

熱層近似の方法—熱伝導・熱弾性問題の近似解法*

三 浦 公 亮

Method of Thermal Layer Approximation—An Approximate Method for Transient Thermal and Thermo-Elastic Problems

By

Koryo MIURA

Abstract: When the surface of a solid is exposed to a heat input, an increase in internal energy must, in the early stages, be restricted within a short distance $\delta(\tau)$ from the surface. A quantity $\delta(\tau)$ is defined to be the thermal layer, which is analogous to the boundary layer in a viscous flow. The concept, proposed by T. R. Goodman, is conveniently used for the approximate analysis of heat conduction problems in connection with his Heat-Balance Integral analogous to the Momentum Integral.

This paper presents the theoretical foundation for the concept of the thermal layer, first by its analogy to the boundary layer, and secondly by describing the heat conduction process as the stochastic process of the Brownian motion of the particles, the process is mathematically equivalent to the Fourier's law of heat conduction. Then the general method of thermal layer approximation is presented, and is used for the analysis of heat conduction problems of a slab, a cylinder and a insulation coating. These solution is then used for the analysis of thermo-elastic problems such as thermal stresses, thermal shock, thermally induced vibration and deflection problems. Easiness of the analysis together with an explicit character of the solution suggest the wide applicability of the method in these field.

概 要

固体表面が急激に加熱される場合、その初期において熱は表面から限られた深さしか拡散せず、いわゆる熱層が形成される。これは粘性流体における境界層と類似の概念で、T. R. Goodman によって提案され、さらに運動量積分と類似の熱平衡積分と結びつけて熱伝導の近似解析に用いられる。

本論文はまず熱層概念の理論的根拠を二つの面から示す。一つは境界層とのアナロジー、一つは粒子の Brown 運動の確率過程で、共に数学的に Fourier の方程式と等価なものである。次に熱層近似の方法の一般的操作を提示し、厚板、円筒、遮熱被膜等の解を得る。

次に熱弾性問題の領域における熱層近似の方法の応用性を検討した結果その有用性が認められるので、熱応力、熱衝撃、熱変形及び急速加熱による振動等の問題が解析される。

この方法の容易さ、そして解の明白で物理的直観に沿っている点は、熱伝導、熱弾性問題における広い応用性を暗示するものである。

* 本研究の一部は1960年2月、8月、1961年2月、7月の日本航空学界宇宙科学技術シンポジウム、1960年11月同学会秋期大会、1961年2月同学会構造強度シンポジウムに於いて発表したものである。

1 熱層と境界層

固体がその表面から急激に加熱(冷却)される場合、今その初期の段階に注目しよう。熱は固体表面に近接した薄い層 $\delta(\tau)$ の中にその大部分が蓄積され、従って δ を超えて拡散する熱エネルギーの量は極く僅かであるような δ を定義出来るだろうか。

これは粘性流体における境界層の概念から類推されることであって、粘性流体において過度の拡散の限定される領域が境界層であるとすれば、固体中の熱伝導では熱の拡散の限定される領域が対応して考えられるかもしれない。このような層を熱層 (thermal layer) と仮称しよう。

熱層という考え方は、固体のアブレーションの問題の近似的取扱い方として、T. R. Goodman [1] によって初めて提案され、またのちに簡単な熱伝導の問題に応用されてよい結果が得られている。[2] この方法の主眼は、熱層という考え方をを用いることにより粘性流体における衆知の運動量積分の式と同様に、熱伝導方程式を熱層の中だけ積分した熱平衡積分の式が得られること、これにより運動量積分と同様の近似解法が可能となることにある。結果から見て、この方法はかなりよい精度を与えるものであり、解が解析的で比較的簡単な型で得られ、各パラメータの影響が見やすいのも都合がよい。またさらにより精度を得るには熱平衡積分の代りに変分原理に基く L. V. Kantorovich の方法 [3] を用いればよい。しかしこの方法によると複雑な問題に対しては解析困難になる場合もあるから、著者の考えでは熱平衡積分で充分であると思う。

Goodman の示した近似解法が、その後の著者の研究の結果から見てますます広い普遍性を有する方法であることが判るにつれ、その方法の根拠となる熱層という概念の物理的および数学的意味を明らかにする必要があると感じられた。つまり熱層が、すでに一般に受け入れられている境界層の概念と同様に、明確に定義されるものであるか、あるいは極く限られた問題だけに特徴的なものに過ぎないのであろうか、以下このことについて論ずる。

まず境界層の概念が如何に導入されたかを考えて見る。粘性が極めて小さく、Reynolds 数が極めて大きい流れを考える。このような流れでは粘性の影響は物体表面の近くの薄い層に限られ、その外側は粘性のない流体の非回転運動によって大体において正しく記述されることが多い。この薄い層が Prandtl によって‘境界層’と名付けられたのは衆知の事実である。実際 Navier-Stokes の方程式の厳密解を調べてみると、多くの解が大きな Reynolds 数に対して‘境界層の構造’を有しており、粘性の影響が壁近くの極く薄い層に限られていることが示される。

熱の拡散のしかたが、過度の拡散のそれと良く似ていることは容易に示される。粘性係数を定義する Newton の内部摩擦の法則は、熱伝導率を定義する Fourier の熱伝導の法則と全く同型である。さらに動粘性係数 ν は直接温度拡散率 α に対応する。また境界層が形成されるような Reynolds 数の大きい流れは、Fourier 数 $N_{Fo} = \alpha\tau/d^2$ (τ : 時間, d : 代表的長さ) の小さい熱の拡散に対応する。Fourier 数の持つ無次元時間という意味からすると、このような熱の拡散とは非常に過度的な状態を指すことになる。このようにつきつめてくると、この過度的な状態では境界層に対応して熱層と呼ばれる限定された領域が当然存在してよいと考えられるのである。

熱層が境界層と同じように受け入れられ、その結果運動量積分による近似解法と類似な方法が用いられるにはもちろんさらに確かな根拠が示されねばならない。熱伝導の方程式が Navier-Stokes 方程式のように境界層的構造を有することが示されれば、これは一つの有力な根拠となり得る。

これに対して一つの解答を与えてくれるものは Rayleigh の問題とそれに相似な熱伝導の問題である。この問題では境界層と熱層は数学的にも一致するのである。

平板がその面内で急に一定速度 V で動き出したときの流れを考える。 V の方向に y 軸、板に垂直に x 軸をとり、また動き出した時刻を $\tau=0$ とする。平板が無限に拡っているとすれば、流れの状態は y 方向には変わらず、圧力も一定である。したがって Navier-Stokes の方程式は

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1-1)$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq 0 \quad \text{で} \quad v=0 \\ \tau > 0 \quad \text{で} \quad v=V, \quad (x=0) \\ \quad \quad \quad v=0, \quad (x \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \quad (1-2)$$

ここで

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\nu\tau}}, \quad v = Vf(\xi) \quad (1-3)$$

とおくと、上の方程式はつぎの常微分方程式に帰着する。

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} = 0 \quad (1-4)$$

境界条件は $\xi=0$ で $f=1$, $\xi \rightarrow \infty$ で $f \rightarrow 0$ になる。解は

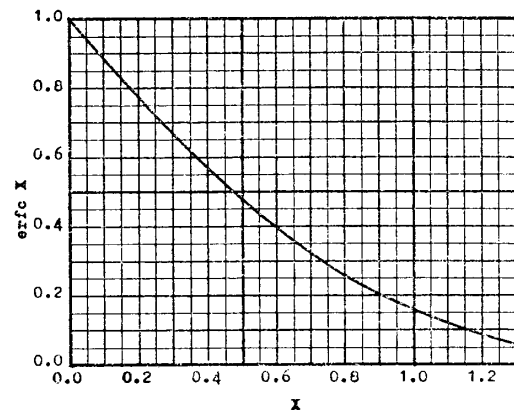
$$v = V \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \right) = V \operatorname{erfc} \xi \quad (1-5)$$

$\operatorname{erfc} \xi$ は $\operatorname{erfc} \xi = 1 - \operatorname{erf} \xi$ であって、 ξ が 2 より大きいところで極めて急速に 0 に近づく。(第1図) 例えば $\xi=1.82$ で $v/V=0.01$ となる。これに対応する x の値を δ と書けば

$$\delta = 2\xi_0 \sqrt{\nu\tau} = 3.64\sqrt{\nu\tau} \quad (1-6)$$

となる。 δ は粘性の影響のおよぶ範囲を与えるもので、これが境界層の厚さを示すものと考えてよい。

すでに明らかなように、Rayleigh の問題では、Navier-Stokes 方程式は一次元の熱伝導の方程式と全く同型のものとなるのである。速度 v は温度 t に、粘性係数 ν は温度拡散率 α にそれぞれ対応する。そして Rayleigh の問題は熱の場合では、初期温度 t_i に保たれた半無限体の表面が急に温度 t_0 になる問



第1図 $\operatorname{erfc} X$

題に等しい。熱伝導の方程式および境界条件を書くと、

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (1-7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq 0 \quad \text{で} \quad t = t_i \\ \tau > 0 \quad \text{で} \quad \left. \begin{array}{l} t = t_g, \quad (x=0) \\ t = 0, \quad (x \rightarrow \infty) \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (1-8)$$

ここで

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}, \quad t - t_i = (t_g - t_i) f(\xi) \quad (1-9)$$

と置けば

$$t - t_i = (t_g - t_i) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-\xi^2} d\xi \right) = (t_g - t_i) \operatorname{erfc} \xi \quad (1-10)$$

となる。この場合でも

$$\delta = 2\xi_0\sqrt{\alpha\tau} = 3.64\sqrt{\alpha\tau} \quad (1-11)$$

なる δ をとれば、 δ 以遠に熱の拡散する量は極く僅かであると考えてよいであろう。

以上の例により、熱伝導方程式も Navier-Stokes 方程式と同じように Fourier 数が小さい場合には境界層的構造を有し、熱の拡散のおよぶ範囲は表面近くの薄い層に限られることが明らかになった。こうして Rayleigh の問題の解の‘境界層的構造’が境界層概念の導入の一つの根拠となったと全く同様に、これが非定常熱伝導における熱層の概念導入の一つの根拠としてあげてもよいであろう。

もちろん、単に Rayleigh の問題に相当する熱伝導の問題が熱層の存在を実証するからと云って、これを種々異なる加熱条件の場合にもそのまま適用すると考えるのは幾分早計に過ぎるかもしれない。そこで、次章では、熱の拡散を幾分詳細に観察することにより、熱層が加熱条件には無関係に、一義的に定義出来ることを証明しよう。

熱層自体よりも、その応用面に興味ある読者は、「拡散型の問題では、境界における物理量の変化が伝播する範囲は時間によって限られている。」という常識が普遍的に成立するものと期待することにして、直ちに第3章の解析を読まれてもよい。

2 熱層の確率論的説明

この章では、熱伝導を確率論的に取扱い Fourier の微分方程式と等価な熱伝導模型を考える。これにより熱層が加熱条件とは無関係に一義的に定義される。

コロイド粒子の Brown 運動を考えてみる。粒子は周囲から分子の不規則な衝突を受けて不規則な運動をする。それは左右から平均において同数の衝突を受けて、平均の偏位は零であるが、平均からのずれ、すなわち揺らぎのために偏位の平方の平均は有限の値を持つ。実際ある偏位を受けた後に受ける偏位は前のものに無関係に独立と考えられる。それで此の考への範囲では粒子の Brown 運動は一様な偶然累加現象として把握できる。

いま時間の始めに x にあった粒子が τ 時間後に x' にくる確率密度を $f(x', x; \tau)$ とすれば、これは Gauss の正規分布であって

$$f(x', x; \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2\tau}} \quad (2-1)$$

となる。ここに σ^2 は分散率である。始めの粒子の分布が $\varphi(x)$ で与えられた場合、 τ 時間後の分布 $\varphi(x, \tau)$ は

$$\varphi(x', \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', x; \tau) \varphi(x) dx \quad (2-2)$$

であり、これは微分方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (2-3)$$

の初期条件 $\varphi_{\tau \rightarrow +0} = \varphi(x)$ に相当する解である。

いまコロイド粒子に代って熱エネルギーを帯びた粒子を考へ、これが Brown 運動をするとする。その確率密度は (2-1) 式であり、始めの粒子の分布(つまり温度分布)が $\varphi(x)$ で与えられれば、 τ 時間後の温度分布は (2-2) 式であり、これは熱伝導方程式 (2-3) 式の解に相当するわけである。このとき温度拡散率 $\alpha = \sigma^2/2$ が用いられるのが普通である。

熱伝導をこのような粒子の Brown 運動として統計的に見るのは Fourier の微分方程式の方法と比べて或る面からの物理的直観に沿っている利点があるからである。もちろん熱伝導過程を厳密に取扱うと、音量子や電子の運動を論ずることになりやはり量子的取扱いに帰着するが、ここでは微分方程式の方法と同程度の厳密性を有する伝導粒子による熱伝導模型を考えるのである。上の論議からそのような模型は Fourier の線型方程式と全く等価であることが示された。

さて確率密度

$$f(x', x; \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha\tau}} \quad (2-4)$$

は拡散距離 $(x-x')$ が大きくなると極く急速に零に近づく。そこで始めから τ 時間後に、 x から或る距離 $\delta(\tau)$ をとれば、それを超える粒子の確率が殆んど零であるようにすることができるであろう。そこで始め x にある熱源の、 τ 時間後にその影響の及ぶ範囲は $x \pm \delta(\tau)$ に限られるとしてよいであろう。この範囲を熱層と定義する。物体表面 ($x=0$) から熱伝達の行なわれるときは、表面から深さ $\delta(\tau)$ の範囲を熱層とする。

このことは確率密度の正確な式 (2-4) の代りにそれを

$$f_{app}(x', x; \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha\tau}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\alpha\tau}}, & |x-x'| \leq \delta(\tau) \\ 0, & |x-x'| > \delta(\tau) \end{cases} \quad (2-5)$$

