

機上ドプラレーダ受信信号について

東 口 實

An Analysis of the Received Signal in Airborne Doppler Radars

By

Minoru HIGASHIGUCHI

Abstract: The received signal of airborne Doppler radars is analyzed theoretically in this paper. The objective is to clarify a question, why the received Doppler signal has to be characteristics of filtered noise, as was treated so far.

In Chapter 2, a rigorous representation of the fundamental received signal is obtained analytically, including the effect of relativity. Two cases are considered herein:

Case 1. An aircraft carrying a fixed antenna flies on straight line and with a constant velocity.

Case 2. An airborne antenna beam directed to the ground is rotated conically with some mechanical devices.

The main result of the analysis is that the received signal analysis should be performed in the reference frame of the receiver; in other words, the received signal should be considered as if the receiver were at rest.

In Chapter 3, the true received signal is considered to be random superposition of many wave packets reflected back from targets on the ground. The duration of each wave packet (elementary signal) is equal to the time target being illuminated, and its instantaneous frequency decreases down slowly, as the aircraft progress.

The conclusion may be drawn as follows: the true received signal has a broad power spectrum consisting with many line spectrums. The spectrum envelope is stationary and its shape corresponds to the antenna beam pattern, however, the frequency of each line spectrum is slowly shifting in accordance with the instantaneous frequency. Consequently, with a number of targets, the power spectrum is observed to be a continuous one.

As yet, more detailed explanation is necessary to explain true situations.

概 要

機上ドプラレーダ受信信号について理論的に解析し、従来いわれていた受信信号が濾波器を通過した雑音信号に等しいという点について検討したものである。

第2章においては相対性理論に基づく効果を考慮に入れて地表面における単一の反射体からの受信信号を位相おくれおよび周波数変化に重点をおいて検討した。ここでは空中線ビー

ム方向が一定で航空機が等速直線運動を行なう場合と、空中線ビームが機械的に回転している場合とに分けて取り扱い、特殊および一般相対性理論の効果を見た。その結果このような機上ドプラレーダ受信信号の解析は受信機が静止しているものとして行なうべきことが明らかになった。

次に第3章においては空中線ビームに幅があり、したがって多くの反射体からの合成波が受信される場合の受信信号について検討した。個々の反射体からの信号は波束の形を持っていると考えられる。この波束の継続時間は反射体がビーム中に含まれる時間に等しく、かつその瞬時周波数は反射体の方向の変化にしたがって低い方に徐々に変化する。そこで機上ドプラレーダ受信信号のスペクトルは数多くの線スペクトルから出来ており、その包絡線は空中線ビームの形に対応して一定であるが、個々の線スペクトルの位置は刻々変化しているものと考えられる。すなわち無数の反射体が存在すれば連続スペクトルとして観測されるであろう。

さらに詳細なスペクトルの成り立ちについてはまだ検討を要するが、一応御報告することとした。

目 次

第1章 序	送受信方向
第2章 相対論を考慮した電磁波のドプラ効果について	3.3. ドプラ効果
1. 緒言	3.4. 結 言
2. 相対運動が等速直線運動である場合	4. 結 論
2.1. 座標系および電磁波の伝播	第3章 ドプラレーダ受信信号周波数スペクトルについて
2.2. 送信点と受信点が相対運動をしている場合	1. 緒言
2.3. 相対運動をしている反射体からの反射波を受信する場合	2. ドブラ素信号
2.4. 結 言	3. 受信信号
3. 相対運動が回転(円)運動を含む場合	4. 結 言
3.1. 回転運動系における時間と空間	謝 辞
3.2. 慣性系とこれに対して回転運動をしている系における電磁波の	参 考 文 献
	附 録
	A. 1. 回転運動系における光線の経路の一般相対性理論に基づく計算
	A. 2. ドブラ素信号展開定理の証明

第1章 序

機上ドプラレーダについて考察を行なう場合に、特に周波数追跡部の動作等を考える場合には、この機上ドプラレーダの受信信号がどのような形を持っているものであるかが問題になる。本稿は、このことについて理論的に解析を進めてみたものである。

ドプラレーダで送受信される信号は、互に運動をしている二つの系にまたがって関係づけられる電磁波の伝播の結果として得られるものである。そこでその細部にまで歩を進めて信号の性質をしらべる場合には、近似を行なうとしても相対論的な効果まで考慮して基本的な信号の形をあらわしておく必要がある、その後に機上ドプラレーダで実際的に空中線ビーム

幅が有限であるための周波数の広がり，信号の継続時間等の問題を考えなくてはならない。

このことから第2章において，ドプラレーダ受信信号の基本となるべき相対論の効果を考慮に入れた空中線ビームが非常に細い場合の信号を求めた。すなわちこの場合電磁波は“光線”の形で伝播するものと考えてある。またその送信周波数も一定であるものとした。

次に第3章では第2章で得られた結果を用いて，適当な近似を行なった後にドプラ受信信号の周波数スペクトルがどのような形で観測されるか，また継続時間はどのようになるかについて計算した。

第2章 相対論を考慮した電磁波のドプラ効果について

1. 緒 言

相対的に運動をしている二点相互間で，また相対運動を行なっている反射体を媒介として電磁波を送受信する場合にはドプラ効果によって送受信周波数が変化して来る。この周波数変化（ドプラ周波数偏移）は相対速度に比例しており，その値は容易に計算できる。しかし送受信信号間の位相関係を解析的に与え，またこれがドプラ周波数（偏移）とどのような関係があるかについて述べたものはないようである。

ここでは機上ドプラレーダの場合に受信され，観測される受信信号の性質，特にその周波数スペクトルを理論的に解析することを目的として，一般にドプラ効果を受けた信号が位相を含めていかに表示されるかについて検討した。

この解析は電磁波ビームを線状に送受信するものとして光線の場合と同じ取り扱いができるという仮定で行なったものである。まず第1に相対運動が直線等速運動である場合に問題を限って特殊相対性理論の範囲で解析を行なった。次に相対運動が加速度を含む場合の例として電磁波源が円運動を行なっている場合について局所慣性系の立場から特殊相対性理論の延長として解析した。なお附録に，一般相対性理論に基づいた取り扱いについて簡単に述べた。

2. 相対運動が等速直線運動である場合

2.1. 座標系および電磁波の伝播

相対的に速度 v で等速直線運動をしている二つの慣性系をそれぞれ $K(x, y, z, t)$ および $K'(X, Y, Z, T)$ とする。そしてこの各座標軸は $t=T=0$ の瞬間に一致しており， K' 系の原点 O' は K 系の x 軸上を正の方向に v の速度で運動しているものとする。この場合系相互間の座標変換は次の特殊 Lorentz 変換で示される。

$$\left. \begin{aligned} x &= (X + vT) / \sqrt{1 - \beta^2} & y &= Y & z &= Z \\ t &= \{T + (\beta/c)X\} / \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで $\beta = v/c$, $c =$ 光速

そこで K 系で観測された電磁波の伝播を

$$\cos \left[\omega \left(t - \frac{x \cos \gamma_1 + z \sin \gamma_1}{c} \right) \right] \quad (2.2)$$

K' 系で観測された電磁波の伝播を

$$\cos\left[\omega'\left(T - \frac{X \cos \gamma_1' + Z \sin \gamma_1'}{c}\right)\right] \quad (2.3)$$

で示すと次の関係がある [1].

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma_1 &= \frac{\cos \gamma_1' + \beta}{1 + \beta \cos \gamma_1'}, & \sin \gamma_1 &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \gamma_1'}{1 + \beta \cos \gamma_1'} \\ \omega &= \frac{\omega'}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \beta \cos \gamma_1') \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$



(a) Light path in the frame of reference K' (b) Light path in the frame of reference K

Fig. 2.1

2.2. 送信点と受信点が相対運動をしている場合

送信点を K' 系の原点におき、受信点が K 系の $(x_1, 0, h)$ 点にあったものとする、受信点で観測される信号は (2.2), (2.4) 式から次のようになる。

$$R_1(t) = \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_1 \cos \gamma_1 + h \sin \gamma_1}{c}\right)\right] \quad (2.5)$$

すなわち送信点で観測した周波数 ω' に対して (2.4) 式の最後の式で与えられただけ受信点で観測する周波数は異なり、ドプラ効果を与える。

受信点の座標 x_1 は直接には決定できない量であるので、観測出来る量 h と γ_1 だけを用いてこれをあらわす。時刻 t において $(x_1, 0, h)$ 点で観測した電磁波の到来方向が γ_1 であるので電磁波が O' を出発した時刻 (送信時刻) は K 系では $t - (h/c \sin \gamma_1)$ で示される。すなわち

$$h / \left\{ x_1 - v \left(t - \frac{h}{c \sin \gamma_1} \right) \right\} = \tan \gamma_1 \quad (2.6)$$

となり、(2.3) 式は

$$R_1(t) = \cos[\omega' \sqrt{1 - \beta^2} \{ t - h / (c \sin \gamma_1) \}] \quad (2.7)$$

と書きかえられて、これが受信点から見た送信点の方向および距離と受信信号波形との間の関係を与える。

一方、(2.6) 式を用いて (2.7) 式の位相の時間微分から瞬時周波数を計算すると、これは当然であるが (2.4) 式の最後の式で与えられるものと等しい。

2.3. 相対運動をしている反射体からの反射波を受信する場合

ここでは 2.2 における K 系の受信点を反射点と考える。すなわち電磁波の反射の現象を、 K 系の反射点に到達した電磁波でその点にある反射体が励振され、 K 系内で入射した

信号と全く同じ周波数で、ただ振幅および位相が一定の量だけ変化させられて再び電磁波として空間へ輻射されるものと考え。そうするとこれは (2.5) 式で与えられる位相を持った $(x_1, 0, h)$ にある電磁波源から \mathbf{K} 系で γ_2 の方向に電磁波が伝播して再び送信点で受信されることになり、反射波に関しては \mathbf{K} 系と \mathbf{K}' 系の役割が入射波の場合と逆になる。

すなわち反射波の伝播は反射点における振幅および位相の変化を無視すると、 \mathbf{K} 系で

$$R(t) = \cos \left[\omega \left\{ t + \frac{x \cos \gamma_2 + z \sin \gamma_2}{c} \right\} - \omega \frac{x_1 (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2) + h (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2)}{c} \right] \quad (2.8)$$

\mathbf{K}' 系で

$$R(T) = \cos \left[\omega_r' \left(T + \frac{X \cos \gamma_2' + Z \sin \gamma_2'}{c} \right) - \omega \frac{x_1 (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2) + h (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2)}{c} \right] \quad (2.9)$$

で示され、それぞれの量は次の変換で結ばれる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_r' &= \frac{\omega}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 + \beta \cos \gamma_2) \\ \cos \gamma_2' &= \frac{\cos \gamma_2 + \beta}{1 + \beta \cos \gamma_2}, \quad \sin \gamma_2' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \gamma_2}{1 + \beta \cos \gamma_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

したがって \mathbf{K}' 系の原点 O' で受信される信号は

$$R_0(T) = \cos \left[\omega_r' T - \frac{\omega}{c} \{ x_1 (\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2) + h (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) \} \right] \quad (2.11)$$

一方電磁波ビームが \mathbf{K}' 系の原点から出発して再び \mathbf{K}' 系の原点に戻る現象を \mathbf{K} 系で観測すると Fig. 2.2 に示すようになるので

$$h \cot \gamma_1 - h \cot \gamma_2 = v \left(\frac{h}{c \sin \gamma_1} + \frac{h}{c \sin \gamma_2} \right)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma_2 &= \frac{(1+\beta^2) \cos \gamma_1 - 2\beta}{1 - 2\beta \cos \gamma_1 + \beta^2} \\ \sin \gamma_2 &= \frac{(1-\beta^2) \sin \gamma_1}{1 - 2\beta \cos \gamma_1 + \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

