2 [\bar{v}_1 \cdot (\partial_3 \bar{T} \times \mathbf{n}) + \sqrt{g} \rho \partial_3 \bar{F} \times \mathbf{n}] \} dx^3 = 0 \quad (8.29)$$

となる. 第1項を

$$\bar{v}_1 \cdot (\bar{T} \times \bar{r}) = \bar{v}_1 \cdot \bar{T} \times \bar{r} + \bar{e}^\lambda \cdot \bar{T} \times \bar{e}_\lambda$$

のように書きかえ, しかる後 (8.13) により得られる

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{T} \times \bar{r} + \sqrt{g} \rho \bar{F} \times \bar{r} + H_\alpha \cdot \alpha \mathbf{n} \cdot \bar{T} \times \bar{r} = 0$$

を用いれば (8.29) は

$$\int_{-t/2}^{t/2} \{ \bar{e}^\lambda \cdot \bar{T} \times \bar{e}_\lambda + (x^3)^2 [\bar{v}_1 \cdot (\partial_3 \bar{T} \times \mathbf{n}) + \sqrt{g} \rho \partial_3 \bar{F} \times \mathbf{n}] \} dx^3 = 0 \quad (8.30)$$

のようになる.

(6.10) および (8.10) により \mathfrak{T} は

$$\mathfrak{T} = \int_{-t/2}^{t/2} \bar{T} dx^3 \quad (8.31)$$

また (6.15) と (8.10) により \mathfrak{M} は

$$\mathfrak{M} = - \int_{-t/2}^{t/2} (x^3)^2 \partial_3 \bar{T} \times \mathbf{n} dx^3 \quad (8.32)$$

のように表わされる. また外力 \mathbf{F} のモーメントを

$$\mathfrak{R} = - \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{g} \rho \mathbf{F} \times x^3 \mathbf{n} dx^3 \quad (8.33)$$

とおけば, (8.10) により

$$\mathfrak{R} = - \int_{-t/2}^{t/2} (x^3)^2 \sqrt{g} \rho \partial_3 \bar{F} \times \mathbf{n} dx^3 \quad (8.34)$$

のように表わされる. したがって (8.30) は

$$\bar{e}^\lambda \cdot \mathfrak{T} \times \bar{e}_\lambda - \bar{v}_1 \cdot \mathfrak{M} - \mathfrak{R} = 0 \quad (8.35)$$

と書かれる. これがモーメントの平衡方程式である.

次にこの平衡方程式 (8.35) の解析的表現を導かなければならない. (6.11) (ただし $T^{33} = 0$) により第1項は

$$\bar{e}^\lambda \cdot \mathfrak{T} \times \bar{e}_\lambda = T^{\lambda\mu} \bar{e}_\mu \times \bar{e}_\lambda + T^{3\lambda} \mathbf{n} \times \bar{e}_\lambda.$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{g} \epsilon_{3\mu\lambda} \mathbf{n} &= \bar{e}_\mu \times \bar{e}_\lambda, \\ \sqrt{g} \epsilon_{\nu 3\lambda} \bar{e}^\nu &= \mathbf{n} \times \bar{e}_\lambda \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

により

$$\bar{e}^\lambda \cdot \mathfrak{T} \times \bar{e}_\lambda = \sqrt{g} (\epsilon_{3\mu\lambda} T^{\lambda\mu} \mathbf{n} + \epsilon_{\nu 3\lambda} T^{3\lambda} \bar{e}^\nu) \quad (8.37)$$

と書かれる. 第2項は (6.21) (ただし (7.8) により $m^3 \cdot \mu = 0$) および (8.11) により

$$\bar{v}_1 \cdot \mathfrak{M} = - \sqrt{g} \bar{e}^\alpha \cdot \partial_\alpha (\sqrt{g}^{-1} m^{\lambda \cdot \mu} \bar{e}_\lambda \bar{e}^\mu).$$

したがって (8.18) および (8.16) から得られる関係

$$\partial_\lambda \bar{e}^\mu = -\Gamma_{\lambda\rho}^\mu \bar{e}^\rho + H_\lambda \cdot^\mu \mathbf{n} \quad (8.38)$$

によって

$$\bar{V}_1 \cdot \mathfrak{M} = -\bar{V}_{1\lambda} m^{\lambda \cdot \mu} \bar{e}^\mu - m^{\lambda \cdot \mu} H_\lambda \cdot^\mu \mathbf{n} \quad (8.39)$$

