

二段膜衝撃波管における中圧室接触面と 膨脹波の干渉により生ずる屈折波の影響

本 間 弘 樹

Influence of the Refracted Waves Produced by the Interaction
between the Middle Chamber Contact Surface and the
Expansion Fan in the Double Diaphragm Shock Tube.

By

Hiroki HONMA

Abstract: In the double diaphragm shock tube, a contact surface produced in the middle chamber goes into the low pressure channel, and it interacts with an expansion fan produced at the burst of the second diaphragm. The refracted waves are produced by this interaction, and these waves repeatedly interact with the shock wave and the contact surface produced in the low pressure channel. Such a flow feature is analysed on the basis of the assumption of small disturbance. As a measure of the fluctuations of flow, the maximum value of the shock speed fluctuation is obtained in an explicit form as a function of the specific heat ratios of gases, the strength of the expansion wave and the shock waves. In order to simplify the analysis, the classical shock tube with a stationary contact surface in its high pressure chamber is treated as a model, and the consequent results are applied to the double diaphragm shock tube with area change at the second diaphragm. It is found that the assumption of small disturbance can be used only when the sound speed ratio across the middle chamber contact surface (or across the stationary contact surface) is about 0.5 to 2.0. It is shown in the numerical examples of the maximum value of the shock speed fluctuation in the above range, that the values approximately agree with some numerical values calculated by the characteristic method.

概 要

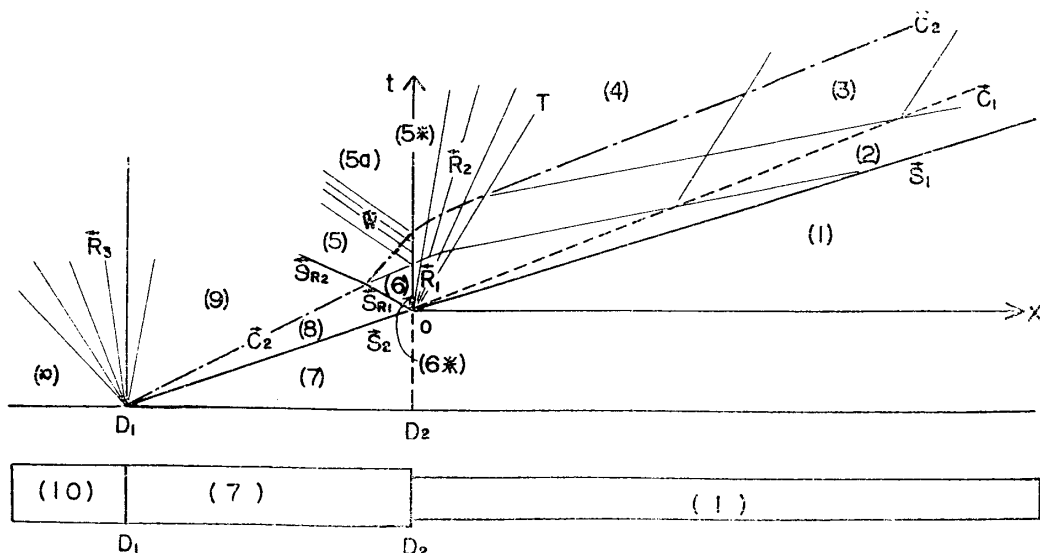
二段膜衝撃波管において、中圧室にできる接触面は低圧室には入りこみ、二段目の膜が破れた時にできる膨脹波と干渉する。この干渉の時に生ずる屈折波は低圧室にできる衝撃波および接触面と二重、三重の干渉を繰り返す。このような干渉による流れの乱れの模様が微小擾乱の仮定に基づいて解析的に求められる。乱れの尺度として、衝撃波速度の変動量の最大値が気体の比熱比、膨脹波および衝撃波の強さの函数として明瞭に与えられる。解析を容易にするため、高圧室に静止した接触面をもつ通常の衝撃波管がモデルとして取り扱われ、その結果が二段膜衝撃波管に適用される。微小擾乱の仮定は中圧室の接触面（または高圧室の

静止接触面)の両側の気体の音速比が大よそ0.5~2.0なる時にだけ成り立つことがわかる。この範囲内での衝撃波速度の変動量の最大値の数値例において、その値は特性曲線法で得られた数値と大体一致することが示される。

1. まえがき

二段膜衝撃波管は、強い衝撃波を作るための一つの有効な方法として理論的に提唱され [1] [2], 実験も行なわれている [3]. この衝撃波管は二つの膜で仕切られた三つの部分から成り立っていて、端から順に、高圧, 中圧, 低圧の気体がつめられる。第1図に一例として、第二の膜の所で断面積変化のある場合の $x-t$ 図を示す。第一の膜 D_1 を破ると中圧室内に衝撃波 \vec{S}_2 が生じ、これが中圧室の気体を加熱し、第二の膜 D_2 に突当って反射し、反射衝撃波 \vec{S}_{R1} の背後は高温高圧となって膜が破れる。第二の膜が破れた時に低圧室内に生ずる衝撃波 \vec{S}_1 は、加熱された中圧室の気体を駆動気体とする強い衝撃波となる。低圧室において、初めに中圧室にあった気体は両端でそれぞれ初めに高圧室および低圧室にあった気体と接触するような高温気塊となる。駆動気体がこのような気塊となること、すなわち、普通の衝撃波管においてもできる接触面 \vec{C}_1 の外にもう一つの接触面 \vec{C}_2 があることにより生ずる低圧室内の流れの様子を解析的に求めることがこの論文の目的である。

高圧室気体と中圧室気体の接触面 \vec{C}_2 は、まず中圧室内で第二の膜からの反射衝撃波 \vec{S}_{R1} と干渉し、透過衝撃波 \vec{S}_{R2} および屈折衝撃波又は屈折膨脹波が生ずる。屈折波は一部は低圧室内にはいりこみ、一部は膜断面で再び反射して来て接触面 \vec{C}_2 との干渉を繰り返す。低圧室内においてこの接触面 \vec{C}_2 は第二の膜 D_2 が破れた時に生ずる膨脹波 \vec{R}_1 と干渉し、やはり透過波 \vec{R}_2 と屈折波が生ずる。屈折波は、低圧室内に生じた衝撃波 \vec{S}_1 および中圧室気



第1図 二段膜衝撃波管

体と低圧室気体との接触面 \vec{C}_1 と干渉し、反射されて、再び接触面 \vec{C}_2 との干渉を繰り返す。接触面 \vec{C}_2 の反射衝撃波 \vec{S}_{R1} 並びに膨脹波 \vec{R}_1 との干渉により生ずる屈折波が低圧室内の流れを乱すことになる。

解析を容易にするために、膨脹波との干渉の影響だけをまず考える。このために、通常の衝撃波管でその高圧室が一つの静止した接触面によって二つに分けられているようなモデルを考える(第2図)。気体は比熱比一定の非粘性完全気体とする。流れは一次元非定常流(すなわち、各断面で物理量は一定で、時間的にのみ変化する)で、衝撃波を横切るエントロピー変化を除いて等エントロピーであるとする。