でなくてはならない。(2.10) 式と (2.12) 式とから

$$\tan \gamma_2' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \gamma_2}{\cos \gamma_2 + \beta} = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \beta}$$

また (2.4) 式から

$$\tan \gamma_1' = \frac{\sqrt{1-\beta^2} \sin \gamma_1}{\cos \gamma_1 - \beta}$$

が得られるので

$$\gamma_2' = \gamma_1' \quad (2.13)$$

となる。この (2.13) 式は \mathbf{K}' 系で光の逆進の法則が成立していることを示す。

一方 (2.4), (2.10), (2.12) 式および (2.9) 式から \mathbf{K}' 系の原点 O' における受信信号は

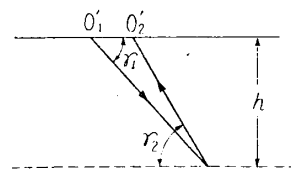


Fig. 2.2. Light path in the frame of reference \mathbf{K} , and the motion of the origin O' .

$$R_0(T) = \cos \left[\frac{1 + \beta \cos \gamma_1'}{1 - \beta \cos \gamma_1'} \omega' \left\{ T - 2 \frac{x_1 \sqrt{1 - \beta^2} \cos \gamma_1' + h \sin \gamma_1'}{c(1 + \beta \cos \gamma_1')} \right\} \right] \quad (2.14)$$

と書くことができる。

ここで x_1 は \mathbf{K} 系における量であり、 \mathbf{K}' 系では直接に観測できない。そこでこれを \mathbf{K}' 系で観測できる量 γ_1' および T であらわしておく必要がある。

(2.14) 式において T は \mathbf{K}' 系の原点 O' に電磁波が到着した時刻、すなわち受信時刻である。さらに電磁波が反射点を通過した時刻 $T - h/(c \sin \gamma_1')$ の瞬間を考えると、反射点の座標は \mathbf{K} 系で x_1 であり、 \mathbf{K}' 系では $h \cot \gamma_1'$ である。そこで (2.1) 式から次の関係が得られる。

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ h \cot \gamma_1' + v \left(T - \frac{h}{c \sin \gamma_1'} \right) \right\} \quad (2.15)$$

(2.15) 式と (2.14) 式とから受信信号は次のようにならわされる。

$$R_0(T) = \cos \left\{ \omega' \left(T - \frac{2h}{c \sin \gamma_1'} \right) \right\} \quad (2.16)$$

すなわち \mathbf{K}' 系における量のみであらわせれば、受信信号の送信信号に対する位相おくれは反射体が \mathbf{K}' 系でその瞬間に静止しているものと考えて得られる位相おくれに等しい。

言葉をかえて言えば、特定の反射体に対するドプラ効果はその反射体からの受信信号の位相おくれの時間的変化によつて生ずる。このことは次のように (2.15) 式を考慮して (2.16) 式の位相分の時間微分を計算することによつてはつきりとするであろう。

反射点が \mathbf{K} 系で静止していたものとする γ_1' の変化は (2.15) 式から

$$\frac{d\gamma_1'}{dT} = \frac{v}{h} \frac{\sin^2 \gamma_1'}{1 - \beta \cos \gamma_1'}$$

となる。そこで受信信号の瞬時周波数は受信信号の位相の時間微分を求めることにより

$$\frac{d}{dT} \left(T - \frac{2h}{c \sin \gamma_1'} \right) \omega' = \omega' \left(1 + \frac{2h}{c} \frac{\cos \gamma_1'}{\sin^2 \gamma_1'} \frac{d\gamma_1'}{dT} \right) = \omega' \frac{1 + \beta \cos \gamma_1'}{1 - \beta \cos \gamma_1'}$$

が得られてドプラ効果による周波数偏移は (2.14) 式のそれで与えられる。

2.4. 結 言

以上のことから機上用ドプラレーダにおける単一反射体からの受信信号は送信信号を

$$T_0(T) = \cos \omega' T \quad (2.17)$$

として

$$R_0(T) = \cos \left[\omega' T - \frac{2h\omega'}{c \sin \gamma_1'} \right] \quad (2.18)$$

で与えられる。ここで

ω' = 機上で測定した送信電磁波の角周波数

v = 航空機の対地速度

c = 光速度

h = 高度

γ_1' = 機上における電磁波の送受信方向と速度ベクトルとがはさむ角である。この表示からドプラ効果を知るためには γ_1' が地表面の静止反射体に対して

$$h \cot \gamma_1' + v \left(T - \frac{h}{c \sin \gamma_1'} \right) = \text{一定}$$

の条件を満足していることから受信信号の位相の時間微分を考えればよい。すなわち受信信号の瞬時周波数は

$$\omega_r' = \frac{1 + \beta \cos \gamma_1'}{1 - \beta \cos \gamma_1'} \omega' \quad (2.19)$$

で与えられる。この式で $1 + \beta \cos \gamma_1'$ は地上で受信する時のドプラ効果を、 $1/(1 - \beta \cos \gamma_1')$ は反射波を機上で受信する時のドプラ効果を示す係数であると考えられる。

さらに送受信方向については次の重大な結論が導き出されている。すなわち送受信点と反射点の相対速度がいかに大きくても機上系で観測される送信方向と受信方向は常に同一の方向である。すなわち地上系で観測した場合に光線の経路は Fig. 2.3 に示すように観測されるが、これを機上系で観測すれば Fig. 2.4 に示すように“逆進の法則”が成立している。しかも機上系で観測される受信信号の送信信号に対する位相おくれは、機上にある送受信機が静止しているものと考えて、Fig. 2.4 の経路にしたがって計算した値に等しい。しかし一方地上系で観測すれば Fig. 2.3 の経路に相当した分だけの位相おくれが得られる。

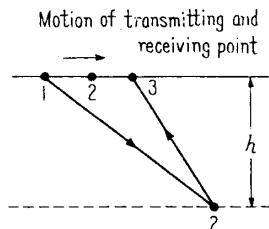


Fig. 2.3. Light path observed from the ground (K).

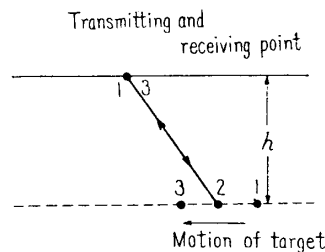


Fig. 2.4. Light path observed from the aircraft (K').

このことは一見奇異に感じられるが、地上系を慣性系と考える限りこれと等速運動を行なっている機上系もまた慣性系である。そこで慣性系内における物理法則は全く同じ形で成立するという特殊相対性原理の要請から見れば上述のことは当然といえる。また一方これは次のように言ってもよい。機上ドプラレーダについて考える場合には電磁波の送受信点である「航空機を静止していると考えた方が自然である。」そしてこの時に常識的に考察して妥当な結論が得られる。

3. 相対運動が回転(円)運動を含む場合

前節では相対運動が等速直線運動である場合について取り扱った。その結論として送受信機と反射点との間の相対速度がいかに大きくても電磁波は必ずその送信方向と同じ方向から反射して来て受信されることを見出した。すなわち慣性系 K に対して等速直線運動をしている慣性系 K' 内の電磁波源から放射される電磁波ビームの伝播経路を慣性系 K で見た場合その経路は直線であり、慣性系 K' の同一点に反射される反射波の伝播経路は放射の経路と異なる。しかしこの同じ現象を慣性系 K' で観測すると通常の物理法則としての“光の逆進の法則”が成立している。

では送受信空中線ビームが回転している場合にもやはり同一方向から電磁波が受信されるであろうか。この問題について本節では考察を進めよう。この場合に前節と異なる点は空中線ビームに対して静止している系 R は慣性系 K' に対して回転運動をしていることである。したがって回転系 R は慣性系ではなく、重力場を持つ非慣性系になることである。慣性系相互間の関係についてはすでに前節で述べたので、ここでは慣性系と非慣性系との関係、特に回転している空中線に対する送受信電波の方向の差について取り扱う。

この場合厳密には一般相対性理論に基づいて考察を進めねばならない* が、いずれにしても局所座標系を適当にとれば特殊相対性理論の範囲に帰着させることができる。すなわち Lorentz 変換を連続して行なったものとして論じることができる。そこで以下これに従って議論を進める。

なお一般相対性理論の公式を用いて計算した電磁波の経路については付録に示した。

3.1. 回転運動系における時間と空間

地上座標系 $K(x, y, z, t)$ および航空機座標系 $K'(X, Y, Z, T)$ または r, θ, ϕ, T については §2 で述べたものと同じにとる。すなわち z, Z 方向は下向きであって、 x, X 軸の方向は航空機の対地速度ベクトル \vec{v} の方向に一致させてとる。もちろんこの K, K' は慣性系である。

次に空中線ビーム座標系 $R(r, \theta, \phi, t')$ を次のように定める。この座標系 R は航空機座標系 K' に対して Ω rad/s の回転速度で回転しており、 $\Omega \rightarrow 0$ の時に通常の意味の極座標系と一致する。しかし一般には R で与えられる空間は回転に伴う重力場があるので、非ユークリッド幾何学で記述される空間となる。一方 t' はこの R の中心にある時計が示す時刻であり、座標系 R の中の空間的位置によって時計の歩度が異なるので、この座標系 R における普遍的な時刻としては定まらない。 t' は単に時間に相当する尺度である。

$t=T=t'=0$ で各座標系の原点および基準軸がそれぞれ一致していたものとする。またこの場合質量による定常重力場の影響は十分に小さいことが予想され、回転に対して本質的なものではないので無視する。この場合座標系 K, K', R 間の変換を次の式で与える。

$$\left. \begin{aligned} x &= (X + vT) / \sqrt{1 - \beta^2}, & y &= Y \\ z &= Z, & t &= \{T + (\beta/c)X\} / \sqrt{1 - \beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

* 回転座標系では遠心力に起因する重力場を伴う。

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos \theta \cos(\varphi + \Omega t') \\ Y &= r \cos \theta \sin(\varphi + \Omega t') \\ Z &= r \sin \theta \\ T &= t' \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここで $\beta = v/c$, $c = \text{光速度}$

3.2. 慣性系とこれに対して回転運動をしている系における電磁波の送受信方向

Fig. 3.1 に示すように電磁波ビームの方向が定まる点 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ で回転ビーム系 \mathbf{R} と瞬時的に一致している局所慣性系 $\mathbf{K}'_i (X'_i, Y'_i, Z'_i)$, $\mathbf{K}'_r (X'_r, Y'_r, Z'_r)$ と慣性系 (航空機座標系) \mathbf{K}' との間の特種 Lorentz 変換で, 送受信の際の回転ビーム系 \mathbf{R} におけるビームの方向が等価的に決定される。

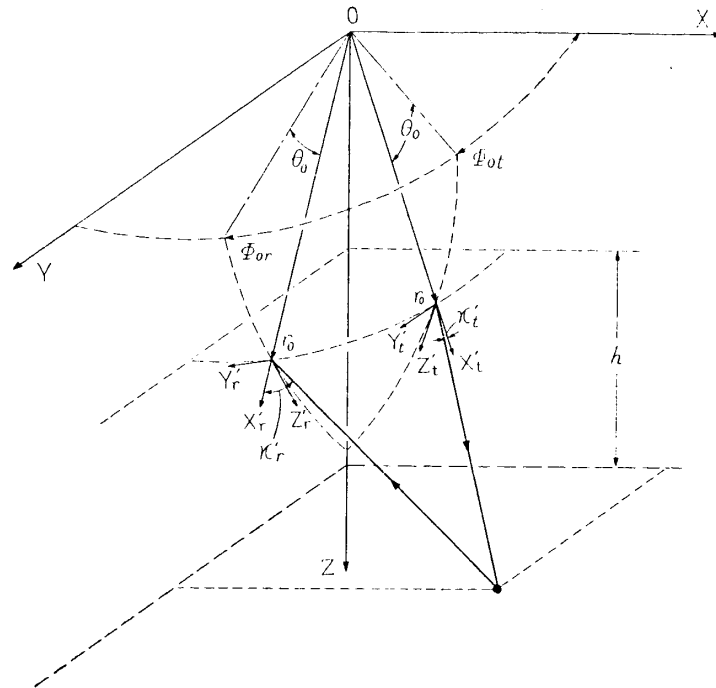


Fig. 3.1. The relation between the inertial frame of reference \mathbf{K}' and rotating frame of reference.