と置くことである。ただしこのようにすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{app}(x', x; \tau) dx \neq 1 \quad (2-6)$$

となり、確率密度としての要請 $P_r\{\Omega\} = 1$ (Ω : 確率空間) に合わない。しかしこれを逆用して、 $\delta(\tau)$ を決める式として $P_r\{\Omega\} = 1$ が 1% の打切誤差で成立するように

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{app}(x', x; \tau) dx = 0.99 \quad (2-7)$$

とする。かくて

$$\delta(\tau) = 2\sqrt{\alpha\tau} \operatorname{erfc}^{-1}(0.01) = 3.64\sqrt{\alpha\tau} \quad (2-8)$$

と熱層厚さが得られる。ここに $\operatorname{erfc}^{-1} X$ は $\operatorname{erfc} Y$ の逆関数である。

$$\left. \begin{aligned} X &= \operatorname{erfc} Y = 1 - \operatorname{erf} Y \\ \operatorname{erfc}^{-1} X &= Y \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

ここで得られた熱層厚さが、熱源の性質すなわちその強さ、変化、熱伝達の様式に無関係に、確率論的に導かれたものであることは注目する必要がある。

熱伝導を粒子の運動として統計的に処理することは、或る意味での合理性を有しているのであって、他の例でも示される。たとえば微分方程式の方法によれば、熱はあたかも信号速度無限大で伝播することになって、或る点の熱の影響は直ちにすべての点で感ぜられると云う意味のない直観を与える。これに反しここで述べた方法によれば、無限遠地点への影響はあり得る筈のない確率として合理的に処理されてしまう。そして熱伝導は無限大ではないもっと別の速度によって特徴づけられるはずである。

熱の影響の及ぶ範囲の拡がる速度、つまり熱層 δ の進展速度をもって、温度拡散速度 C_{diff} と定義すれば

$$C_{diff} = \frac{d\delta}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{\tau}} \operatorname{erfc}^{-1}(0.01) \quad (2-10)$$

となる。

3 熱層近似の方法

3-1 熱層近似の方法

第1章で明らかにしたように、熱層の考え方は、粘性流体における境界層の考え方と軌を一にするものであることから、境界層理論を構成する幾つかの解析法と類似な方法が熱伝導の解析に役立つと考えられる。これを最初に提案したのは T. R. Goodman [1] で、アブレーションを含む問題に熱平衡積分の方法と称するものを適用してよい結果を得た。その他、変分原理に基づく方法も用いることができる。これ等を総括して熱層近似の方法と呼ぶことにする。

これ等の方法の対象としては、もちろん熱層という考え方が適用できる問題に限られるが、その尺度としては、Fourier 数 $N_{Fo} = \alpha\tau/d^2$ (d : 物体の代表的長さ) があまり大きくない範囲としてよいであろう。しかし事実上非定常熱伝導の問題全般にわたるとしてよい。具体的には、ロケットのノズル、エンジン壁、ノーズコーン、フィンのように急速な加熱を受ける個所は好個の対象であるし、建築物のコンクリート壁 (τ は数時間と大きい、 α が小さく d が大きい。従って N_{Fo} は小さい)、地表土等もよい例である。

熱伝導の解析に熱層近似の方法を用いる主な理由は次の二つである。まづ第一に普通の方法では解けない問題を解析的に解くことで、これにはアブレーションの問題、物性値が温度の関数である場合等、その他熱伝導は解き得てもこれを用いた熱弾性問題となると解けなくなる場合等が包含される。第二には、普通の方法で解き得る問題に対して、表示の簡単なしかも物理的直観に沿った解を得ることである。普通厳密解は級数の型の式とそれに付随する超越方程式からなり、極く簡単ないくつかの問題を除いて、その超越方程式に具体的な数値を代入して根を求めるのが解を得る前提となる。この操作の結果は、厳密解をその物理的直観を許さない数値にしてしまう。これに反し、熱層近似の方法によれば、解が明白な式で示

されることが多く、現象を理解し、要所を把握する数値を得るに有利である。

もちろん上の論議は、熱層近似による解が適当な精度を有することを前提としている。種々の応用例についての経験からすると、この要請は大體満たされるようである。Fourier 数 N_{Fo} の小さい場合、換言すれば加熱の初期状態の解は熱弾性、熱変形の問題で特に重要であるが、熱層近似による解はこのあたりでかなり良好と言へる。普通近似解でこの N_{Fo} の小さい領域でよい精度を得るのは困難であるし、厳密解の収斂も悪いのであってみれば、この熱層が形成されているとみなされる領域について、それを対象として開発された近似解法が役立つであろう。尚 4-1-c 項の例題について厳密解と熱層近似による解とを比べる(第2図)

3-2 Goodman の熱平衡積分

Goodman は熱平衡積分を導くために一つの簡単な例をあげている。いま半無限体 ($x > 0$) を考える。初期温度は t_i , $\tau > 0$ に表面から熱量 $H(\tau)$ が加えられるとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, & (x > 0, \tau > 0) \\ k \frac{\partial t}{\partial x} &= -H(\tau), & (x = 0, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ここで $\delta(\tau)$ なる熱層を定義する。 δ を超えては事実上熱は伝わらないものと考え、 $x > \delta$ では初期温度を保つ。 $\delta(\tau)$ は粘性流体における境界層厚さと類似のものである。ここで (3-1) 式の上の式を x について $0 \sim \delta$ 迄積分する。

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\delta(\tau)} t dx = \alpha \left[\frac{\partial t}{\partial x}(\delta, \tau) - \frac{\partial t}{\partial x}(0, \tau) \right] \quad (3-2)$$

左辺は $(0, \delta)$ 内の熱量の時間変化である。右辺はそれが両端における熱流 $\alpha \partial t / \partial x$ なる量の差であることを示す。この意味において上式は熱平衡積分 (Heat-Balance Integral) と呼ばれる。この式では熱伝導方程式は平均的な意味でしか充たされていないことになる。またこれは境界層理論における運動量積分に類似の式で、この種の方法は拡散型に属するすべての問題に応用できるのである。

さて δ を超えて熱は伝わらないことから次の条件が課せられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial x}(\delta, \tau) &= 0, \\ t &= t_i, \quad (x > \delta) \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

ここで温度 t が x に関してその二次多項式 $t = a + bx + cx^2$ であらわせると仮定する。そのためには t は

$$t = t_i + \frac{H(\tau)}{2k\delta(\tau)} [\delta(\tau) - x]^2 \quad (3-4)$$

でなければならない。これらを熱平衡積分 (3-2) 式に代入すると

$$\frac{1}{6} \frac{d}{d\tau} [\delta^2(\tau) \cdot H(\tau)] = \alpha H(\tau) \quad (3-5)$$

$\delta(0) = 0$ であることを用いて

$$\delta(\tau) = \sqrt{6\alpha} \left[\frac{1}{H(\tau)} \int_0^\tau H(\tau_1) d\tau_1 \right]^{1/2} \quad (3-6)$$

となる。 $H(\tau)$ が一定であると δ は

$$\delta = \sqrt{6\alpha\tau} \quad (3-7)$$

となる。表面温度は

$$t(0, \tau) = t_i + \sqrt{3/2} \sqrt{\alpha} \left[H(\tau) \int_0^\tau H(\tau_1) d\tau_1 \right]^{1/2} / k \quad (3-8)$$

$H(\tau)$ が一定のとき

$$t(0, \tau) = t_i + \sqrt{3/2} \sqrt{\alpha} H \sqrt{\tau} / k \quad (3-9)$$

であり、これに対する厳密解

$$t(0, \tau) = t_i + \sqrt{4/\pi} \sqrt{\alpha} H \sqrt{\tau} / k \quad (3-10)$$

と比較される。第二項の係数 $\sqrt{3/2} = 1.23$ と $\sqrt{4/\pi} = 1.13$ では誤差は約 9% である。温度分布として x の三次多項式を用いるとこの係数は $\sqrt{4/3} = 1.15$ となり誤差は約 2% になる。

3-3 方法の一般論

著者が次章以下の解析に使用する方法は根本的には Goodman [1] の熱平衡積分の方法の踏襲である。熱層の概念を用いる解法はこの他に Kantorovich [3] や Biot [4] の方法として知られるものがある。実際的に平板、円筒、球等の熱伝導問題を解くには、それぞれの特殊な条件を如何に処理するかが鍵となる。以下にこれ等の問題を解くシステムの一般論を記述する。次章以下の諸問題はすべてこのシステムによって解析されたものである。

まず対象は初期温度一様の物体で、その一表面から熱が加えられる場合とする。第2章の理論によると、固体の表面から加えられた熱の影響は、その加えるメカニズムが何であれ、表面より $\delta(\tau) = 2\sqrt{\alpha\tau} \operatorname{erfc}^{-1}(0.01)$ の熱層以内に限られると保証される。そこで δ における二つの条件 ① $t(x \geq \delta, \tau) = t_i$ ② $\partial t(\delta, \tau) / \partial x = 0$ が自動的に与えられることになる。次に熱層内部の温度分布を適当な未知関数たとえば x の多項式によって仮定する。その未知数の数は境界条件および上の δ における条件によっても尚一つだけ決まらないように撰ぶ。これを熱平衡積分に代入して未知関数を決定する。熱層の先端(フロント)が他の表面に到達した以後は、上の①、②条件の代りのその表面について最初から与えられた条件が用いられ、熱平衡積分の範囲は全域とする。

上の方法では熱層厚さとして $\delta = 2\sqrt{\alpha\tau} \operatorname{erfc}^{-1}(0.01)$ を用いたが、その代りに δ 自体を未知関数として含む温度分布型を仮定し、 δ を近似的に求めるのもよい。次章の解析はすべてこの方法によっている。

4 厚板・円筒の熱伝導

この章では、厚板および円筒の熱伝導の問題を前章に記した方法により解く。尚半無限体の場合の解は板の解の第I期に相当するから、これをそのまま用いればよい。

4-1 厚板

4-1-a 初期温度 t_i , $x=0$ 面の温度を t_g に保つ ($\tau > 0$), $x=d$ 面断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (0 \leq x \leq d, \tau = 0) \\ t &= t_g, & (x = 0, \tau > 0) \\ \partial t / \partial x &= 0, & (x = d, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-1)$$

問題を簡単化するために無次元化する(記号は論文末尾参照). まず熱平衡積分 (3-2) 式は

$$\int_0^{\Delta} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} - \frac{\partial \theta}{\partial N_{F_0}} \right) dX = 0 \quad (4-1-2)$$

となる. 境界条件 (4-1-1) 式も無次元化されて

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (0 \leq X \leq 1, N_{F_0} = 0) \\ \theta &= 1, & (X = 0, N_{F_0} > 0) \\ \partial \theta / \partial X &= 0, & (X = 1, N_{F_0} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-3)$$

となる. 解析の便利のために, 熱層のフロントが $X=1$ の断熱面に達する時を境としてその前を第 I 期, その後を第 II 期として取扱うことにする. この約束は以下の諸問題に共通して用いる.

[第 I 期 ($N_{F_0} < N_{F_0.cr}$)]

この場合に $X=1$ における境界条件 (4-1-3) の最後の式の代わりに, $X=\Delta$ における近似境界条件を用いる. すなわち

$$\left. \begin{aligned} \partial \theta / \partial x &= 0, & (X = \Delta, N_{F_0.cr} > N_{F_0} > 0) \\ \theta &= 0, & (X = \Delta, N_{F_0.cr} > N_{F_0} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-4)$$

である. 温度 θ が X の 2 次多項式 $\theta = ax^2 + bX + c$ の型で近似できると仮定し, 境界条件を満たすように係数をきめると, θ は

$$\theta = (1 - X/\Delta)^2 \quad (4-1-5)$$

でなければならない. これを熱平衡積分 (4-1-2) 式に入れると

$$\int_0^{\Delta} [2/\Delta^2 - \partial(1 - X/\Delta)^2 / \partial N_{F_0}] dX = 0 \quad (4-1-6)$$

これを解いて熱層の厚さおよび温度分布が得られる.

$$\Delta = \sqrt{12N_{F_0}} \quad (4-1-7)$$

$$\theta = (1 - X/\sqrt{12N_{F_0}})^2 \quad (4-1-8)$$

熱層のフロントが $X=1$ 面に到達する時間は (4-1-7) 式で $\Delta=1$ とおいて得られ, これを限界 Fourier 数 $N_{F_0.cr}$ と呼ぶことにする

$$N_{F_0.cr} = 1/12 \quad (4-1-9)$$

[第 II 期 ($N_{F_0} \geq N_{F_0.cr}$)]

‘初期条件’は (4-1-8) 式で $N_{F_0} = N_{F_0.cr}$ を入れて得られる.

$$\theta = (1 - X)^2 \quad (4-1-10)$$

境界条件は (4-1-3) の下の 2 式である. 再び θ が X の 2 次多項式の型で近似できるとすると, これは次の式でなければならない.

$$\theta = (1 - \theta_1)(1 - X)^2 + \theta_1 \quad (4-1-11)$$

ここに θ_1 は $X=1$ の温度 $\theta(1, N_{F_0})$ を表わす. 上式を熱平衡積分 (4-1-2) 式に代入する. ただし積分上限 Δ は 1 となる.

$$\int_0^1 \left\{ 2(1 - \theta_1) - \frac{\partial}{\partial N_{F_0}} [(1 - \theta_1)(1 - X)^2 + \theta_1] \right\} dX = 0 \quad (4-1-12)$$

これを解いて

$$\theta_1 = 1 - \exp[-3(N_{Fo} - N_{Fo,cr})] \quad (4-1-13)$$

更にこれを (4-1-11) 式に代入して

$$\theta = 1 - X(2-X) \exp[-3(N_{Fo} - N_{Fo,cr})] \quad (4-1-14)$$

第I期, 第II期の結果をまとめて元の単位で記述する. 温度は

$$t(x, \tau) = \begin{cases} t_i + (t_g - t_i) \left(1 - \frac{x}{\sqrt{12\alpha\tau}}\right)^2, & \left(\tau < \frac{d^2}{12\alpha}\right) \\ t_i + (t_g - t_i) \left\{1 - \frac{x}{d} \left(2 - \frac{x}{d}\right) \exp\left[-3\left(\frac{\alpha\tau}{d^2} - \frac{1}{12}\right)\right]\right\}, & \left(\tau \geq \frac{d^2}{12\alpha}\right) \end{cases} \quad (4-1-15)$$

