

円板の熱変形*

砂 川 恵

Thermal Deformation of a Circular Plate

By

Megumi SUNAKAWA

Abstract: The thermal deformation of a circular plate, subjected to an arbitrary symmetrical temperature distribution, is analyzed in addition to the previous papers for a rectangular plate. Taking the finite deformation into account, the fundamental non-linear simultaneous partial differential equations for the thermoelastic problem are derived from the variational principle and are solved, and it is shown that, if there exists the temperature gradient through the thickness of the plate as seen in the aerodynamic heating, the plate starts to deflect at the moment of heating and does not exhibit the buckling phenomenon according to the mode of temperature distribution and the boundary conditions.

Some numerical examples are given i) for the case where the temperature distribution through the thickness is specified as linear, and ii) for the case of instantaneous heating where the temperature distribution through the thickness is a function of time, and then some discussions on the analytical results are given.

概 要

円板が任意の対称温度分布の加熱をうける場合の変形を、有限変形を考慮して解析した。円板の熱弾性問題における基礎方程式（非線型連立偏微分方程式）を変分原理を用いて求め、それを解いた結果、空力加熱をうける場合のように板厚方向に温度勾配を有する場合には、円板は、温度分布や境界条件如何によっては、Euler型挫屈の現象を呈せずに加熱初期から撓むことを明らかにした。

また、板厚方向の温度勾配を直線的とした場合、および瞬間的加熱でそれが時間的に変化する場合の両者について数値計算例を示し、その結果に考察を加えた。

1. ま え が き

飛行体の速度が増大するにともなう空力加熱、および内蔵する推進機による高温などが飛行体構造におよぼす影響は、その空力特性に与える影響とも関連して、昨今重大問題となっ

* 昭和 36 年 2 月 25 日 日本航空学会宇宙科学技術シンポジウムにおいて講演。

ている。筆者等は夙にこの問題に着目し、先に矩形平板の有限変形を考慮した熱弾性基礎方程式を導いて、板厚方向の温度変化をも考慮してそれを解き、矩形平板の熱変形の様相を明らかにした [1] [2]。

本論文では補足例題として円板をとり上げる。円板は矩形平板に較べその解析は比較的容易であるが、まず、変分原理を用いて円板の有限変形を考慮した熱弾性基礎方程式を導き、周縁が単純支持および固定の場合を例にとって、その解析例を示す。

記号

- d, r_0 それぞれ円板の板厚および半径.
 h 熱伝達係数.
 p 板面に垂直な分布荷重.
 t 時間.
 u, v, w それぞれ中立面の r, θ, z 方向の変位.
 A, B, C 積分常数.
 D 板の曲げ剛性. $D \equiv Ed^3/12(1-\nu^2)$.
 E 板材料のヤング率.
 F 単位容積当りの自由エネルギー.
 T 無歪無応力状態よりの温度上昇.
 \bar{T}, \tilde{T} (9) 式.
 T_E 断熱界面温度.
 Π 全ポテンシャルエネルギー.
 α, ρ, c_p, k それぞれ板材料の線膨脹係数, 密度, 比熱, 熱伝導率.
 δ 中立面中央の最大撓み.
 $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ それぞれ r, θ 方向の歪.
 ε_{12} $r\theta$ -面内の剪断歪,
 σ_{11}, σ_{22} それぞれ r, θ 方向の応力.
 σ_{12} $r\theta$ -面内の剪断応力.
 κ_1, κ_2 それぞれ中立面の r, θ 方向の曲率.
 κ_{12} 中立面の捩れ率.
 ν ポアソン比.
 $\zeta = r/r_0$.
 χ 応力函数.
- 添字 “ r ” は r に関する偏微分を意味する.
 上線 “ $-$ ” は中立面成分を示す.

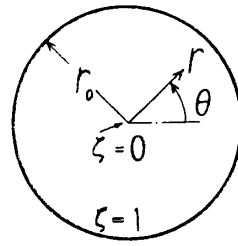
2. 基礎方程式の誘導

第1図のごとき円板を考える。この円板は上面あるいは下面から加熱され、加熱初期には板厚方向に温度勾配を有するものとする。

基礎方程式を誘導するに際し、変形は中心に関して回転対称の場合を考える。したがって、 v および $\partial/\partial\theta$ に関する項はすべて消失する。

二次元応力状態を考えると、応力～歪の関係式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} E\varepsilon_{11} &= \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} + E\alpha T, \\ E\varepsilon_{22} &= \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} + E\alpha T, \\ G\varepsilon_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12} = \sigma_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$



第1図 円板

ここで歪成分は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \bar{\varepsilon}_{11} - z\kappa_1, \\ \varepsilon_{22} &= \bar{\varepsilon}_{22} - z\kappa_2, \\ \varepsilon_{12} &= \bar{\varepsilon}_{12} - 2z\kappa_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