今簡単のために送信方向が送信点 (X'_i, Y'_i, Z'_i) で $(\cos \kappa'_i, \sin \kappa'_i, 0)$ であり, 受信方向が受信点 (X'_r, Y'_r, Z'_r) で $(\cos \kappa'_r, \sin \kappa'_r, 0)$ であるものとする. この電磁波はある高さの点 $Z = h + r_0 \sin \theta_0$ から反射してきたものである. この時 \mathbf{K} 系に対して静止しており, $\mathbf{K}'_i, \mathbf{K}'_r$ 系にそれぞれ相当する $\mathbf{K}_i (X_i, Y_i, Z_i)$, $\mathbf{K}_r (X_r, Y_r, Z_r)$ 系から見たビームの進行方向は

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_0 &= \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{c^2} r_0^2 \cos^2 \theta_0} \\ \sin \psi_0 &= \frac{\Omega}{c} r_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

として、送信点で

$$\left(\frac{\cos \kappa'_l \cos \psi_0}{1 + \sin \kappa'_l \sin \psi_0}, \frac{\sin \kappa'_l + \sin \psi_0}{1 + \sin \kappa'_l \sin \psi_0}, 0 \right) = (\cos \kappa_l, \sin \kappa_l, 0) \quad (3.4)$$

受信点で

$$\left(\frac{\cos \kappa'_r \cos \psi_0}{1 - \sin \kappa'_r \sin \psi_0}, \frac{\sin \kappa'_r - \sin \psi_0}{1 - \sin \kappa'_r \sin \psi_0}, 0 \right) = (\cos \kappa_r, \sin \kappa_r, 0) \quad (3.5)$$

のように観測される。

そこで送信時刻を 0, 受信時刻を T_2 としてビームの進路を示すと次のようになる。

(a) 送信

$$\left. \begin{aligned} X &= r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_{0l} + cT(\cos \kappa_l \cos \theta_0 \cos \Phi_{0l} - \sin \kappa_l \sin \Phi_{0l}) \\ Y &= r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_{0l} + cT(\cos \kappa_l \cos \theta_0 \sin \Phi_{0l} + \sin \kappa_l \cos \Phi_{0l}) \\ Z &= r_0 \sin \theta_0 + cT \cos \kappa_l \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

(b) 受信

$$\left. \begin{aligned} X &= r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_{0r} - c(T - T_2)(\cos \kappa_r \cos \theta_0 \cos \Phi_{0r} - \sin \kappa_r \sin \Phi_{0r}) \\ Y &= r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_{0r} - c(T - T_2)(\cos \kappa_r \cos \theta_0 \sin \Phi_{0r} + \sin \kappa_r \cos \Phi_{0r}) \\ Z &= r_0 \sin \theta_0 - c(T - T_2) \cos \kappa_r \sin \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

この (a) と (b) で示された送受信ビームは反射点で時刻および空間座標が一致してはならない。したがってこの条件から $\kappa_l, \kappa_r, \Phi_{0l}, \Phi_{0r}, T_2, h$ の関係を求めることができる。今次の条件を加えてこれを解いてみる。

$$\left. \begin{aligned} \kappa'_l &= -\kappa'_r = \kappa' \\ \kappa_l &= -\kappa_r = \kappa \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

すなわち 反射点の座標を $Z = r_0 \sin \theta_0 + h$ として反射点に到達する時刻を T_1 とすれば

$$\tan \frac{\Phi_{0r} - \Phi_{0l}}{2} = \tan \Omega T_1 = \frac{c T_1 \sin \kappa}{r_0 \cos \theta_0 + c T_1 \cos \kappa \cos \theta_0}$$

$$\tan \Omega T_1 = \frac{\Omega T_1 \sin \kappa' + \Omega T_1 \sin \psi_0}{\sin \psi_0 (1 + \sin \psi_0 \sin \kappa') + \Omega T_1 \cos \psi_0 \cos \theta_0 \cos \kappa'} \quad (3.9)$$

$$h = c T_1 \sin \theta_0 \frac{\cos \psi_0 \cos \kappa'}{1 + \sin \psi_0 \sin \kappa'} \quad (3.10)$$

ここでまず $\kappa' = 0$ すなわち電磁波ビームを放射状に輻射した場合を考える。

$$\tan \psi_0 = \frac{\Omega T_1 \tan(\Omega T_1) \cos \theta_0}{\Omega T_1 - \tan \Omega T_1} \quad (3.11)$$

$$h = c T_1 \sin \theta_0 \cos \psi_0 \quad (3.12)$$

が得られる。そこで (3.3) 式によって $\Omega > 0$, すなわち $\tan \psi_0 > 0$ の場合を考えてみる。この時 (3.11) 式からは $T_1 < 0$, または T_1 が正の値をとる時には T_1 はある定った値を不連続的にしかとり得ないことが容易にわかる。言葉をかえると, このことは電磁波が反射体までの距離を往復して来る間に, 空中線が正確に何回転かして送信時と全く同じ方向に空中線が向いている場合にのみ反射波は受信出来て, それ以外には受信できないことを示している。線状の細い空中線指向特性を持つ空中線で送受信を行なう場合には, それを放射状に出している限り, その空中線の回転速度によって定まる高度の所にある反射体だけしか観測できな

い. !

では (3.9), (3.10) 式で送信波, 受信波, 反射体との関係が示される時に, 高度 h と送受信空中線ビームの放射方向からの傾き κ' との間関係はどのようになるであろうか.

(3.9) 式を $\cos \kappa', \sin \kappa'$ について解くと

$$\cos \kappa' = \frac{\cos \psi_0 [(\omega - \sin^2 \psi_0) \sqrt{\omega^2 + (\Omega T_1)^2 \cos^2 \theta_0} - \sin^2 \psi_0 - (\Omega T_1)(1 - \omega) \cos \theta_0 \sin \psi_0]}{(\omega - \sin^2 \psi_0) + (\Omega T_1)^2 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \psi_0} \tag{3.13}$$

$$\sin \kappa' = \frac{\Omega T_1 \cos \psi_0 \cos \theta_0 \sqrt{\omega^2 + (\Omega T_1)^2 \cos^2 \theta_0} + (\omega - \sin^2 \psi_0)(1 - \omega) \sin \psi_0}{(\omega - \sin^2 \psi_0) + (\Omega T_1)^2 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \psi_0} \tag{3.14}$$

ここで $\omega = (\Omega T_1) / (\tan \Omega T_1)$

が得られ, これと (3.10) 式を組み合わせると κ' と h との関係がわかる.

以上の式で $\cos \psi_0, \sin \psi_0$ は相対性理論的な効果を与える基本の量であり, この大きさが相対性理論を考慮しないで問題を取り扱った場合と, 相対性理論を考慮して取り扱った場合との差を決定づける. Fig. 3.2 に示すようにこれはたとえば電磁波ビームの方向を規定する位置が中心から 1 m の距軸にあり, かつ $\theta_0 = 70^\circ$ で 1 Mc/s で回転させた場合を考えても 10^{-2} の桁である. したがって通常の機械的回転を考える場合には (3.13), (3.14) 式で

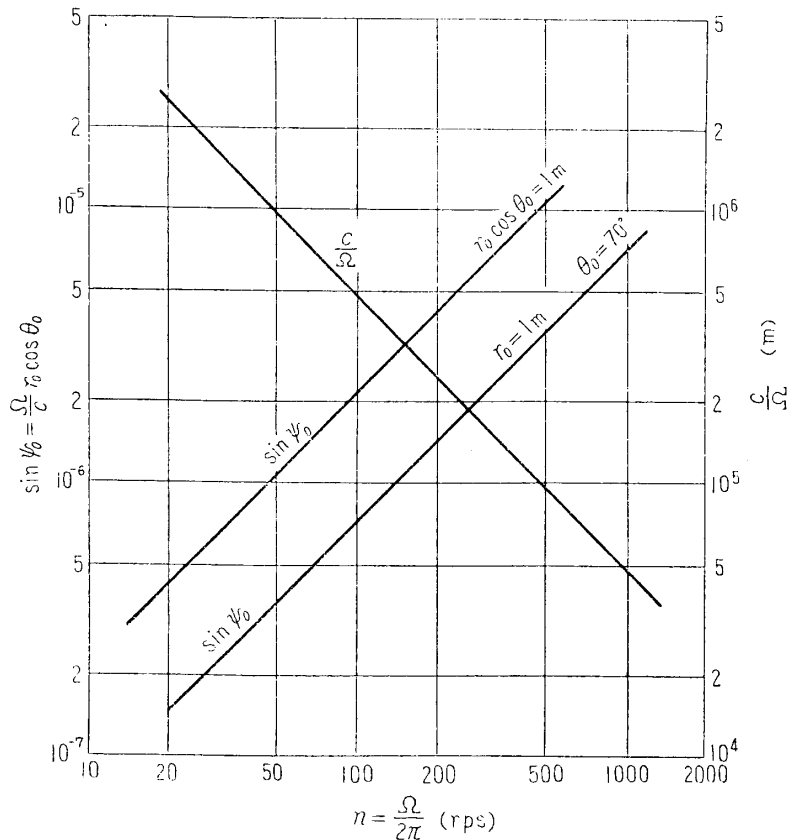


Fig. 3.2. The effect of relativity

は $\Omega T_1 = \pi/2$ のごく近くで $\theta_0 \approx \pi/2$ の場合、または $\Omega T_1 = \pi$ の場合（半回転した時に受信される、または丁度一回転した時に受信される場合）を除いては $\sin \psi_0 = 0$ とおいてもよい。そこで $\psi_0 = 0$ として

$$\tan \kappa' = \tan(\Omega T_1) \cos \theta_0 \quad (3.15)$$

$$h = (c/\Omega)(\Omega T_1) \cos \kappa' \sin \theta_0 \quad (3.16)$$

これを $r_0 = 1 \text{ m}$, $\theta_0 = 70^\circ$ の場合について計算した結果を Fig. 3.3 に示す。 $\Omega = 100 \text{ rps}$, $h = 24,000 \text{ m}$ の場合を考えても $\kappa' \approx 1^\circ$, $\Omega T_1 \approx 3^\circ$ 程度にしかならず、実用上空中線ビーム幅の中に入ってしまうのでその方向を考える必要はない。

3.3. ドプラ効果

ある慣性系 \mathbf{K} に対して空中線系が任意の速度で運動をしている時に、この空中線系を通して送受信される電磁波の周波数の慣性系 \mathbf{K} および空中線系における観測値の間には次の関係がある。すなわち送受信時における局所慣性系を考えて特殊相対理論で導き出された関係を用いればよい。

$$\text{送信時: } f_t = \frac{1 + (v_{0t}/c) \cos \gamma'_t}{\sqrt{1 - (v_{0t}/c)^2}} f'_t \quad (3.17)$$

$$\text{受信時: } f_r = \frac{1 - (v_{0r}/c) \cos \gamma'_r}{\sqrt{1 - (v_{0r}/c)^2}} f'_r \quad (3.18)$$

