

凹面に沿う非圧縮性境界層の遷移

相 原 康 彦

Transition in an Incompressible Boundary Layer along a Concave Wall

By

Yasuhiko AIHARA

Abstract: Results of experimental investigation on instability leading to transition in the subsonic boundary-layer flow along a concave wall are presented. Hot-wire measurements, pitot-tube measurements, and dye observations reveal a spanwise variation in velocity profile having a definite wave number whether the boundary layer is laminar or turbulent. The variation is interpreted as produced by a system of vortices with axis in the streamwise direction. For the laminar boundary layer the vortices are just those expected from the theory of laminar instability. The wave amplitude distribution is in good agreement with theoretical prediction, but the wave amplification rate agrees with theoretical value only when the amplitude is small. For the turbulent boundary layer the experimental results are accounted for by the theory of laminar instability in which the molecular viscosity is replaced by the eddy viscosity. In both cases, however, the theory tells nothing about the mechanism by which the wave length is determined.

Transition Reynolds number is reduced in the boundary layer along a concave wall compared with that on a flat plate. In order to gain a deeper insight into this problem, the behavior of the propagating wave produced by a vibrating ribbon is investigated by hot-wire measurements. It is found that the spanwise variation in mean flow has a decisive effect on the development of the wave in the boundary layer. The wave is most strongly amplified in the section where the velocity profile is deformed into an unstable form.

It appears therefore that the system of streamwise vortices indirectly affects the transition in the boundary layer along a concave wall by making the flow field three dimensional.

概 要

凹面に沿う非圧縮性境界層の遷移を実験的に研究した。凹面に沿う境界層の特徴である縦渦の発生と発達についての研究、および、縦渦の発達によって作られた境界層内の三次元的な場に重畳された進行波の振舞の研究を行ない、その結果、縦渦による三次元性の影響が凹面に沿う境界層の遷移に対して支配的であることがわかった。

1. 緒 言

流体力学の研究課題の中で、境界層の研究はその歴史、研究者の数、研究方針等から、最

も深く研究された部門の一つといえるが、しかも現在なお多くの解決されるべき問題を包含している。

非圧縮性境界層の振舞は、航空流体力学の初期から研究されてきたものであり、現在では古典的な、また、純粋に学問的な問題とみなされがちであるが、圧縮性境界層の諸性質は非圧縮性境界層に現われるものと本質的には同じものが多く、この意味で非圧縮性境界層の研究は実用的立場からも有意義と考えられている。

境界層では粘性の影響が重要であり、翼理論等で用いられるポテンシャル論は通用せず、更に精密な理論や、理論を検証したり実験的に研究したりするための測定技術が必要とされるが、研究のすすめ方でも、巨視的な性質を調べるだけにとどまらず、現象を機構的にとらえてゆく点に特徴がある。このことは特に、境界層において層流が安定性を失って、乱流に遷移する現象に対して著しく現われる。

層流の安定性の問題は流体力学における重要な課題の一つであり、従来、航空学、気象学等のそれぞれの立場で取扱われてきたものである。然るに、対象とする場の規模や要求される結果の精度、更に、目的が著しく異なるために、各分野での層流安定の研究には相互の結び付きがほとんどみられなかった。しかし、同じ流体現象を扱う以上、研究の発展に伴い相互に関連のある問題が現われてくることは必然であり、ここでわれわれが航空学の立場から取扱う問題は、気象学で以前に研究された現象と類似している。

流体の中に流れの方向に軸を持つ縦渦の交番配列が発生する現象は、Terada [2, 3] が気象学の研究で最初に発見した。Terada は地表付近の熱伝達を考慮に入れた気象のモデル実験として、加熱平板上に水を流し、流線観察により流れの方向に軸を持つ縦渦の交番配列を認めた。加熱平板で加熱された流体は浮力で上昇するが、上層の温度の低い流体がいれちがいに平板上に下がってくる。この上昇と下降による回転運動が渦を形作るのであり、加熱が著しくなく対流の規模が小さい場合は、交番の配列を持つ多数の渦が発生することになり、平板に沿う一様な流れがあると、その流れの方向に押し流されながら、交番配列の縦渦が見られることになるのである。この問題についての理論的解析や実験的研究の発展は、その後気象学では行なわれていない。気象学における層流安定の最近の研究は、大型電子計算機を用いて非線型問題を解析することに集中している。たとえば、Bénard の細胞と呼ばれる静止または回転する場における流体の熱的不安定に伴う渦運動も、同問題をモデルとした線型安定理論から非線型安定理論への発展に進んでいる。