膨脹波と接触面との干渉については、その屈折波の強さが接触面の両側の内部エネルギー比と膨脹波の強さの函数として求められており[4][5][6]、実験的にも確かめられている[7]。ところが、Rieman 不変量を用いて計算されたこれらの方法によると、一つ一つの干渉について、高次の代数方程式を数値的に解いて行かなくてはならない。多数の波と境界面との干渉を含む現在の問題に対して、これは不適當である。

解析を単純化するために、微小擾乱の仮定をした。すなわち、上記の干渉によって生ずる屈折波による物理量の変動は、擾乱をうける前の量に比べて十分に小さいものとする。この仮定の正当性は後にのべる。この仮定にもとづいて衝撃波 \vec{S}_1 二つの接触面 \vec{C}_1, \vec{C}_2 および膨脹波尾端 T によって囲まれた領域(第1図および第2図の領域 2, 3)において成り立つような一次元非粘性の微小擾乱方程式が導かれ、

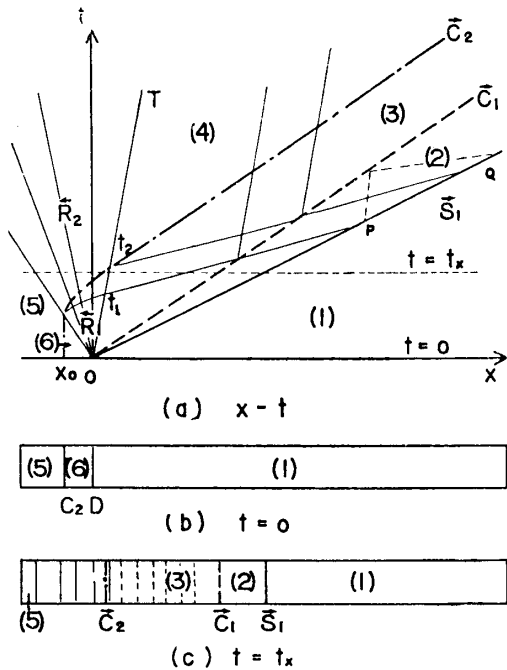
四つの境界($\vec{S}_1, \vec{C}_1, \vec{C}_2, T$)上の境界条件に対する解が求められる。このような解析は、すでに衝撃波管内の壁面境界層の効果による衝撃波速度の減衰を得るために用いられているが[8]、その方法が現在の問題に適用された。

得られた結果は、第1図に示したような二段目の膜の所で断面積変化のある二段膜衝撃波管の場合に拡張され、反射衝撃波と接触面との干渉の影響も含まれる。

2. 解 析

2.1. 基礎方程式と一般解

第2図に本解析で取り扱われる流れが示される。第2図(a)は膜Dの位置および膜の破れる瞬間を原点に取った $x-t$ 図で、第2図(b), (c)はそれぞれ $t=0$ および $t=t_x$ における管内の状態を示す。 $\vec{S}_1, \vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{R}_1$ および T はそれぞれ衝撃波、二つの接触面、膨脹波および膨脹波尾端を示す記号で、矢印はそれぞれの進行方向を表わす。記号(1), (5), (6)



第2図 解析のモデル

はそれぞれ低圧室および高圧室で気体が膜の破れる前の静止状態にある領域を表わし、記号 (2), (3), (4) はそれぞれ \vec{S}_1 と \vec{C}_1 とで囲まれた領域, \vec{C}_1 と \vec{C}_2 と T とで囲まれた領域 および \vec{C}_2 と T とで囲まれた領域を表わすものとする。

接触面 \vec{C}_2 がなくて高圧室の気体が (6) だけの時には (6) と (1) の気体とその状態が与えられることによって、一次元非定常流の理論から直ちに衝撃波および膨脹波の強さや領域 (2), (3) における物理量が求められる [4] [5]. この時には、領域 (2), (3) の流れは一樣である。これを基礎の流れとする。これに接触面 \vec{C}_2 と気体 (5) がつけ加わることによって、 \vec{C}_2 と \vec{R}_1 との干渉によって生ずる擾乱がこの領域の流れを乱す。この時の速度や圧力のような物理量のづれの量が、基礎流における量と比べて十分に小さく、づれの量の二次以上の項は省略できるものと仮定する。すなわち、

$$p_i \gg p'_i(x, t), \quad u_i \gg u'_i(x, t) \quad (i=2, 3) \quad (1)$$

ここで、 p_i, u_i は基礎流の領域 (2) 又は (3) における圧力および流れの速度で、 p'_i, u'_i は擾乱による p_i, u_i からのずれの量である。

(1) 式の仮定を用いると、領域 (2), (3) における連続および運動量の方程式は次のように書ける。

$$\frac{1}{\rho_i a_i^2} \left(U_0 \frac{\partial p'_i}{\partial t'} + u_i \frac{\partial p'_i}{\partial x'} \right) + \frac{\partial u'_i}{\partial x'} = 0 \quad (i=2, 3) \quad (2-a)$$

$$U_0 \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u_i \frac{\partial u'_i}{\partial x'} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p'_i}{\partial x'} = 0 \quad (i=2, 3) \quad (2-b)$$

ただし、 ρ_i, a_i は基礎流の領域 (2) 又は (3) における気体の密度および音速で、 U_0 は基礎流の衝撃波速度 (一定) である。 x', t' は無次元化量で、

$$x' \equiv x/x_0, \quad t' \equiv U_0 t/x_0 \quad (3)$$

によって定義される。ただし、 x_0 は膜と高圧室静止接触面との距離である。

(2) 式は波動方程式で、一般解は、

$$\frac{u'_i}{u_i}, \quad \frac{p'_i}{\rho_i u_i a_i} = f_i(\xi_i) \pm g_i(\eta_i) \quad (i=2, 3) \quad (4)$$

とかける。ここで、左辺の右に書いた項が右辺の符号の上側を取るものとしている。 f_i, g_i は任意函数であって、境界条件から定められるべきものである。 ξ_i, η_i は特性変数で、

$$\xi_i, \eta_i = t' \pm \frac{U_0(t' - x')}{a_i(1 \mp M_i)} \quad (i=2, 3) \quad (5)$$

とかける。ただし、 M_i は領域 (2) または (3) における衝撃波に相対的にとった流れの Mach 数で、その定義は、

$$M_i \equiv (U_0 - u_i)/a_i \quad (i=2, 3) \quad (6)$$

である。

2.2. 境界条件

領域 (2) の境界は衝撃波 \vec{S}_1 と接触面 \vec{C}_1 で、領域 (3) の境界は二つの接触面 \vec{C}_1 と \vec{C}_2 および膨脹波尾端 T である。これらの境界は次のように表わされる。

$$\text{衝撃波 } \vec{S}_1 \quad x' = t' \quad (7-a)$$

$$\text{接触面 } \vec{C}_1 \quad x' = (u_2/U_0)t' \quad (7-b)$$

$$\text{膨脹波尾端 } T \quad x' = (u_3 - a_3)t'/U_0 \quad (t' \leq t_2') \quad (7-c)$$

$$\text{接触面 } \vec{C}_2 \quad x' - x_2' = (u_3/U_0)(t' - t_2') \quad (t' > t_2') \quad (7-d)$$