ここで v_{0t} = 送信する瞬間における空中線系の慣性系 \mathbf{K} に対する速度

γ'_t = 速度ベクトル \vec{v}_{0t} と空中線ビームとの間の角度の空中線系における観測値

v_{0r} = 受信する瞬間における空中線系の慣性系 \mathbf{K} に対する速度

γ'_r = 速度ベクトル \vec{v}_{0r} と空中線ビームとの間の角度の空中線系における観測値

f_t, f_r = 送信, 受信周波数の慣性系 \mathbf{K} における観測値

f'_t, f'_r = 送信, 受信周波数の空中線系における観測値

そこで前節までに述べた空中線ビームが回転している場合（回転ビーム形ドプラレーダ）についてドプラ周波数を計算すると次のようになる。

(a) 送信の場合

Fig. 3.4 を参照して

$$\vec{v}_{0t} = (v - \Omega r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_{0t}, \quad \Omega r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_{0t}, \quad 0)$$

$$\text{ビーム方向} = \begin{pmatrix} \cos \kappa' \cos \theta_0 \cos \Phi_{0t} - \sin \kappa' \sin \Phi_{0t} \\ \cos \kappa' \cos \theta_0 \sin \Phi_{0t} + \sin \kappa' \cos \Phi_{0t} \\ \cos \kappa' \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

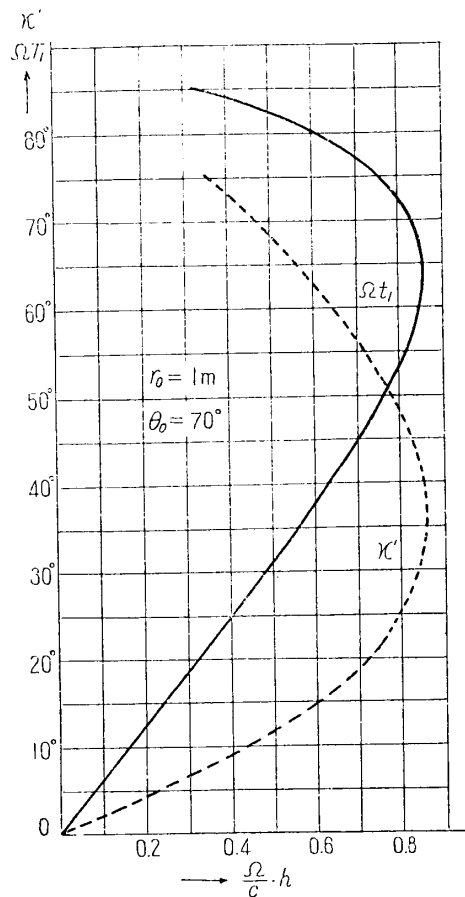


Fig. 3.3. The beam angle of radiation (κ') and reception ($-\kappa'$) and the phase lag of the received signal are shown as a function of $(\Omega/c)h$.

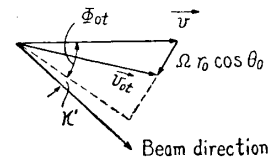


Fig. 3.4

したがって

$$\begin{aligned}\cos \gamma_{i'} &= [v \cos \kappa' \cos \theta_0 \cos \Phi_{0i} - v \sin \kappa' \sin \Phi_{0i} + \Omega r_0 \cos \theta_0 \sin \kappa'] / v_{0i} \\ v_{0i}^2 &= v^2 + \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0 - 2v \Omega r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_{0i}\end{aligned}$$

(b) 受信の場合

$$\begin{aligned}\cos \gamma_{r'} &= [v \cos \kappa' \cos \theta_0 \cos \Phi_{0r} + v \sin \kappa' \sin \Phi_{0r} - \Omega r_0 \cos \theta_0 \sin \kappa'] / v_{0r} \\ v_{0r}^2 &= v^2 + \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0 - 2v \Omega r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_{0r}\end{aligned}$$

が得られる。慣性系 K で反射して来るのであるから、 $f_r = f_i$ であり、

$$f_r' = \frac{1 + \frac{v_{0r}}{c} \cos \gamma_{i'}}{1 - \frac{v_{0i}}{c} \cos \gamma_{r'}} \sqrt{\frac{1 - (v_{0r}/c)^2}{1 - (v_{0i}/c)^2}} f_i' \quad (3.19)$$

であって、上の (a), (b) で得られた式を代入して一次近似をとると

$$\frac{f_r'}{f_i'} = 1 + \frac{v}{c} \cos \kappa' \cos \theta_0 (\cos \Phi_{0i} + \cos \Phi_{0r}) - \frac{v}{c} \sin \kappa' (\sin \Phi_{0i} - \sin \Phi_{0r})$$

ここで $\Phi_{0r} = \Phi_{0i} + 2\Omega t_1' = \Phi_{0i} + \Omega \tau_\alpha = \Omega(t_1' + \tau_\alpha)$

τ_α : 遅延時間, t_1' : 送信時刻

したがって

$$\begin{aligned}\frac{f_r'}{f_i'} &= 1 + \frac{2v}{c} \cos \kappa' \cos \theta_0 \cos(\Omega \tau_\alpha / 2) \cos\left(\Omega t_1' + \frac{\Omega \tau_\alpha}{2}\right) \\ &\quad + \frac{v}{c} \sin \kappa' \sin(\Omega \tau_\alpha / 2) \cos\left(\Omega t_1' + \frac{\Omega \tau_\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

が得られる。

3.4. 結 言

以上空中線の送受信ビームを回転させた場合の電磁波の反射および輻射の経路について相対性理論に基づいた考察を行ない、その効果は非常に小さな量であることを確めた。すなわち反射波の経路は（航空機座標系を基準にして）常識的に回転を考慮して解いた結果に対してほとんど無視してさしつかえない程度の補正を含むに過ぎない。

しかしこの解析については次のような仮定がある。

「回転座標系（空中線ビーム系）の r_0, θ_0, φ_0 の位置にたとえばスリットのような機械的に電磁波ビームの方向を定める素子があって、これは回転したことによっては全く変形せず、静止している時に定めた方向と同じ方向に電磁波ビームを輻射する。」

この仮定は空中線系を機械的に回転させる場合には、またたとえ反射板をまわす場合でも等価的にビームの方向を決定する素子が回転すると考えられる場合には問題はないであろう。しかしたとえば位相を適当に変化させる等の方法で純電氣的にビームを回転させる場合には、ここに述べた結果は成立するであろうか。もし成立するとしたらスリットの位置はどこになるだろうか。このような問題が残っている。

この問題を解決するには dipole が回転している場合の電磁波の問題として、また空中線それ自身の問題として適切な考慮の上に立って解決する必要がある。また同時に空中線に

対する給電を行なっている部分についても、ドプラ効果に比較できるような微小項も含めた検討を必要とする。

ここでは単に空中線ビームが与えられたものとして慣性系に対して回転している系の問題として取り扱った。そして回転している系は一般には重力場のある系として一般相対性理論で考えなければならないが、物理的意味がわかりにくいので、回転系に対して瞬時的に一致する局所慣性系の概念を入れて、特殊相対性理論の立場から光線の伝播経路の問題として取り扱ったのである。

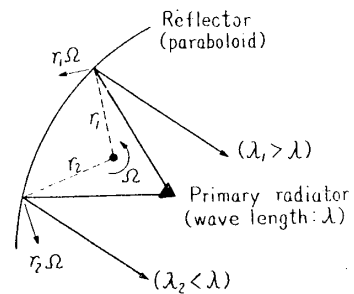


Fig. 3.5. The Doppler effect.

さらにまたたとえば回転放物面の反射面を持った空中線を回転させる場合について考えると Fig. 3.5 に示すように電磁波の進行方向と同方向あるいは逆方向に動く反射面に対してはドプラ効果が生じ、その結果波長が等価的に変化する。すなわち空間に輻射される波面の方向が静止空中線について考えた方向とわずかに違って来るであろう。この効果はもちろん相対性理論によって考えられるような効果ではなく、現実には反射面および一次輻射器が運動することによって生ずるものであり、本節で与えた一般相対性理論に基づく効果よりも大きな影響を与えるであろう。

4. 結 論

機上用ドプラレーダを用いて航空機の世界速度測定を行なう場合には、周波数が非常に正確に測定できることから、原理的にはこれと同程度、すなわち $10^{-3} \sim 10^{-4}$ の精度で速度を測定できる。しかしこれをもとの搬送波信号と比較すると $10^{-9} \sim 10^{-10}$ の桁になり、高速度飛行を考えると必ずしも相対性理論的な影響を無視し得るとはいえない。また一方受信信号の位相の時間的变化としてドプラ偏移を求める時には相対性理論を考慮に入れないと矛盾した結果しか得られない。

そこでまず最初に相対性理論を考慮した電磁波の伝播について取り扱った。結論として得られたことは、

「送受信点を基準として、すなわち航空機上から、すべての現象を通常の見え方にしながらって考えて行けばよい。」

とあらわすことができる。この観点に立つことによって現象を考える時に、相対性理論による複雑な考え方にまでさかのぼる必要はほとんどない。我々はとかく地上から航空機上にある、運動している送受信機に生ずる現象を考え勝ちであるが、このことについては充分の注意をはなわなくてはならない。

第3章 ドプラレーダ受信信号周波数スペクトルについて

1. 緒 言

機上用ドプラレーダで受信し、その周波数を測定すべき信号の性質は次のようなものであると言われている [1]。すなわちその周波数スペクトルは空中線のビーム幅および地表面へ

の入射角に関係した広がりを持ち、雑音を等価な濾波器を通したものに等しいものとされている。しかし雑音性の信号といっても、全くそのように考えてもよいのであろうか。熱擾乱雑音と同様に考えても第一次近似としては問題はないであろうが、反射体が点在するような場合、あるいは信号のやや細かい成り立ちを考えて最適の周波数検出装置を考えようとする場合には、その性質をさらにくわしく追求してみる必要があるように思われる。

このような観点から理論的な検討を進めてみたのでここに御報告することにした。周波数スペクトルの計算の点ではまだ完全とは言えないが、信号の性質について一つの考え方を提供しているものである。

解析の方法としてはまず単一の反射体について得られるべき信号の形をできるだけ正確な近似のもとに波束の形の時間函数として表現した。次にこれから反射体が地面上に不規則に存在するものとして、個々の反射体からの信号を合成する方法をとった。

2. ドブラ素信号

第2章で述べたようにある瞬間における単一の反射体からの受信信号（ドブラ素信号）は

$$R(t) = \cos \left[\omega \left(t - \frac{2h}{c \sin \gamma} \right) \right] \quad (2.1)$$

で与えられ、受信周波数 ω_r は $(v/c)^2$ 以上の項を無視して次の式で示される。

$$\omega_r = \omega \left(1 + \frac{2v}{c} \cos \gamma \right) \quad (2.2)$$

ここで ω = 送信周波数

h = 高度

γ = 航空機の対地速度ベクトル \vec{v} と受信電磁波方向との間の角

そこで航空機上で地上の一つの無指向性の反射体から受信される信号は空中線の指向特性を $G(\gamma)$ としすると、

$$R_u(t) = G(\gamma) \cos \left[\omega \left(t - \frac{2h}{c \sin \gamma} \right) \right] \quad (2.3)$$

で与えられる。ここで γ の時間的变化がドブラ周波数偏移を与える。

これをはっきりさせるために、反射波の方向が $\gamma = \Gamma$ になった時刻 T と反射体の位置 x_1 との関係を示す式（第2章—(2.15) 式）

$$x_1 \sqrt{1 - \beta^2} = vT + h(\cos \gamma - \beta) / \sin \gamma \quad [\beta = v/c]$$

の一次近似を用いて

$$\gamma = \Gamma + \gamma_\tau, \quad t = T + \tau$$

の変換を行なう。(2.3) 式は次のように書きかえられる。

$$R_u(t) = G(\gamma) \cos \left\{ \omega(T + \tau) - \frac{2\omega h}{c \sin \Gamma} \sqrt{1 - \frac{2v\tau}{h} \sin \Gamma \cos \Gamma + \left(\frac{v\tau}{h} \sin \Gamma \right)^2} \right\} \quad (2.4)$$

$$= G(\gamma) \cos \left\{ \omega T - \frac{\omega h}{\sin(\Gamma + \gamma_\tau)} \left(\frac{2}{c} + \frac{\sin \gamma_\tau}{v \sin \Gamma} \right) \right\} \quad (2.5)$$