航空流体力学の立場から縦渦を最初に研究したのは Taylor [1] である。Taylor は同心回転円筒間の流れの中に遠心力により縦渦が発生し流れを不安定にすることを理論的に示し、有名な同心回転円筒の実験で縦渦の存在を確かめた。Görtler [5] は Taylor の同心回転円筒の場合の理論的手法を曲面に沿う境界層に応用し、凹面に沿う非圧縮性境界層に縦渦の交番配列が発生することを理論的に示した。縦渦の発生の原因は同心回転円筒の場合と同じく、曲った流線上の流れが遠心力により動的に不安定となるためである。Görtler の理論は後に示すように、縦渦による攪乱が境界層の平均流に比べて微量であるとして、攪乱による二次以上の影響を無視する、所謂線型理論であるが、この Görtler の研究に続いて、非圧縮性境界層内の縦渦の交番配列（以後 Görtler 渦と略称する）の発達に関する理論的研究が行なわれ、Meksyn [7], Hämmerlin [9], Di Prima [10], および Smith [11] などの解析が

報告されている。これらの結果は数量的に若干の相異はあるにしても、すべて凹面に沿う境界層には、Görtler 渦が発生する状態が容易に作られることを示している。

その後 Görtler [16] は、熱平板上の境界層にも縦渦の交番配列が発生することを理論的に示したが、この理論によって、凹面に沿う境界層における壁の曲率の影響と、熱平板に沿う境界層における浮力の影響が、縦渦の発生や発達について同等のものであることが明らかとなった。これは気象学で提出された問題に解答を与えたと同時に、凹面に沿う境界層の研究の意義を広くしたものとよい。

凹面に沿う境界層の Görtler 渦に対する安定性に、熱伝達や圧縮性がどのように影響するかという点についても、いくつかの理論的研究が行なわれている。即ち、流体の温度の影響については Di Prima および Dunn [12]、圧縮性の影響については Aihara [20]、また、圧縮性と壁温の影響については Hämmerlin [23] が調べている。

実験的に Görtler 渦の影響を最初に調べたのは Liepmann [6] である。Liepmann は熱線風速計を用いて測定を行ない、凹面に沿う境界層の遷移レイノルズ数が平板や凸面上の境界層に比べて低いことを認めた。さらに、平板上の境界層の遷移の初期に現われる Tollmien-Schlichting 波（以後 T-S 波と略称する）と呼ばれる微小振幅の進行波が、凹面の場合には観測されなかったことを報告している。次いで Gregory および Walker [8] は、Griffith 翼型表面に流跡観測用の被膜を塗り、その結果、翼の凹面部分に流れの方向に平行な縦縞が現われることを確かめている。

以上の実験結果で、Görtler 渦が凹面に沿う境界層に発生し、境界層の遷移を早めることが推察されるが、直接に Görtler 渦を観察し、理論的研究と比較できるような測定は行なわれておらず、Görtler 渦の発達と境界層遷移の機構も明らかにされていない。

したがって、われわれが凹面に沿う境界層の遷移を実験的に研究する際に、最初に行なわなければならない重要な事柄は、Görtler 渦の発生や発達が境界層の遷移にどの程度本質的な働きをしているか、若しそれが本質的でなく媒介的な働きをしているに過ぎなければ、他の境界層の遷移の機構とどのように関連して統一的解釈が可能であるかという考察である。

理論を調べて直ちにわかることは、Görtler 渦は空間に固定して配列していることである。この規則的配置が乱流の不規則な非定常性とどのように結び付いているのかを追求することが、Görtler 渦の発達と境界層の遷移の関係についての解答を与えることになる。この場合、Görtler 渦の存在に伴う周期性のために、遷移の機構もまた周期的であることが予想される。そこで、凹面に沿う境界層では流れの方向と壁に垂直な方向の二次元的変化のみを考えるだけでは不十分で、壁に沿い流れを横切る方向の周期的変化をも調べなければならず、この三次元的な性質が特徴的であることに注意しなければならない。

微小な攪乱が増幅してその影響が非線型的または三次元的になった場合の境界層の遷移機構の研究は、最近特に平板の境界層を対象として行なわれた [13, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 24, 25]。従来、平板上の境界層をはじめ、広く境界層の遷移は、二次元 T-S 波の増幅に伴い、平均流と攪乱との相互作用によって、平均流から攪乱にエネルギーが伝達されるものと考えられ、Görtler [4] ですら曲面に沿う境界層の遷移を、二次元 T-S 波の増幅で説明しようとしたことがある。事実、T-S 波が微小振幅の間は、線型理論の結果とよく一致する領域が存在することは、平板上をはじめ種々の型の境界層で実験的に認められている。しかし、