大撓み有限変形を考慮すると、近似的に

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= u_r + \frac{1}{2}w_r^2, \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \frac{u}{r}, \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\kappa_1 = w_{rr}, \quad \kappa_2 = \frac{w_r}{r}, \quad \kappa_{12} = 0. \quad (4)$$

であるから、(2) 式は結局次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_r + \frac{1}{2}w_r^2 - zw_{rr}, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{u}{r} - z\frac{w_r}{r}, \\ \varepsilon_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

次に全ポテンシャルエネルギーの停留原理により、変分法によって平衡方程式を求めるが、途中の考察は平板の場合 [1] [2] と全く同様であるのでその詳細を省略する。

さて、円板は加熱のほかに外力として面に垂直な分布荷重 $p(r)$ のみを受けるものとする。板の上下面および r_1, r_2 において円板に垂直な円筒面で区切られた領域を考えると、全ポテンシャルエネルギー Π は次のようになる。

$$\Pi = \int_V F dV - 2\pi \int_{r_1}^{r_2} p(r)w(r)rdr. \quad (6)$$

この全ポテンシャルエネルギー Π に変位成分 u, w による変分を行ない ($v=0$)、 $\delta\Pi=0$ より次の二軸方向の平衡方程式を得る。

r 方向:

$$\frac{Ed}{(1-\nu^2)} \left[\left[\nu \left(u_r + \frac{1}{2} w_r^2 \right) + \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha \bar{T} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[\left(u_r + \frac{1}{2} w_r^2 \right) + \nu \frac{u}{r} - (1+\nu) \alpha \bar{T} \right] r \right\} \right] = 0, \quad (7)$$

z 方向:

$$\begin{aligned} & \frac{Ed}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left[\left(u_r + \frac{1}{2} w_r^2 \right) + \nu \frac{u}{r} \right] w_r r \right\} \right] \\ & - \frac{Ed^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ - \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu w_{rr} + \frac{w_r}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\left(w_{rr} + \nu \frac{w_r}{r} \right) r \right] \right\} \\ & = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left\{ d \frac{\partial}{\partial r} (\bar{T} w_{rr}) + d^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\tilde{T} r) - \frac{\partial}{\partial r} \tilde{T} \right] \right\} - pr, \end{aligned} \quad (8)$$

ここに

$$\bar{T} = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} T(r, z) dz, \quad \tilde{T} = \frac{1}{d^2} \int_{-d/2}^{d/2} z T(r, z) dz. \quad (9)$$

(1) 式に従って, $\bar{\epsilon}_{11}$, $\bar{\epsilon}_{22}$ に対応する中立面応力 $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ を導入し,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_{11} - \nu \bar{\sigma}_{22}) + \alpha \bar{T}, \\ \bar{\epsilon}_{22} &= \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_{22} - \nu \bar{\sigma}_{11}) + \alpha \bar{T}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

を用いると, (7) 式は次のようになる.

$$r \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial r} + (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22}) = 0. \quad (11)$$

ここで応力函数 χ を導入し, (11) 式を満足するように

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{E} = r_0 \frac{\chi}{r}, \quad \frac{\bar{\sigma}_{22}}{E} = r_0 \frac{\partial \chi}{\partial r}. \quad (12)$$

とおけば, z 方向の平衡方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \\ & = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\chi \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{r_0}{d} \right)^2 \frac{p}{E}, \end{aligned} \quad (13)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} w' &= \frac{w}{d}, \\ \zeta &= \frac{r}{r_0}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また, (3) 式より次の適合条件式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi) \right] = - \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right)^2 - \alpha \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \zeta}. \quad (15)$$

(13), (15) の両式が, 熱弾性問題における円板の基礎方程式であり, 結局問題は, 与えられた \bar{T} , \tilde{T} を用いて, この w' と χ との非線型連立偏微方程式を妥当な境界条件を満足するように解くことに帰結する.

3. 基礎方程式の例解

前節において求めた円板の熱弾性基礎方程式を、実際問題としての両極端の条件、すなわち、i) 周縁単純支持の場合、および、ii) 周縁固定の場合について解く。この基礎方程式は非線型連立偏微分方程式であり、その厳密解を得ることは至難であるから、逐次近似法を用いる。ここで用いる方法は“Poincaréの方法[3]”と呼ばれるもので、Pöschl[4]、吉村[5]および筆者等[1]が、それぞれ棒の振動、圧縮矩形平板の安定問題および矩形平板の熱変形の解析に用いて良好な結果を得ているものである。なお解析を簡単にするために、平衡方程式(13)式において $p=0$ の場合を考える。

円板上の温度分布は中心に関する任意の対称形を仮定し、次式で与える。

$$\bar{T} = \sum_i \bar{T}_i \zeta^i, \quad (i=0, 2, 4, \dots \text{even}), \quad (16)$$

$$\tilde{T} = \sum_j \tilde{T}_j \zeta^j, \quad (j=0, 2, 4, \dots \text{even}). \quad (17)$$