すなわち $\{v\tau(\sin \Gamma/h)\} \ll 1$ ならば

$$R_u(t) = G(\gamma) \cos \left\{ \omega(T + \tau) + \frac{2\omega v \cos \Gamma}{c} \tau - \frac{2\omega h}{c \sin \Gamma} \right\} \quad (2.4a)$$

であって、位相の第2項はドプラ周波数偏移を示している。ここで

$$\frac{v\tau}{h} \sin \Gamma = \frac{\sin \gamma \tau}{\sin(\Gamma + \gamma \tau)} \quad (2.6)$$

の関係があり、この(2.6)式は空中線ビーム幅と単一の反射体からの受信波の有効時間との関係を示している。空中線のビーム幅を $\pm \Delta \Gamma$ 、空中線ビームの中心と航空機速度ベクトル \vec{v} との間の角を Γ_0 として

$$\Delta \tau = \frac{2h}{v} \cdot \frac{\sin(2\Delta \Gamma)}{\cos(2\Delta \Gamma) - \cos(2\Gamma_0)} \quad (2.7)$$

の間だけ単一の反射体からのドプラ周波数偏移を受けた信号が受信されることになる。これはまた当然のことであるが、反射点から見て角度が $(\Gamma_0 - \Delta \Gamma, \Gamma_0 + \Delta \Gamma)$ の間に航空機がはいっている時間に等しい。たとえば $\Delta \Gamma = 2^\circ$ 、 $\Gamma_0 = 60^\circ$ の時に

$$\Delta \tau = 9.34 \times 10^{-2} (h/v) \text{ s.}$$

$$h = 1000 \text{ m, } v = 360 \text{ km/h} \quad \text{で} \quad \Delta \tau = 0.934 \text{ s.}$$

$$h = 10,000 \text{ m, } v = 720 \text{ km/h} \quad \text{で} \quad \Delta \tau = 4.67 \text{ s.}$$

となり、 $\Delta \Gamma = 2^\circ$ 、 $\Gamma_0 = 30^\circ$ の時に

$$\Delta \tau = 0.281 (h/v) \text{ s.}$$

$$h = 500 \text{ m, } v = 36 \text{ km/h} \quad \text{で} \quad \Delta \tau = 14.1 \text{ s.}$$

となる。

(2.4)式から素信号のドプラ効果をあらわす成分のみについて考えると

$$R_u(\tau) = \cos \left\{ \frac{2\omega h}{c \sin \Gamma} \sqrt{1 - \frac{2v\tau}{h} \sin \Gamma \cos \Gamma + \left(\frac{v\tau}{h} \sin \Gamma \right)^2} \right\} \quad (2.8)$$

の $\tau=0$ の近くでの信号が機上ドプラレーダで受信される信号の成分になっていることがわかる。ここで今しばらく $G(\gamma)$ は Fig. 2.1 に示す形を持っているものとする。

今(2.8)式の信号を振幅変調波の比較的簡単な形の合成として考えられるように級数展開する。

$$\cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sin(\pi\beta/\alpha)}{(\pi\beta/\alpha)} \cos \alpha + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-)^p (\beta/\alpha) \sin(\pi\beta/\alpha)}{\pi \{(\beta/\alpha)^2 - p^2\}} \cos \sqrt{1+p^2} \alpha \quad (2.9)$$

と書ける(証明は附録)。そこで

$$\alpha = \frac{2\omega h}{c \sin \Gamma} \left(1 - \frac{v\tau}{h} \sin \Gamma \cos \Gamma \right) = b(1 - x \cos \Gamma) \quad (2.10. a)$$

$$\beta = \frac{2\omega h}{c \sin \Gamma} \frac{v\tau}{h} \sin^2 \Gamma = bx \sin \Gamma \quad (2.10. b)$$

とおくと(2.8)式の信号は

$$\cos b \sqrt{1 - 2x \cos \Gamma + x^2}$$

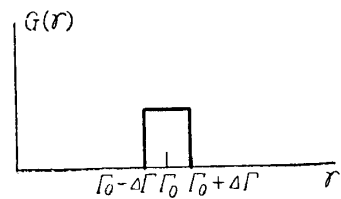


Fig. 2.1. An ideal beam pattern.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \pi \frac{x \sin \Gamma}{1-x \cos \Gamma}}{\pi \frac{x \sin \Gamma}{1-x \cos \Gamma}} \cos b(1-x \cos \Gamma) \\
 &+ \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-)^p \frac{x \sin \Gamma}{1-x \cos \Gamma} \sin\left(\pi \frac{x \sin \Gamma}{1-x \cos \Gamma}\right)}{\left(\frac{x \sin \Gamma}{1-x \cos \Gamma}\right)^2 - p^2} \cos b\sqrt{1+p^2}(1-x \cos \Gamma)
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

と展開される。ここで

$$b x \cos \Gamma = \frac{2v \cos \Gamma}{c} \tau$$

となってドプラ周波数およびその $\sqrt{1+p^2}$ 倍の高調波の成分にドプラ素信号が展開されている。 $\Gamma=70^\circ$ の場合について各成分の振幅の変化の様態を示すと Fig. 2.2 のようになっている。

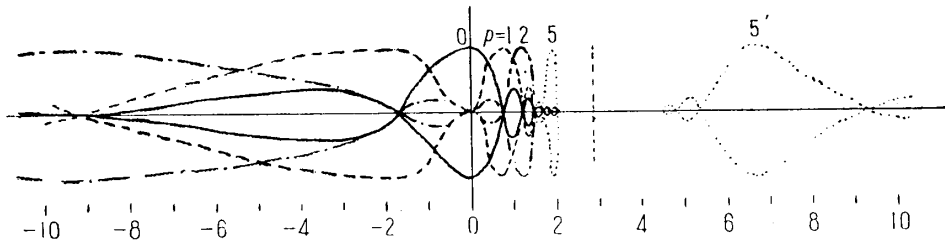


Fig. 2.2. Envelopes of a few components of Eq. (2.11) are shown on the normalized time scale.

τ の原点を Γ が Γ_0 になる位置にとれば空中線ビーム幅に対応して

$$x_{\max(\pm)} = \frac{\sin \Delta \Gamma}{\sin(\Gamma_0 \pm \Delta \Gamma)} \quad (\text{複号同順})
 \tag{2.12}$$

で与えられる $-x_{\max(-)}$ と $x_{\max(+)}$ の間が求めるドプラ素信号となる。 b および $x_{\max(\pm)}$ の値をそれぞれ Fig. 2.3. (a), (b) に示す。なお Fig. 2.4 にドプラ周波数偏移を示した。

ドプラ素信号のスペクトルを求めるために、 $x_{\max(\pm)}$ が 1 に比較して十分に小さいことを考慮して (2.11) 式を近似すると

$$\begin{aligned}
 &\cos b\sqrt{1-2x \cos \Gamma+x^2} \\
 &= \left(1 - \frac{\pi^2}{3!} x^2 \sin^2 \Gamma\right) \cos b(1-x \cos \Gamma) \\
 &- 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-)^p x^2 \sin^2 \Gamma}{p^2} \cdot \cos\{b\sqrt{1+p^2}(1-x \cos \Gamma)\}
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

であらわされる。この第 1 項のみをとってドプラ素信号のスペクトルを計算すると

$$S_{ud}^0(k) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} R_{ud}^{(0)}(\tau) \epsilon^{-jk\tau} d\tau = \frac{2}{k} \sin\left(\frac{kh}{2v} \frac{\sin 2\Delta \Gamma}{\sin^2 \Gamma - \sin^2 \Delta \Gamma}\right)$$

これから $S_{ud}^0(k) = S_{ud}^0(0)/\sqrt{2}$ となる k の幅 $2\pi \Delta f_{d1}$ を計算すると

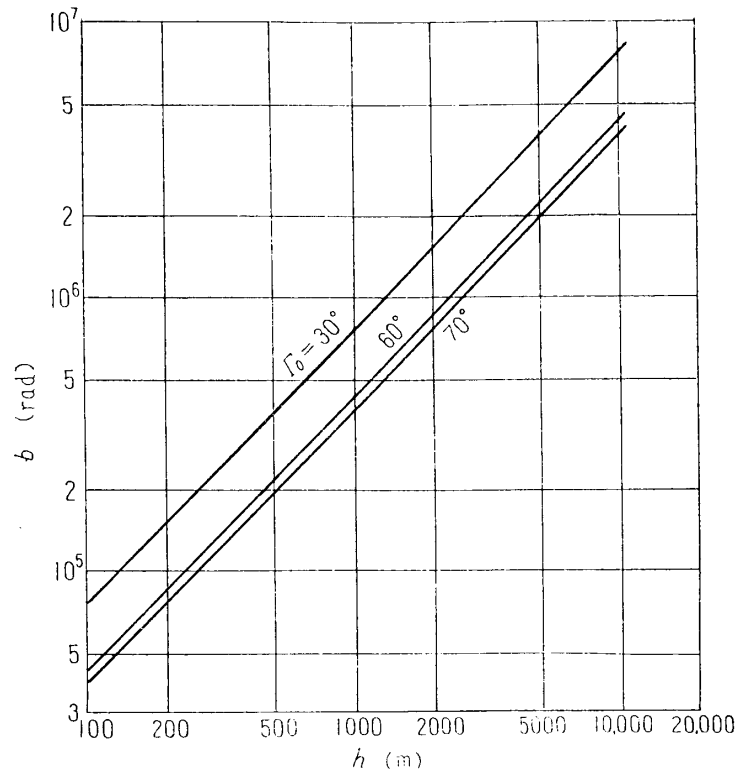


Fig. 2.3 (a). The lagging phase angle of the elementary signal.

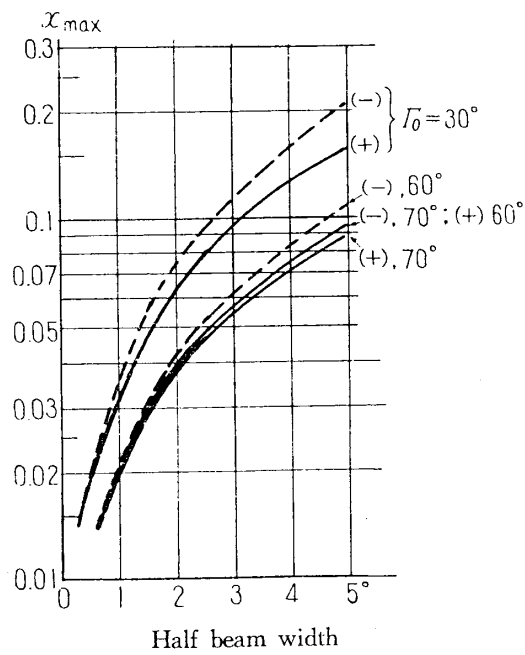


Fig. 2.3 (b). The normalized duration, x , of elementary signal is shown as a function of half beam width.