$x=d$ 面の温度は

$$t(d, \tau) = \begin{cases} t_i, & \left(\tau < \frac{d^2}{12\alpha}\right) \\ t_i + (t_g - t_i) \left\{1 - \exp\left[-3\left(\frac{\alpha\tau}{d^2} - \frac{1}{12}\right)\right]\right\}, & \left(\tau \geq \frac{d^2}{12\alpha}\right) \end{cases} \quad (4-1-16)$$

熱層厚さ δ は

$$\delta(\tau) = \sqrt{12\alpha\tau} \quad (4-1-17)$$

4-1-b 初期温度 t_i , $x=0$ 面から熱量 H が加えられる, $x=d$ 面断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (0 \leq x \leq d, \tau = 0) \\ -k\partial t/\partial x &= H, & (x=0, \tau > 0) \\ \partial t/\partial x &= 0, & (x=d, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-18)$$

無次元化の操作を施す*.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (0 \leq X \leq 1, N_{Fo} = 0) \\ -\partial\theta/\partial X &= H, & (X=0, N_{Fo} > 0) \\ \partial\theta/\partial X &= 0, & (X=1, N_{Fo} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-19)$$

ここに H は次式で定義される無次元の熱量である.

$$H = Hd/lc(t_g - t_i) \quad (4-1-20)$$

[第I期 ($N_{Fo} < N_{Fo,cr}$)]

前例と同様な操作を経て熱平衡積分は

$$\int_0^d \left\{ \frac{H}{\Delta} - \frac{\partial}{\partial N_{Fo}} \left[\frac{H}{2\Delta} (X-\Delta)^2 \right] \right\} dX = 0 \quad (4-1-21)$$

となり, これから

$$\theta = \begin{cases} H(X - \sqrt{6N_{Fo}})^2 / 2\sqrt{6N_{Fo}}, & (X < \Delta) \\ 0, & (X \geq \Delta) \end{cases} \quad (4-1-22)$$

$$\Delta = \sqrt{6N_{Fo}} \quad (4-1-23)$$

限界 Fourier 数は

* ここで θ の定義は前と同様に $\theta = (t - t_i)/(t_g - t_i)$ であるとする. ただしガス温度 t_g はこの際あまり意味はなく, 適当な値を最初決めておく, これは他の問題と θ の定義を共通にするための目的である. 従って θ の範囲は $(0, 1)$ の範囲でなく, すべての実数値を取り得る.

$$N_{Fo,cr} = 1/6 \quad (4-1-24)$$

[第II期 ($N_{Fo} \geq N_{Fo,cr}$)]

熱平衡積分は

$$\int_0^1 \left\{ H - \frac{\partial}{\partial N_{Fo}} \left[\frac{H}{2} (1-X)^2 + \theta_1 \right] \right\} dX = 0, \quad (4-1-25)$$

これから

$$\theta_1 = H \left(N_{Fo} - \frac{1}{6} \right) \quad (4-1-26)$$

$$\theta = H \left[\left(N_{Fo} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} (1-X)^2 \right] \quad (4-1-27)$$

が得られる。

第I期, 第II期の結果をまとめて元の単位で記述する。

$$t(x, \tau) = \begin{cases} t_i + \left(\frac{Hd}{k} \right) \frac{(x - \sqrt{6\alpha\tau})^2}{2d\sqrt{6\alpha\tau}}, & \left(\tau < \frac{d^2}{6\alpha} \right) \\ t_i + \left(\frac{Hd}{k} \right) \left\{ \left(\frac{\alpha\tau}{d^2} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{d} \right)^2 \right\}, & \left(\tau \geq \frac{d^2}{6\alpha} \right) \end{cases} \quad (4-1-28)$$

$x=d$ 面の温度は

$$t(d, \tau) = \begin{cases} t_i, & \left(\tau < \frac{d^2}{6\alpha} \right) \\ t_i + \frac{Hd}{k} \left(\frac{\alpha\tau}{d^2} - \frac{1}{6} \right), & \left(\tau \geq \frac{d^2}{6\alpha} \right) \end{cases} \quad (4-1-29)$$

熱層厚さ δ は

$$\delta(\tau) = \sqrt{6\alpha\tau} \quad (4-1-30)$$

尚この問題で熱量 II が時間の関数 $H(\tau)$ である場合には

$$\theta = \begin{cases} \frac{[H(N_{Fo})]^{3/2}}{2\sqrt{6} \left[\int_0^{N_{Fo}} H(N_{Fo}) dN_{Fo} \right]^{1/2}} \left(X - \sqrt{6} \left[\frac{\int_0^{N_{Fo}} H(N_{Fo}) dN_{Fo}}{H(N_{Fo})} \right]^{1/2} \right)^2, & (N_{Fo} < \bar{N}_{Fo,cr}) \\ \frac{1}{2} H(N_{Fo}) (1-X)^2 + \int_{\bar{N}_{Fo,cr}}^{N_{Fo}} H(N_{Fo}) dN_{Fo} - \frac{1}{6} [H(N_{Fo}) - H(N_{Fo,cr})], & (N_{Fo} \geq \bar{N}_{Fo,cr}) \end{cases} \quad (4-1-31)$$

この場合の限界 Fourier 数 $\bar{N}_{Fo,cr}$ は次式によって決められる。

$$\int_0^{\bar{N}_{Fo,cr}} H(N_{Fo}) dN_{Fo} = H(\bar{N}_{Fo,cr})/6 \quad (4-1-32)$$

熱層厚さは

$$\Delta = \sqrt{6} \left[\frac{\int_0^{N_{Fo}} H(N_{Fo}) dN_{Fo}}{H(N_{Fo})} \right]^{1/2} \quad (4-1-33)$$

となる。

4-1-c 初期温度 t_i , $x=0$ 面は温度 t_g の流体に接す (熱伝達係数 h), $x=0$ 面断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (0 \leq x \leq d, \tau = 0) \\ h(t_g - t) &= -k \partial t / \partial x, & (x = 0, \tau > 0) \\ \partial t / \partial x &= 0, & (x = d, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-34)$$

無次元化の操作を施す。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (0 \leq X \leq 1, N_{Fo} = 0) \\ N_{Bi}(1 - \theta) &= -\partial \theta / \partial X, & (X = 0, N_{Fo} > 0) \\ \partial \theta / \partial X &= 0, & (X = 1, N_{Fo} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-1-35)$$

[第 I 期 ($N_{Fo} < N_{Fo,cr}$)]

温度 θ は $X=0$ における温度 θ_0 を媒介変数として次式で与えられる。

$$\theta = \begin{cases} N_{Bi}(1 - \theta_0)(X - \Delta)^2 / 2\Delta, & (X < \Delta) \\ 0, & (X \geq \Delta) \end{cases} \quad (4-1-36)$$

$$3N_{Bi}^2 N_{Fo} / 2 = \ln(1 - \theta_0) + [(1 - \theta_0)^{-2} - 1] / 2, \quad (4-1-37)$$

$$\Delta = 2\theta_0 / [N_{Bi}(1 - \theta_0)], \quad (4-1-38)$$

あるいは, (4-1-36) 式から Δ を消去して書けば,

$$\theta = \begin{cases} \theta_0 [N_{Bi}(1 - \theta_0) X / 2\theta_0 - 1]^2, & (X < \Delta) \\ 0, & (X \geq \Delta) \end{cases} \quad (4-1-39)$$

となるから, これにより $\theta \sim \theta_0 \sim N_{Fo}$ の関係が得られる。限界 Fourier 数 $N_{Fo,cr}$ は

$$N_{Fo,cr} = (2/3N_{Bi}^2) \ln [2/(2 + N_{Bi})] + (4 + N_{Bi}) / 12N_{Bi}, \quad (4-1-40)$$

で $1/12$ から $1/6$ 迄の値をとる。

ここに得られた解と, 温度分布型として 3 次多項式を用いた場合の解並びに厳密解を第 2 図で比較する。それぞれかなりよい近似であることがわかる。

[第 II 期 ($N_{Fo} \leq N_{Fo,cr}$)]

初期条件は

$$\theta = N_{Bi}(1 - X)^2 / (2 + N_{Bi}), \quad (N_{Fo} = N_{Fo,cr}) \quad (4-1-41)$$

これを用いて次の結果が得られる。

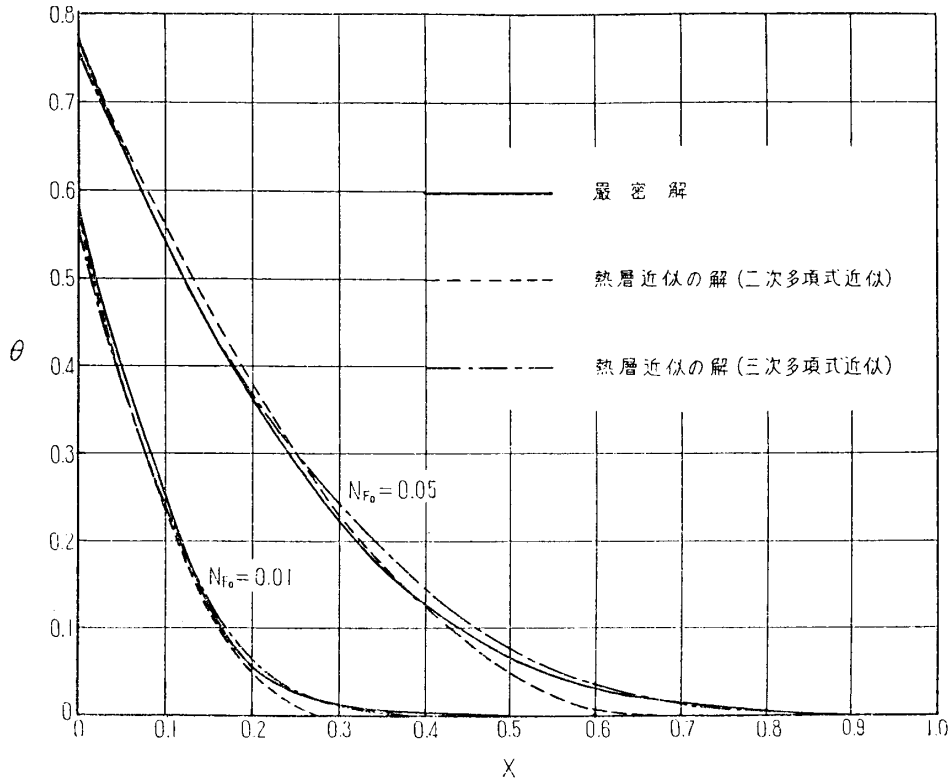
$$\theta = 1 + \left[\frac{N_{Bi}}{2 + N_{Bi}} (1 - X)^2 - 1 \right] \exp \left[-\frac{3N_{Bi}}{3 + N_{Bi}} (N_{Fo} - N_{Fo,cr}) \right], \quad (4-1-42)$$

$X=0$, $X=1$ における温度 θ_0 , θ_1 はそれぞれ

$$\theta_0 = 1 - \frac{2}{2 + N_{Bi}} \exp \left[-\frac{3N_{Bi}}{3 + N_{Bi}} (N_{Fo} - N_{Fo,cr}) \right], \quad (4-1-43)$$

$$\theta_1 = 1 - \exp \left[-\frac{3N_{Bi}}{3 + N_{Bi}} (N_{Fo} - N_{Fo,cr}) \right], \quad (4-1-44)$$

第 I 期, 第 II 期の結果をまとめて元の単位で記述する。



第 2 図 厳密解と熱層近似の解の比較

$$t = t_i + (t_0 - t_i) \left[\frac{hx}{2k} \left(\frac{t_g - t_0}{t_0 - t_i} \right) - 1 \right]^2, \quad \left(x < \frac{2k}{h} \left(\frac{t_0 - t_i}{t_g - t_0} \right), N_{Fo} < N_{Fo,cr} \right)$$

ここで t_0 は $x=0$ における温度で時間 τ とは次式により結合する。

$$2 \ln \left(\frac{t_g - t_0}{t_g - t_i} \right) + \left[\left(\frac{t_g - t_i}{t_g - t_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{3h^2 \alpha}{k^2} \tau$$

この式では τ から t_0 を求めることは困難であるから、 t_0 を決め t および τ を求めるようにすればよい。ただし t_0 の範囲は

$$t_i < t_0 < (hdt_g/k + 2t_i) / (2 + hd/k)$$

$$= 0, \quad \left(x \geq \frac{2k}{h} \left(\frac{t_0 - t_i}{t_g - t_0} \right), N_{Fo} < N_{Fo,cr} \right)$$

$$= t_g + (t_g - t_i) \left[\frac{hd/k}{2 + hd/k} (1 - x/d)^2 - 1 \right] \exp \left[-\frac{3hd/k}{3 + hd/k} \cdot \frac{\alpha(\tau - \tau_{cr})}{d^2} \right], \quad (N_{Fo} \geq N_{Fo,cr})$$

(4-1-45)

4-1 円筒

[円柱座標系における熱平衡積分]

円柱座標系で取扱う円柱，中空円筒の熱伝導の問題でも熱層を定義することができるであろう。ここでは条件が軸対称である場合に限って論ずることにすれば，板の場合と同様な方法が有効である。

円柱座標系にて熱伝導の方程式は

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (4-2-1)$$

これを变形して次のように書く.

$$\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} (rt) = 0, \quad (4-2-2)$$

中空円筒の内面から加熱される場合を例にとれば, 熱層が内面 r_i より $\delta_r(\tau)$ まで広がっているとして, 上式をこの範囲で r について積分すれば熱平衡積分が得られる.

$$\int_{r_i}^{\delta_r(\tau)} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} (rt) \right] dr = 0, \quad (4-2-3)$$

ただしここでは計算の便利のために, $\delta_r(\tau)$ は中心軸からの距離をとってあるから, 熱層の正味の厚さは $\delta_r(\tau) - r_i$ であることに注意されたい.

