

# 垂直磁場の中での電導性流体の 非圧縮管流の近似解\*

坂 尾 富 士 彦†

## An Approximate Solution for Incompressible Channel Flow of a Conducting Fluid under Transverse Magnetic Field.

By

Fujihiko SAKAO

**Abstract:** The solution for the flow of incompressible conducting fluids through a straight channel under a uniform transverse magnetic field is obtained by using the variational method proposed by Tani. This method consists in assuming the distributions of axial velocity and magnetic field in the form containing parameters and satisfying the boundary conditions, and determining the parameters so that a certain integral quantity is minimized. Assuming the Hartmann number sufficiently high, the distributions of velocity and magnetic field are chosen by boundary-layer considerations.

It is found that the shape of assumed distribution has a significant effect on the calculated value of the flow rate for the channel with insulated walls. On the contrary, the assumed distribution hardly affects the flow rate in the case of conducting walls provided that Hartmann number is large.

Applied to the flow through a circular channel with insulated wall, the variational method is shown to give a result which agrees very well with that of existing exact solutions.

### 概 要

一様な垂直磁場の中におかれたまっすぐな管の中の、電導性非圧縮性流体の流れに対する解を、Tani によって提案された変分法を用いて求めた。この方法はまず軸方向速度と磁界との分布を境界条件をみたしかついくつかのパラメータを含む形に仮定し、そのパラメータの値をある一つの積分量が停留値をとるように定めるものである。Hartmann 数が大きいと仮定して、速度と磁界の分布は境界層型であるように選ばれている。

絶縁体の管では仮定する分布形が、計算される流量に重大な影響を与えることが見出される。一方、導体の管では Hartmann 数が大きい限り、仮定する分布形は流量にあまり影響しない。

絶縁体の円管の中の流れに適用して得られた結果は、これまでに存在する厳密解と非常によく一致した。

---

\* 谷 一郎紹介

† 東京大学大学院数物系研究科航空学専門課程

註 この論文の短い抄録は、Journ. Aerospace Sci. の Reader's Forum に掲載される予定である。

## 目 次

- |             |           |
|-------------|-----------|
| 1. 緒 言      | 4. 導体管の場合 |
| 2. 解析の方法    | 5. 結 論    |
| 3. 絶縁体円管の場合 |           |

## 1. 緒 言

電導性流体が磁界の中におかれた管の中を流れる場合、流体中には速度と磁束密度のベクトル積に比例する起電力を生ずる。これにより流体内に流れる電流と磁界との相互作用によって、流体に一種の体積力が作用して流れの有様を変え、その結果電流の分布もまた変わる。このような作用の強弱はいわゆる Hartmann 数  $M=Ba\sqrt{\sigma/\eta}$  の大小によって表わされ、 $M$  が大きいときには流れの速度分布や全流量などは磁界の存在によって著しい影響を受けることがよく知られている。

このような磁界中の管流の速度分布・電流密度・電位分布・流量などは、電磁ポンプあるいは電磁流量計その他の応用と関連して多くの人々によって研究されている。そしてこれまでに Hartmann [1] の解を初めとして、いくつかの場合については厳密解も求められている [2] [3] [4] [5]。しかしこれらは当然、管の断面が円・長方形または平行な2枚の平板というように幾何学的に簡単な形をしている場合に限定されている。そこで管の断面が任意の形をしているときの解が研究されるのは当然で、その努力はすでに Shercliff [2] に始まっている。これは管が不導体で Hartmann 数  $M$  が非常に大きいときに、任意の断面形をもつ管について速度分布を与えるものであった。その結論によれば、磁界に平行な方向に沿っての速度分布は管壁に接して境界層をもち内部では一様であって、この一様な部分の速度はその位置における磁界に平行な方向の管の広がりによって比例するのである。最近 Chang および Lundgen [4] は singular perturbation の方法によって、いっそう厳密に同じ結論を得ている。彼らはさらに断面が磁界に垂直な面に関して対称であるとの制限をおく代わりに、管壁が厚さは一様であるが電導度は任意の物質でできている場合について、Hartmann 数が非常に大きい場合の速度分布を求める式を与えている。