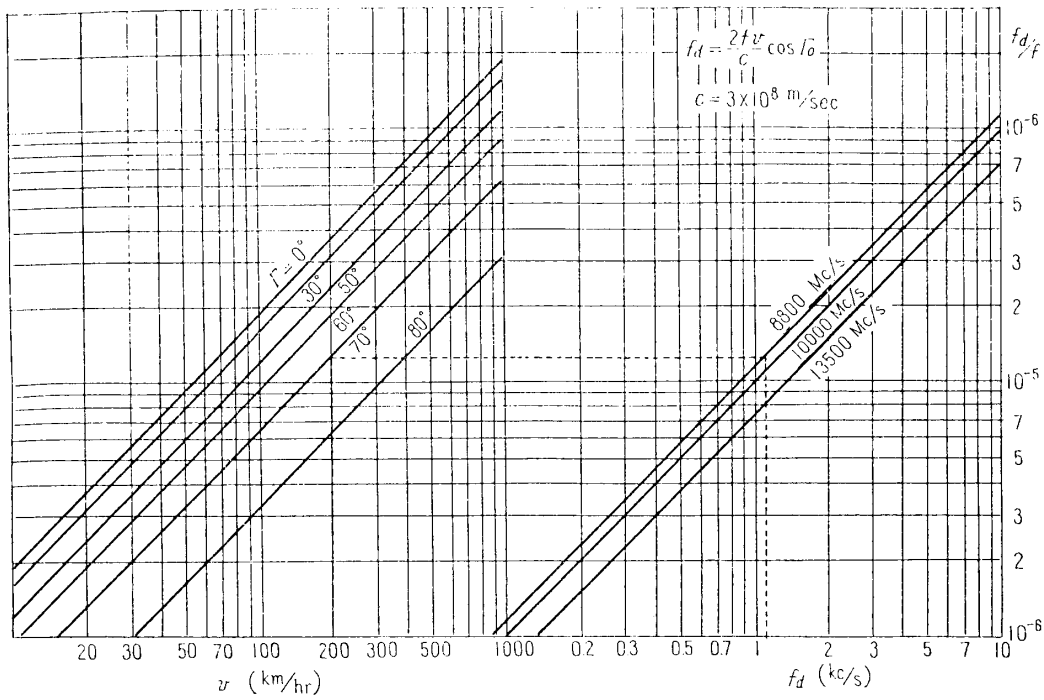


Fig. 2.4 (a). The Doppler frequency is shown as a function of velocity.

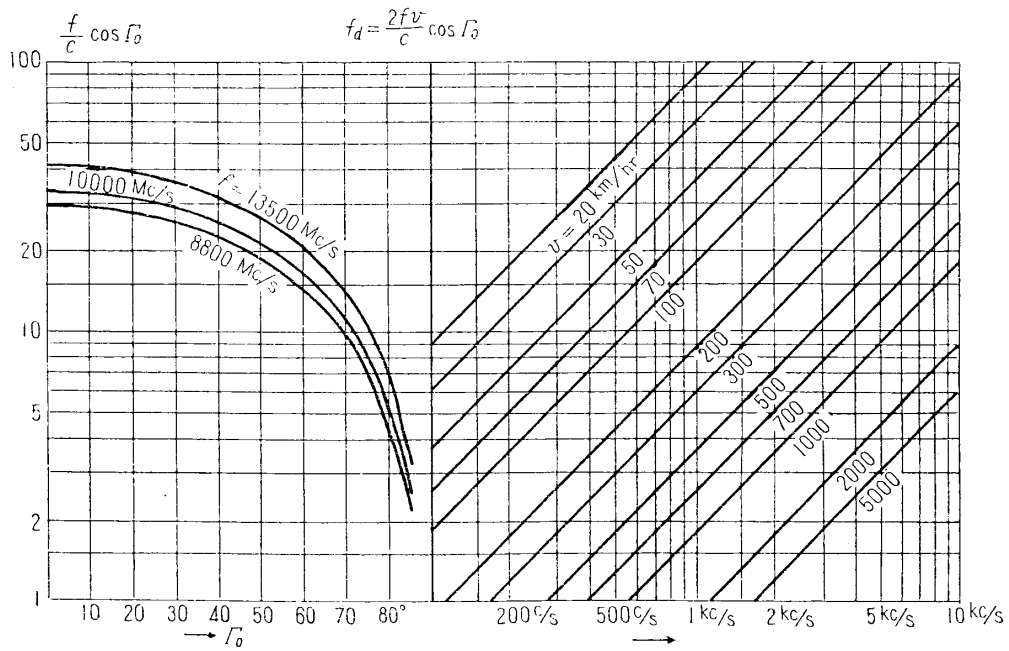


Fig. 2.4 (b). The Doppler frequency is shown as a function of the looking angle of a target.

$$2\pi\Delta f_{d1} = 5.56 \frac{v}{h} \frac{\sin^2 \Gamma - \sin^2 \Delta\Gamma}{\sin 2\Delta\Gamma}$$

したがって $(\omega/2\pi) = 8840 \text{ Mc/s}$ の場合を考えると

$$Q = \frac{f_d}{\Delta f_{d1}} = 66.6h \frac{\cos \Gamma \sin 2\Delta\Gamma}{\sin^2 \Gamma - \sin^2 \Delta\Gamma} = 66.6h F(\Gamma)$$

が得られる。ここで $F(\Gamma)$ の値は Fig. 2.5 に見るように、かなり大きな値となり、高度 h が高くなると Q はほとんど正弦波のスペクトルと見ることができ程度にまで大きくなることわかる。すなわち (2.13) 式の第1項のみを取ったのでは通常予想され、また実験的に得られている形のドプラ信号スペクトルを次節で述べるように説明することはできない。

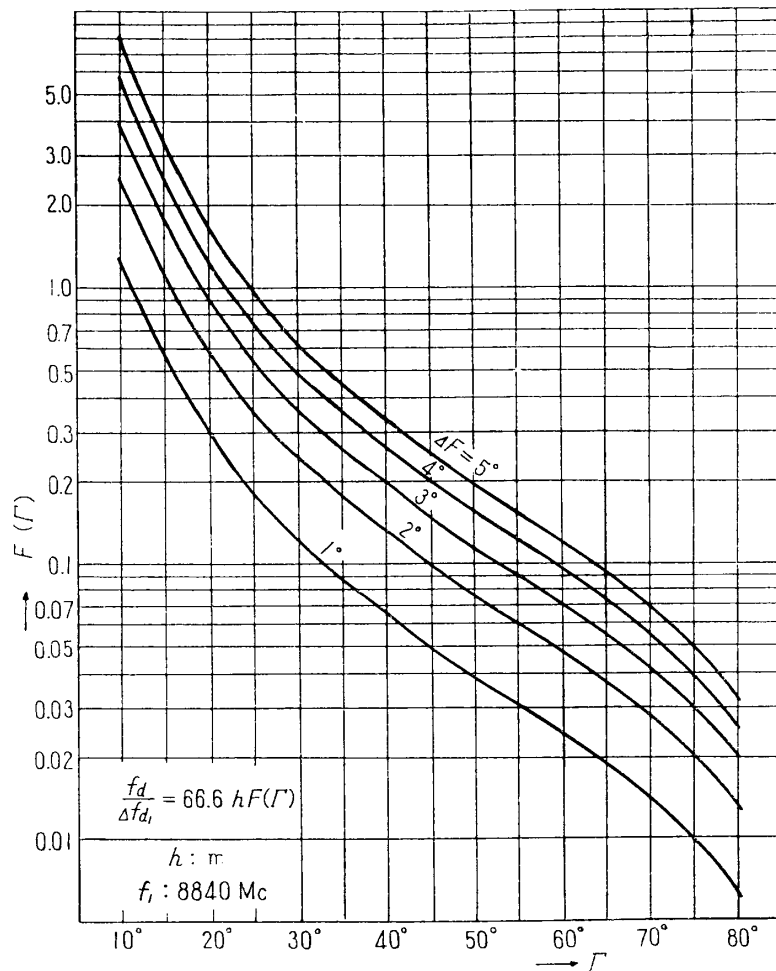
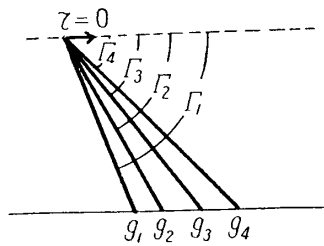


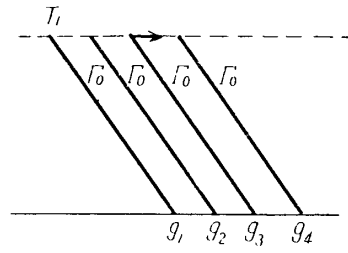
Fig. 2.5. Half power spectrum width of the elementary wave packet.

3. 受信信号

機上ドプラレーダで受信される信号は、地上にある多くの無指向性の反射体について上の 2 で述べた信号を合成したものと考えられる。すなわち Fig. 3.1 または Fig. 3.2 に示し



$g_n: R_{ud}(\Gamma_n, \tau), \quad n=1, 2, 3, 4$
Fig. 3.1



$g_n: R_{ud}(\Gamma_0, \tau - T_n), \quad n=1, 2, 3, 4$
Fig. 3.2

たように各反射体からの素信号を角度に対応して、または時刻のちがいに对应して和をとることになる。この図で $R_{ud}(\Gamma, \tau)$ は $R_{ud}(\tau)$ と同じで単に Γ を明記したものである。

(a) Fig. 3.1 によって合成受信信号を考えた場合

Fig. 2.5 からわかるように $R_{ud}(\Gamma, \tau)$ の素信号は $\Delta\Gamma$ をかなり小さくとっても ($x_{\max} = 0.01, \Delta\Gamma \doteq 0.01 \sin \Gamma_0$ 程度にとっても) なお周波数スペクトルの Q の値は大きい。したがって空中線ビームの中に含まれる反射体 g_n についてそれぞれ対応した $(2fvc \cos \Gamma_n)/c$ の周波数の正弦波の合成が各時刻において受信信号を形成するものと考えられる。すなわち、この意味である時刻における信号はその周波数スペクトルが空中線ビームの形と同じ形を持っており、空中線ビーム幅に対応する周波数範囲にわたって広がっている信号であると考えてよいであろう。

このような考え方から受信信号の周波数スペクトルの幅を等価的な Q の値、すなわち中

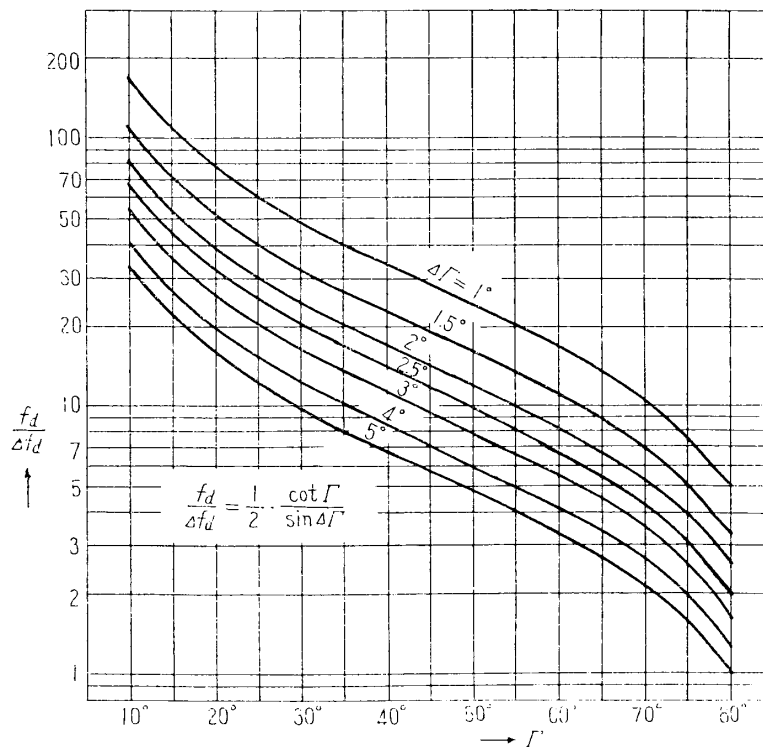


Fig. 3.3. Equivalent Q of the Doppler frequency spectrum.