4-2-a $r_i \leq r \leq r_e$ なる中空円筒.

初期温度 t_i , 内面の温度を t_g に保つ ($\tau > 0$), 外面は断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (r_i \leq r \leq r_e, \tau = 0) \\ t &= t_g, & (r = r_i, \tau > 0) \\ \partial t / \partial r &= 0, & (r = r_e, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-4)$$

無次元化の操作を施す. 熱平衡積分 (4-2-3) 式は

$$\left[R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right]_m^{\Delta_r} - \frac{\partial}{\partial N_{F_0}} \int_m^{\Delta_r} R \theta dR = 0, \quad (4-2-5)$$

ここに $N_{F_0} = \alpha \tau / r_e^2$ とする. 境界条件も次のように書ける.

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (m \leq R \leq 1, N_{F_0} = 0) \\ \theta &= 1, & (R = m, N_{F_0} > 0) \\ \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = 1, N_{F_0} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-6)$$

[第I期 ($N_{F_0} < N_{F_0,cr}$)]

熱層のフロントが $R=1$ (円筒外面) に達する迄を第I期とする. $R=1$ における境界条件 (4-2-6) の最後の式の代りに, $R=\Delta_r$ における次の近似境界条件を用いる.

$$\left. \begin{aligned} \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = \Delta_r, 0 < N_{F_0} < N_{F_0,cr}) \\ \theta &= 0, & (R = \Delta_r, 0 < N_{F_0} < N_{F_0,cr}) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-7)$$

温度 θ が R の二次多項式の型で近似できると仮定し, 境界条件を満たすように係数をきめると, θ は

$$\theta = (R - \Delta_r)^2 / (m - \Delta_r)^2 \quad (4-2-8)$$

でなければならない. これを熱平衡積分 (4-2-5) 式に入れると Δ_r を決める一階の常微分方程式が得られ, それを解いて Δ_r と N_{F_0} の関係式が得られる.

$$\frac{1}{3} \Delta_r^3 - m^2 \Delta_r + \frac{2}{3} m^3 = 12m N_{F_0} \quad (4-2-9)$$

これと (4-2-8) 式から温度 θ と時間 N_{F_0} の関係が熱層厚さ Δ_r を媒介として求められたことになる. 限界 Fourier 数 $N_{F_0,cr}$ は上式で $\Delta_r=1$ と置いて

$$N_{F_0 \cdot cr} = \left(\frac{1}{3} - m^2 + \frac{2}{3} m^3 \right) / 12m \quad (4-2-10)$$

となる。

[第II期 ($N_{F_0} \geq N_{F_0 \cdot cr}$)]

I期と同様に近似関数を決めると、 θ は外面温度 θ_1 により次式であらわされる。

$$\theta = \theta_1 + (1 - \theta_1)(R - 1)^2 / (m - 1)^2 \quad (4-2-11)$$

これを(4-2-5)式に入れると θ_1 の微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \partial \theta_1 / \partial N_{F_0} + \epsilon_a \theta_1 &= \epsilon_a \\ \epsilon_a &= \frac{24m}{(1-m)(5+3m)} \end{aligned} \right\} \quad (4-2-12)$$

これを解いて外面温度は

$$\theta_1 = 1 - \exp[-\epsilon_a(N_{F_0} - N_{F_0 \cdot cr})] \quad (4-2-13)$$

となる。一般の温度はこれを(4-2-11)式に入れて

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \exp[-\epsilon_a(N_{F_0} - N_{F_0 \cdot cr})] \\ &\quad + [(R - 1)^2 / (m - 1)^2] \exp[-\epsilon_a(N_{F_0} - N_{F_0 \cdot cr})], \end{aligned} \quad (4-2-14)$$

4-2-b $r_i \leq r \leq r_e$ なる中空円筒。

初期温度 t_i , 内面から一定熱量が加えられる, 外面は断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (r_i \leq r \leq r_e, \tau = 0) \\ -k \partial t / \partial r &= H, & (r = r_i, \tau > 0) \\ \partial t / \partial r &= 0, & (r = r_e, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-15)$$

無次元化して* ($H = Hr_e / k(t_g - t_i)$ とする.)

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (m \leq R \leq 1, N_{F_0} = 0) \\ -\partial \theta / \partial R &= H, & (R = m, N_{F_0} > 0) \\ \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = 1, N_{F_0} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-16)$$

[第I期 ($N_{F_0} < N_{F_0 \cdot cr}$)]

$R = 1$ における境界条件(4-2-16)の最後の式の代わりに、 $R = \Delta_r$ における次の近似境界条件を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = \Delta_r, 0 < N_{F_0} < N_{F_0 \cdot cr}) \\ \theta &= 0, & (R = \Delta_r, 0 < N_{F_0} < N_{F_0 \cdot cr}) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-17)$$

以下前の例と同じ方法によれば、温度 θ は

$$\theta = H(\Delta_r - R)^2 / 2(\Delta_r - m) \quad (4-2-18)$$

となり、熱層厚さ Δ_r と時間 N_{F_0} との関係は

$$N_{F_0} = (\Delta_r - m)^2 (\Delta_r + 3m) / 24m \quad (4-2-19)$$

となる。限界 Fourier 数は

$$N_{F_0 \cdot cr} = (1 - m)^2 (1 + 3m) / 24m \quad (4-2-20)$$

[第II期 ($N_{F_0} \geq N_{F_0 \cdot cr}$)]

温度 θ は

* 152 頁脚注と同じ。

$$\theta = H \left[\frac{2m}{1-m^2} (N_{F_o} - N_{F_o,cr}) + \frac{(1-R)^2}{2(1-m)} \right] \quad (4-2-21)$$

内面温度 θ_m は

$$\theta_m = H \left[\frac{2m}{1-m^2} (N_{F_o} - N_{F_o,cr}) + \frac{1-m}{2} \right] \quad (4-2-22)$$

外面温度 θ_1 は

$$\theta_1 = H \frac{2m}{1-m^2} (N_{F_o} - N_{F_o,cr}) \quad (4-2-23)$$

とそれぞれ容易に計算できる。

4-2-c $r_i \leq r \leq r_e$ なる中空円筒

初期温度 t_i , 内面は温度 t_g の流体に接す (熱伝達係数 h), 外面は断熱

$$\left. \begin{aligned} t &= t_i, & (r_i \leq r \leq r_e, \tau = 0) \\ h(t_g - t) &= -k \partial t / \partial r, & (r = r_i, \tau > 0) \\ \partial t / \partial r &= 0, & (r = r_e, \tau > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-24)$$

無次元化して ($N_{Bi} = hr_e/k$ とする.)

$$\left. \begin{aligned} \theta &= 0, & (m \leq R \leq 1, N_{F_o} = 0) \\ N_{Bi}(1-\theta) &= -\partial \theta / \partial R, & (R = m, N_{F_o} > 0) \\ \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = 1, N_{F_o} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-25)$$

[第I期 ($N_{F_o} < N_{F_o,cr}$)]

(4-2-25) の最後の式の代わりに次の近似境界条件を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \partial \theta / \partial R &= 0, & (R = \Delta_r, N_{F_o} > 0) \\ \theta &= 0, & (R = \Delta_r, N_{F_o} > 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-2-26)$$

以下前の例と同じ方法によれば, 温度 θ は, 熱層厚さ Δ_r によって次式であらわされる。

$$\theta = \frac{N_{Bi}}{(\Delta_r - m)[2 + N_{Bi}(\Delta_r - m)]} \times (R - \Delta_r)^2 \quad (4-2-27)$$

また Δ_r と内面温度 θ_m との間には次の関係

$$\Delta_r = m + 2\theta_m / N_{Bi}(1 - \theta_m) \quad (4-2-28)$$

があるから, θ は Δ_r か θ_m のどちらかによって表わされていることになる。熱平衡積分を解くとこの Δ_r , θ_m が時間 N_{F_o} によってそれぞれ次のように表わされる。

$$\begin{aligned} 3mN_{Bi}^2N_{F_o} &= \left(2m - \frac{1}{N_{Bi}}\right) \ln \frac{2}{2 + N_{Bi}(\Delta_r - m)} \\ &+ \left(m - \frac{3}{2N_{Bi}}\right) \left[\left(\frac{2 + N_{Bi}(\Delta_r - m)}{2}\right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{3N_{Bi}} \left[\left(\frac{2 + N_{Bi}(\Delta_r - m)}{2}\right)^3 - 1 \right] \end{aligned} \quad (4-2-29)$$

$$\begin{aligned} 3mN_{Bi}^2N_{F_o} &= \left(2m - \frac{1}{N_{Bi}}\right) \ln (1 - \theta_m) \\ &+ \left(m - \frac{3}{2N_{Bi}}\right) [(1 - \theta_m)^{-2} - 1] + \frac{2}{3N_{Bi}} [(1 - \theta_m)^{-3} - 1] \end{aligned} \quad (4-2-30)$$

これで $\theta \sim \Delta_r \sim N_{Fo}$ または $\theta \sim \theta_m \sim N_{Fo}$ の関係が得られたわけである。限界 Fourier 数は (4-2-29) 式で $\Delta_r=1$ として得られる。

$$3mN_{Bi}^2 N_{Fo \cdot cr} = \left(2m - \frac{1}{N_{Bi}}\right) \ln \frac{2}{2 + N_{Bi}(1-m)} \\ + \left(m - \frac{3}{2N_{Bi}}\right) \left[\left(\frac{2 + N_{Bi}(1-m)}{2}\right)^2 - 1 \right] + \frac{2}{3N_{Bi}} \left[\left(\frac{2 + N_{Bi}(1-m)}{2}\right)^3 - 1 \right] \quad (4-2-31)$$

[第 II 期 ($N_{Fo} \geq N_{Fo \cdot cr}$)]

温度分布は

$$\theta = 1 - \left[1 - \frac{N_{Bi}(1-R)^2}{(1-m)[2 + N_{Bi}(1-m)]} \right] \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo \cdot cr})] \quad (4-2-32) \\ \left. \begin{aligned} \epsilon_c = \frac{mN_{Bi}}{N_{Bi}(1-m)^2(5+3m)/24 + (1-m^2)/2} \end{aligned} \right\}$$

内面温度は

$$\theta_m = 1 - \frac{2}{2 + N_{Bi}(1-m)} \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo \cdot cr})] \quad (4-2-33)$$

外面温度は

$$\theta_1 = 1 - \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo \cdot cr})] \quad (4-2-34)$$

と得られる。

5 熱応力, 熱衝撃問題への応用

前章で得られた解は比較的簡単な型をしているから, これを用いて熱応力を求めるのは容易である。さらにその最大値を追跡する操作もやさしい。

5-1 厚板の熱応力

板厚方向にのみ温度が変り, 板面内の分布は一様である場合を考える。

5-1-a 曲げか拘束されない場合

板の端部が曲げに対して拘束を持たないとき, 板厚方向の温度変化による熱応力 Σ は次式で与えられる。[5]

$$\Sigma = \frac{\sigma(1-\nu)}{E\alpha_e(t_g - t_i)} = -\theta + \int_0^1 \theta dX + 3(2X-1) \int_0^1 \theta(2X-1) dX \quad (5-1-1)$$

ここで具体例について解析をするに当り, この種熱応力熱衝撃問題として比較的頻りに遭遇する第4章の 4-1-c 項の場合について論ずることとする。

[第 I 期 ($N_{Fo} < N_{Fo \cdot cr}$)]

温度 θ は加熱側表面温度 θ_0 により (4-1-39) 式であらわされているから, これを (5-1-1) 式に入れると Σ は

$$\Sigma = -\frac{N_{Bi}(1-\theta_0)^2}{4\theta_0} \left[X - \frac{2\theta_0}{N_{Bi}(1-\theta_0)} \right]^2 + \frac{2\theta_0^2}{3N_{Bi}(1-\theta_0)} \\ + \frac{2\theta_0^2}{N_{Bi}(1-\theta_0)} \left[\frac{\theta_0}{N_{Bi}(1-\theta_0)} - 1 \right] (2X-1) \quad (5-1-2)$$

となる。表面の応力 Σ_0 は

$$\Sigma_0 = -\theta_0 + \frac{8\theta_0^2}{3N_{Bi}(1-\theta_0)} - \frac{2\theta_0^3}{N_{Bi}^2(1-\theta_0)^2} \quad (5-1-3)$$

である。 Σ_0 の最大値は上式が θ_0 の三次式であることから、その極値の条件によって決められる。結局、 Σ_0 の最大値は、表面温度 θ_0 が次の値のときにおこることがわかる。

$$\theta_0^* = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-q \cos \frac{\phi}{3}} \quad (5-1-4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi &= -\frac{3^{3/2}r}{2(-q)^{3/2}}, \quad (\pi/2 < \phi < \pi) \\ q &= -\frac{8N_{Bi} + 18}{3N_{Bi}^2 + 8N_{Bi} + 6} \\ r &= \frac{12}{3N_{Bi}^2 + 8N_{Bi} + 6} \end{aligned} \right\} \quad (5-1-5)$$

この θ_0^* の値を (5-1-3) 式に代入すれば第 I 期における熱応力の最大値 (絶対値) $\Sigma_0^I \max$ が求められる。また最大値のおこる時間つまり Fourier 数 N_{Fo}^* は θ_0^* の値を (4-1-37) 式に代入して得られる。

[第 II 期 ($N_{Fo} \geq N_{Fo.cr}$)]