ただし、接触面 \vec{C}_2 が膨脹波尾端 T と交る点を (x_2, t_2) としている。特性変数 ξ_i, η_i はこれらの境界上で次のように表わされる。

$$\vec{S}_1 \text{ 上で } \xi_2 = \eta_2 = t' \quad (8-a)$$

$$\vec{C}_1 \text{ 上で } \left. \begin{aligned} \xi_i &= t'/(1 - M_i) \equiv \lambda_i t' \\ \eta_i &= t'/(1 + M_i) \equiv \mu_i t' \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3) \quad (8-b)$$

$$T \text{ 上で } \xi_3 = 2\lambda_3 t', \quad \eta_3 = 0 \quad (8-c)$$

$$\vec{C}_2 \text{ 上で } \xi_3 = \lambda_3(t' + t_2'), \quad \eta_3 = \mu_3(t' - t_2') \quad (8-d)$$

衝撃波 \vec{S}_1 上では、衝撃波速度の微小変化による流速および圧力の変化が Rankine-Hugoniot の式から衝撃 Mach 数の函数として与えられる。これが \vec{S}_1 上での境界条件となる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial U_s} \right)_{U_0} = \frac{u_2'}{U'} = \frac{u_2}{U_0} \frac{M_s^2 + 1}{M_s^2 - 1} \quad (9-a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial U_s} \right)_{U_0} = \frac{p_2'}{U'} = 2\rho_1 u_2 \frac{M_s^2}{M_s^2 - 1} \quad (9-b)$$

ここで、 U_s は衝撃波速度で、微分は $U_s = U_0$ に対して計算され、 $M_s = U_0/a_1$ は基礎流の衝撃 Mach 数である。

接触面 \vec{C}_1 上では、境界の両側の圧力と速度が一致しなくてはならない。すなわち、

$$u_2' = u_3', \quad p_2' = p_3' \quad (10)$$

膨脹波尾端 T 上の速度および圧力の擾乱量 u_T', p_T' は上流からの擾乱のみによって決定される。なぜなら、微小擾乱の仮定の下では、擾乱は特性曲線の一つである膨脹波尾端 T を横切って上流には伝播しないからである。さらに、 T 上では等エントロピー流の関係

$$p_T'/u_T' = \rho_3 a_3 \quad (11)$$

が成り立つ。したがって、 T 上での境界条件として

$$\frac{u_3'}{u_3} = \frac{p_3'}{\rho_3 a_3 u_3} = \frac{u_T'}{u_3} \quad (t' \leq t_2') \quad (12)$$

が得られる。

接触面 \vec{C}_2 上では、 \vec{C}_1 におけると同様に、境界の両側の圧力と速度が一致しなくてはならない。

$$u_3' = u_4', \quad p_3' = p_4' \quad (13)$$

ここで、 u_4', p_4' は u_3, p_3 からのつれで、領域 (4) の流れの速度および圧力を u_4, p_4 とすると、

$$u_4 = u_3 + u_4', \quad p_4 = p_3 + p_4' \quad (14)$$

である。微小擾乱の仮定の下では、 u_4' と p_4' の間には一つの関係式がある。従って、(13)

式から, \vec{C}_2 上で成り立つ u_3' と p_3' との間の一つの関係式を得る. それが \vec{C}_2 上での境界条件となる. それは次のようにして求められる. 微小擾乱の仮定の下では, 領域 (4) は \vec{C}_2 からの透過波だけから成る単純波領域であるから, 膨脹波 \vec{R}_2 に対して用いられる Riemann 不変量がこの領域にも適用できる. 従って,

$$a_4 + \frac{\gamma_5 - 1}{2} u_4 = a_5 \quad (15)$$

とかける. ここで, a_5, γ_5 は領域 (5) の気体の音速および比熱比で, a_4 は領域 (4) の気体の音速である. 等エントロピー関係

$$\frac{a_4}{a_5} = \left(\frac{p_4}{p_5} \right)^{\beta_5}, \quad \frac{a_3}{a_6} = \left(\frac{p_3}{p_6} \right)^{\beta_6} \quad (16)$$

$$\beta_5 = \frac{\gamma_5 - 1}{2\gamma_5}, \quad \beta_6 = \frac{\gamma_6 - 1}{2\gamma_6} \quad (17)$$

および定義式 (14) を (15) 式に代入して, (13) 式の関係を用いると, \vec{C}_2 上での境界条件として,

$$\left(\frac{a_3}{a_6} \right)^{\beta_5/\beta_6} \left(1 + \frac{p_3'}{p_3} \right)^{\beta_5} + \beta_5 \gamma_5 \left(\frac{u_6}{a_5} \right) \left(\frac{u_3}{a_6} \right) \left(1 + \frac{u_3'}{u_3} \right) = 1 \quad (t' > t_2') \quad (18)$$

が得られる.

2.3. 衝撃波速度変動 U' に対する函数方程式

一般解 (4) 式に境界条件式 (9), (10) および (12) 又は (18) 式を適用して, 未知函数 f_i, g_i (又は u_i, p_i) ($i=2, 3$) を求めよう. (9) 式に含まれる衝撃波変動 U' もまた未知量であるから, 五つの未知量 u_i, p_i, U' が五つの境界条件によって, 明確に求められるはずである.

u_2, p_2 は, \vec{S}_1 上の境界条件 (9) 式に一般解 (4) 式を代入することにより, U' の函数として表現することができる.

$$\frac{u_2'}{u_2}, \frac{p_2'}{\rho_2 a_2 u_2} = 2 \left[A \frac{U'(\xi_2)}{U_0} \pm B \frac{U'(\eta_2)}{U_0} \right] \quad (19)$$

ただし, A, B は衝撃 Mach 数の函数で

$$A, B = \frac{1 + M_s^2 (1 \pm 2M_2)}{4(M_s^2 - 1)} \quad (20)$$

により定義される.

u_3, p_3 は \vec{C}_1 上の境界条件 (10) 式に一般解 (4) 式および上記の (19) 式を代入することにより, やはり U' の函数として表現することができる.

$$\begin{aligned} \frac{u_3'}{u_3}, \frac{p_3'}{\rho_3 a_3 u_3} = & A \left[K \frac{U'(\xi_3 \cdot \lambda_2 / \lambda_3)}{U_0} \pm L \frac{U'(\eta_3 \cdot \lambda_2 / \mu_2)}{U_0} \right] \\ & + B \left[L \frac{U'(\xi_3 \cdot \mu_2 / \lambda_3)}{U_0} \pm K \frac{U'(\eta_3 \cdot \mu_2 / \mu_3)}{U_0} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