3.1. 応力函数の決定

撓み函数は一般に

$$w' = \frac{\delta}{d} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \zeta^k \right),$$

で与えられるが、対称温度分布に対し、第一次近似としてまず(18)式で近似する。

$$w' = \frac{\delta}{d} (1 + A_2 \zeta^2 + A_4 \zeta^4), \quad (18)$$

ここで δ は円板中央の最大撓みであり、また A_2, A_4 は、 w' に関する境界条件に対応して次のように与える。

i) 周縁単純支持の場合

$$A_2 = -\frac{2(3+\nu)}{(5+\nu)}, \quad A_4 = \frac{(1+\nu)}{(5+\nu)}. \quad (19)$$

ii) 周縁固定の場合

$$A_2 = -2, \quad A_4 = 1. \quad (20)$$

(16), (18) の両式を(15)式に代入すると、適合条件式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta \chi) \right] = -\alpha \sum_{i=2}^{\infty} i \bar{T}_i \zeta^{i-1} - 2 \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 (A_2^2 \zeta + 4A_2 A_4 \zeta^3 + 4A_4^2 \zeta^5). \quad (21)$$

(21) 式の解は次のようになる。

$$\chi = \frac{B_0}{\zeta} + B\zeta - \alpha \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \zeta^{i+1} - \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 \left(\frac{A_2^2}{4} \zeta^3 + \frac{A_2 A_4}{3} \zeta^5 + \frac{A_4^2}{6} \zeta^7 \right). \quad (22)$$

B_0, B は積分常数であって、次のごとく決定される。まず、 $\zeta=0$ において $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}$ が有限の値をとるために、

$$B_0 = 0, \quad (23)$$

次に、 $\zeta=0, 1$ において $u=0$ の条件より、 B が次式のごとく求められる。

$$B = -\frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[\bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] + \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^2 \left[\frac{(3-\nu)}{4(1-\nu)} A_2^2 + \frac{(5-\nu)}{3(1-\nu)} A_2 A_4 + \frac{(7-\nu)}{6(1-\nu)} A_4^2 \right]. \quad (24)$$

(19), (20) の両式を (24) 式に代入すると, 周縁単純支持および固定の場合に対し, それぞれ B は次式のようになる.

i) 周縁単純支持の場合

$$B = -\frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[\bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] + \frac{(109-\nu-17\nu^2-3\nu^3)}{6(1-\nu)(5+\nu)^2} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^2. \quad (25)$$

ii) 周縁固定の場合

$$B = -\frac{\alpha}{(1-\nu)} \left[\bar{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} \right] + \frac{(5-3\nu)}{6(1-\nu)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^2. \quad (26)$$

3.2. 平衡方程式の積分

かくして応力函数が求まったので, 平衡方程式を積分する.

(17), (18) および (22) の諸式を (13) 式の右辺に代入すると, 平衡方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \\ &= 4 \left(\frac{\delta}{d} \right) B (A_2 \zeta + 4A_4 \zeta^3) - 2\alpha \left(\frac{\delta}{d} \right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} [(i+2)A_2 \zeta^{i+1} + 2(i+4)A_4 \zeta^{i+3}] \\ & \quad - \frac{2}{3} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 (3A_2^3 \zeta^3 + 15A_2^2 A_4 \zeta^5 + 20A_2 A_4^2 \zeta^7 + 10A_4^3 \zeta^9) - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} j^2 \tilde{T}_j \zeta^{j-1}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{C_4}{\zeta} + 2 \left(\frac{\delta}{d} \right) B (A_2 \zeta + 2A_4 \zeta^3) - 2\alpha \left(\frac{\delta}{d} \right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)} [A_2 \zeta^{i+1} + 2A_4 \zeta^{i+3}] \\ & \quad - \frac{1}{6} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 (3A_2^3 \zeta^3 + 10A_2^2 A_4 \zeta^5 + 10A_2 A_4^2 \zeta^7 + 4A_4^3 \zeta^9) - \frac{\alpha}{(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} j \tilde{T}_j \zeta^{j-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

いま, $\zeta=0$ で z 方向の剪断力が有限の値を有するために,

$$C_4 = 0, \quad (29)$$

でなければならない. 更に積分を続けると, $w' = w/d$ は結局次式のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{w}{d} \right) \\ &= C_1 + C_2 \ln \zeta + C_3 \zeta^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\delta}{d} \right) B \left(\frac{A_2}{4} \zeta^4 + \frac{A_4}{9} \zeta^6 \right) \\ & \quad - 2\alpha \left(\frac{\delta}{d} \right) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)} \left[\frac{A_2}{(i+2)(i+4)} \zeta^{i+4} + \frac{2A_4}{(i+6)^2} \zeta^{i+6} \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{48}\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{d}\right)^3\left(\frac{A_2^3}{6}\zeta^6+\frac{5A_2^2A_4}{24}\zeta^8+\frac{A_2A_4^2}{10}\zeta^{10}+\frac{A_4^3}{45}\zeta^{12}\right) \\ -\frac{\alpha}{(1-\nu)}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\tilde{T}_j}{(j+2)^2}\zeta^{j+2}. \quad (30)$$