温度 (4-1-42) 式を (5-1-1) 式に代入して Σ が得られる。

$$\Sigma = \frac{N_{Bi}}{2+N_{Bi}} \left(-X^2 + X - \frac{1}{6} \right) \exp \left[-\frac{3N_{Bi}}{3+N_{Bi}} (N_{Fo} - N_{Fo.cr}) \right] \quad (5-1-6)$$

Σ_0 の最大値 (絶対値) は明らかに $N_{Fo} = N_{Fo.cr}$ のときにおこり、その値 $\Sigma_0^{II} \max$ は

$$\Sigma_0^{II} \max = -\frac{N_{Bi}}{6(2+N_{Bi})} \quad (5-1-7)$$

この値は第 I 期における最大値より小さいから、結局全期間を通じての Σ_0 の最大値は $\Sigma_0^I \max$ であることになる。

5-1-b 曲げが拘束される場合

(5-1-1) 式の代りに

$$\Sigma = -\theta + \int_0^1 \theta dX \quad (5-1-8)$$

を用いればよい。

[第 I 期 ($N_{Fo} < N_{Fo.cr}$)]

(4-1-39) 式を (5-1-8) 式に代入すれば、 Σ は表面温度 θ_0 の関数として次式によりあらわされる。

$$\Sigma = -\frac{N_{Bi}(1-\theta_0)^2}{4\theta_0} \left[X - \frac{2\theta_0}{N_{Bi}(1-\theta_0)} \right]^2 + \frac{2\theta_0^2}{3N_{Bi}(1-\theta_0)} \quad (5-1-9)$$

加熱側表面の熱応力 Σ_0 は

$$\Sigma_0 = -\theta_0 + \frac{2\theta_0^2}{3N_{Bi}(1-\theta_0)} \quad (5-1-10)$$

Σ_0 の最大値 (絶対値) は θ_0 が次の値 θ_0^* のときである。

$$\theta_0^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{3N_{Bi} + 2}} \quad (5-1-11)$$

すなわち

$$\Sigma_{0 \max}^I = -1 + \sqrt{\frac{2}{3N_{Bi} + 2}} + \frac{2}{3N_{Bi}} \sqrt{\frac{3N_{Bi} + 2}{2}} \left(2 - \sqrt{\frac{2}{3N_{Bi} + 2}} \right)^2 \quad (5-1-12)$$

そのときの Fourier 数 N_{Fo}^* は

$$N_{Fo}^* = \frac{1}{3N_{Bi}^2} \left(\ln \frac{2}{3N_{Bi} + 2} + \frac{3}{2} N_{Bi} \right) \quad (5-1-13)$$

[第 II 期 ($N_{Fo} \geq N_{Fo,cr}$)]

温度 (4-1-42) 式を (5-1-8) 式に代入して Σ が得られる.

$$\Sigma = \frac{N_{Bi}}{2 + N_{Bi}} \left[\frac{1}{3} - (1 - X)^2 \right] \exp \left[-\frac{3N_{Bi}}{3 + N_{Bi}} (N_{Fo} - N_{Fo,cr}) \right] \quad (5-1-14)$$

最大応力は表面におこり. $N_{Fo} = N_{Fo,cr}$ のときである.

$$\Sigma_{0 \max}^{II} = -\frac{2N_{Bi}}{3(2 + N_{Bi})} \quad (5-1-15)$$

この場合も $\Sigma_{0 \max}^{II}$ は $\Sigma_{0 \max}^I$ よりも一般に小さい.

以上 a 項 b 項の結果を第 3 図に示す.

5-2 円筒の熱応力

軸対称の温度分布で, 軸方向については一様である場合を考える. 接線方向の応力 σ_θ (無次元化して Σ_θ) は温度 θ により次式であらわされる.

$$\Sigma_\theta = \frac{\sigma_\theta(1-\nu)}{E\alpha_c(t_g - t_i)} = \frac{1+m^2/R^2}{1-m^2} \int_m^1 \theta R dR + \frac{1}{R^2} \int_m^R \theta R dR - \theta \quad (5-2-1)$$

内面および外面の接線応力をそれぞれ $\Sigma_\theta(m)$, $\Sigma_\theta(1)$ とすれば

$$\Sigma_\theta(m) = \frac{2}{1-m^2} \int_m^1 \theta R dR - \theta_m \quad (5-2-2)$$

$$\Sigma_\theta(1) = \frac{2}{1-m^2} \int_m^1 \theta R dR - \theta_1 \quad (5-2-3)$$

以下では具体例として第 4 章の 4-2-c 項の場合を引用して解析する. 第 I 期の温度分布 (4-2-27) 式および (4-2-28) 式を用いると $\Sigma_\theta(m)$ および $\Sigma_\theta(1)$ はそれぞれ

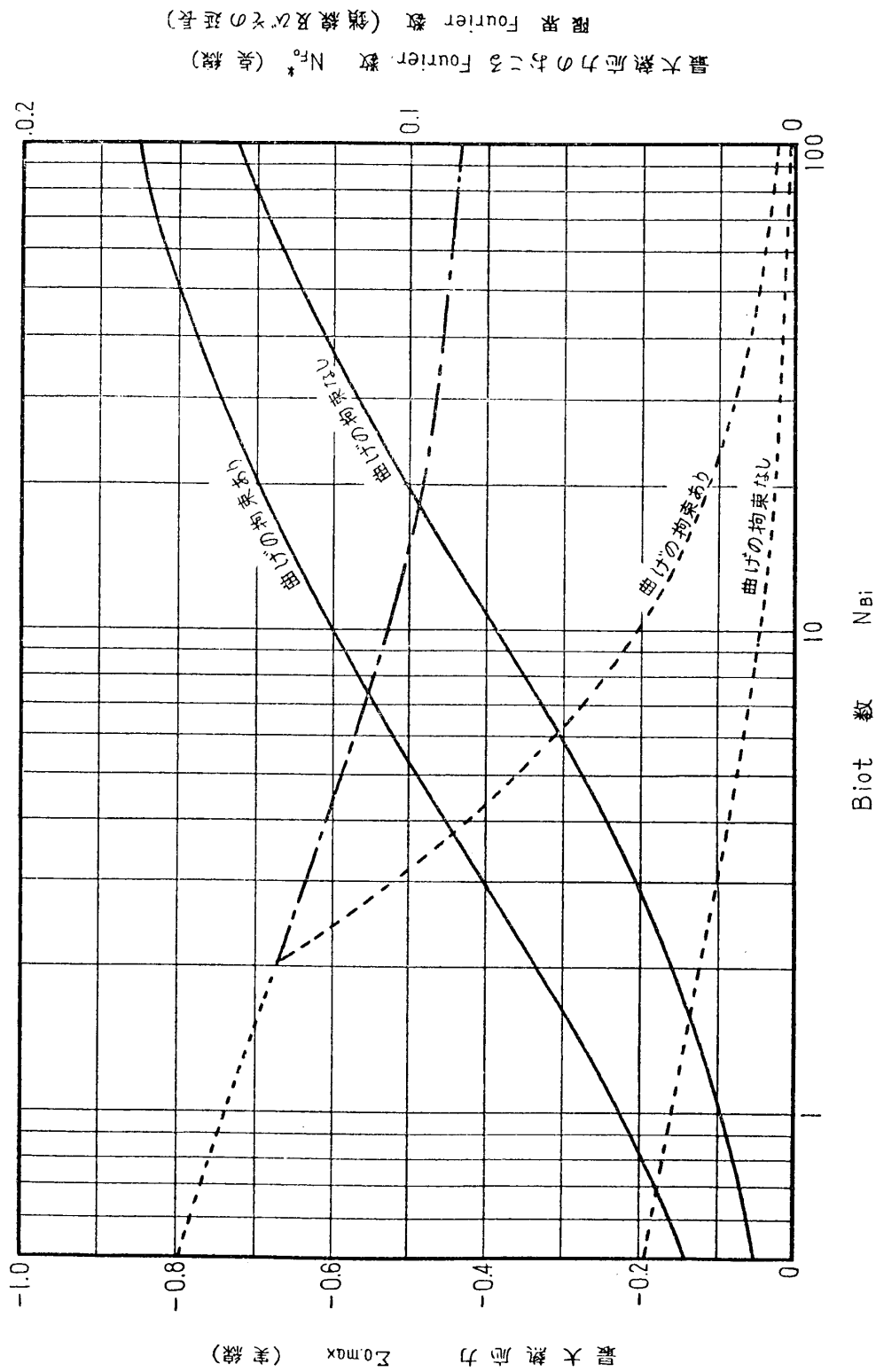
$$\Sigma_\theta(m) = \frac{2}{3(1-m^2)} \cdot \frac{\theta_m^3}{N_{Bi}^2(1-\theta_m)^2} + \frac{4m}{3(1-m^2)} \cdot \frac{\theta_m^2}{N_{Bi}(1-\theta_m)} - \theta_m \quad (5-2-4)$$

$$\Sigma_\theta(1) = \frac{2}{3(1-m^2)} \cdot \frac{\theta_m^3}{N_{Bi}^2(1-\theta_m)^3} + \frac{4m}{3(1-m^2)} \cdot \frac{\theta_m^2}{N_{Bi}(1-\theta_m)} \quad (5-2-5)$$

これで, Σ_θ は内面温度 θ_m を媒介として時間 N_{Fo} の関数としてあらわされたことになる, 第 II 期に対しては温度 (4-2-32) 式から同様に熱応力が得られる.

$$\Sigma_\theta(m) = \frac{-N_{Bi}(1-m)(5+3m)}{6[2+N_{Bi}(1-m)](1+m)} \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo,cr})] \quad (5-2-6)$$

$$\Sigma_\theta(1) = \frac{N_{Bi}(1-m)(1+3m)}{6[2+N_{Bi}(1-m)](1+m)} \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo,cr})] \quad (5-2-7)$$



最大熱応力のおこる Fourier 数 N_{F*} (点線)
 限界 Fourier 数 (鎖線及びその延長)

第3図 板の最大熱応力および Fourier 数

最大熱応力は第 II 期の段階においては $N_{F0} = N_{F0 \cdot cr}$ とおいて得られる。しかし一般に全期間を通じての最大応力は第 1 期中におこるからその段階での最大応力を求める必要がある。幸いに $\Sigma_{\theta}(m)$, $\Sigma_{\theta}(1)$ は θ_m の関数としてあらわされているから、その極値を求めるのは比較的容易である。(5-1-a 項参照)

6 熱による変形と振動

6-1 熱と応力問題の相関

熱層近似の方法で求められた熱応力は当然熱による変形および振動の問題に直ちに適用し得る。その用い方についてはあまり説明の要は無いであろう。ここでは構造物の極めて急速な加熱に関連して最近の一つの課題である熱と応力問題との相関を、熱層近似の方法を用いて解決して見る。読者はこの章の中で変形および振動問題において熱層近似の方法がどのように使われるかを観察されたい。

広い意味での熱応力問題を取扱う場合、われわれはこれを二つの相に分けて解析するのが普通である。つまり第一に適当な境界条件のもとに熱の方程式を解くこと、第二にその温度分布を用いて熱弾性(熱塑性)方程式を解くという操作である。一般に第二の相では構造の慣性項は無視されるから、結局時間は単なるパラメータの役としてあるだけである。このように熱と応力問題との相関を無視することは、その①温度分布に及ぼす影響や②構造物に起り得る振動を無視することになる。ここでは第二の仮定の妥当性を検討する。熱弾性の方程式で慣性項を残し、急速加熱によっておこる振動がどの程度のものであるかを研究する。

この問題については Columbia University の B. A. Boley 教授の研究があり [6] [7] [8], 慣性項を考慮した「動的解」と考慮しない「静的解」との差はパラメータ $B = d/kL\sqrt{\alpha}$ (熱伝導問題と振動問題それぞれにおける特性時間の比の平方根)によって求められることがわかっている。ここでは該問題を熱層近似の方法により解析し、現象を説明する明白な式を得ること、次にこれらの式によってパラメータ B の影響、すなわち慣性項の影響を論ずることを目的とする。解析にはこのような問題の中の代表的なものとして、梁がその一面から急速に加熱される問題を用いる。

6-2 基礎方程式および Boley の解

熱が加えられるときの均一梁の変位の方程式は

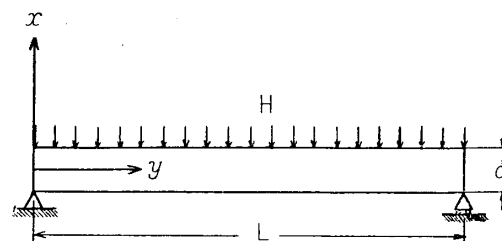
$$\partial^4 u / \partial y^4 + \kappa^4 \partial^2 u / \partial \tau^2 = (1/EI) \partial^2 M_T / \partial y^2 \quad (6-1)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= (\rho A/EI)^{1/4} \\ M_T &= \iint E \alpha_e t x dA \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

u は x 方向の変位, α_e は線膨脹率, y はスパンに沿っての距離, ρ は密度である。(第 4 図)

さて、両端単純支持梁(矩形断面、長さ L , 厚さ d , 単位幅)を考える。ステップ熱入力 H が $x=d/2$ 面に加へられ、 $x=-d/2$ 面は断熱とする。また初期温度は一様の t_i とする。温度は次式で与えられる。



第 4 図 急速加熱を受ける梁

$$T = \frac{Hd}{k} \left[N_{F_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j e^{-j^2 \pi^2 N_{F_0}}}{j^2} \cos i\pi \left(\frac{x}{d} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (6-3)$$

また次の諸無次元量を設定する.

$$\left. \begin{aligned} \text{温度モーメント} & \quad m_T(N_{F_0}) = \frac{\pi^4 k}{192 E I H \alpha_e} M_T \\ \text{座標} & \quad \eta = y/L \\ \text{変位} & \quad U(\eta, N_{F_0}) = \frac{\pi^4 k}{192 H \alpha_e L^2} u \\ \text{パラメータ} & \quad B = \left(\frac{\text{熱の問題における特性時間}}{\text{振動問題における特性時間}} \right)^{1/2} \\ & \quad = \frac{d}{kL \sqrt{\alpha}} \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