ただし, K, L は領域 (2) および (3) における acoustic impedance ($\rho_i a_i$) による量で,

$$K, L = 1 \pm \frac{\rho_2 a_2}{\rho_3 a_3} \tag{22}$$

によって定義される。

最後に、(21) 式を T 上での境界条件 (12) 式に代入することにより、境界 T の影響領域内の U' に関する次の函数方程式を得る。

$$\frac{U'(2\lambda_2 t')}{U_0} = \frac{1}{AK} \frac{u_T'(t')}{u_3} - \frac{BL}{AK} \frac{U'(2\mu_2 t')}{U_0} \quad (t' \leq t_2') \tag{23-a}$$

又、(21) 式を \vec{C}_2 上での境界条件 (18) 式に代入することにより、境界 \vec{C}_2 の影響領域内の U' に関する函数方程式が得られる。その式において、 U' の二次以上の項を微小量として省略することによって、

$$\frac{U'(\lambda_+)}{U_0} = \frac{1}{AK} q_1 - \frac{BL}{AK} \frac{U'(\mu_+)}{U_0} + q_2 \left(\frac{L}{K} \frac{U'(\lambda_-)}{U_0} + \frac{B}{A} \frac{U'(\mu_-)}{U_0} \right) \quad (t' > t_2') \tag{23-b}$$

なる式を得る。ここで、 λ_{\pm}, μ_{\pm} の定義は

$$\lambda_{\pm} = \lambda_2(t' \pm t_2'), \quad \mu_{\pm} = \mu_2(t' \pm t_2') \tag{24}$$

パラメータ q_1 および q_2 は高圧室の気体の音速比 (a_6/a_5) と比熱比 (γ_6, γ_5) および膨脹波の強さ (a_3/a_6) による量である。

$$q_1 = \frac{(\beta_6 \gamma_6 / \beta_5 \gamma_5) [\{ 1 - (a_3/a_6)^{\beta_5/\beta_6} \} / \{ 1 - (a_3/a_6) \}] - (a_6/a_5)}{(\gamma_6/\gamma_5)(a_3/a_6)^{\beta_5/\beta_6-1} + a_6/a_5} \tag{25-a}$$

$$q_2 = \frac{(\gamma_6/\gamma_5)(a_3/a_6)^{\beta_5/\beta_6-1} - (a_6/a_5)}{(\gamma_6/\gamma_5)(a_3/a_6)^{\beta_5/\beta_6-1} + (a_6/a_5)} \tag{25-b}$$

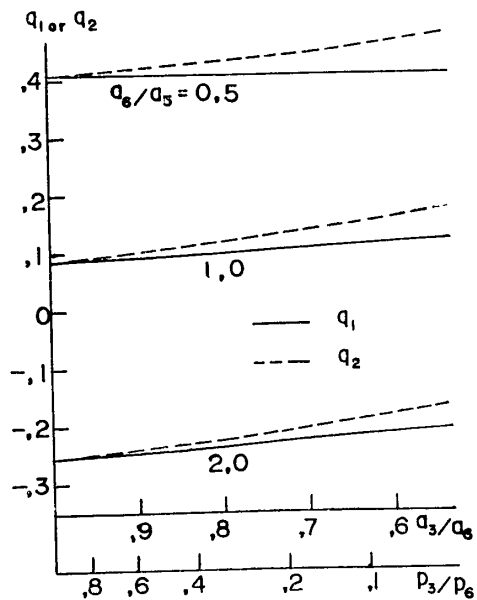
第3図に一例として、 $\gamma_5=7/5, \gamma_6=5/3$ の場合に (a_6/a_5)=0.5, 1.0, 2.0 に対して q_1, q_2 が a_3/a_6 の函数として示されている。下側のスケールは p_3/p_6 の対応値を示す。この図から明らかなように、 q_1, q_2 は膨脹波の強さにはほとんど無関係で、主として高圧室の気体の音速比による量である。

2.4. 膨脹波尾端における速度擾乱

(23) 式は、 u_T'/u_3 が t' の函数として与えられると解くことができるから、これをここで求めておく。明らかに、 u_T'/u_3 は次のような形を取る。

$$\frac{u_T'}{u_3} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t_T' \leq t_1' \\ \phi(t_T') & t_1' \leq t_T' \leq t_2' \end{cases} \tag{26}$$

時間 t_T は T 上の時間を意味する。また t_1 は擾乱 (屈折波) の波頭が膨脹波尾端と出会う時間である (第2図参照)。T 上の擾乱速度分布を表わす函数 $\phi(t_T')$ は膨脹波 \vec{R}_1 と接触面 \vec{C}_2 との干渉によって生ずる屈折波の位置を $x-t$ 面上に特性曲線を描くことによって数値的に求めることができる [4]。しかし、本解析においては、屈折波



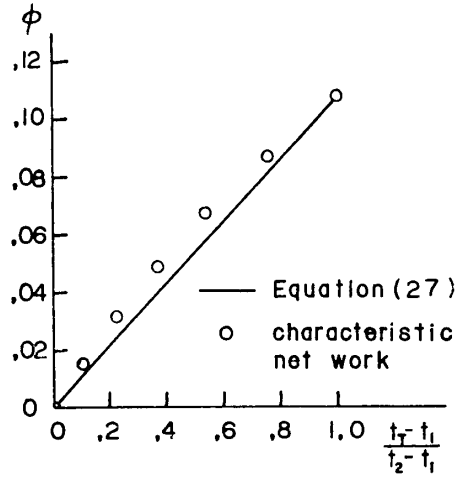
($\gamma_5=7/5, \gamma_6=5/3$)

第3図 q_1, q_2 の数値例

は弱くて、物理量の変動は小さいとしているから、近似的に ϕ は t_T' の一次関数であるとしてみる。函数 $\phi(t_T')$ は $t_T'=t_1'$ で $\phi=0$ となり、 $t_T'=t_2'$ で (23-a) 式と (23-b) 式とが一致する条件から $\phi=q_1$ である。従って、

$$\phi(t_T') = q_1 \frac{t_T' - t_1'}{t_2' - t_1'} \quad (27)$$

と表わすことができる。一例として、第 4 図に $\gamma_6=5/3$, $\gamma_5=7/5$, $a_6/a_5=1.0$, $a_3/a_6=0.7$ の場合について、(27) 式で与えられる $\phi(t_T')$ が特性曲線網で求められた値と比べられている。比較の便宜上、横軸に $(t_T - t_1)/(t_2 - t_1)$ が取られている。ただし、 t_2'/t_1' の値は、微小擾乱法に対しては 2.04 で、特性曲線法に対しては 1.96 である。この図からわかるように、 ϕ が (27) 式で与えられるとすることは、第一次近似として十分に成り立つ。



($\gamma_6=5/3$, $\gamma_5=7/5$
 $a_6/a_5=1.0$, $a_3/a_6=0.7$)

第 4 図 膨脹波尾端 T 上の擾乱速度例

2.5. 函数方程式の解

ここで、(26) 式を用いて U' に対する函数方程式 (23) を解く。

まず、(23-a) 式から、 $0 \leq t_T' \leq t_1'$ に対しては、

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = 0 \quad 0 \leq t_s' \leq 2\lambda_2 t_1' \quad (28-a)$$