$\zeta=0$ において w が有限の値を有するために

$$C_2=0, \quad (31)$$

となる. 残りの積分常数 C_1, C_3 は w についての境界条件からそれぞれ決定される.

i) 周縁単純支持の場合

境界条件:

$\zeta=1$ において,

$$\left. \begin{aligned} w=0, \\ D\left(w_{rr}+\nu\frac{w_r}{r}\right)+\frac{Ed^2\alpha}{(1-\nu)}\tilde{T}=0, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$C_1=\frac{\alpha}{2(1-\nu^2)}\left\{\tilde{T}_0+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{[(1-\nu)j+4]\tilde{T}_j}{(j+2)^2}\right\} \\ +\frac{\alpha}{(1-\nu^2)(5+\nu)}\left\{\frac{(107+40\nu+5\nu^2)}{72}\left[\tilde{T}_0+(1+\nu)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\bar{T}_i}{(i+2)}\right] \right. \\ \left.+4(1-\nu)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{[(i^3+18i^2+108i+214)+2(i+5)(i+8)\nu+2(i+5)\nu^2]\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2}\right\}\left(\frac{\delta}{d}\right) \\ -\frac{(87249+47111\nu+3566\nu^2-3198\nu^3-895\nu^4-73\nu^5)}{4320(1-\nu^2)(5+\nu)^3}\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{d}\right)^3, \quad (33)$$

$$C_3=-\frac{\alpha}{2(1-\nu^2)}\left[\tilde{T}_0+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(1-\nu)\tilde{T}_j}{(j+2)}\right]-\frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{d}\right)B\left[\frac{(3+\nu)}{2(1+\nu)}A_2+\frac{(5+\nu)}{3(1+\nu)}A_4\right] \\ +\frac{\alpha}{(1+\nu)}\left(\frac{\delta}{d}\right)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)}\left[\frac{(i+3+\nu)}{(i+2)}A_2+\frac{2(i+5+\nu)}{(i+6)}A_4\right] \\ +\frac{1}{24}\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{d}\right)^3\left[\frac{(5+\nu)}{4(1+\nu)}A_2^3+\frac{5(7+\nu)}{12(1+\nu)}A_2^2A_4+\frac{(9+\nu)}{4(1+\nu)}A_2A_4^2+\frac{(11+\nu)}{15(1+\nu)}A_4^3\right]. \quad (34)$$

ii) 周縁固定の場合

境界条件:

$$\zeta=1 \text{ において, } w=w_\zeta=0, \quad (35)$$

$$C_1=-\frac{\alpha}{2(1-\nu)}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{j\tilde{T}_j}{(j+2)^2}+\frac{\alpha}{(1-\nu)}\left\{\frac{5}{72}\left[\tilde{T}_0+(1+\nu)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\bar{T}_i}{(i+2)}\right] \right. \\ \left.+8(1-\nu)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(i+5)\bar{T}_i}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2}\right\}\left(\frac{\delta}{d}\right)-\frac{(173-73\nu)}{4320(1-\nu)}\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{d}\right)^3, \quad (36)$$

$$C_3=\frac{\alpha}{2(1-\nu)}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\tilde{T}_j}{(j+2)}+\frac{1}{6}B\left(\frac{\delta}{d}\right)-8\alpha\left(\frac{\delta}{d}\right)\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\bar{T}_i}{(i+2)^2(i+4)(i+6)} \\ -\frac{23}{720}\left(\frac{d}{r_0}\right)^2\left(\frac{\delta}{d}\right)^3. \quad (37)$$

なおこれらの場合, $\zeta=0$ において $w_\zeta=0$ の条件ももちろん満足されている.

(30) 式に積分常数を代入し, $\zeta=0$ において $w=\delta$ とおき整理すると, 結局 (38), (39) の両式が得られる.

i) 周縁単純支持の場合

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right) + \frac{(87249 + 47111\nu + 3566\nu^2 - 3198\nu^3 - 895\nu^4 - 73\nu^5)}{2160(5+\nu)^3} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 \\ &= \alpha \left\{ \tilde{T}_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{[(1-\nu)j+4]}{(j+2)^2} \tilde{T}_j \right\} \\ & \quad + \frac{\alpha}{(5+\nu)} \left\{ \frac{(107+40\nu+5\nu^2)}{36} \left[\tilde{T}_0 + (1+\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\tilde{T}_i}{(i+2)} \right] \right. \\ & \quad \left. + 8(1-\nu) \sum_{i=2}^{\infty} \frac{[(i^3+18i^2+108i+214)+2(i+5)(i+8)\nu+2(i+5)\nu^2]}{(i+2)(i+4)^2(i+6)^2} \tilde{T}_i \right\} \left(\frac{\delta}{d} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

ii) 周縁固定の場合

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-\nu^2)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right) + \frac{(173-73\nu)}{360(1-\nu)} \left(\frac{d}{r_0} \right)^2 \left(\frac{\delta}{d} \right)^3 \\ &= -\frac{6\alpha}{(1-\nu)} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j\tilde{T}_j}{(j+2)^2} + \frac{5\alpha}{6(1-\nu)} \left\{ \tilde{T}_0 + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\tilde{T}_i}{(i+2)} \left[(1+\nu) + \frac{576}{5} \frac{(1-\nu)(i+5)}{(i+4)^2(i+6)^2} \right] \right\} \left(\frac{\delta}{d} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