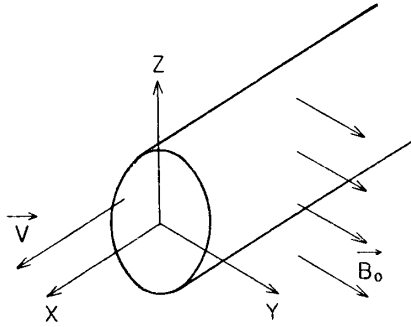
一方、Tani [6] は変分法を応用する解法を提案した。これは管壁が完全導体または絶縁体の場合に限られるが、原理的には任意の断面形をもつ管内の流れを Hartmann 数  $M$  の任意の値について解くことができるものである。Tani はこの方法の応用例として、Shercliff [2] の取り扱った長方形断面の管内の流れをやや拡張された条件のもとで解いている。ここに述べる研究はこの方法を円形断面の管内の流れに適用して、Hartmann 数がある程度大きいときの流量をかなりの精度で求めることを目的としたものである。

## 2. 解析の方法

問題は第1図のように、一様磁場の中におかれた一定断面のまっすぐな管の中を電導性流体が流れる場合とする。

次のような仮定をおく。

- a. 磁界は時間的に不変かつ空間的に一様である。また、その方向は管軸に垂直と仮定しても一般性を失わない。



第1図 流れおよび磁場と座標系

- b. 流れは定常な層流で、入口から充分長い距離を経ており、管軸の方向には圧力を除いて事柄は変わらない。
- c. 流体は非圧縮性で電気的には中性であり、Hall 効果はなく、密度  $\rho$ ・電導度  $\sigma$ ・透磁率  $\mu$ ・粘性係数  $\eta$  は一定である。
- d. 管壁は絶縁体または完全導体で作られ、完全導体の場合には流体との間に接触抵抗はないものとする。

基本方程式はよく知られるように、流体運動の方程式と電磁気の方程式とから成るが、それらのうちこの問題を解く上に直接考えなければならないのは次の二つである。

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\text{grad } P + \eta \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

ただし、単位として m.k.s.a 単位系を用いる。  $\mathbf{V}$  と  $P$  はそれぞれ流れの速度と圧力を、  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  はそれぞれ電流密度・磁束密度・電界の強さを表わす。  $D/Dt$  は流体とともに動いてみたときの時間的変化を表わす、いわゆる Euler 微分である。

第1図に示すように座標系を取り、すなわち管軸の方向に  $X$  軸、一様磁界の方向に  $Y$  軸、それらに垂直に  $Z$  軸を選び、仮定 a, b, c を考えに入れると、(1) (2) の解は次のような形に仮定するのがもっとも自然である。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V} &= \{V_x(Y, Z), 0, 0\}, & \mathbf{B} &= \{B_x(Y, Z), B_0, 0\}, \\ \mathbf{j} &= \{0, j_Y(Y, Z), j_Z(Y, Z)\} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

これらを方程式 (1) に入れ、(2) によって  $\mathbf{j}$  に  $\text{rot}(\mathbf{B}/\mu)$  を代入すれば、その  $X$  成分は次のようになる。

$$\eta \left( \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) V_x - \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial Y} = 0 \quad (4)$$

他の二つの成分を取れば断面内で  $P + \frac{1}{2}(B^2/\mu)$  が一定であるという関係が出てくる。

方程式 (2) の rotation を取り、ベクトル演算の恒等式

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \text{grad}(\text{div } \mathbf{A})$$

と  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  および  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  を考えに入れると  $X$  成分に対する方程式として、

$$\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) B_x - \sigma B_0 \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

が得られる、他の二つの成分は  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  が (3) の形をしていれば自然に満足されている。

境界条件は、流れの速度に対しては

$$\text{壁面で } V_x = 0 \quad (6)$$

である。磁束密度の  $X$  方向成分  $B_x$  に対しては、まず管壁が絶縁体である場合には壁に垂

直な電流成分がないことから,

$$\text{壁面で } (\text{rot } \mathbf{B})_N = \frac{\partial B_x}{\partial S} = 0$$

$$\therefore (B_x)_{\text{壁面}} = \text{const.}$$

ただし,  $N$  は流体から壁へ向って立てた法線,  $S$  は壁面に沿う座標である, 流れに平行な一様磁場を増減しても事柄は変わらないから, 上の const. の値は 0 とおいて差し支えない. 結局

$$\text{絶縁壁面では } B_x = 0 \quad (7)$$

となる. 一方, 壁が完全導体である場合には壁面に平行な電流がないことから,

$$\text{壁面で } (\text{rot } \mathbf{B})_S = -\frac{\partial B_x}{\partial N} = 0 \quad (7')$$

となる.