となる。 t_s' は衝撃波 \vec{S}_1 上での時間を意味する。

$t_1' \leq t_T' \leq t_2'$ に対しては、 $U'(2\mu_2 t') = 0$, すなわち、 $2\mu_2 t_2' \leq 2\lambda_2 t_1'$ ならば、

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = \frac{1}{AK} \cdot \phi\left(\frac{t_s'}{2\lambda_2}\right) \quad 2\lambda_2 t_1' \leq t_s' \leq 2\lambda_2 t_2' \quad (28-b)$$

となる。また、 $2\mu_2 t_2' \geq 2\lambda_2 t_1'$ となる場合には、

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = \frac{1}{AK} \cdot \phi\left(\frac{t_s'}{2\lambda_2}\right) \quad 2\lambda_2 t_1' \leq t_s' \leq 2\left(\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right)t_1' \quad (28-c)$$

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = \frac{1}{AK} \left[\phi\left(\frac{t_s'}{2\lambda_2}\right) - \frac{BL}{AK} \phi\left(\frac{\mu_2}{2\lambda_2} t_s'\right) \right] \quad 2\left(\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right)t_1' \leq t_s' \leq 2\lambda_2 t_2' \quad (28-d)$$

となる。ただし、 $2\mu_2 t_2' \leq 2(\lambda_2^2/\mu_2)t_1'$ が成り立つ場合である。 $2\mu_2 t_2' > 2(\lambda_2^2/\mu_2)t_1'$ となる場合には、再び (28-d) 式の範囲が二つの部分に分けられる。このような解の分割は、衝撃波で反射した波が再び接触面 \vec{C}_1 で反射して来て、衝撃波と干渉する場合の有無を示している。 $t_1' \leq t_2' (t_s' \leq 2\lambda_2 t_2')$ の範囲内で、膨脹波 \vec{R}_1 の屈折波が n 回 \vec{S}_1 と \vec{C}_1 とで干渉したとすると、

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = \frac{1}{AK} \left[\phi\left(\frac{t_s'}{2\lambda_2}\right) + \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\frac{BL}{AK}\right)^i \phi\left(\frac{\mu_2^i}{2\lambda_2^{i+1}} t_s'\right) \right] \quad (28-e)$$

とかける。 $-BL/AK$ は、 \vec{S}_1 および \vec{C}_1 での反射波が衝撃波速度の変動量に及ぼす影響の程度を示す一種の減衰係数である。すなわち、第 2 図に示したように、 \vec{S}_1 上の P 点で衝撃

波速度に U_p' なる変動を与えた波は \vec{S}_1, \vec{C}_1 で反射した後は弱められて、Q 点では衝撃波速度に $-(BL/AK)U_p'$ なる変動を与えることになる。(20) 式から、単原子気体 ($\gamma_1=5/3$) に対しては $B/A < 0.0557$, 二原子気体 ($\gamma_1=7/5$) に対しては $B/A < 0.139$ である。また (22) 式から、 $|L/K| < 1$ である。従って、 $|BL/AK| \ll 1$ とすることができる。すなわち、このような二次反射波の影響は小さく、微小擾乱の仮定の下では (28-d), (28-e) 式の右辺第二項以下は二次の微小量として省略できる。すなわち、微小擾乱の仮定の下では (28-b) 式がそのまますべての場合に成り立つとしてよい。

$t_1' > t_2'$ に対しては (23-b) 式が適用され、右辺に (28) 式が代入される。(23-b) 式の右辺の $q_2(L/K)$ 又は $q_2(B/A)$ は BL/AK と同じように、 \vec{C}_1 と \vec{C}_2 とからの反射波又は \vec{S}_1 と \vec{C}_2 とからの反射波が衝撃波変動におよぼす影響の程度を示す減衰係数である。第3図の q_2 の値からわかるように、 $|q_2(L/K)| \ll 1$, $|q_2(B/A)| \ll 1$ とすることができる。従って、(23-b) 式の右辺の第二項以下を二次の微小項として省略すると、

$$\frac{U'(t_s')}{U_0} = -\frac{1}{AK} q_1 \quad t_s' \geq 2\lambda_2 t_2' \quad (29)$$

とかける。これは衝撃波 \vec{S}_1 および接触面 \vec{C}_2 における反射波が弱いものとして省略したことに対応する。従って、本解析で考慮に入れる波は、第2図に示したように、 \vec{R}_1 の \vec{C}_2 での屈折波およびその屈折波の \vec{C}_1 での反射波のみである。ここで、 $2\lambda_2 t_1'$, $2\lambda_2 t_2'$ に対応する \vec{S}_1 上の x' の値は 10~20 の程度である。

(28-a), (28-b), (29) 式に対応する \vec{C}_1 上の速度変動量 u_c' は時間を t_c' で表わすとすると、次のようにかける。

$$u_c'/u_2 = 0 \quad 0 \leq t_c' \leq 2t_1' \quad (30-a)$$

$$u_c'/u_2 = (2/K)\phi(t_c'/2) \quad 2t_1' \leq t_c' \leq 2t_2' \quad (30-b)$$

$$u_c'/u_2 = (2/K)q_1 \quad 2t_2' \leq t_c' \quad (30-c)$$

2.6. 仮定の検討

本解析は流れの擾乱量 (U', u_i', p_i') が非擾乱量 (U_0, u_i, p_i') に比べて十分に小さいという仮定に基づいているから、前節で求められた値 U'/U_0 は 1 に比べて十分に小でなくてはならない。(29) 式が $|U'/U_0|$ の最大値を与え、 $AK \sim 0(1)$ であるから、パラメータ q_1 が 1 に比べて充分小であれば微小擾乱の仮定が使えるといえる。第3図で示したように、 q_1 は主として音速比 a_6/a_5 に依存する量である。本仮定成立の条件として、 $|q_1| < 0.3$ を取ると、対応する a_6/a_5 の値は大よそ $0.5 < a_6/a_5 < 2.0$ となる。これが本解析の適用範囲の大まかな推定である。一例として、第5図に気体 (1) として空気、(6) として水素、(5) としてヘリウムを使った場合の q_1/AK を衝撃 Mach 数 M_{s1} の函数として示す (図中実線)。この場合に、 $a_6/a_5 = 1.31$ である。図中の小円は、膨脹波 \vec{R}_1 と接触面 \vec{C}_2 との干渉、これによって生ずる屈折波と接触面 \vec{C}_1 および衝撃波 \vec{S}_1 との干渉を一つ一つ特性曲線法を用いて数値的に解くことによって得られた衝撃波速度の変動量である。両者はかなりよく一致することがわかる。

3. 二段膜衝撃波管への適用

ここでは、第1図に示したような第二の膜の所で断面積変化のある二段膜衝撃波管を考える。この断面積変化はノズル状で、スロートが低圧室断面と一致するように作られているものとする。膜はスロートにおかれる。この衝撃波管の特性を計算するに際して、次の仮定を設ける。