したがって, 任意の対称温度分布が与えられると, (38), (39) の両式より円板中央の最大撓みと温度上昇との関係を求めることができる. (38) 式から明らかなように, 周縁単純支持の場合には, \tilde{T} の存在によって板は加熱初期から撓むことがわかる. また周縁固定の場合には, \tilde{T}_0 が変形に関与しないので, $\partial/\partial\zeta(\zeta\partial\tilde{T}/\partial\zeta)$ が存在しないと板は Euler 型の挫屈現象を呈することが (39) 式からわかる. これらはすべて, 矩形平板の場合 [1] [2] と全く同様な現象である.

4. 数値計算例

以上の解析結果を容易に理解するために簡単な数値計算例を示す.

4.1. 板厚方向の温度分布を直線状と指定した場合

いま円板内の温度分布として次式を仮定する. すなわち, 板面内の温度分布は拋物線状であり, また板厚方向の温度分布は直線状で下面の温度は上面の 1/2 とする.

$$T(\zeta, z) = [T_0 + T_1(1-\zeta^2)] \left(1 + \frac{2z}{3d} \right). \quad (40)$$

4.1.1. 周縁単純支持の場合

$(r_0/d)^2 \alpha T_1 \sim \delta/d$ の関係を (38) 式より求めると, T_0/T_1 をパラメータとして第2図のようになる. 板厚方向の温度勾配を考慮すると板は加熱とともに撓み始め, Euler 型挫屈の臨界値は存在しない. 板厚方向の温度勾配を無視した場合の結果も, (38) 式において $\tilde{T}=0$ として直ちに求まるので, 第2図に同時に点線で示してあるが, この場合, $\delta/d=0$ における縦軸の値が挫屈臨界温度値になる.

4.1.2. 周縁固定の場合

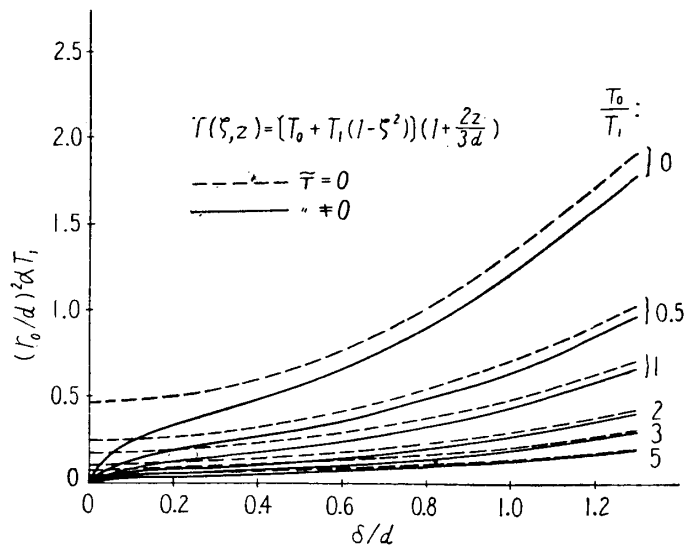
$(r_0/d)^2 \alpha T_1 \sim \delta/d$ の関係を (39) 式から求めると, T_0/T_1 をパラメータとして第3図のようになる. $\partial/\partial \zeta (\zeta \partial \tilde{T}/\partial \zeta)$ が存在する場合には板は加熱とともに撓み始め, Euler 型挫屈の臨界値は存在しない. しかしこの場合は単純支持の場合とは違って, $\tilde{T}=0$ の場合だけでなく $\partial/\partial \zeta (\zeta \partial \tilde{T}/\partial \zeta) = 0$ すなわち $\tilde{T} = \tilde{T}_0$ の場合にも Euler 型挫屈の臨界値が存在する. (39) 式において $\tilde{T}_j = 0$ として求めた計算結果を第3図に同時に点線で示す.