以上の記号を用いると (6-1) 式は次式に帰す.

$$B^4 U'''' + U'' = 0 \quad (6-5)$$

ここで, prime は η についての微分, dot は N_{F_0} についての微分とする. 始め静止の状態にある梁の境界および初期条件は

$$\left. \begin{aligned} U(0, N_{F_0}) = U(1, N_{F_0}) = U(\eta, 0) = U'(\eta, 0) = 0 \\ U''(0, N_{F_0}) = U''(1, N_{F_0}) = m_T \end{aligned} \right\} \quad (6-6)$$

である. Boley によると梁の慣性項を無視したいわゆる「静的解」は次式で与えられる.

$$U_{st} = \frac{\eta^2 - \eta}{2} m_T, \quad m_T = \left(\frac{\pi^4}{384} - \frac{1}{4} \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{e^{-j^2 \pi^2 N_{F_0}}}{j^4} \right) \quad (6-7)$$

時間を経るにつれてこれは次の値に漸近する.

$$U_{st \cdot \max} = (\eta^2 - \eta) \frac{\pi^4}{768} \quad (6-8)$$

一方「動的解」は次式となる.

$$U = U_{st} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{n^3 \pi^3} \left[\frac{\pi^2}{8B^2 n^2} \sin(n^2 \pi^2 B^2 N_{F_0}) - \sum_{j=1,3,5}^{\infty} \frac{e^{-j^2 \pi^2 N_{F_0}} + (j/nB)^2 \sin(n^2 \pi^2 B^2 N_{F_0}) - \cos(n^2 \pi^2 B^2 N_{F_0})}{j^4 + n^4 B^4} \right] \quad (6-9)$$

6-3 熱層近似の方法による解

有限領域の問題に熱層近似の方法を用いるときには限界 Fourier 数を境として第 I 期と第 II 期とに分けて取扱う. 大変面白いことには, この限界 Fourier 数が或る現象から他の現象への移り変りの点を示す物理的な意味を持つことが多いのである. この問題ではその点が「非定常」の振動から「定常」振動への遷移点を示すことになる.

熱層近似による温度分布 (4-1-22), (4-1-27) 式から m_T が得られる.

$$m_T = \begin{cases} \frac{\pi^4}{32} N_{Fo} \left(1 - \frac{\sqrt{6N_{Fo}}}{2}\right), & N_{Fo} < \frac{1}{6} \\ \frac{\pi^4}{384}, & N_{Fo} \geq \frac{1}{6} \end{cases} \quad (6-10)$$

温度モーメント m_T は限界 Fourier 数 $N_{Fo,cr}=1/6$ で最大値に達し、その以後は一定となる。最大値は Boley の解と同一で、その場合は $N_{Fo} \rightarrow \infty$ で漸近する。熱層近似による「静的解」は

$$U_{st} = \begin{cases} (\eta^2 - \eta) \frac{\pi^2}{64} N_{Fo} \left(1 - \frac{\sqrt{6N_{Fo}}}{2}\right), & N_{Fo} < \frac{1}{6} \\ (\eta^2 - \eta) \frac{\pi^4}{768}, & N_{Fo} \geq \frac{1}{6} \end{cases} \quad (6-11)$$

で、Boley の (6-7), (6-8) 式と対比される。最大の変位 $U_{st,max}$ は Boley の値と一致する。熱層近似によれば、限界 Fourier のときに実質的に変位が最大値に達することが示される。技術的立場からすれば、 $N_{Fo} = \infty$ で最大値に達することはあまり意味が無く、 $N_{Fo} = 1/6$ で最大値に達するとした方が考えやすい。

「動的解」は Mindlin-Goodman の方法 [9] で解くことができる。解を次の型に置く。

$$U = U_{st} + \sum_n Y_n(\eta) T_n(N_{Fo}) = \sum_n (\alpha_n m_T - T_n) Y_n \quad (6-12)$$

ここで U_{st} は次の型に展開したものとする。

$$U_{st} = \sum_n a_n Y_n m_T \quad (6-13)$$

(6-12) 式を (6-5) 式に入れ変数分離を行なうと、(6-5) 式は次式が成立すれば満たされる。

$$\frac{Y_n''''(\eta)}{Y_n(\eta)} = - \frac{T_n''(N_{Fo}) + m_T''(N_{Fo}) \alpha_n}{B^4 T_n(N_{Fo})} = C_n^2 \quad (6-14)$$

ここで C_n は常数である。(6-6) 式と (6-14) 式から

$$Y_n''''(\eta) - C_n^2 Y_n(\eta) = 0 \quad (6-15)$$

$$Y_n(0) = Y_n(1) = Y_n''(0) = Y_n''(1) = 0 \quad (6-16)$$

が得られ、これから

$$Y_n(\eta) = \sin(n\pi\eta), \quad n=1, 3, 5, \dots \quad (6-17)$$

なる解が得られる。

一方 $T_n(N_{Fo})$ については (6-6) 式と (6-14) 式から、その満たすべき方程式と初期条件は以下の式となる。

$$T_n''(N_{Fo}) + \alpha_n^2 T_n(N_{Fo}) = \beta_n(N_{Fo}) \quad (6-18)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha_n^2 &= B^4 n^2 \pi^2 \\ \beta_n(N_{Fo}) &= \frac{4}{n^3 \pi^3} m_T''(N_{Fo}) = - \frac{3\sqrt{6}\pi}{64n^3 \sqrt{N_{Fo}}} \end{aligned} \right\} \quad (6-19)$$

でまづ第 I 期を取扱う。

初期条件は

$$\left. \begin{aligned} T_n(0) \\ T_n'(0) = \frac{\pi}{8n^3} \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

である。これを解くと

$$\begin{aligned} T_n(N_{F_0}) = & -\frac{3\sqrt{6}\pi}{64n^3\alpha_n} \left[\sin(\alpha_n N_{F_0}) \int_0^{N_{F_0}} \frac{\cos(\alpha_n N_{F_0})}{\sqrt{N_{F_0}}} dN_{F_0} \right. \\ & \left. - \cos(\alpha_n N_{F_0}) \int_0^{N_{F_0}} \frac{\sin(\alpha_n N_{F_0})}{\sqrt{N_{F_0}}} dN_{F_0} \right] + \frac{\pi}{8n^3\alpha_n} \sin(\alpha_n N_{F_0}) \end{aligned} \quad (6-21)$$

(6-12) 式にこれらの結果を入れると最終的に 第 I 期の「動的解」が得られる。

$$\begin{aligned} U = & (\eta^2 - \eta) \frac{\pi^4}{64} N_{F_0} \left(1 - \frac{\sqrt{6N_{F_0}}}{2} \right) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{8\pi n^5 B^2} \left\{ \sin(n^2\pi^2 B^2 N_{F_0}) \right. \\ & \left. - \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi} n B} \left[\sin(n^2\pi^2 B^2 N_{F_0}) \mathbf{C}(nB\sqrt{2\pi N_{F_0}}) - \cos(n^2\pi^2 B^2 N_{F_0}) \mathbf{S}(nB\sqrt{2\pi N_{F_0}}) \right] \right\}, \\ & \left(N_{F_0} < \frac{1}{6} \right) \end{aligned} \quad (6-22)$$

ここに $\mathbf{C}(z)$, $\mathbf{S}(z)$ は Fresnel の積分で

$$\mathbf{C}(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi z^2}{2} dz, \quad \mathbf{S}(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi z^2}{2} dz \quad (6-23)$$

この関数値は Marcel Boll の数表 [10] にかなり詳しく出ている。

次に第 II 期つまり限界 Fourier 数以後の解を求める。解析の方法は上と全く同じでその詳細は略す。結果は

$$\begin{aligned} U = & \frac{\pi^2}{768} (\eta^2 - \eta) + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin(n\pi\eta)}{32\pi n^5 B^2} \left\{ \frac{27}{\pi n^2 B^2} \left[\mathbf{C}^2\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) + \mathbf{S}^2\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \right] \right. \\ & \left. + 16 - 24 \frac{\sqrt{3}}{nB\sqrt{\pi}} \mathbf{C}\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \right\}^{1/2} \times \sin \left\{ B^2 n^2 \pi^2 \left(N_{F_0} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ & \left. + \tan^{-1} \left[\frac{\mathbf{C}\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \sin \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6} - \mathbf{S}\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \cos \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6} - \frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} nB \sin \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6}}{\mathbf{C}\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \cos \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6} + \mathbf{S}\left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right) \sin \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6} - \frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} nB \cos \frac{n^2 B^2 \pi^2}{6}} \right] \right\}, \\ & \left(N_{F_0} \geq \frac{1}{6} \right) \end{aligned} \quad (6-24)$$

この式を説明すると、右辺第 I 項は「静的解」 U_{st} である。第 II 項はそれを中心とする振動を示している。

振動の周期は

$$N_{F_0}^* = 2/(B^2 n^2 \pi) \quad (6-25)$$

となる。梁の中央部 $\eta=1/2$ における変位に注目すれば

$$\begin{aligned}
U_{\nu=\frac{1}{2}} = & -\frac{\pi^4}{3 \times 4^5} \\
& + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{32\pi n^5 B^2} \left\{ \frac{27}{\pi n^2 B^2} \left[C^2 \left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) + S^2 \left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \right] + 16 \right. \\
& \left. - 24 \frac{\sqrt{3}}{nB\sqrt{\pi}} C \left(nB\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \right\}^{1/2} \times \sin \left[B^2 n^2 \pi^2 \left(N_{Fo} - \frac{1}{6} \right) + \theta_n \right], \\
& \left(N_{Fo} \geq \frac{1}{6} \right) \quad (6-26)
\end{aligned}$$

ここで θ_n は (6-24) 式の逆正接の項を示す。振幅の項の $\{ \}^{1/2}$ の値は n によってあまり大きくは変化しない。従って n 次の振動の振幅は略 $1/n^5$ に比例すると考えられ、高次の振動の振幅は 1 次の振動にくらべて無視し得る程度であることがわかる。1 次の振動の振幅を A_{m1} とすれば近似的に

$$U_{\nu=\frac{1}{2}} = -\frac{\pi^4}{3 \times 4^5} + A_{m1} \sin \left[B^2 \pi^2 \left(N_{Fo} - \frac{1}{6} \right) + \theta_1 \right] \quad (6-27)$$

と書ける。これと同様に $N_{Fo} < N_{Fo,cr}$ なる第 I 期でも高次の振動項が無視できるものとする。結局熱層近似によって問題を取扱い、適当な操作を経ると、梁の中央点の変位は次式であらわせることになる。

第 I 期 ($N_{Fo} < 1/6$)

$$\begin{aligned}
U_{\nu=\frac{1}{2}} = & -\frac{\pi^4}{256} N_{Fo} \left(1 - \frac{\sqrt{6N_{Fo}}}{2} \right) + \frac{1}{8\pi B^2} \left\{ \sin \left(\pi^2 B^2 N_{Fo} \right) \right. \\
& \left. - \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{\pi} B} \left[C \left(B\sqrt{2\pi N_{Fo}} \right) \sin \left(\pi^2 B^2 N_{Fo} \right) - S \left(B\sqrt{2\pi N_{Fo}} \right) \cos \left(\pi^2 B^2 N_{Fo} \right) \right] \right\} \\
& (6-28)
\end{aligned}$$

第 II 期 ($N_{Fo} \geq 1/6$)

$$\begin{aligned}
U_{\nu=\frac{1}{2}} = & -\frac{\pi^4}{3072} + A_{m1} \sin \left[B^2 \pi^2 \left(N_{Fo} - \frac{1}{6} \right) + \theta_1 \right] \\
\text{振幅: } A_{m1} = & \frac{1}{32\pi B^2} \left\{ \frac{27}{\pi B^2} \left[C^2 \left(B\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) + S^2 \left(B\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \right] + 16 - \frac{24\sqrt{3}}{\sqrt{\pi} B} C \left(B\sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \right\}^{1/2} \\
\text{周期: } N_{Fo}^* = & \frac{2}{\pi B^2} \quad (6-29)
\end{aligned}$$

結局熱と応力問題との相関は端的に上の (6-28) (6-29) 式にあらわされていると考えられる。この式からは次のことが観察される。

①この問題を支配するパラメータは唯一つであり、それは熱と振動それぞれの問題における特性時間の比 B^2 である。

②現象は限界 Fourier 数 $N_{Fo,cr}$ で二つの時期に分けられそれ以前は過渡的振動、それ以後は定常的振動に移行する。

③いずれの時期も、熱と応力との相関を無視したときの変位、つまり「静的解」を中心として振動する。

④梁の中央の点に注目すると、定常的振動は「静的解」を中心として、周期 (無次元)

$2/(B^2\pi)$, 振幅 A_{m1} なる正弦振動である。

⑤振幅 A_{m1} は B が小なる程大きくなり, その極限は「静的解」の最大値に等しい。従ってこのとき最大の変位は「静的解」の2倍となる。 B が大きくなれば振幅 A_{m1} は急速に0に収束し, 熱と応力との相関は無視できる範囲となる。

7 遮熱被膜の効果

7-1 二つの効果

急速かつ激しい加熱を受ける物体の表面を, セラミックやその他のコーティングにより熱の入力を軽減するのは一つの常道である。ここでは被膜がアブレーションを起さない場合についてその遮熱効果を熱層近似の方法により解析する。

解析的にはこれは板と被膜の二種類の熱的性質の異なる物体よりなる二体問題として基礎式は容易に得られる。そして普通の方法例えば Laplace 変換により形式的な解を導くことができる。[11]。しかし実際は, その解の計算には極めて複雑な超越方程式の根を求める操作を経なければならない。その故に定常熱伝導における被膜の有効熱伝達係数 $1/h_c = 1/h + d_c/k_c$ をもって非定常熱伝導の場合の有効熱伝達係数に代用する場合を散見するが, これは如何なる意味でも近似では無いので誤用であろう。このような事情から言っても精度のよい解析的な近似解が必要とされるのである。そこで熱層近似の方法はここに好適な応用範囲を見出すのである。その上この方法によると被膜へ遮熱効果に二つの面があることが説明されて面白い。