心周波数と半値幅との比 ($f_a/\Delta f_a$) の値を計算すると Fig. 3.3 に示すようになる。これは実験的に得られている値ともほぼ一致する値を与える。

しかし一方この考え方では時刻 T と時刻 $T+\Delta T$ における信号の相関を考察する際に次のような考慮をする必要がある。Fig. 3.4 において各反射体からの信号を 1, 2, 3, 4, 5 で示すと各時刻においてこれはそれぞれ定まった線スペクトルを与えるが、時間の推移と共にこれは位相が連続して（無指向性の反射体に対して）周波数領域内の位置が移動することになる。通常の雑音性のスペクトルよりもこの点からは時刻に対する相関が強い信号になるであろうことが予想される。また同時に次々に現れて来る、そして消えて行く反射体からの信号の合成で受信信号が示されることがドプラ信号の特性を、雑音性のスペクトルを持つ信号との違いを見せているのではないであろうか。

(b) Fig. 3.2 によって和をとる場合
この場合は

$$R_{ud}(\Gamma_0, t - T_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon^{-jkT_n} S_{ud}(k) \epsilon^{jkt} dt$$

で各反射体に対応する素信号のスペクトル $S_{ud}(k)$ を定義し、反射体固有の位相のずれをこれに加えて和をとることになる。この時は、各反射体に対して T_n が無規則であり、またこれに位相のずれを加えると素信号スペクトルの位相成分は全く不規則に 0 と 2π の間で等しい確率分布を持っているものと考えてよいであろう。そこで受信信号としてこのような意味の素信号の合成をとれば、受信信号の電力スペクトルは $|S_{ud}(k)|^2$ そのものに等しくなることが予想される。このように考えるとまた上に述べた相関についてもかなりはっきりさせられるであろう。しかしこの章の2で述べた近似計算の程度ではこのような結果は得られていない。この近似を高めて計算する必要があるが、かなり計算は厄介になりまだこの問題に対しては妥当な結果は得られていない状態である。さらに検討および考察を進めている。

(c) 和をとることの意味、信号の時間波形

上に (a), (b) で受信信号の二つの合成法について述べた。これを言いかえると Fig. 3.5 に示した各素信号の合成を (a) では時刻 T の瞬間で考えて

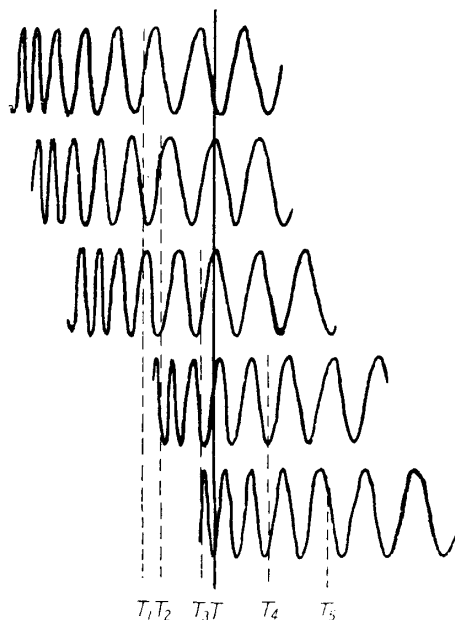


Fig. 3.5. Each elementary signal from individual target.

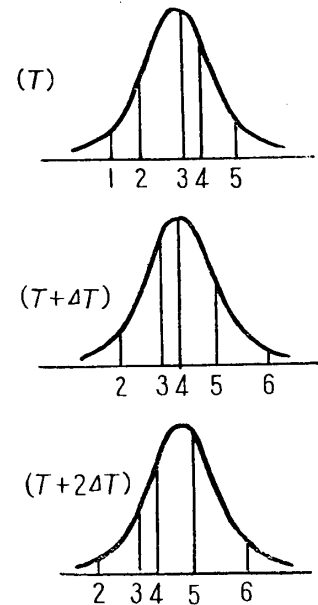


Fig. 3.4. The elementary line spectra in the Doppler frequency shift in consequence of the variation of the looking angle.

いることになり、(b) では全体を通じて考えていることになる。

4. 結 言

機上用ドプラレーダにおいて得られる受信信号について、そのこまかい成り立ちにまでさかのぼって、やや細かく理論的に検討し、考察を行なった。まだ最終的に受信信号の本質を完全に説明したとは言えず、また周波数スペクトルの説明としても不完全な点があるが、現在までに得られた結果を述べたものである。

前章の相対性理論を考慮した考察から得られた充分妥当な近似を用い、また本文に述べた特殊な三角級数展開が首肯される範囲で次のことがらわかった。機上用ドプラレーダで得られる受信信号は、地表面に存在する種々の反射体のそれぞれからの反射信号のある時刻における並列的な合成と解釈される。このように解釈すれば現在までに実験的に得られている受信信号の周波数スペクトルの形を一応は説明できる。しかしこの合成は通常の意味での時間的に定常な状態で存在している、位相が不規則であることに基づいた、または振幅が不規則であることに基づいた雑音性信号の合成とは異なっている。ここであらわれているのは、ある一定の長さを持った波束としての信号の並列的な合成である。一つの考え方としてこの波束の立場に基づいた、波束の発生時刻を不規則として、波束信号周波数スペクトルを合成する立場から受信信号を考えても、上に述べたものと同じ形の信号が得られるはずである。しかしこの点についてはまだ完全な一致を見ていず、まだその説明も出ていない状態である。この点を解明することにより、雑音性信号との相違点について、また時間的な相関について、機上ドプラレーダ受信信号としての特異性が見られるものと考えられる。このような点についてはさらに検討を進めている。

謝 辞

本研究は機関研究「超音速航空機の電子航法方式」の一部として行なわれたものであり、本研究所計測部の岡田教授をはじめとする諸氏の御援助、御討論のもとに進められたものである。特に一般相対性理論に関係した取り扱いについては本学理学部加藤教授、霜田教授、ならびに本研究所五十嵐教授から有益な御助言を受けた。ここにあわせて深く感謝の意をあらわす次第である。

1961 年 11 月 4 日 計 測 部

参 考 文 献

- [1] C. Møller (永田, 伊藤訳): 相対性理論, みすず書房 (1959)
- [2] J. R. Pierce: Relativity and Space Travel, IRE 47, 1053 (June 1959)
- [3] R. L. Forward: General Relativity for Experimentalist, IRE 49, 892 (May 1961)
- [4] F. B. Berger: The Nature of Doppler Velocity Measurement, Trans. of IRE on ANE, vol. ANE-4, No. 3, p. 108.
- [5] 田宮: 各種機上ドプラレーダの性能の評価, 本集報, p. 510.
- [6] 岡田, 丹羽, 田宮, 東口研究室: 機上ドプラレーダ用試作送受信機と野外実験, 本集報, p. 538.
- [7] 東口: 機上ドプラレーダ信号の解析, 昭和 35 年度電気四学会連大 (昭 35/7) 1809.

- [8] 岡田, 田宮, 東口: Airborne Doppler Radar Navigator について, 電気通信学会航空電子機器研究専門委員会資料 (昭 35/9).

附 録

A 1. 回転運動系における光線の経路の一般相対性理論に基づく計算

第2章, 3 においては回転座標系における光線 (電磁波ビーム) の経路については, 電磁波源は回転座標系にあるが, これから放射される光線の経路は, その放射された瞬間において回転座標系に一致している慣性系内の現象として計算されるということから航空機座標系における光線の経路を特殊相対性理論から計算した。

しかし回転座標系は慣性系ではないのでその中の現象を考える場合には厳密には一般相対性理論に従う必要がある。この一般相対性理論は重力場の問題を考えない場合には上記の条件すなわちある点における物理現象はその瞬間に一致している慣性系におけるものと同じ法則に従う, との条件の下で立てられたものであり, その意味で 3 の結果は一般相対性理論を用いて計算したものと一致する。この場合回転座標系で観測した光線の経路はどうなるであろうか。このことについて考察してみる。

慣性系 K' に対して角速度 Ω で回転している回転 (座標) 系 R における空間幾何学は一般相対性理論を受け入れる結果として非ユークリッド幾何学となり, その空間計量テンソルは $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, \theta, \varphi, ct')$ として

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2 r^2 \cos^2 \theta}{c^2 - \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A. 1.1})$$

で示され, その空間線素の長さ $d\sigma$ は

$$(d\sigma)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + \frac{c^2 r^2 \cos^2 \theta}{c^2 - \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta} (d\varphi)^2 \quad (\text{A. 1.2})$$

となる。

A. 1. 1. 回転系における光線の経路

回転系 R の中で物理法則は次の計量テンソルを用いて時空座標の間の関係として示される。

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2 \theta & \frac{\Omega}{c} r^2 \cos^2 \theta \\ 0 & 0 & \frac{\Omega}{c} r^2 \cos^2 \theta & -\left(1 - \frac{\Omega^2}{c^2} r^2 \cos^2 \theta\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A. 1.3})$$

そこで光線の回転系 R 内における経路は時空座標空間における測地線であること, この世界線の長さが 0 であることから次の微分方程式の解として記述される。

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \sum_{k=1}^4 g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} \quad (\text{A. 1.4a})$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \cdot \frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \quad (\text{A. 1.4b})$$

ここで λ は任意のパラメータ。

(A. 1.4a) 式を $x^1=r$, $x^2=\theta$, $x^3=\varphi$, $x^4=ct'$ について書けば, それぞれ次のようになる。

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{dr}{d\lambda} \right\} = r \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r \cos^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} + \Omega \frac{dt'}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{A. 1.5a})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right\} = -r^2 \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} + \Omega \frac{dt'}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{A. 1.5b})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ r^2 \cos^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} + \frac{r^2 \Omega}{c} \cos^2 \theta \frac{d(ct')}{d\lambda} \right\} = 0 \quad (\text{A. 1.5c})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{r^2 \Omega \cos^2 \theta}{c} \frac{d\varphi}{d\lambda} - \left(1 - \frac{r^2 \Omega^2 \cos^2 \theta}{c^2} \right) \frac{d(ct')}{d\lambda} \right\} = 0 \quad (\text{A. 1.5d})$$

次に (A. 1.4b) 式から

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \cos^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{r^2 \Omega^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) \left\{ \frac{d(ct')}{d\lambda} \right\}^2 \\ + 2 \frac{r^2 \Omega}{c} \cos^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d(ct')}{d\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 1.5e})$$

これらの式を $t'=0$ で $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$, $t'=t_1'$ で $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ の条件で解く。(A. 1.5a)~(A. 1.5e) 式から, K_1 を定数として

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt'} &= \frac{K_1}{r^2 \cos^2 \theta} - \Omega \\ r^2 \left(\frac{d\theta}{dt'} \right)^2 &= c^2 - \left(\frac{dr}{dt'} \right)^2 - \frac{K_1}{r^2 \cos^2 \theta} \\ \frac{d^2}{dt'^2} (r^2) &= 2c^2 \end{aligned}$$

が得られ, 結果は

$$r^2 = c^2 t'^2 + (r_1^2 - r_0^2 - c^2 t_1'^2) (t'/t_1') + r_0^2 \quad (\text{A. 1.6a})$$

$$r \sin \theta = (r_1 \sin \theta_1 - r_0 \sin \theta_0) (t'/t_1') + r_0 \sin \theta_0 \quad (\text{A. 1.6b})$$

$$\tan(\varphi - \varphi_0 + \Omega t') = \frac{2t_1'^2 K_1 t'}{2n_2 + m_2 t'} \quad (\text{A. 1.6c})$$

ここで

$$\begin{aligned} n_2 &= t_1'^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0 \\ m_2 &= t_1' \{ r_1^2 - r_0^2 - c^2 t_1'^2 - 2r_0 \sin \theta_0 (r_1 \sin \theta_1 - r_0 \sin \theta_0) \} \\ K_1^2 &= c^2 \left[r_0^2 \cos^2 \theta_0 \left\{ 1 - \frac{(r_1 \sin \theta_1 - r_0 \sin \theta_0)^2}{c^2 t_1'^2} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2 t_1'^2} \left\{ \frac{r_1^2 - r_0^2 - c^2 t_1'^2}{2} - r_0 \sin \theta_0 (r_1 \sin \theta_1 - r_0 \sin \theta_0) \right\} \right] \end{aligned}$$

となって, これらの式から $r_1, \theta_1, \varphi_1, r_0, \theta_0, \varphi_0$ に対する t_1' が求められる。

今 $t'=0$ で $(d\theta/dr)=0$, $(d\varphi/dr)=0$ であるとする. すなわち θ_0, φ_0 の方向に $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ の点から光線が出発したものとす. この時は

$$\frac{r_1^2 - r_0^2 - c^2 t_1'^2}{2t_1' r_0} \sin \theta_0 = \frac{r_1 \sin \theta_1 - r_0 \sin \theta_0}{t_1'}$$

$$\Omega = \frac{K_1}{r_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

となり, 従って $r_0 \sin \theta_0$ から $h_1 = r_1 \sin \theta_1$ の面に到達するまでの時間 t_1' および座標 r_1, φ_1 は次の式で与えられる.

$$r_1^2 = \frac{\Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0} \left(\frac{h_1}{\sin \theta_0} - r_0 \right)^2 + \frac{h_1^2}{\sin^2 \theta_0}$$

$$t_1' = \frac{1}{\sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}} \left(\frac{h_1}{\sin \theta_0} - r_0 \right)$$

$$\tan(\varphi_1 - \varphi_0 + \Omega t_1') = \frac{\Omega r_0 (h_1 - r_0 \sin \theta_0)}{h_1 \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}}$$

光線の経路は次の式で示される.