4.2. 瞬間的加熱の場合

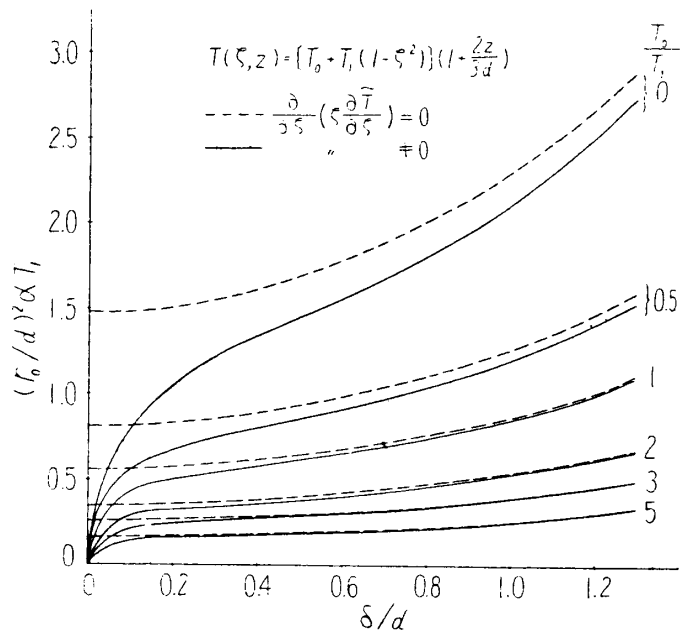
4.1. においては, 板厚方向の温度変化が直線状で一定と考えた場合の数値計算例を示したが瞬間的に加熱される場合, T, \bar{T} および \tilde{T} の時間的変化を考慮しなければならない. いま円板上面が瞬間的に断熱界面温度 $T_E(\zeta)$ による熱伝達によって加熱される場合を考えよう. 簡単のために板面内の熱伝導は無視して板厚方向の熱伝導のみを考え, また下面での熱伝達も無視すると, 任意の点の温度 $T(\zeta, z)$ は時間 t に対して次のように与えられる [6].

$$\frac{T(\zeta, z)}{T_E(\zeta)} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin P_n \exp\left(-\frac{P_n^2 kt}{\rho c_p d^2}\right) \cos\left[\frac{P_n(z+d/2)}{d}\right]}{P_n + \sin P_n \cos P_n} \quad (41)$$

(41) 式およびそれから (9) 式を通じて求められる \bar{T}, \tilde{T} については, 既に矩形平板の場合 [1] [2] に詳述したのでその記述を省略し, Biot 数 hd/k の大きい過渡的加熱状態での



第2図 温度上昇と円板中央の最大撓みの関係, 周縁単純支持.



第3図 温度上昇と円板中央の最大撓みの関係, 周縁固定.

温度と撓みとの関係を以下に示す.

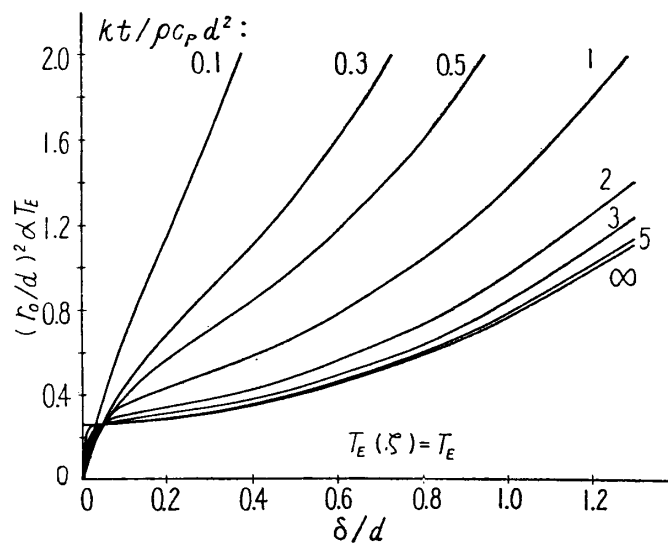
4.2.1. 周縁単純支持の場合

簡単のために温度は板面に亘って一定, すなわち

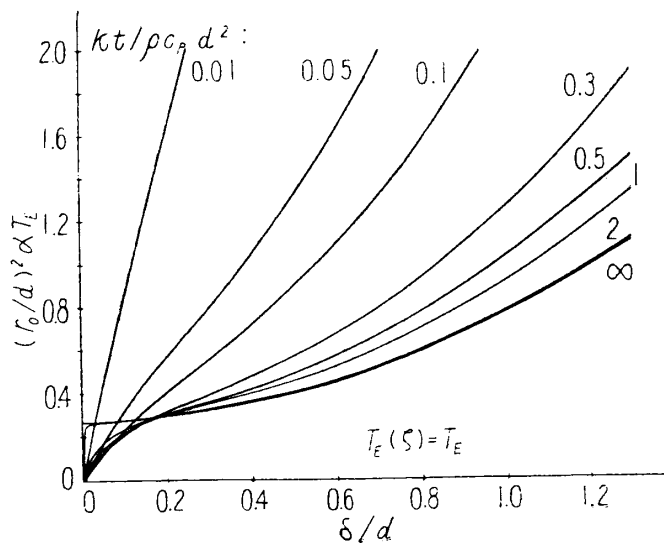
$$T_E(\zeta) \equiv T_E, \quad (42)$$

と仮定する.