ここで, 外部の一様磁場の磁束密度  $B_0$  と管の断面の代表的な長さ  $a$  (たとえば半径) を基準にとって, 諸量を次のように無次元化する.

$$y = \frac{Y}{a}, \quad z = \frac{Z}{a}, \quad u = \mu \sigma a V_x, \quad h = \frac{B_x}{B_0},$$

$$G = -\frac{\mu \sigma a^3}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X}$$

この結果, 方程式 (4) (5) は

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u + M^2 \frac{\partial h}{\partial y} + G &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) h + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる. ここに

$$M = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$$

は Hartmann 数である. 境界条件 (6) (7) (7') は,  $N$  方向の長さを  $a$  で無次元化したものを  $n$  として,

$$\text{絶縁壁面で } u = 0, \quad h = 0 \quad (9)$$

$$\text{導体壁面で } u = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (9')$$

となる.

結局, 問題は方程式 (8) を (9) または (9') の境界条件の下で解くことになったが, Tani [6] によれば, それは次のような積分を同じ (9) または (9') の条件の下で停留値ならしめるような  $u, h$  の形を見出すことと全く同等である.

$$I = \int_A \left[ Gu - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} M^2 \left\{ u \frac{\partial h}{\partial y} - h \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} M^2 \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] dA \quad (10)$$

ここに, 積分は断面  $A$  の全体にわたって行なわれるものとする.

## 3. 絶縁体円管の場合

上記の方法を応用して管流を解く方法は、Tani [6] によって長方形断面の管の場合の例が示されているが、ここでは内半径が  $a$  である絶縁体の円管の中の流れについて、流量を求めてみよう、

Hartmann 数  $M$  が相当地に大きいときの流速分布は、少なくとも磁界に平行な方向に沿っての分布については境界層型であることが知られている。そこで  $u, h$  を次のような形に仮定する。

$$u = u_0 F(r, \theta), \quad h = h_0 F(r, \theta) r \sin \theta$$

ただし

$$F(r, \theta) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq r \leq 1 - \delta(\theta) \\ 2\left(\frac{1-r}{\delta}\right) - \left(\frac{1-r}{\delta}\right)^2 & : 1 - \delta(\theta) \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$\delta(\theta) = \begin{cases} \frac{\delta_0}{|\sin \theta|} & : \begin{cases} \theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0 \\ \text{または} \quad \pi + \theta_0 \leq \theta \leq 2\pi - \theta_0 \end{cases} \\ \frac{\delta_0}{\sin \theta_0} & : \begin{cases} -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ \text{または} \quad \pi - \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0 \end{cases} \end{cases}$$

ここで  $y = r \sin \theta$ ,  $z = -r \cos \theta$  で、四つのパラメーター  $u_0, h_0, \delta_0, \theta_0$  の値を適当に選んで (10) を停留値ならしめる。(11) の中には、境界層外の管の軸に近い部分の流速が磁界に垂直な方向 ( $z$  方向) には変化するという、Shercliff [2] [7] および Chang and Lundgen [4] によって示された事実は見掛け上考えられていない。しかしこのことは、境界層の厚さ  $\delta(\theta)$  が磁界に平行な壁の近くで大きくなるとすることで補なうことができると考えられる。 $\delta(\theta) \propto |\sin \theta|^{-1}$  の関係は Shercliff [7] の解を参照したものである。

積分 (9) を極座標で表わすと

$$I = \int_A \left[ Gu - \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right\} + \frac{1}{2} M^2 \left\{ \left( u \frac{\partial h}{\partial r} - h \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sin \theta + \left( u \frac{\partial h}{\partial \theta} - h \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \frac{\cos \theta}{r} \right\} + \frac{1}{2} M^2 \left\{ \left( \frac{\partial h}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \right] dA \quad (10')$$

となる。これに (11) を入れると  $I$  が  $u_0, h_0, \delta_0, \theta_0$  の関数として次のように表わされる。

$$I = \left\{ \pi - \frac{4}{3} \delta_0 \left( \frac{\theta_0}{\sin \theta_0} - \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1}{3} \delta_0^2 \left( \frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right) \right\} G u_0$$

$$+ \left\{ -\frac{8}{3} \frac{1}{\delta_0} (\theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0) + \frac{1}{3} \pi - \frac{2}{15} \delta_0 \left( \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) - \frac{2}{45} \delta_0^2 \frac{\cos^3 \theta_0}{\sin^3 \theta_0} - \frac{1}{105} \delta_0^3 \left( 2 \frac{\cos \theta_0}{\sin^4 \theta_0} - \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) \right\} u_0^2$$

$$+ \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{14}{15} \delta_0 \left( \frac{\theta_0}{\sin \theta_0} - \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{4}{15} \delta_0^2 \left( \frac{\theta_0}{\sin^2 \theta_0} + \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \right) \right\} M^2 u_0 h_0$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{4}{9} \frac{1}{\delta_0} (3\theta_0 \sin \theta_0 - \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0 + 4 \cos \theta_0) - \frac{\pi}{2} \right. \\
& + \frac{2}{15} \delta_0 \left( 3 \frac{\theta_0}{\sin \theta_0} + \cos \theta_0 - 2 \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) \\
& \left. + \frac{2}{3} \delta_0^2 \left( -\frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} + \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right\} M^2 h_0^2
\end{aligned} \tag{12}$$