(i) 第二の膜が破れた時、スロートと接触面 \vec{C}_1 との間の流れには二つの場合が生ずる。 \vec{C}_1 の速度がスロートにおける局所音速よりも小であれば、この領域全部が亜音速の一樣な流れとなり、大であれば、流れはスロートで臨界状態となって後に非定常膨脹を行なう [9]。前者は衝撃波 \vec{S}_1 の強さがかなり弱い場合である。ここでは後者の場合を取り扱う。

(ii) スロートが臨界状態となる条件を用いることによって、ノズルの中で定常流が実現されているものとする。中圧室と低圧室との断面積比を与えることによって領域 (6) の流れの Mach 数が求められる。これを用いれば、衝撃波 \vec{S}_2 の衝撃 Mach 数 M_{s2} に対する反射衝撃波 \vec{S}_{R1} の強さが計算できる。この時に反射衝撃波 \vec{S}_{R1} は一つの衝撃波面でノズルから反射されるものと仮定する。(計算の詳細は付録参照)

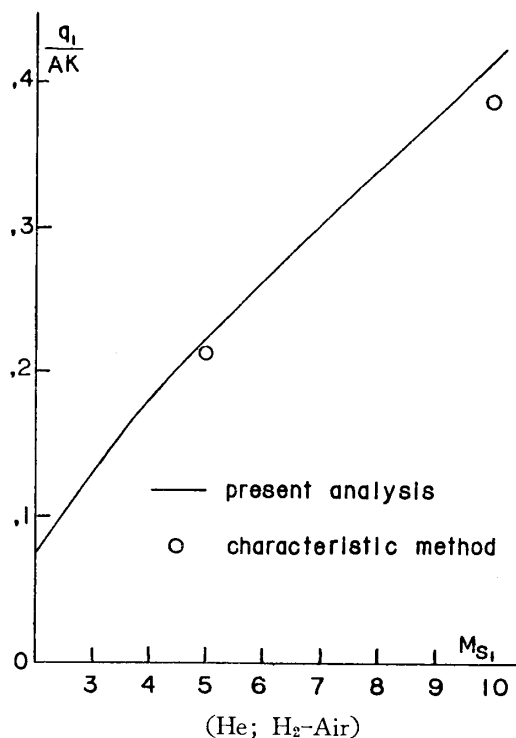
次に、反射衝撃波 \vec{S}_{R1} と接触面 \vec{C}_2 との干渉について次の仮定をする。

(iii) この干渉によって生ずる屈折波は弱くて、これが低圧部にはいりこんで後にも微小擾乱の仮定が適用されるものとする。

(iv) 上記の屈折波がノズルで反射されて \vec{C}_2 と繰り返し干渉して生ずる透過波 \vec{W} (第1図参照) もまた弱く、 \vec{W} は等エントロピー単純波であるとする。

仮定 (iii) から、二段目の膜の位置を原点にとると、 $x \geq 0$ に対しては、流れの状況は前章のモデルと全く同じで、前章の解析がそのまま用いられる。 ϕ は当然ちがってくるが、一次近似としてやはり (27) 式をとるものとする。また基準量として状態 (6), (5) の物理量の代わりに、スロートにおける物理量を用いる。初め中圧室および高圧室にあった気体のスロート (6*) および (5*) における物理量は、仮定 (i) (ii) (iv) を用いることによって、衝撃 Mach 数 M_{s2} の関数として求めることができる (付録参照)。 x_0 としては、中圧室の長さを取ることにする。

前章の解析と異なる点は \vec{C}_2 上における境界条件式 (18) で、従って、 q_1, q_2 も変わって



第5図 衝撃波速度変動量の最大値

る。この式は次のように求められる。高圧室気体に対する Rieman 不変量の式は、(15) 式の代りに、

$$a_4 + \frac{\gamma_{10}-1}{2} u_4 = \frac{\gamma_{10}+1}{2} a_{5*} \tag{31}$$

が用いられる。また (16) 式の代りに、等エントロピー関係式として、

$$\frac{a_4}{a_{5*}} = \left(\frac{p_4}{p_{5*}}\right)^{\beta_{10}}, \quad \frac{a_3}{a_{6*}} = \left(\frac{p_3}{p_{6*}}\right)^{\beta_7} \tag{32}$$

が用いられる。従って、 \vec{C}_2 上での境界条件式は、(18) 式の代りに、

$$\left(\frac{a_3}{a_{6*}}\right)^{\beta_{10}/\beta_7} \left(1 + \frac{p_3'}{p_3}\right)^{\beta_{10}} + \beta_{10} \gamma_{10} \frac{a_{6*}}{a_{5*}} \frac{u_3}{a_{6*}} \left(1 + \frac{u_3'}{u_3}\right) = \alpha_{10} \beta_{10} \gamma_{10} \tag{33}$$

となる。ここで、 α_{10} は高圧室気体の比熱比 γ_{10} の函数で、定義は

$$\alpha_{10} = \frac{\gamma_{10}+1}{\gamma_{10}-1} \tag{34}$$

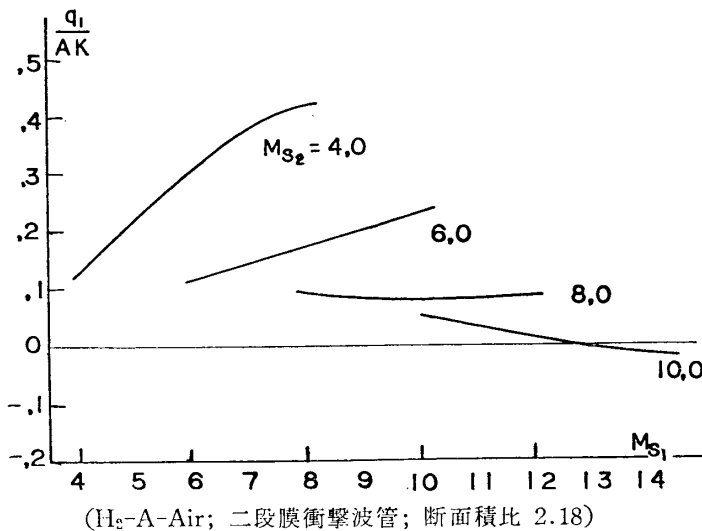
U' に関する函数方程式は (23) 式と同じで、解も (28), (29) 式になるが、 q_1, q_2 は次の式によって与えられる。

$$q_1 = \frac{\frac{\beta_7 \gamma_7}{\beta_{10} \gamma_{10}} \left\{ \alpha_{10} \beta_{10} \gamma_{10} \left(\frac{p_{5*}}{p_{6*}}\right)^{\beta_{10}} - \left(\frac{a_3}{a_{6*}}\right)^{\beta_7/\beta_{10}} \right\} / \left(\alpha_{10} \beta_{10} \gamma_{10} - \frac{a_3}{a_{6*}} \right) - \frac{a_{6*}}{a_{5*}} \left(\frac{p_{5*}}{p_{6*}}\right)^{\beta_{10}}}{\frac{\gamma_7}{\gamma_{10}} \left(\frac{a_3}{a_{6*}}\right)^{\beta_7/\beta_{10}-1} + \frac{a_{6*}}{a_{5*}} \left(\frac{p_{5*}}{p_{6*}}\right)^{\beta_{10}}} \tag{35-a}$$

$$q_2 = \frac{(\gamma_7/\gamma_{10})(a_3/a_{6*})^{\beta_{10}/\beta_7-1} - (a_{6*}/a_{5*})(p_{5*}/p_{6*})^{\beta_{10}}}{(\gamma_7/\gamma_{10})(a_3/a_{6*})^{\beta_{10}/\beta_7-1} + (a_{6*}/a_{5*})(p_{5*}/p_{6*})^{\beta_{10}}} \tag{35-b}$$