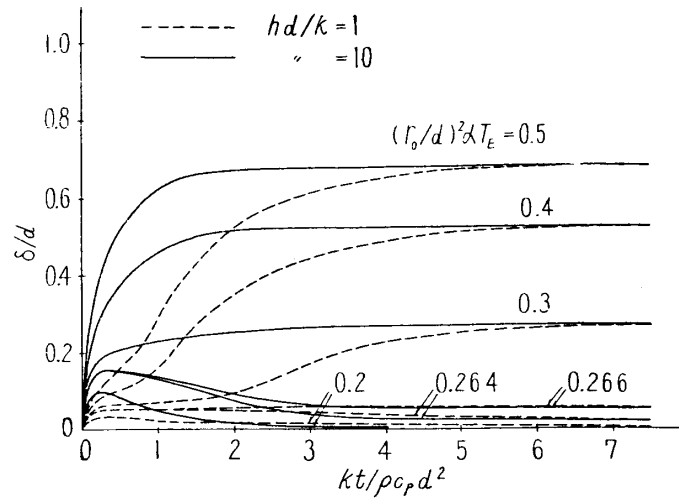
温度と撓みの関係を (38) 式から求め, 無次元時間 $kt/\rho c_p d^2$ をパラメータにして第4図, 第5図に示す. $(r_0/d)^2 \alpha T_E \sim \delta/d$ の関係が $kt/\rho c_p d^2$ の増大とともに変化し, 遂には $\tilde{T}=0$ の曲線と一致する様子がわかる. 次に第4図, 第5図において, T_E を指定した場合の $kt/\rho c_p d^2 \sim \delta/d$ の関係を第6図に示す. 円板中央の最大撓み δ/d は, 断熱界面温度 T_E が Euler



第4図 断熱界面温度と円板中央の最大撓みの関係, 周縁単純支持, $hd/k=1$.



第5図 断熱界面温度と円板中央の最大撓みの関係, 周縁単純支持, $hd/k=10$.



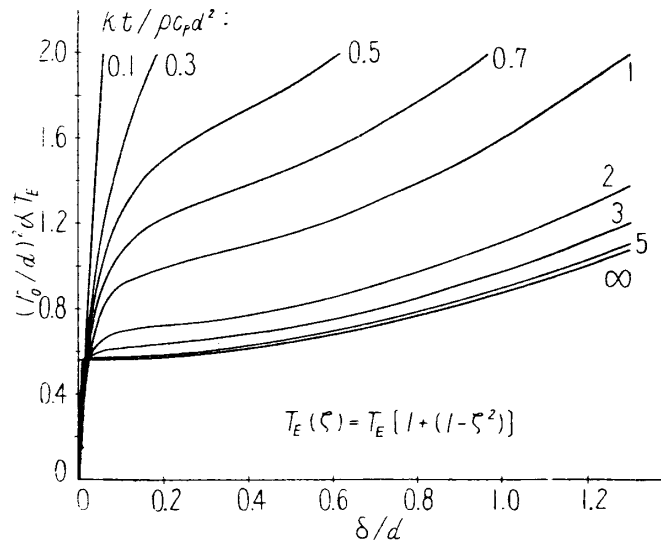
第6図 円板中央の最大撓みの時間的变化，周縁単純支持。

型座屈の臨界温度 [図示の場合 $(r_0/d)^2 \alpha (T_E)_{cr} = 0.265$] 以上であると， $kt/\rho c_p d^2$ とともに増大し，遂には一定値に収斂する．しかし T_E が $(T_E)_{cr}$ 以下であると，最初ある程度撓むがまた減少し遂には0となる．このことは臨界温度以下においては，温度勾配が減少するとともに，撓んだ状態よりも平面に近い方がポテンシャルエネルギーが小さくより安定な状態であることを示すものと思われる．

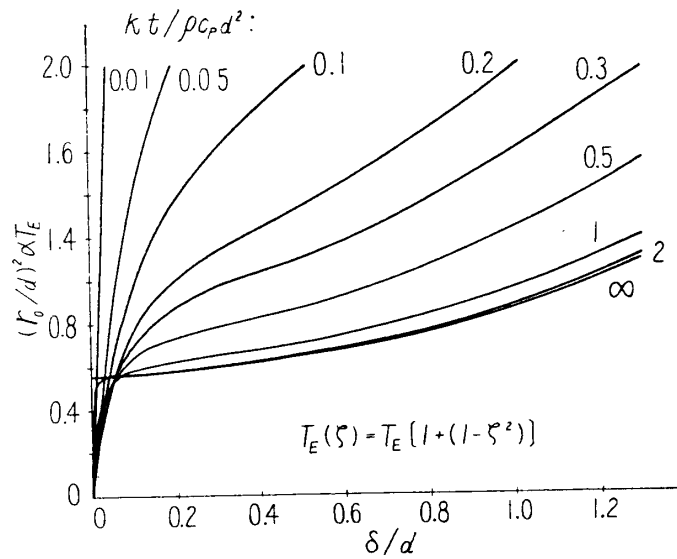
4.2.2. 周縁固定の場合

この場合は既に述べた如く， $\partial/\partial \zeta (\zeta \partial \tilde{T}/\partial \zeta)$ が存在しないと Euler 型座屈の現象のみとなるので，断熱界面温度を次のように仮定する．すなわち