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= c^2 t'^2 + 2t' r_0 \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0} + r_0^2 \\ r \sin \theta &= \{r_0 + t' \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}\} \sin \theta_0 \\ \tan(\varphi - \varphi_0 + \Omega t') &= \frac{\Omega r_0 t'}{r_0 + t' \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 1.7})$$

A. 1.2. 慣性系 K ($XYZT$ 系) における経路

$X = r \cos \theta \cos \Phi$, $Y = r \cos \theta \sin \Phi$, $Z = r \sin \theta$, $T = t'$ として極座標で示す.

$$\cos \psi_0 = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}{c^2}}, \quad \sin \psi_0 = \frac{\Omega r_0 \cos \theta_0}{c}$$

とおくと (A. 1.7) 式から

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2 T^2 + 2c T r_0 \cos \psi_0 + r_0^2 \\ r \sin \theta &= (r_0 + c T \cos \psi_0) \sin \theta_0 \\ \tan \Phi &= \frac{r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0 + c T (\cos \psi_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0 + \sin \psi_0 \cos \Phi_0)}{r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 + c T (\cos \psi_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 - \sin \psi_0 \sin \Phi_0)} \end{aligned}$$

が慣性系 K における光線の経路を示し, 次のように光線の進行方向が ψ_0 だけ変化したことになる.

$$\begin{aligned} X = r \cos \theta \cos \Phi &= r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 + c T (\cos \psi_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 - \sin \psi_0 \sin \Phi_0) \\ Y = r \cos \theta \sin \Phi &= r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0 + c T (\cos \psi_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0 + \sin \psi_0 \cos \Phi_0) \\ Z = r \sin \theta &= r_0 \sin \theta_0 + c T \cos \psi_0 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

Fig. A. 1 を参照して方向余弦の変換式を書くと次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \cos \psi_0 \\ \sin \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & 0 & \sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \Phi_0 & \sin \Phi_0 & 0 \\ -\sin \Phi_0 & \cos \Phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0 - \sin \psi_0 \sin \Phi_0 \\ \cos \psi_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0 + \sin \psi_0 \cos \Phi_0 \\ \cos \psi_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}$$

すなわち $\mathbf{K}(XYZ)$ 系に対して Z 軸のまわりの回転 (Φ_0), Y 軸のまわりの回転 ($-\theta_0$) を行った $X'Y'Z'$ 系で光線の経路を考えることにより, 光線方向が \mathbf{R} 系で与えた方向と ψ_0 だけ変化していることがわかる. これは慣性系 \mathbf{K} に対して $v_0 = \Omega r_0 \cos \theta_0$ の速度を持つ慣性系に電磁波源があると考えて取り扱った場合の光線の経路に等しいことを示している.

A. 1. 3. 光線の到達経路

$[dr/dt]_{t=0} < 0$ として A. 1. 1 (A. 1. 5) 式以下を同じ条件で解くと $t' = t_2$ で到達したものと

$$r^2 = c^2 t'^2 - 2r_0 t'' \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0} + r_0^2$$

$$r \sin \theta = (r_0 - t'' \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}) \sin \theta_0$$

$$\tan(\varphi - \varphi_0 + \Omega t'') = \frac{\Omega r_0 t''}{r_0 - t'' \sqrt{c^2 - \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \theta_0}}$$

ここで $t'' = t' - t_2$

となる. そこで $\varphi + sT = \Phi$, $\varphi_0 + st_2 = \Phi_0'$ として XYZ 系でこれを示すと

$$X = r_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0' - c(T - T_2)(\cos \psi_0 \cos \theta_0 \cos \Phi_0' + \sin \psi_0 \sin \Phi_0')$$

$$Y = r_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0' - c(T - T_2)(\cos \psi_0 \cos \theta_0 \sin \Phi_0' - \sin \psi_0 \cos \Phi_0')$$

$$Z = r_0 \sin \theta_0 - c(T - T_2) \cos \psi_0 \sin \theta_0$$

であって, Fig. A. 1 の $X'Y'$ 面内で ($-\psi_0$) の方向から r_0 点に近づくことになる.

以上からわかるように一般にある方向に出発した光線が Z 軸に直角な面上に到達するまでの時間と, その面から出発して回転座標系で同じ方向から到達するまでの時間とは等しいが, この面上に光線が到達する位置と, この面上から光線が出発する位置は一致しない. すなわち言葉をかえると光線の射出方向とその光線に対する反射光線方向は回転座標系では一致せず, 一般にある点にある反射体からの反射光線は同じ方向から返って来ない, すなわち回転系では光の逆進の法則は成立しないことになる.

A. 1. 4. 測地線

空間計量テンソル (γ) が与えられた時にその測地線はこれに沿って測った距離が停留値をとるような曲線として定義され, 次の変分を 0 にするものである.

$$\delta \int \left(\sum_{i,k} \gamma_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda = \delta \int d\sigma$$

そこで測地線は Euler の微分方程式

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

ここで $L = \sum_{i,k} \gamma_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$; $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$

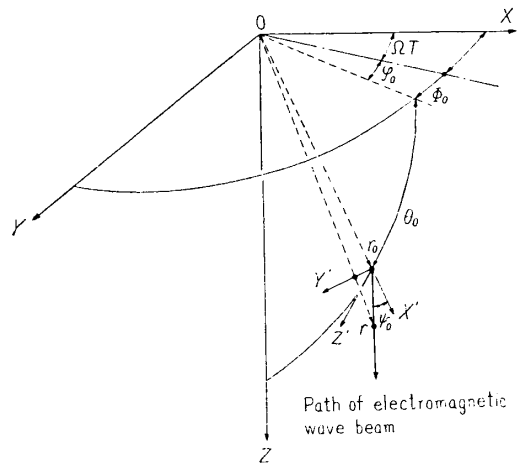


Fig. A. 1. The apparent beam direction in the inertial reference frame \mathbf{K}' when the beam is radiated to the radial direction in the rotating frame.

で与えられる。パラメータ λ として距離 σ をとり、回転座標系について (A. 1.1) 式を用いて測地線を求めてみる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dr}{d\sigma} \right) &= r \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \frac{r \cos^2 \theta}{\{1 - (\Omega^2/c^2)r^2 \cos^2 \theta\}^2} \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \\ \frac{d}{d\sigma} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\sigma} \right) &= - \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{\{1 - (\Omega^2/c^2)r^2 \cos^2 \theta\}^2} \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 \\ \frac{d}{d\sigma} \left\{ \frac{r^2 \cos^2 \theta}{1 - (\Omega^2/c^2)r^2 \cos^2 \theta} \frac{d\varphi}{d\sigma} \right\} &= 0 \\ \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 + \frac{c^2 r^2 \cos^2 \theta}{c^2 - \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{d\sigma} \right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

が得られ、この式から

$$\frac{c^2 r^2 \cos^2 \theta}{c^2 - \Omega^2 r^2 \cos^2 \theta} \frac{d\varphi}{d\sigma} = \alpha$$

となり、 $\alpha=0$ とすると

$$\frac{d}{d\sigma} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\sigma} \right) = 0$$

であって、 $(d\theta/d\sigma)=0$ $(d\varphi/d\sigma)=0$ すなわち θ, φ が一定の方向が一つの測地線であることがわかる。

A. 2 ドプラ素信号展開定理の証明

C を十分に大きな原点を含む積分路とすると

$$\cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\xi e^{j\xi}}{\xi^2 - \alpha^2 - \beta^2} d\xi$$

と書けることを用いる。

$$\frac{1}{a \sin \pi a} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-)^p}{(a^2 - p^2)} \right] \quad a \neq \text{整数}$$

である* ので

$$\frac{1}{z^2 - a^2} \left[1 - \frac{a \sin \pi a}{z \sin \pi z} \right] = \frac{\sin \pi a}{\pi a} \frac{1}{z^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a \sin \pi a}{a^2 - p^2} \frac{(-)^p}{z^2 - p^2} \quad (\text{A. 2.1})$$

となる。ここで

$$z^2 = \frac{\xi^2 - \alpha^2}{\alpha^2}, \quad a^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}$$

とおき、(A. 2.1) 式の級数が絶対収斂であって、項別積分可能であるので Fig. A. 2 に示した積分路で両辺を積分することにより

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\xi e^{j\xi}}{\xi^2 - \alpha^2 - \beta^2} \left\{ 1 - \frac{\beta \sin(\pi \beta/\alpha)}{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2} \sin(\pi \sqrt{\xi^2 - \alpha^2}/\alpha)} \right\} d\xi$$

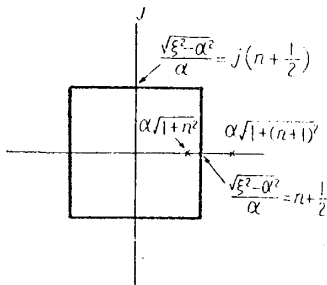


Fig. A. 2.
The contour of integral, C .

* 森口, 宇田川, 一松: 数学公式 (II), 岩波全書, 岩波書店 (1957)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin(\pi \beta/\alpha)}{(\pi \beta/\alpha)} \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\xi \epsilon^{j\xi}}{\xi^2 - \alpha^2} d\xi \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} (-)^p \frac{(\beta/\alpha) \sin(\pi/\alpha)}{(\beta/\alpha)^2 - p^2} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{\xi \epsilon^{j\xi}}{\xi^2 - \alpha^2 - \beta^2} d\xi \right\} \quad (\text{A. 2.2})
\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}$ は $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \sqrt{\xi^2 - \alpha^2} = \xi$ となる分枝をとる。この積分路上で $\sqrt{\xi^2 - \alpha^2} = \rho_1(\theta) \epsilon^{j\theta}$ とおくと

$$\rho_1(\theta) > \left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha$$

であって

$$\left| \sin \pi \frac{\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}}{\alpha} \right| \geq 1$$

となる。したがって (A. 2.2) 式から

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \beta \sin\left(\pi \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot O\left(\frac{1}{n+1/2}\right) \right] \cos \sqrt{\xi^2 + \beta^2} \\
&= \frac{\sin(\pi \beta/\alpha)}{(\pi \beta/\alpha)} \cos \alpha \\
&\quad + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^n \frac{(-)^p (\beta/\alpha) \sin(\pi \beta/\alpha)}{(\beta/\alpha)^2 - p^2} \cos(\sqrt{1+p^2} \alpha) \quad (\text{A. 2.3})
\end{aligned}$$

が得られる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned}
\cos \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &= \frac{\sin(\pi \beta/\alpha)}{(\pi \beta/\alpha)} \cos \alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-)^p (\beta/\alpha) \sin(\pi \beta/\alpha)}{(\beta/\alpha)^2 - p^2} \cos(\sqrt{1+p^2} \alpha) \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{p=-m}^m \frac{\sin \pi(\beta/\alpha - p)}{\pi(\beta/\alpha - p)} \cos(\sqrt{1+p^2} \alpha) \quad (\text{A. 2.4})
\end{aligned}$$

となる。(証明終)