すなわち、 q_1, q_2 は高圧室と中圧室の気体の比熱比 (γ_{10}, γ_7) と膨脹波の強さ (a_3/a_{6*}) およびスロートにおける物理量 ($a_{6*}, a_{5*}, p_{6*}, p_{5*}$) の函数である。

各室の気体を与えられると、スロートにおける物理量は衝撃 Mach 数 M_{s2} の函数として



第6図 衝撃波速度変動量の最大値

与えられ、これに対する膨脹波の強さを与えると、衝撃 Mach 数 M_{s2} が一意的に定められる。一例として、中圧室と低圧室の断面積比が 2.18 で、気体として水素 (H₂)-アルゴン (A)-空気を用いた衝撃波管について、 q_1/AK が M_{s2} をパラメータとして M_{s1} の函数として第6図に示される。第7図には、この時の $a_{5*}/a_{6*}, p_{5*}/p_{6*}$ および a_9/a_8 が M_{s2} の函数として示さ

れる。またこの例で、衝撃波速度の変動量が問題となるのは、低圧室で膜からの距離が中圧室の長さの5~10倍の所である。

二段膜衝撃波管の場合について、本解析の適用範囲を調べて見よう。 q_1 の a_3/a_{6*} による変化は小さく、 $(p_{5*}/p_{6*})^{\beta_{10}} \sim 1$ であるから、 q_1 は主として a_{6*}/a_{5*} に依存する。又、第7図の例でもわかるように、 $a_{6*}/a_{5*} = k(a_9/a_8)$ とすると、一般に $k \sim 1$ である。従って前節と同様に $|q_1| < 0.3$ とすると、大よその範囲として、 $0.5 < a_9/a_8 < 2.0$ が得られる。第6図、第7図の例はこの範囲内にある。

4. 結 論

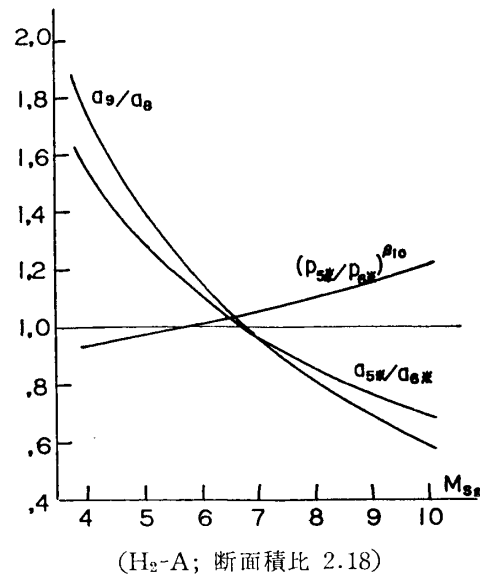
二段目の膜で断面積変化のある二段膜衝撃波管において、中圧室にできる接触面が低圧室にはいりこんだ時に流れにおよぼす影響が解析的に求められた。この接触面は膨脹波と干渉し、その時に生ずる屈折波が低圧室にできる衝撃波や接触面と干渉して流れを乱す。この時の衝撃波速度や接触面速度の変動量を求めるのに、特性曲線を用いる面倒な計算の代りに、微小擾乱の仮定を設けることにより、より簡単な計算法が示された。解析は高圧部に静止接触面をもつ通常の衝撃波管をモデルとして行なわれた。結果は(28)~(30)式に与えられるが、ここに現われるパラメータ q_1 は、モデルに対しては(25)式、二段膜衝撃波管に対しては(35)式が用いられる。この解析は中圧室の接触面(モデルでは高圧室の静止接触面)の両側の気体の音速比が大よそ0.5~2.0である場合に適用できる。ただし、屈折波が衝撃波に影響をおよぼす範囲は、大よそ、低圧部で膜からの距離がモデルでは膜と静止接触面との距離の10~20倍以上、二段膜衝撃波管では中圧室の長さの5~10倍以上の所であると見積られる。

最後に、本論文の研究過程において有益な御助言を賜った河村龍馬教授および終始激励と懇切な御指導を賜った小口伯郎助教授に厚く御礼を申し上げます。

1961年11月6日 航空力学部

参 考 文 献

- [1] E. L. Resler, S. C. Lin and A. Kantrowitz: The Production of High Temperature Gases in Shock Tube, Jr. App. Phys. Vol. 23, 1952.
- [2] B. L. Henshall: The Theoretical Performance of Shock Tubes Designed to Produce High Shock Speeds, A. R. C. TR. No. 407, 1958.
- [3] E. G. Chapin and R. J. Heyman: Performance Characteristics of a Chambered Buffered Shock Tube, Proc. National Symposium on Hypervelocity Techniques, Denver, Colorado, 1960.
- [4] R. Courant and K. O. Friedrichs: *Supersonic Flow and Shock Waves*, Intersci. Pub.



第7図 a_9/a_8 , a_{5*}/a_{6*} , $(P_{5*}/P_{6*})^{\beta_{10}}$

Inc., New York, 1948.

- [5] I. I. Glass and J. Gordon Hall: Shock Tubes, Part I and Part II, UTIA Rev. No. 12, 1958.
- [6] I. J. Billington and I. I. Glass: On the One Dimensional Refraction of a Rarefaction of a Rarefaction Wave at a Contact Surface, UTIA Rep. No. 32, 1955.
- [7] I. J. Billington: An Experimental Study of One Dimensional Refraction of a Rarefaction Wave at a Contact Surface, UTIA Rep. No. 32, 1955.
- [8] D. A. Spence and B. A. Woods: Boundary Layer and Combustion Effects in Shock Tube Flows, Proc. 11th Symposium of C. R. S. 'Hypersonic Flow.' London, 1960.
- [9] R. A. Alpher and D. R. White: Flow in Shock Tube with Area Change at the Diaphragm Section, Jr. Fluid Mech. Vol. 3, 1958.