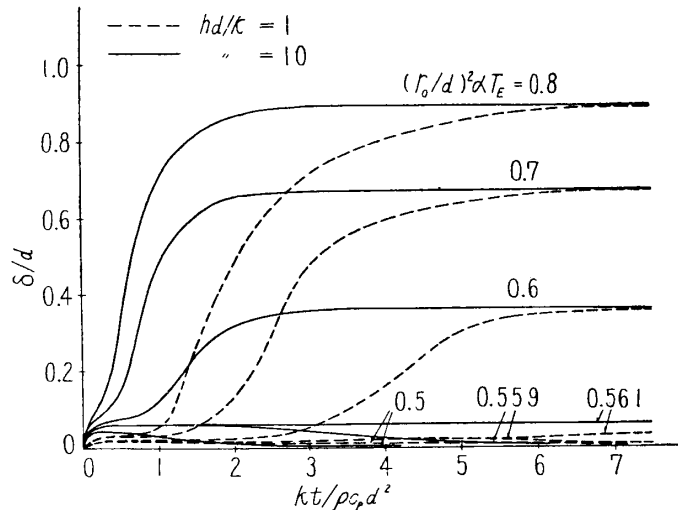
$$T_E(\zeta) = T_E [1 + (1 - \zeta^2)] \tag{43}$$



第7図 断熱界面温度と円板中央の最大撓みの関係，周縁固定， $hd/k=1$ 。



第8図 断熱界面温度と円板中央の最大撓みの関係，周縁固定， $hd/k=10$ 。



第9図 円板中央の最大撓みの時間的変化，周縁固定。

温度と撓みの関係を(39)式より求め，4.2.1.と同様にして，第7図，第8図および第9図が得られる。 $(r_0/d)^2 \alpha T_E \sim \delta/d$ および $kt/\rho c_p d^2 \sim \delta/d$ の関係は，周縁単純支持の場合と同様な傾向を有している。また両者の場合の図表の比較から，周縁固定の場合が周縁単純支持の場合よりも撓み難く，かつ Euler 型挫屈に近い変形現象を呈することがわかる。

5. あとがき

本論文においては，まず円板の有限変形を考慮した熱弾性基礎方程式を導き，周縁単純支持および周縁固定の円板が対称分布の加熱を受ける場合について，加熱によって板厚方向の温度変化をも伴うことを考慮して解析例を示した。その結果，加熱条件，温度分布および境界条件如何によっては，円板は Euler 型挫屈を行わず，最初から撓むことが示された。

また、第6図、第9図において、瞬間的に加熱される場合の断熱界面温度が Euler 型挫屈の臨界温度より低い場合には、板は一旦撓んでも時間の経過とともに平面状態に恢復することが示された。

以上のことは既に解析した矩形平板の場合 [1] [2] と全く同様な現象である。

なお、飛行体の表面には更に負圧が働くが、この場合は、平衡方程式 (13) 式の垂直分布荷重を与える $p(\zeta)$ の項をも考慮して問題を解けばよい。

さらに、本解析においては板面内の外力は無視したがこのような外力が存在すると、たとえ変形量が微小であっても、初期変形ある場合の問題に等価となり、その後の変形に重大な影響を及ぼすであろう。

本研究において、有益な御助言を戴いた池田健教授および懇切な御指導を戴いた植村益次助教授に厚く御礼申上げる。

昭和 36 年 1 月 25 日 航空力学部

文 献

- [1] Sunakawa, M. and Uemura, M.: Deformation and Thermal Stress in a Rectangular Plate Subjected to Aerodynamic Heating (For the Case of Simply Supported Edges), Aero. Res. Inst., Univ. of Tokyo, Report 359 (1960).
- [2] 砂川 恵: 空力加熱による矩形平板の熱変形 (四辺固定の場合), 日本航空学会誌, 9 (1961), 37.
- [3] Poincaré, H.: “*Les Méthodes de la Mécanique céleste*”, Paris, 1 (1892), 32.
- [4] Pöschl, Th.: Ueber die Methode zur angenäherte Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Berechnung der Durchbiegung bei der Knickung gerader Stäbe, Ing. Arch., 9 (1938), 34.
- [5] 吉村慶丸: 圧縮された矩形平板の超安定限界状態の逐次近似解法, 東京大学理工学研究所報告, 2 (1948), 131.
- [6] Gatewood, B.E.: “*Thermal Stresses*”, McGRAW-HILL, 1957.