平板に沿う境界層の遷移領域から乱流の現われる過程は、特徴的な乱流斑点の発生によるものであり、この乱流斑点が局所的に発生する以上、遷移の過程が二次的ではあり得ないことは明らかである。その結果、二次元 T-S 波の増幅に伴う遷移の三次元的機構の研究が促進されたわけである。

実験的研究者にとって遷移の三次元性は、はじめは風洞からとりのぞくことの出来ない場の不均一性によるやむを得ない影響であるとみなされた。一方理論的研究者は、二次元 T-S 波が増幅するにつれて、流体の性質として必然的に攪乱は三次元的になるという観点から幾つかの研究を報告している。当然、次に行なわれたのは人為的に制御できるよく知られた三次元性について実験的に研究することであった。周期的三次元性を与えた場に二次元 T-S 波を重畳した場合、あるいは、二次元的な場に周期的な三次元性を持つ進行波を重畳した場合などについての実験的研究が平板境界層を対象として行なわれ、境界層遷移の三次元的機構についての幾多の知識が得られた。実験と理論の比較から、Klebanoff, Tidstrom, および Sargent [24] は Benney [21] と Benney および Lin [19] の理論が三次元的な遷移領域をよく記述していると結論している。

このような知識の段階において、筆者は Görtler 渦の境界層遷移への影響は、これを場の三次元性の影響とみなすことが出来るのではないかと想像する。理由としては、先に述べたように、Görtler 渦は空間的に固定されて定常的な周期的三次元性を与えるものであり、乱流現象の非定常性とは直接結び付かず、結局、進行波に対する場の三次元性として遷移に間接的な役割を果していると考えられること、また、平板と凹面は壁の曲率半径の違いを除けば、流れに対する境界条件は全く同じであり、境界層の厚さが壁の曲率半径に比べて十分小さい限り、境界層内の現象を支配する機構は平板についても凹面についても同一であることなどが予期されるからである。したがって、凹面に沿う境界層の三次元性とその状態で起る遷移の機構を調べ、それをすでに平板の境界層で知られている遷移の過程と比較することにより、凹面に沿う境界層の遷移を特徴づける性質がうかがわれるのではないかと予想される。

実験的研究の目標とするところは、次の二つである。

第一に、凹面に沿う境界層に発生する Görtler 渦の存在を確かめ、その振舞が線型理論でどの程度説明できるか、また、線型的範囲を越えるとどのようになるかを調べる。

第二に、凹面に沿う境界層に振動リボンによる進行波を重畳し、Görtler 渦にもとづく周期的三次元場の中での波の振舞と境界層の遷移の関係を調べる。

2. 記 号

- x : 曲面に沿い流れに平行な座標
- y : 曲面から垂直に流れの中に立てられた座標
- z : 曲面に沿い流れを横切る方向の座標、ただし、実験結果の図示における z の原点は模型の中心線上にある
- t : 時間
- U : x 方向の平均速度
- u : 攪乱の x 方向速度成分
- v : 攪乱の y 方向速度成分

- w : 攪乱の z 方向速度成分
 P : 平均流の静圧
 p : 攪乱による静圧変化
 r : 曲面の曲率半径, 凹面の場合を正とする
 δ : 境界層の厚さ
 δ^* : 境界層の排除厚 $\int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy$
 θ : 境界層の運動量厚 $\int_0^\infty \frac{U}{U_1} \left(1 - \frac{U}{U_1}\right) dy$
 ρ : 密度
 ν : 動粘性係数
 R_θ : 運動量厚を特性長さとした Reynolds 数 ($=U_1\theta/\nu$)
 G : Görtler パラメーター ($=R_\theta/(\theta/r)$)
 λ : 攪乱の波長
 α : 攪乱の波数 ($=2\pi/\lambda$)
 β : 攪乱の時間的増幅率
 b : 攪乱の x 方向の増幅率
 f : 振動リボンに流す交番電流の周波数
 i_r : 振動リボンに流す交番電流の強さ
 ϕ : 時間的変動量の位相
 右肩の指標 ' : 時間的変動
 右下の指標 1 : 主流に属する量
 r : 境界層が乱流の場合の量
 r : 振動リボンの位置
 f : 周波数の成分

3. 理論的考察

a. 線型安定理論の概要

著者の行なった実験的研究を説明する前に, Görtler 渦についての概念を得る目的で線型安定理論を紹介し, あわせて実験との対応を容易にしたい. 前述のように, 理論を最初に提出したのは Görtler であるから, ここではまず Görtler の理論を紹介し, その他の研究については附記することとする.