第一の効果は時間遅れの効果である。加熱の初期の段階つまり第I期の熱伝導では熱層のフロントは被膜層の中に留まり板迄達していないから板の温度は全く上昇しない。それ故熱層が板に達し板の温度が上昇し始める迄にある時間遅れが存在する。この値はすなわち限界 Fourier 数 $N_{Fo,cr} = \alpha\tau/d^2$ によって決められることはあきらかである。因みにこの $N_{Fo,cr}$ の値は加熱条件によって異なるが略 1/12 から 1/6 の範囲にある。(174頁参照) この時間遅れが大きい程遮熱効果が大きいわけである。

第二の効果はその後の板の温度上昇度が被膜の存在によって減少させられることである。

コーティングを用いるとき, 主としてどちらの効果に期待するかはその材質と厚さによる。第一の効果はかなり厚い温度拡散率の小さいものの場合にのみ重要であり, 多くはアブレーション効果を伴うものである。第二の効果は比較的薄いセラミック・コーティング等の場合に重要である。その効果は以下の解析によると次の有効熱伝達係数としてあらわされる。

$$\frac{1}{h_{e,tr}} = \frac{1}{h} (1+r) + \frac{d_c}{k_c} \left(1 + \frac{1}{3}r\right) \quad (7-1)$$

ここに $h_{e,tr}$ の添字 tr は非定常 (transient) を意味し, r は被膜とそれにより被覆せる板との熱容量比である。

7-2 解 析

まず基本的仮定として板の熱伝導率は被膜のそれに比べてはるかに大きく $k_s = \infty$ とする。従って板の温度は被膜の裏面温度 θ_1 に等しく一様であり, 問題中には境界条件として入るだけとなる。基礎方程式は

$$\partial^2\theta/\partial X^2 = \partial\theta/\partial N_{Fo} \quad (7-2)$$

$$\left. \begin{aligned} -\partial\theta/\partial X &= N_{Bi}(1-\theta), & (X=0) \\ -\partial\theta/\partial X &= (1/\gamma)\partial\theta/\partial N_{Fo}, & (X=1) \\ \theta &= 0, & (N_{Fo}=0) \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

ここで (7-3) の中央の式は、左辺が被膜と板との境界を通過する熱流、右辺はそれが板の温度の時間変化に等しいことを意味している。尚 N_{Fo} , N_{Bi} , X の無次元量はすべて被膜の物性値および厚さを基準に使用しており板のそれでは無いことを記しておく。

[第 I 期 ($N_{Fo} < N_{Fo.cr}$)]

方程式 (7-2) の代りに次の熱平衡積分を用いて問題を解く。

$$\int_0^{\Delta} (\partial^2\theta/\partial X^2 - \partial\theta/\partial N_{Fo}) dX = 0 \quad (7-4)$$

熱層のフロントが裏面に達していないから境界条件 (7-3) の第二式の代りに次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \partial\theta/\partial X &= 0, & (X=\Delta) \\ \theta &= 0, & (X=\Delta) \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

第 4 章に詳述した方法により以下の解が得られる。

$$\theta = \begin{cases} N_{Bi}(1-\theta_0)(X-\Delta)^2/2\Delta, & (X < \Delta) \\ 0, & (X \geq \Delta) \end{cases} \quad (7-6)$$

$$3N_{Bi}^2 N_{Fo}/2 = \ln(1-\theta_0) + [(1-\theta_0)^{-2} - 1]/2 \quad (7-7)$$

$$\Delta = 2\theta_0/N_{Bi}(1-\theta_0) \quad (7-8)$$

限界 Fourier 数は

$$N_{Fo.cr} = (2/3N_{Bi}^2) \ln[2/(2+N_{Bi})] + (4+N_{Bi})/12N_{Bi} \quad (7-9)$$

であり、 N_{Bi} によって $1/12 \sim 1/6$ の値をとる。

[第 II 期 ($N_{Fo} \geq N_{Fo.cr}$)]

被膜裏面の温度つまり板の温度 θ_1 は次式で与えられることが導かれる。

$$\theta_1 = \begin{cases} 0, & (N_{Fo} < N_{Fo.cr}) \\ 1 + \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2\sqrt{m^2 - 4n}} \exp\left[\frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2}(N_{Fo} - N_{Fo.cr})\right] \\ \quad + \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2\sqrt{m^2 - 4n}} \exp\left[\frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}(N_{Fo} - N_{Fo.cr})\right], & (N_{Fo} \geq N_{Fo.cr}) \end{cases} \quad (7-10)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{4(3+N_{Bi})\gamma + 12(1+N_{Bi})}{4+N_{Bi}} \\ n &= \frac{12N_{Bi}\gamma}{4+N_{Bi}} \end{aligned} \right\} \quad (7-11)$$

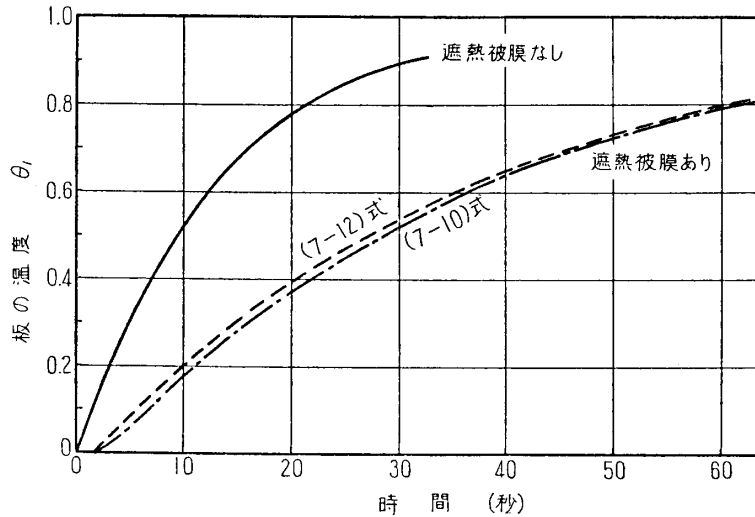
適当に大きい N_{Fo} の値に対して (7-10) 式の右辺第 3 項は省略できるのが普通である。従ってこれは近似的に次のように書ける。

$$\theta_1 = \begin{cases} 0, & (N_{Fo} < N_{Fo.o}) \\ 1 + \varphi \exp[\psi(N_{Fo} - N_{Fo.o})], & (N_{Fo} \geq N_{Fo.o}) \end{cases} \quad (7-12)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2\sqrt{m^2 - 4n}} \\ \psi &= \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2} \\ N_{F_{0.0}} &= N_{F_{0.cr}} - \frac{1}{\psi} \ln(-\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (7-13)$$

である。(第5図)



第5図 遮熱被膜のある場合の板の温度上昇例

被膜が熱的に非常に厚い場合を除いて $N_{F_{0.0}}$ は十分に小さいから、 N_{F_0} が小さい付近を除いてはこれを無視しても大勢に影響しない。そこで (7-12) 式の上の部分は無視して下の部分を左に $N_{F_{0.0}}$ だけ平行移動する。こうすると

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 1 + \varphi \exp[\psi(N_{F_0} - N_{F_{0.cr}} + N_{F_{0.0}})] \\ &= 1 - \exp(\psi N_{F_0}), \quad (N_{F_0} > 0) \end{aligned} \quad (7-14)$$

被膜のない場合の板の温度の式 $\theta = 1 - \exp(-h\tau/C_{ps}\rho_s d_s)$ と同じ型にするには、非定常の場合の有効熱伝達係数 $h_{e.tr}$ を次式で定義すればよい。

$$h_{e.tr} = -\psi \frac{\alpha_c c_{ps} \rho_s d_s}{d_c^2} \quad (7-15)$$

また通常 $m^2 \gg n$ であって $(-m + \sqrt{m^2 - 4n})/2 \approx -n/m$ であるからこのことを利用して計算すれば、最終的に次の結果が得られる。

非定常熱伝導における遮熱被膜の有効熱伝達係数 $h_{e.tr}$ は

$$\frac{1}{h_{e.tr}} = \frac{1}{h} (1 + \gamma) + \frac{d_c}{k_c} \left(1 + \frac{1}{3} \gamma \right) \quad (7-16)$$

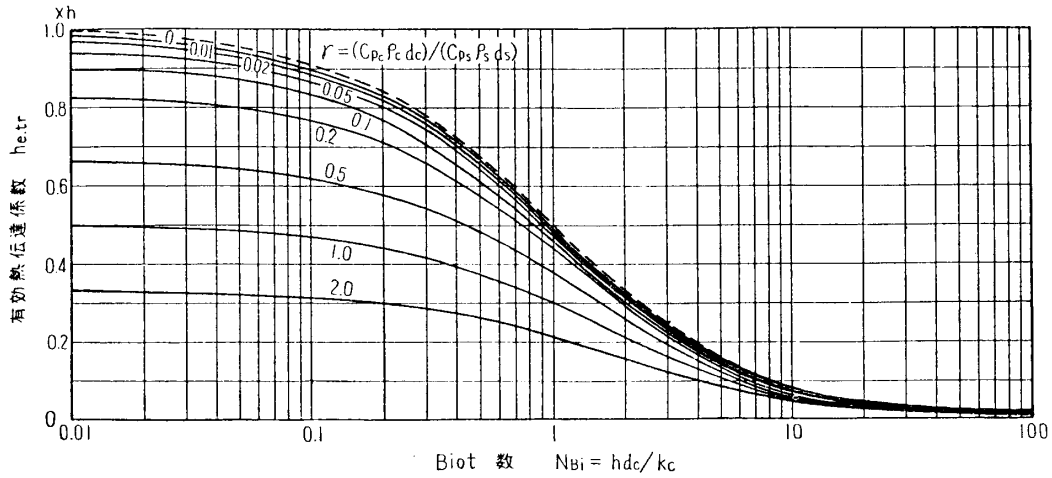
である。ここに γ は

$$\gamma = \frac{c_{pc} \rho_c d_c}{c_{ps} \rho_s d_s} \quad (7-17)$$

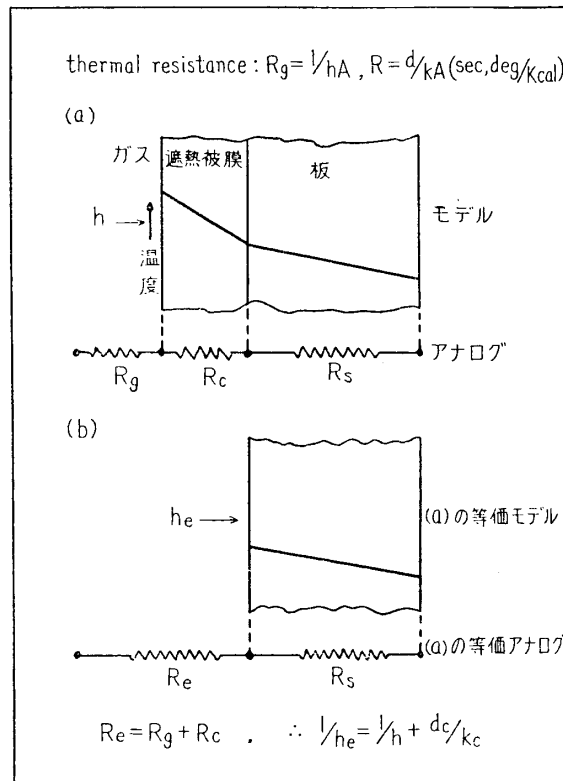
である。これは被膜の Biot 数 $N_{Bi} = hd_c/k_c$ を用いれば次のようにもあらわされる。

$$h_{e.tr} = h/[1 + \gamma + N_{Bi}(1 + \gamma/3)] \quad (7-18)$$

(7-16) または (7-18) 式をグラフに画くと、被膜の効果がよくわかる (第6図)。



第 6 図 遮熱被膜の有効熱伝達係数 (非定常熱伝導の場合)



第 7 図 遮熱被膜効果のアナログ回路による説明 (定常熱伝導の場合)

合は、拡散粒子に与える熱エネルギーが一定であることを意味するから、これは熱層厚さ上限を求める場合と本質的には同一のものである。しかし前者は近似解法を用いた誤差、後者は 1% の打ち切り誤差があるから両者の間に幾分の開きが生ずる。

表面温度一定 (t_0 境界条件)

$$\delta = \sqrt{12\alpha\tau} = 3.46\sqrt{\alpha\tau} \quad (8-2)$$

技術者としては当然温度と云う測度で物を視るわけであるから、種々の加熱条件に対する熱層厚さを知っている必要がある。そこで以下實際上頻繁に遭遇する代表的加熱条件の 3 種を選び、その熱層厚さについて述べる。

a) 表面温度一定

初期温度 t_i , $x=0$ 面の温度を t_g に保つ ($\tau > 0$)

これは丁度第 4 章 4-1-a 項で、半無限体である場合に相当する。熱層厚さは上の (8-2) 式で与えられる。

b) 一定熱量が表面より加えられる

初期温度 t_i , $x=0$ 面から熱量 H が加えられる。

これは第 4 章 4-1-b 項で、半無限体である場合に相当する。熱層厚さは (4-1-30) 式により

$$\delta = \sqrt{6\alpha\tau} = 2.45\sqrt{\alpha\tau} \quad (8-3)$$

なお、 H が時間の関数 $H(\tau)$ で与えられるとき熱層厚さは近似的に次式であらわされる。

$$\delta = \sqrt{6\alpha} \sqrt{\int_0^\tau \frac{H(\tau) d\tau}{H(\tau)}} \quad (8-4)$$