四つのパラメーター  $u_0$ ,  $h_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\theta_0$  は次の四つの方程式から決められる.

$$\frac{\partial I}{\partial u_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial h_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \delta_0} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \theta_0} = 0 \tag{13}$$

これらの方程式を解析的に解くことは望みがないので, Hartmann 数  $M$  がかなり大きいとしてその逆冪について展開する. まず  $u_0$ ,  $h_0$ ,  $\delta_0$ ,  $\theta_0$  の大きさの見積もりを行なうと, (13) が矛盾なく成り立つためには次のようであればならないことがわかる.

$$u_0 = O\left(\frac{1}{M}\right), \quad h_0 = O\left(\frac{1}{M^2}\right), \quad \delta_0 = O\left(\frac{1}{M}\right), \quad \theta_0 = O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$$

そこで

$$\left. \begin{aligned}
u_0 &= \frac{U_0}{M} \left( 1 + \frac{a_1}{M} + \frac{a_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} + \dots \right) \\
h_0 &= \frac{H_0}{M^2} \left( 1 + \frac{b_1}{M} + \frac{b_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} + \dots \right) \\
\delta_0 &= \frac{C_0}{M} \left( 1 + \frac{c_1}{M} + \frac{c_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} + \dots \right) \\
\theta_0 &= \frac{D_0}{\sqrt{M}} \left( 1 + \frac{d_1}{\sqrt{M}} + \frac{d_2}{M} + \frac{d_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} + \dots \right)
\end{aligned} \right\} \tag{14}$$

とおき, (13) の中で 1 に比べて  $1/M$  の程度の量まで取ると,  $U_0, H, \dots, a_1, b_1, \dots, a_1', b_1', \dots$  を決める式として次の関係が得られる.