のように表わされる。ここに

$$\bar{V}_{1\lambda} m^{\lambda \cdot \mu} = \partial_\lambda m^{\lambda \cdot \mu} - m^{\lambda \cdot \rho} \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \quad (8.40)$$

である。また

$$\mathbf{F} = F^\lambda \bar{e}_\lambda + F^3 \mathbf{n} \quad (8.41)$$

とおけば \mathfrak{N} は (8.33) により

$$\mathfrak{N} = - \int \sqrt{\bar{g}} \rho F^\lambda x^3 dx^3 \bar{e}_\lambda \times \mathbf{n} \quad (8.42)$$

と書かれる。したがって

$$N^{\lambda 3} = \int_{-t/2}^{t/2} \sqrt{\bar{g}} \rho F^\lambda x^3 dx^3 \quad (8.43)$$

$$n_\mu = \sqrt{\bar{g}} \epsilon_{\mu\lambda 3} N^{\lambda 3} \quad (8.44)$$

とおけば

$$\mathfrak{N} = -N^{\lambda 3} \bar{e}_\lambda \times \mathbf{n} = -n_\lambda \bar{e}^\lambda \quad (8.45)$$

のように表わされる。

(8.37), (8.39), (8.45) によってモーメントの平衡方程式 (8.35) の $\bar{e}^\lambda, \mathbf{n}$ 方向の成分

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_{1\mu} m^{\mu \cdot \lambda} + \sqrt{\bar{g}} \epsilon_{\lambda 3 \mu} T^{3\mu} - n_\lambda = 0, \\ m^{\lambda \cdot \mu} H_\lambda \cdot^\mu + \sqrt{\bar{g}} \epsilon_{3\lambda\mu} T^{\lambda\mu} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

が得られる。

特に矩形平板の場合には

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial m^x \cdot x}{\partial x} + \frac{\partial m^y \cdot x}{\partial y} - \sqrt{\bar{g}} T^{3y} - \sqrt{\bar{g}} N^{y3} = 0, \\ \frac{\partial m^x \cdot y}{\partial x} + \frac{\partial m^y \cdot y}{\partial y} + \sqrt{\bar{g}} T^{3x} + \sqrt{\bar{g}} N^{x3} = 0, \\ T^{xy} - T^{yx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.47)$$

円筒殻の場合には

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial m^x \cdot x}{\partial x} + \frac{\partial m^\theta \cdot x}{\partial \theta} - \sqrt{\bar{g}} T^{3\theta} - \sqrt{\bar{g}} N^{\theta 3} = 0, \\ \frac{\partial m^x \cdot \theta}{\partial x} + \frac{\partial m^\theta \cdot \theta}{\partial \theta} + \sqrt{\bar{g}} T^{3x} + \sqrt{\bar{g}} N^{x3} = 0, \\ m^\theta \cdot \theta \left(\frac{1}{a} + \kappa_\theta \cdot \theta \right) + \sqrt{\bar{g}} (T^{x\theta} - T^{\theta x}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

となる。

9. 弾性エネルギー

三次元弾性論の結果によれば、殻の弾性エネルギーの増分は

$$DU_1 = \int \dot{\mathbf{T}} \cdot D\mathbf{E} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (9.1)$$

したがって中央面の面積 $\sqrt{\bar{g}}$ 当りのエネルギーの増分は

$$DU = \int_{-t/2}^{t/2} \dot{\mathbf{T}} \cdot D\mathbf{E} dx^3 \quad (9.2)$$

で与えられる。 $\dot{\mathbf{T}}$ は (6.9) において $\tau^{33} = 0$ とおいた

$$\dot{\mathbf{T}} = \tau^{\lambda\mu} \dot{\mathbf{e}}_\lambda \dot{\mathbf{e}}_\mu + \tau^{3\lambda} (\dot{\mathbf{n}} \dot{\mathbf{e}}_\lambda + \dot{\mathbf{e}}_\lambda \dot{\mathbf{n}}), \quad (9.3)$$

$D\mathbf{E}$ は (4.44) により

$$D\mathbf{E} = (D\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} - x^3 D\kappa_{\lambda\mu}) \dot{\mathbf{e}}^\lambda \dot{\mathbf{e}}^\mu + D\varepsilon_{3\lambda} (\dot{\mathbf{n}} \dot{\mathbf{e}}^\lambda + \dot{\mathbf{e}}^\lambda \dot{\mathbf{n}}) \quad (9.4)$$

で与えられるから, (9.2) は

$$DU = \int_{-t/2}^{t/2} (\tau^{\lambda\mu} D\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} + \tau^{3\lambda} D\varepsilon_{3\lambda} - \tau^{\lambda\mu} x^3 D\kappa_{\lambda\mu}) dx^3. \quad (9.5)$$

したがって, (6.12), (6.18) により

$$DU = T^{\lambda\mu} D\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} + T^{3\lambda} D\varepsilon_{3\lambda} - M^{\lambda\mu 3} D\kappa_{\lambda\mu} \quad (9.6)$$

と書くことができる.