付 録

a_{5^*}/a_{6^*} , p_{5^*}/p_{6^*} の計算

(35) 式に出てくる高圧室気体と中圧室気体とのスロートにおける音速比 a_{5^*}/a_{6^*} および圧力比 p_{5^*}/p_{6^*} は次のようにして求められる。まず、これらの比は次のように書き直すことができる、

$$\frac{a_{5^*}}{a_{6^*}} = \frac{a_{5^*}}{a_{5a}} \cdot \frac{a_{5a}}{a_5} \cdot \frac{a_5}{a_9} \cdot \frac{a_9}{a_7} \cdot \frac{a_7}{a_8} \cdot \frac{a_8}{a_6} \cdot \frac{a_6}{a_{6^*}} \quad (1)$$

$$\frac{p_{5^*}}{p_{6^*}} = \frac{p_{5^*}}{p_{5a}} \cdot \frac{p_{5a}}{p_5} \cdot \frac{p_5}{p_9} \cdot \frac{p_9}{p_8} \cdot \frac{p_8}{p_6} \cdot \frac{p_6}{p_{6^*}} \quad (2)$$

添字は、それぞれ次のような状態を表わす (第1図)。

中圧室気体に対して、(7) 静止気体、(8) 衝撃波 \vec{S}_2 を通過した気体、(6) 反射衝撃波 \overleftarrow{S}_{R1} を更に通過した気体。

高圧室気体に対して、(10) 静止気体、(9) 膨脹波 \overleftarrow{R}_3 を通過した気体、(5) 衝撃波 \overleftarrow{S}_{R1} と接触面 \vec{C}_2 との干渉の時の透過衝撃波 \overleftarrow{S}_{R2} を通過した気体、

(5a) 上記の干渉の時の屈折波がノズルで反射して \vec{C}_2 と繰り返し干渉して生ずる擾乱波 \overleftarrow{W} を通過した気体。

(1), (2) 式の右辺の音速比, 圧力比は次のようにして求められる。

(i) a_6/a_{6^*} , p_6/p_{6^*} , a_5/a_{5^*} , p_5/p_{5^*} .

ノズル・スロートで臨界状態でノズルの中は定常流としているから、一次元定常流理論から a_6/a_{6^*} , p_6/p_{6^*} は状態 (6) の流れの Mach 数 M_6 の函数であり、 a_5/a_{5^*} , p_5/p_{5^*} は状態 (5a) のマッハ数 M_{5a} の函数となる。更に、 M_{5a} , M_6 は低圧室と中圧室の断面積比が与えられれば計算することができる。いずれの計算にも気体の比熱比だけがパラメータとして入ってくる。従って、気体の種類と断面積比が与えられれば、これらの比は決められる。

(ii) a_6/a_8 , p_6/p_8

これらの比は、反射衝撃波 \overleftarrow{S}_{R1} の強さがわかれば Rankine-Hugoniot の式から求めることができる。

\overleftarrow{S}_{R1} の速度を U_{R1} とし領域 (6), (8) の速度の \overleftarrow{S}_{R1} に相対的な値を \bar{u}_6 , \bar{u}_8 とすると、

$$\bar{u}_3 = U_{R1} + u_3, \quad \bar{u}_6 = U_{R1} + u_6 \quad (3)$$

となる。ここで、Mach 数 M_6 , \bar{M}_6 , M_8 , \bar{M}_8 および衝撃 Mach 数 M_{R1} を次のように定義する。

$$\bar{M}_8 = \frac{\bar{u}_8}{a_8} = \frac{U_{R1} + u_8}{a_8} = \frac{U_{R1}}{a_8} + \frac{u_8}{a_8} = M_{R1} + M_8 \quad (4)$$

$$\bar{M}_6 = \frac{\bar{u}_6}{a_6} = \frac{U_{R1} + u_6}{a_6} = \frac{U_{R1}}{a_6} + \frac{u_6}{a_6} = M_{R1} \frac{a_8}{a_6} + M_6 \quad (5)$$

(4), (5) 式において, \bar{M}_6 と a_8/a_6 は衝撃波関係式から \bar{M}_8 の函数として与えられる。 M_8 は衝撃 Mach 数 M_{s2} が与えられると, やはり衝撃波関係式から求められる。 M_6 は (i) で求められる。従って, (4), (5) 式は M_8 (すなわち M_{s2}) をパラメータとし, 未知量を \bar{M}_8 , M_{R1} とする連立方程式となる。この式を解いて反射衝撃波の強さ (\bar{M}_8 又は M_{R1}) が求められる。

(iii) a_7/a_8 , a_9/a_7

a_7/a_8 は M_{s2} が与えられれば衝撃波関係式から求めることができる。

a_9/a_7 は Riemann 不変量を用いて, 次のように表わすことができる。

$$\frac{a_9}{a_7} = \frac{a_{10}}{a_7} - \beta_{10} \gamma_{10} \frac{u_8}{a_7} \quad (6)$$

ここで, a_{10}/a_7 は高圧室および中圧室気体の初期状態の音速比, u_8/a_7 は M_{s2} の函数として与えられる,

(iv) $p_9/p_8 = 1$

(v) p_5/p_9 , a_5/a_9 .

これらの比は, 反射衝撃波 \overleftarrow{S}_{R1} と接触面 \overrightarrow{C}_2 との干渉の時の透過衝撃波 \overleftarrow{S}_{R2} の強さがわかれば, 衝撃波関係式から求めることができる。文献 [5] によると, 圧力比 p_5/p_6 は音速比 a_9/a_8 , 圧力比 p_6/p_8 および比熱比 γ_{10} , γ_7 の函数として求めることができる。ただし, これもまた, 高次の代数方程式を数値的に解くことになる。今の場合には, 屈折波が比較的弱いとしているから, $p_5/p_6 = 1 + \delta$ ($\delta \ll 1$) とおくと,

$$\delta = \frac{\frac{a_9}{a_8} \frac{\gamma_7}{\gamma_{10}} \sqrt{\frac{\beta_7}{\beta_{10}}} \sqrt{\frac{\alpha_7(p_6/p_8) + 1}{\alpha_{10}(p_6/p_8) + 1}} - 1}{\frac{1}{1 - (p_6/p_8)} \left(\sqrt{\frac{(p_6/p_8) \{ (p_6/p_8) + \alpha_7 \}}{1 + \alpha_7}} + \frac{p_6}{p_8} \right) + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{10}(p_6/p_8)}{1 + \alpha_{10}(p_6/p_8)}} \quad (7)$$

なる式を得る。従って, \overleftarrow{S}_{R2} の強さは

$$p_5/p_9 = (p_5/p_6)(p_6/p_8) = (p_6/p_8)(1 + \delta) \quad (8)$$

から求めることができる。

(vi) a_{5a}/a_5 , p_{5a}/p_5

擾乱波に対する仮定 (vi) (第 3 章) から, \overleftarrow{W} に対して Riemann 不変量を適用して,

$$\frac{a_{5a}}{a_5} = \frac{1 + \beta_{10} \gamma_{10} M_5}{1 + \beta_{10} \gamma_{10} M_{5a}} \quad (9)$$

とすることができる。ここで, M_5 は (i) で, M_{5a} は (v) で求められている。圧力比は音速比から等エントロピー関係を使って求められる。 (付録終り)