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} \quad G\pi - \frac{4}{3} G C_0 \left( 1 - \ln \frac{D_0}{2} \right) \frac{1}{M} + \frac{4}{3} G C_0 \frac{1}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} \\
& + \frac{U_0}{C_0} \frac{1 + \frac{a_1}{M} + \frac{a_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 + \frac{c_1}{M} + \frac{c_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}}} \left[ -\frac{16}{3} + \left( -\frac{8}{3} D_0^2 + \frac{2}{3} \pi C_0 - \frac{4}{15} \frac{C_0^2}{D_0^2} \right) \frac{1}{M} \right] \\
& + H_0 \left( 1 + \frac{b_1}{M} + \frac{b_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{14}{15} C_0 \left( 1 - \ln \frac{D_0}{2} \right) \frac{1}{M} + \frac{14}{15} C_0 \frac{1}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} \right] \\
& = 0 \\
& \text{(ii)} \quad U_0 \left( 1 + \frac{a_1}{M} + \frac{a_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{14}{15} C_0 \left( 1 - \ln \frac{D_0}{2} \right) \frac{1}{M} + \frac{14}{15} C_0 \frac{1}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}} \right] \\
& + \frac{H_0}{C_0} \frac{1 + \frac{b_1}{M} + \frac{b_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}}}{1 + \frac{c_1}{M} + \frac{c_1'}{M} \ln \frac{1}{\sqrt{M}}} \left[ \frac{32}{9} - \pi C_0 \frac{1}{M} \right] = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(iii)} \quad -\frac{4}{3}GU_0\left(1-\ln\frac{D_0}{2}\right)\frac{1}{M}+\frac{4}{3}GU_0\frac{1}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}} \\
& \quad +\frac{U_0^2}{C_0^2}\frac{\left(1+\frac{a_1}{M}+\frac{a_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}{\left(1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}\left[\frac{8}{3}+\left(\frac{4}{3}D_0^2-\frac{2}{15}\frac{C_0^2}{D_0^2}\right)\frac{1}{M}\right] \\
& \quad -\frac{14}{15}U_0H_0\left(1-\ln\frac{D_0}{2}\right)\frac{1}{M}+\frac{14}{15}U_0H_0\frac{1}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}} \\
& \quad -\frac{16}{9}\frac{H_0^2}{C_0^2}\frac{\left(1+\frac{b_1}{M}+\frac{b_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}{\left(1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}=0 \\
& \text{(iv)} \quad \frac{4}{3}G\frac{U_0C_0}{D_0}\frac{\left(1+\frac{a_1}{M}+\frac{a_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\left(1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}{1+\frac{d_1}{\sqrt{M}}+\frac{d_2}{M}+\frac{d_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}}\left[1-\frac{1}{6}D_0^2\frac{1}{M}\right] \\
& \quad -\frac{8}{3}\frac{U_0^2D_0}{C_0}\frac{\left(1+\frac{a_1}{M}+\frac{a_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2\left(1+\frac{d_1}{\sqrt{M}}+\frac{d_2}{M}+\frac{d_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}{1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}}\times \\
& \quad \times\left[1-\frac{1}{2}D_0^2\frac{1}{M}\right] \\
& \quad +\frac{4}{15}\frac{U_0^2C_0}{D_0^3}\frac{\left(1+\frac{a_1}{M}+\frac{a_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2\left(1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}{\left(1+\frac{d_1}{\sqrt{M}}+\frac{d_2}{M}+\frac{d_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^3}\times \\
& \quad \times\left[1+\frac{1}{2}D_0^2\frac{1}{M}\right]+ \\
& \quad \frac{14}{15}\frac{U_0H_0C}{D_0}\frac{\left(1+\frac{a_1}{M}+\frac{a_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\left(1+\frac{b_1}{M}+\frac{b_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)}{1+\frac{d_1}{\sqrt{M}}+\frac{d_2}{M}+\frac{d_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}}\times \\
& \quad \times\left(1+\frac{c_1}{M}+\frac{c_1'}{M}\ln\frac{1}{\sqrt{M}}\right)\times\left[1+\frac{1}{6}D_0^2\frac{1}{M}\right] \\
& \quad +\left(-\frac{2}{3}G\frac{U_0C_0^2}{D_0^2}-\frac{8}{15}\frac{U_0H_0C_0^2}{D_0^2}\right)\frac{1}{(1+d_1/\sqrt{M})^2\sqrt{M}} \\
& \quad +\frac{2}{15}\frac{U_0^2C_0^2}{D_0^4}\frac{1}{(1+d_1\sqrt{M})^4}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}} \\
& \quad +\left(\frac{8}{105}\frac{U_0^2C_0^3}{D_0^5}+\frac{8}{9}\frac{H_0^2D_0^3}{C_0}-\frac{4}{15}\frac{H_0^2C_0}{D_0}\right)\frac{1}{M}=0
\end{aligned} \tag{15}$$

これらの方程式から  $M^{-1}$  について同幂の項を取って行くことにより、次のような値が得られる。

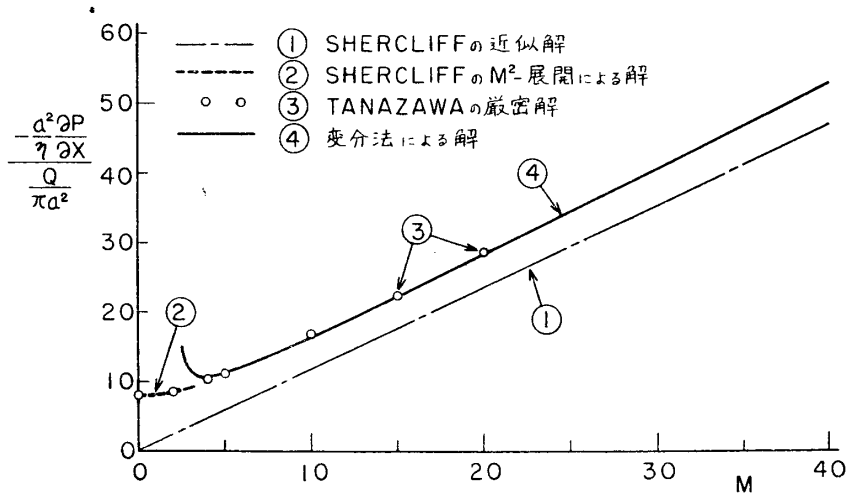
$$\begin{aligned}
 U_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} G = 0.8165G & D_0 &= 1.3533 \\
 H_0 &= -G & a_1 &= -0.9567 \\
 C_0 &= \frac{1}{\pi} \frac{32}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = 2.772 & a_1' &= -0.4706 \\
 & & & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