(9.6) に $T^{\lambda\mu}, M^{\lambda\mu 3}$ の表示 (7.7), (7.8) を入れれば

$$\begin{aligned} DU = \sqrt{\bar{g}} \left\{ \frac{Et}{1-\nu^2} [\nu \dot{\mathbf{g}}^{\kappa\rho} \bar{\varepsilon}_{\kappa\rho} \dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} D\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} + (1-\nu) \bar{\varepsilon}^{\lambda\mu} D\bar{\varepsilon}_{\lambda\mu}] \right. \\ \left. + B [\nu \dot{\mathbf{g}}^{\kappa\rho} \kappa_{\kappa\rho} \dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} D\kappa_{\lambda\mu} + (1-\nu) \kappa^{\lambda\mu} D\kappa_{\lambda\mu}] \right. \\ \left. + 2Gt\varepsilon^{3\lambda} D\varepsilon_{3\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} DU = \sqrt{\bar{g}} \left\{ \frac{Et}{2(1-\nu^2)} [\nu D(\dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu})^2 + (1-\nu) D(\bar{\varepsilon}^{\lambda\mu} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu})] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B [\nu D(\dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} \kappa_{\lambda\mu})^2 + (1-\nu) D(\kappa^{\lambda\mu} \kappa_{\lambda\mu})] \right. \\ \left. + GtD(\varepsilon^{3\lambda} \varepsilon_{3\lambda}) \right\} \quad (9.7) \end{aligned}$$

が得られる. したがって弾性エネルギー U は

$$\begin{aligned} U = \sqrt{\bar{g}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} [\nu (\dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu})^2 + (1-\nu) \bar{\varepsilon}^{\lambda\mu} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu}] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B [\nu (\dot{\mathbf{g}}^{\lambda\mu} \kappa_{\lambda\mu})^2 + (1-\nu) \kappa^{\lambda\mu} \kappa_{\lambda\mu}] + Gt\varepsilon^{3\lambda} \varepsilon_{3\lambda} \right\} \quad (9.8) \end{aligned}$$

となる.

(9.8) は (7.7), (7.8) により, また

$$U = \frac{1}{2} T^{\lambda\mu} \bar{\varepsilon}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} M^{\lambda\mu 3} \kappa_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} T^{3\lambda} \varepsilon_{3\lambda} \quad (9.9)$$

のように表わすことができる. これに更に (7.13), (7.15) を代入すれば U の断面力および断面モーメントによる表現

$$U = \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{g}}} \left\{ \frac{1}{2Et} [(1+\nu)T^{\lambda\mu}T_{\lambda\mu} - \nu(\dot{g}_{\lambda\mu}T^{\lambda\mu})^2] + \frac{6}{Et^3} [(1+\nu)M^{\lambda\mu}M_{\lambda\mu} - \nu(\dot{g}_{\lambda\mu}M^{\lambda\mu})^2] + \frac{1}{4Gt} T^{3\lambda}T_{3\lambda} \right\} \quad (9.10)$$

が得られる。

弾性エネルギー U の上記の表現はいずれも、断面力、断面モーメント、中央面の歪および曲率変化のテンソルの反変および共変成分を使いわけなければならない点を除いては、微小変形の場合の表現と全く同一であることがわかる。

1960 年 5 月 6 日 航空力学部

文 献

- [1] 吉村：殻体における有限変形の理論，理工学研究所報告，2 (1948)，No. 12；3 (1949)，No. 1；6 (1952)，No. 3.
- [2] Love, A.E.H. : Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed. Cambridge University Press, 1927.
- [3] Marguerre, K. : Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung, Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech. (1939).
- [4] 例えば Naghdi, P.M. : A Survey of Recent Progress in the Theory of Elastic Shells, Appl. Mech. Reviews, 9 (1956), No. 9.
- [5] 吉村：非線型，有限変形弾性理論，日本機械学会論文集，26 卷，167 号 (昭 35, 7).
- [6] 例えば矢野健太郎：微分幾何学，朝倉書店 (1949)；Brand, L. : Vector and Tensor Analysis, Wiley (1947).