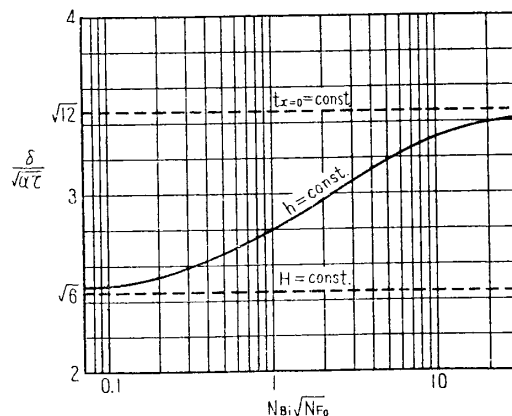
c) 一定熱伝達係数の場合

初期温度 t_i , $x=0$ 面は温度 t_g の流体に接す (熱伝達係数 h)

これは第 4 章 4-1-c 項で、半無限体である場合に相当する。(4-1-37), (4-1-38) 式から

$$\delta = f(N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}})\sqrt{\alpha\tau} \quad (8-5)$$

の型で得られる。関数 $f(N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}})$ を第 9 図に示す。またこの関数は次のような性質を持っている。



第 9 図 代表的加熱条件における熱層厚さ

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}} \rightarrow 0} f(N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}}) &= \sqrt{6} \\ \lim_{N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}} \rightarrow \infty} f(N_{Bi}\sqrt{N_{Fo}}) &= \sqrt{12} \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

結局以上3種の加熱条件による境界層厚さは次の順に並ぶことになる。

$$\sqrt{6\alpha\tau} = \delta \quad (\text{熱伝達量一定}) \leq \delta \quad (\text{熱伝達係数一定}) \leq \delta \quad (\text{表面温度一定}) = \sqrt{12\alpha\tau} \quad (8-7)$$

この(8-7)式および第9図はまた限界 Fourier 数 $N_{Fo,cr}$ の範囲を示しているとも云える。 $(\alpha\tau/\delta^2)_{\delta=d} = N_{Fo,cr}$ であるから容易に次式が得られる。

$$1/6 = N_{Fo,cr} \quad (\text{熱伝達量一定}) \geq N_{Fo,cr} \quad (\text{熱伝達係数一定}) \geq N_{Fo,cr} \quad (\text{表面温度一定}) = 1/12 \quad (8-8)$$

以上によって実用上考えられる主要な加熱条件により熱層厚さがどのように変わるかを示すことができた。特に興味深いのは、接触流体の温度、与えられる熱量、熱伝達の機構の相違など、各種各様の加熱条件に対して熱層厚さが極く狭い範囲 $\sqrt{6\alpha\tau} \sim \sqrt{12\alpha\tau}$ の間にあるということである。実際その両極端の略中間値として $3\sqrt{\alpha\tau}$ をとれば、全部の範囲はその±20%以内に収まってしまう。これは熱層の成因というべきものを第2章のように確率論的に考えれば当然予測されるべきものであった。考えられる種々の加熱条件に対して熱の影響の及ぶ範囲がこのようにはっきりと限定された領域によって与えられるということは、熱層という非定常熱伝導に関する従来とは全く別の考え方のもたらした著しい特徴の一つであると思われる。

8-2 熱層概念の直接的応用

熱層という考え方は、熱平衡積分と結びついて数学的に表現された熱伝導問題の解法への利用にとどまらないことは前節の論議から当然予想されるものである。そこで熱を受ける構造物の設計について熱層概念の直接的応用を述べる。

対象をロケットにして考えると、たとえば急激な加熱を受ける個所の耐熱策として遮熱被膜を施すとす。どのような材料をどの位の厚さ被覆すれば目的が達成されるであろうか。より厳密には第7章の方法によればよいが、以下に記することだけでも十分に役立つ。これは一言で云えば、被膜の厚さを熱層厚さに等しくとれということである。

$$d_c = \lambda\sqrt{\alpha_c\tau} \quad (8-9)$$

ここに α_c は被膜の温度拡散率、 τ は加熱時間、係数 λ は前節の通り $\sqrt{6}$ から $\sqrt{12}$ 迄の値をとり得る。このように d_c をとれば加熱の終わった瞬間に熱層は被膜の裏面にまで丁度達しており、それより深い構造物は何等の影響も受けないであろう。加熱が終わった後の温度上昇は、多くの場合加熱終了と共に荷重も減少するので問題はない。

実際は構造物自体も或程度の耐熱性は有しているのであるから、全然その部分に持たせないのは不経済な設計である。そこでもっとよい設計を望むならば再び第7章の方法に返ってそれによればよい。ただ上の考え方は非常に簡単で、許容時間が厚さの自乗に比例すること温度拡散率に逆比例すること等の具体的な特性を示してくれる。その意味でこれは熱層の考え方の一つの方向を指針するものと云える。

このような考え方はロケットの種々の部分において用い得る。たとえばグラファイト・ノズルの場合、本当に断熱という考慮から必要とされるグラファイトの厚さは、その α と τ から計算してみると僅々数 mm にしかならないのである。したがって現在使用されているグラファイト厚さは熱的考慮以外の見地からきめられていることがわかる。

またノズル廻りの構造部分たとえば軽合金製の尾翼付根部が空力加熱よりもノズルからの伝導熱でやられるのではないかという心配はよくあることである。このようなときには金属の接触面の熱抵抗も考慮に入れなければならないが安全側としてそれを無視し、ノズル内部の熱伝達の機構が何であれ $\delta = \sqrt{12\alpha\tau}$ によってその部分が大きな空力荷重を受ける間に熱の影響がその部分に表われるかどうかを検討することができる。

次にコンクリート壁の伝熱の問題に応用して見る。コンクリートは温度拡散率が小さくまた厚さが大きいから、Fourier 数は一般に小である。従って熱層を考える対象となり得る。コンクリート壁の表面に与えられた温度変化がどの位の時間後にその裏面で感知されるであろうか。表面温度変化の1%程度の影響があらわれる、つまり熱層のフロントが裏面に達することをもって感知されるものとする。これは $\delta = 2\sqrt{\alpha\tau} \operatorname{erfc}^{-1}(0.01)^*$ から

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{d}{2\operatorname{erfc}^{-1}(0.01)} \right)^2 \approx \frac{d^2}{13\alpha} \quad (8-10)$$

なる式が得られる。1%でなくて、一般に $n\%$ の影響をもって感知されるものとするれば、上式の $\operatorname{erfc}^{-1}(0.01)$ の代りに $\operatorname{erfc}^{-1}\left(\frac{n}{100}\right)$ を用いればよい。

逆に時間毎の到達深度を求めるには、 $\alpha = 7.7 \text{ cm}^2/\text{h}$ を用い

$$\delta = 9.61\sqrt{\tau} \cdots \cdots (\text{cm}, h) \quad (8-11)$$

となる。計算すると次表のようになる。

時 間 (h)	1	2	4	8
到達深度 (cm)	9.61	13.6	19.2	27.3

8-3 熱伝達測定への応用

第4章で得られた解の多くは簡単な型をしているから、測定値から物性値を得る操作を容易にすることが多い。ここでは固体ロケットのノズルの熱伝達測定を例にとって説明する。

この測定では一般に燃焼秒時が短かいために Transient Method、つまり壁の温度の時間的变化を測定し非定常熱伝導の解から逆算して熱伝達係数を推定する方法、が用いられる。実際にはこの逆算の解析的操作は不可能で、図式解法が用いられる。Schmidt の Step-by-step Method はこの例である。熱層近似の方法による解を用いるとこの逆算過程は極めて容易なものになり、加へて輻射による影響が自動的に除去される利点がある。

まづノズルを軸方向と垂直に細分して考え、これをそれぞれ熱的に独立した中空円筒と考える。この仮定はよく行なわれるもので、実際に細分個所に溝を入れることもあり、軸方向の熱の移動に影響なしと考える。

* $\operatorname{erfc}^{-1} X$ は $\operatorname{erfc} Y$ の逆函数の意味である。

初期温度 t_i , 内面は温度 t_g の流体に接す, 熱伝達係数 h の条件は第4章 4-2-c の問題である. 外面温度 θ_1 は (4-2-34) 式により

$$\theta_1 = \begin{cases} 0, & (N_{Fo} < N_{Fo.cr}) \\ 1 - \exp[-\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo.cr})], & (N_{Fo} \geq N_{Fo.cr}) \end{cases} \quad (8-12)$$

である.

$0 \sim N_{Fo.cr}$ までの間は熱層が外面迄到達していないために外面温度はほとんど零であるという熱層近似特有の考え方で, 一種の時間遅れ (time lag) である. これはオッシロ等の記録にも明瞭に観察される.

また固体ロケットノズルの特性上, ノズル外面温度はかなり高くなるから, その付近では輻射による冷却効果があらわれはじめ, 上の曲線よりはもっと下の, 表面の輻射率により決まる平衡温度に漸近するであろう. 温度測定結果から熱伝達係数を求めるには, この輻射の影響を含めた式を用いなければ正しい値が出ないが, この輻射の問題は現在のところ未解決である.

しかし熱層近似の解固有の型を巧に利用すると, 測定値から輻射の影響部分を除去することができる. (8-12) 式の常用対数をとれば

$$\log_{10}(1 - \theta_1) = -\epsilon_c(N_{Fo} - N_{Fo.cr}) \log_{10} e \quad (8-13)$$

となるから, 片対数方眼紙の対数軸に $(1 - \theta_1)$, 他の軸に $(N_{Fo} - N_{Fo.cr})$ をとればこれは直線になるはずである. 輻射の影響はこの直線からのずれによってあらわれるから, 測定値をこの図に書き入れれば, その直線部分が輻射の影響が無い部分で (8-13) 式を正しくあらわす. 従って外面の輻射率の値を顧慮して修正する必要は全く無い. 測定値を結んだ直線上の任意の点の座標 $((N_{Fo} - N_{Fo.cr})_{expt}, (1 - \theta_1)_{expt})$ から ϵ_c が

$$\epsilon_c = \frac{-1}{(N_{Fo} - N_{Fo.cr})_{expt}} \ln(1 - \theta_1)_{expt} \quad (8-14)$$

と得られ, さらに N_{Bi} , h が計算される.

末尾ながら本研究を行なうに当って常に変わぬ御鞭撻を頂いた東大航空研究所池田健教授, および種々の御配慮を頂いた富田文治助教授に心から感謝の意を表して筆をおく.

1962年5月 航究力学部

記 号

1	$\delta(\tau)$ = 熱層厚さ	x = 座標
	τ = 時間	t = 温度
	ν = 動粘性係数	t_i = 初期温度
	α = 温度拡散率	t_g = 気体温度
	d = 長さ, 厚さ	2 $f(x', x; \tau)$ = 確率密度
	$N_{Fo} = \alpha\tau/d^2$ 又は $\alpha\tau/r_e^2$ = Fourier 数	σ^2 = 分散率
	v, V = 速度	C_{diff} = 温度拡散速度

- 3 $H(\tau)$ = 熱量 $u = x$ 方向変位
- 4 $\theta = (t - t_i) / (t_g - t_i)$ = 無次元温度 ρ = 密度
 $X = x/d$ = 無次元座標 L = 梁の長さ
 $\Delta = \delta/d$ = 無次元熱層厚さ $\eta = y/L$ = 無次元座標
 $N_{Fo,cr}$ = 限界 Fourier 数 m_T = 無次元温度モーメント
 k = 熱伝導率 $U(\eta, N_{Fo})$ = 無次元変位
 $H = Hd/k$ = 無次元熱量 $C(z) = \int_0^z \cos(\pi z^2/2) dz$ = Fresnel の積分
 h = 熱伝達係数 $S(z) = \int_0^z \sin(\pi z^2/2) dz$ = Fresnel の積分
 $N_{Bi} = hd/k$ = Biot 数 7 h_e = 遮熱被膜の有効熱伝達係数
 r = 円柱座標 (定常)
 r_i, r_e = 円筒の内径, 外径 $h_{e,tr}$ = 遮熱被膜の有効熱伝達係数
 δ_r = 熱層の座標 (中心より) (非定常)
 $R = r/r_e$ = 無次元円柱座標 $\gamma = (c_{pc}\rho_c d_c) / (c_{ps}\rho_s d_s)$ = 被膜と板との熱
 $m = r_i/r_e$ = 無次元内径 容量比
 $\Delta_r = \delta_r/r_e$ = 無次元熱層座標 c_p = 比熱
5 σ = 応力 ρ = 比重量
 $\Sigma = \sigma(1-\nu) / E\alpha_e(t_g - t_i)$ = 無次元熱応力 添字 c = 被膜
 α_e = 線膨脹率 添字 s = 板
- 6 $B = d/kL\sqrt{\alpha}$ = 熱伝導, 振動それぞれの 特性時間の比の平方根

文 献

- [1] Goodman, T. R., The Heat-Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase, Transactions of ASME, February, 1958.
- [2] Goodman, T. R., The Heating of Slabs with Arbitrary Heat Inputs, Journal of the Aero/Space Sciences, Vol. 26, No. 3, March, 1959.
- [3] Kantorovich, L. V. and Krylov, V. I., Approximate Methods of Higher Analysis, Third Ed., Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [4] Biot, M. A., New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures, Journal of the Aero/Space Sciences, Vol. 24, No. 12, December, 1957.
- [5] Timoshenko, S. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, Second Ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1951.
- [6] Boley, B. A., Thermally Induced Vibrations of Beams, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No.2, February, 1956.
- [7] Boley, B. A. and Barber, A. D., Dynamic Response of Beams and Plates to Rapid Heating, Journal of Applied Mechanics, Vol. 24, No. 3, September, 1957.
- [8] Boley, B. A. and Weiner, J. H., Theory of Thermal Stresses, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960.
- [9] Mindlin, R. D. and Goodman, L. E., Beam Vibrations with Time-Dependent Boundary Conditions, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, p. 377, 1950.
- [10] Boll, M., Tables Numériques Universelles, Dunod, Paris. 1947.
- [11] Miura, K., Effects of the Insulation Coating on the Thermal Shock of the Plate, Proceedings of the 7th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1957.