これから流量  $Q$  の値は、 $M^{-1}$  の項まで取ると

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_A V_x dA = \frac{a^2}{\mu \sigma a} \int_0^1 \int_0^{2\pi} u r dr d\theta = \frac{a}{\mu \sigma} u_0 \left[ \pi - \frac{4}{3} \delta_0 \left( \frac{\theta_0}{\sin \theta_0} - \ln \tan \frac{\theta_0}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{0.8165}{M} \frac{\pi a^4}{\eta} \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) \cdot \left[ 1 - \frac{1.673}{M} - \frac{0.3530}{M} \ln M \right] \tag{16}
 \end{aligned}$$

この結果を、これまでで得られている Shercliff [7] の近似解、同じく Shercliff [2] の  $M^2$  展開による解および Tanazawa [5] の厳密解とともに第 2 図に示す。

(16) は、 $M$  がある程度大きければ非常に満足すべき精度で流量を与えることがわかる。



- ① Shercliff [7] :  $\frac{Q}{\pi a^2} = \frac{8}{3\pi} \frac{1}{M} \left( -\frac{a^2}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right)$
- ② Shercliff [2] :  $\frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta} \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{1}{48} M^2 + \frac{7}{9216} M^4 - \dots \right]$
- ③ Tanazawa [5] : 数値は私信により通知されたもの、
- ④ 変分法による解 :  $\frac{Q}{\pi a^2} = 0.8165 \frac{1}{M} \left( -\frac{a^2}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{1.673}{M} - \frac{0.3530}{M} \ln M \right]$

第 2 図 無次元化された圧力勾配/流量 比と Hartmann 数  $M$  の関係，絶縁体円管の場合

#### 4. 導体円管の場合

この場合には境界条件が (9') で与えられるので、 $u, h$  を次のように仮定する。

$$u = u_0 F(r), \quad h = h_0 G(r) \sin \theta$$



$$\left. \begin{aligned}
 F(r) &= \begin{cases} 1 & : 0 \leq r \leq 1-\delta \\
 2 \frac{(1-r)}{\delta} - \frac{(1-r)^2}{\delta^2} & : 1-\delta \leq r \leq 1 \end{cases} \\
 G(r) &= \begin{cases} r & : 0 \leq r \leq 1-\delta \\
 -\frac{1}{2} \frac{(1-r)^2}{\delta} + 1 - \frac{1}{2} \delta & : 1-\delta \leq r \leq 1 \end{cases} \\
 \delta &= \text{const.}
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

今度は前の例と異なって、境界層の厚さ  $\delta$  は  $\theta$  に無関係に一定と仮定されている。 $\delta$  が  $\theta$  によって (11) におけると同様な変化をすることで計算することはもちろん可能であるけれども、計算がきわめて複雑である上、流量の少くとも第一項は  $\delta(\theta)$  の関数形によらないことがわかったので、簡単に一定と仮定したものである。

(16) を (10') に入れれば

$$\begin{aligned}
 \frac{I}{2\pi} &= G u_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \delta + \frac{1}{12} \delta^2 \right) - u_0^2 \left( \frac{2}{3} \frac{1}{\delta_0} - \frac{1}{6} \right) \\
 &+ M^2 u_0 h_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{11}{24} \delta + \frac{13}{120} \delta^2 \right) + M^2 h_0^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \delta - \frac{1}{16} \delta^2 \right)
 \end{aligned} \quad (18)$$

となる。これから (13) と同様にして

$$\left. \begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & G \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \delta + \frac{1}{12} \delta^2 \right) - u_0 \left( \frac{4}{3} \frac{1}{\delta} - \frac{1}{3} \right) \\
 & + M^2 h_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{11}{24} \delta + \frac{13}{120} \delta^2 \right) = 0 \\
 \text{(ii)} \quad & M^2 u_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{11}{24} \delta + \frac{13}{120} \delta^2 \right) + M^2 h_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \delta - \frac{1}{8} \delta^2 \right) = 0 \\
 \text{(iii)} \quad & G u_0 \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \delta \right) + \frac{2}{3} \frac{u_0^2}{\delta^2} - M^2 u_0 h_0 \left( \frac{11}{24} - \frac{13}{60} \delta \right) \\
 & - M^2 h_0^2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \delta \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

前と同様に次のような展開を仮定する。

$$\left. \begin{aligned}
 u_0 &= \frac{U_0}{M^2} \left( 1 + \frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M^2} + \dots \right) \\
 h_0 &= \frac{H_0}{M^2} \left( 1 + \frac{b_1}{M} + \frac{b_2}{M^2} + \dots \right) \\
 \delta &= \frac{C_0}{M} \left( 1 + \frac{C_1}{M} + \frac{C_2}{M^2} + \dots \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

これを (19) に入れて  $M^{-1}$  について同幂の項の係数を比較すれば

$$\begin{aligned}
 U_0 &= G, & H_0 &= -G, & C_0 &= 4 \\
 a_1 &= \frac{4}{3}, & b_1 &= \frac{1}{3}, & c_1 &= -\frac{37}{30}
 \end{aligned}$$

$$a_2 = -\frac{421}{45}, \dots$$

なる結果が得られる。このうち  $U_0=G$  と  $H_0=-G$  は、 $\delta$  が (11) におけると同じ関数形で変るとして計算した場合にも得られている。

これらから

$$Q = \frac{\pi a^2}{M^2} \left( -\frac{a^2}{\eta} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{1.333}{M} + \frac{1.933}{M^2} \right]$$

$$= \pi a^2 \left( -\frac{1}{\sigma B_0^2} \frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{1.333}{M} + \frac{1.933}{M^2} \right] \quad (21)$$

一方、 $M$  の小さい値に対しては

$$\left. \begin{aligned} u &= u^{(0)} + u^{(1)} M^2 + u^{(2)} M^4 + \dots \\ h &= h^{(0)} + h^{(1)} M^2 + h^{(2)} M^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

とおいて (8) に代入し、 $u^{(0)}, h^{(0)}, u^{(1)}, h^{(1)}, \dots$  を順次決めると

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{7}{48} M^2 + \frac{199}{9216} M^4 + \dots \right] \quad (23)$$

が得られる。

(21) と (23) とは第 3 図にあわせて示されているが、両者は  $M$  が 2~5 の付近でなめらかにつながるのである。

(21) で注目すべきことは、その零次の項すなわち  $M$  が充分大きいときの主要部分が

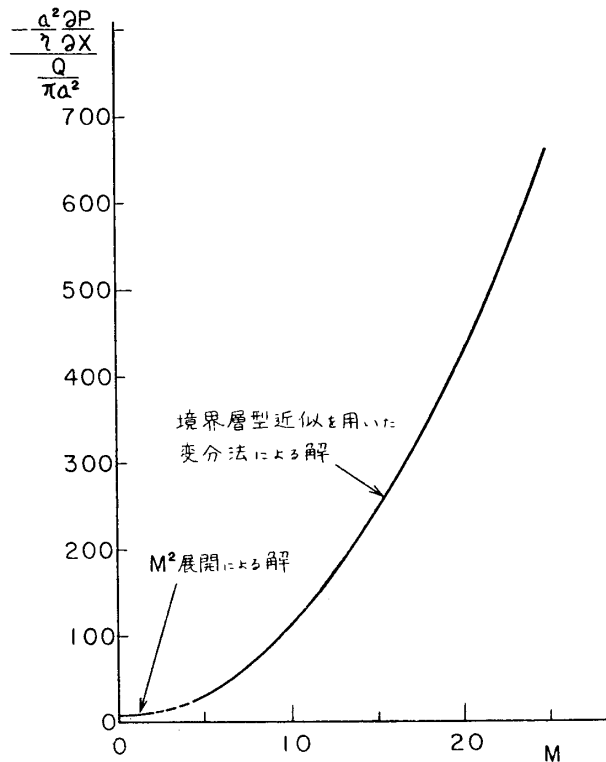
$$\sigma B_0^2 \frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{\partial P}{\partial X}$$

すなわち

$$\sigma B_0^2 \times \text{平均流速} = -\frac{\partial P}{\partial X} \quad (24)$$

の形に書けることである。管壁が導体である結果、管内の電界が第零近似としては 0 にひとしいことを考えれば (24) の左辺は電磁的体積力を表わし、(24) はそれと圧力勾配による力とがつり合うことを示す。粘性による摩擦力は Hartmann 数  $M$  が大きいときは無視され得る。

この考えによれば (24) は管の断面形が円の場合に限らず任意の断面形をもつ導体管について、Hartmann 数が大きいときに成立するはずである。



変分法による解:

$$\frac{Q}{\pi a^2} = -\frac{1}{\sigma B_0^2} \frac{\partial P}{\partial X} \left[ 1 - \frac{1.333}{M} + \frac{1.933}{M^2} \right]$$

$M^2$  展開による解:

$$\frac{Q}{\pi a^2} = \frac{a^2}{8\eta} \left( -\frac{\partial P}{\partial X} \right) \left[ 1 - \frac{7}{48} M^2 + \frac{199}{9216} M^4 - \dots \right]$$

第 3 図 無次元化された 圧力勾配/流量 比と Hartmann 数  $M$  の関係、導体円管の場合

Braginskii [8], Chang and Lundgen [4] の得た結果によれば事実そのとおりであるが、上に述べた導体円管に対する方法と類似の方法を長方形断面をもつ導体管に適用しても同じ結果が得られる。変分法による場合当然のことではあるが、(17) 中の  $\delta$  の関数形  $\delta(\theta)$  を変えてみても、また長方形断面の場合に速度分布を種々の形に仮定してみても同じように (24) が成り立つことがわかる。

これに対して管壁が絶縁体である場合には、速度分布の形の決め方は流量の第一項から影響を及ぼす。たとえば (11) において  $\delta(\theta)$  が  $\theta$  に無関係に一定としてみると、すなわち速度分布が軸対称としてみると流量は Hartmann 数に無関係という結果が得られる。管壁が絶縁されているときには電流はすべて流体内で閉じた経路を描き、それによる電磁力の総和は一様な磁界中では 0 にひとしくなる。そのため絶縁壁の場合に流量を直接決定するのは管壁における粘性摩擦力であって、電磁的体積力は速度分布を変えることによって粘性摩擦力を変え、間接的に流量に影響を与えるに過ぎない。それで速度分布を軸対称と仮定すると磁界の影響が現われ得なくなるのである。

したがって、この点を考慮して速度分布の形に磁界に平行な方向と垂直な方向とで差が現われるようにしておけば、それ以上のこまかい形は結果に影響を及ぼすことが少ないのではないかと思われる。(11) で仮定した形は Shercliff [7] の解に比べるとかなり異なった形であるが、得られた結果は非常に精度のよいもので、これが変分法の特色といえるであろう。

## 5. 結 論

変分法を用いて絶縁体壁または導体壁をもつ円管ならびに長方形管について流量計算を試み、次の結論を得た。

- i. 絶縁体の管では、速度分布が磁界の影響によって変わることが流量に本質的な影響を及ぼす。磁界と平行な方向と垂直な方向とでは分布形が異なることを考慮して、速度分布の形を仮定しなければならない。
- ii. 上の注意を守って円管について計算した結果、Hartmann 数が 5 以上で厳密解と非常によく一致する流量公式を得た。
- iii. 導体の管で Hartmann 数が大きいときには、平均流速  $\times \sigma B_0^2 =$  圧力勾配 という結果が変分法によっても得られることが確かめられた。

この場合、速度分布の形はあまり重要でない。

この研究を始める機会を与えられ、また種々ご指導を頂いた谷一郎教授に心から感謝したい。

1961 年 11 月 6 日 航空力学部

## 文 献

- [1] Hartmann, J: Hg-Dynamics I, Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Math.-fys, Meddelelser XV, 6, Copenhagen, 1937.

- または T. G. Cowling: *Magnetohydrodynamics*, pp. 13-15, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
- [ 2 ] Shercliff, J. A.: Steady Motion of Conducting Fluids in Pipes under Transverse Magnetic Fields, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 49, pp. 136-144, 1953.
  - [ 3 ] Chang, C.C., and Lundgen, T.S.: The Flow of an Electrically Conducting Fluid through a Duct with Transverse Magnetic Field, 1959 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, pp. 41-54, Los Angeles, 1959.
  - [ 4 ] Chang, C. C., and Lundgen, T. S.: Duct Flow in Magnetohydrodynamics, Zeit. Math. und Phys., Bd. XII, SS. 100-114, 1961.
  - [ 5 ] Tanazawa, I.: 一様な磁場を横切って流れる電導性流体の円管内の流れ, 第 10 回応用力学連合講演会論文抄録集 pp. 13-14. 1960.
  - [ 6 ] Tani, I.: Steady Flow of Conducting Fluids in Channel under Transverse Magnetic Fields, with Cosideration of Holl Effect, Journal of Aero/Space Sciences に 1962 年の 2 月頃掲載される予定.
  - [ 7 ] Shercliff, J. A.: The Flow of Conducting Fluids in Circular Pipes under Transverse Magnetic Fields, Jour. Fluid Mech., Vol. 1, pp. 644-666, 1956.
  - [ 8 ] Braginskiĭ, S. I.: Magnetohydrodynamics of Weakly Conducting Liquids, JETP (USSR), Vol. 37, pp. 1417-1430, 1959.