曲線座標で連続の方程式と Navier-Stokes の方程式を表わし, δ/r を微小量と考えて $0(\delta/r)$ までとることとし, かつ, x 方向の変化を y, z 方向の変化に対し無視できるものとする. (x, y, z) 方向の速度成分を $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$, 静圧を \tilde{p} とすると

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - \frac{\tilde{v}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{v} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \frac{\tilde{u}}{r} \right) + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{u}^2}{r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} \right) \quad (4)$$

δ/r が十分小さいとすれば, Navier-Stokes の方程式から境界層方程式を導く場合と同じく, 各量の大きさの比較が出来る. $\partial \tilde{u}/\partial y = 0 (\tilde{u}/\delta)$ だから, (2) の左辺第二項の括弧内の \tilde{u}/r は $\partial \tilde{u}/\partial y$ に比べて省略できる. また, $\partial^2 \tilde{u}/\partial y^2 = 0 (\delta^{-1} \cdot \partial \tilde{u}/\partial y)$ だから, (2) の右辺括弧内の $r^{-1} \cdot \partial \tilde{u}/\partial y$ は $\partial^2 \tilde{u}/\partial y^2$ に比べて省略できる. 同様の比較により, (1) の第二項, (3) と (4) の右辺括弧内の第三項はいずれも省略されて, 結局, 曲率の影響は (3) の左辺第三項を通してのみ現われることになる. 即ち,

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\tilde{u}^2}{r} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

(5)~(8) の速度成分と静圧は, 曲面に沿う平均流に属する量のほかに, Görtler 渦による攪乱流に属する量も含んでいる. 平均流は本来定常な二次元流であるはずであるが, この解析では x 方向の変化は考えないので, y 方向のみに分布を持つ定常な流れを仮定している. また, 攪乱流に属する量は, 平均流に属する量に比べて十分小さいと仮定されるので, 攪乱の二次以上の量は省略される. したがって, 平均流と攪乱流は次のように線型的に重畳されるものと考えられる.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= U(y) + u(y) \cos \alpha z e^{\beta t} \\ \tilde{v} &= v(y) \cos \alpha z e^{\beta t} \\ \tilde{w} &= w(y) \sin \alpha z e^{\beta t} \\ \tilde{p} &= P(y) + p(y) \cos \alpha z e^{\beta t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで, 攪乱のもつ物理的な性質は次の通りである. 即ち, y 方向に分布函数ないしは個有函数と呼ばれる表式で示される攪乱の強さの分布を持ち, z 方向に波数 α の周期性を持ち, 時間的に β という増幅率で変化する.

(9) を (5)~(8) に代入して攪乱の二次以上の項を省略し攪乱についての線型方程式を作ると,

$$w = -\frac{1}{\rho} \frac{dv}{dy} \quad (10)$$

$$\beta u + v \frac{dU}{dy} = \nu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} - \alpha^2 u \right) \quad (11)$$

$$\beta v + \frac{2Uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{d^2 v}{dy^2} - \alpha^2 v \right) \quad (12)$$

$$\beta w = -\frac{\alpha}{\rho} p + \nu \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \alpha^2 w \right) \quad (13)$$

$$\text{境界条件 } y=0 : u=v=w=p=0$$

$$y=\infty : u=v=w=p=0$$

(6)~(9) から w と p を消去して整理すると,

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} - (\beta + \nu \alpha^2) u = \frac{dU}{dy} v \quad (14)$$

$$\nu \frac{d^4 v}{dy^4} - (\beta + 2\nu \alpha^2) \frac{d^2 v}{dy^2} + \alpha^2 (\beta + \nu \alpha^2) v = -\frac{2\alpha^2}{r} U u \quad (15)$$

ここで, 速度および長さをそれぞれ, 主流の速度 U_1 および境界層の厚さ δ で無次元化し, なお次の無次元量を導入する.

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad U_0 = \frac{U}{U_1}, \quad \sigma = \alpha \delta, \quad \tau = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta \delta^2}{\nu}}, \quad \mu = 2 \left(\frac{U_1 \delta}{\nu} \right)^2 \frac{\delta}{r}$$

また, $\left(\frac{U_1 \delta}{\nu} \right)^{-1} u$ および v を改めて u および v と書くことにすると, (14) および (15) は

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} - \tau^2 u = \frac{dU_0}{d\eta} v \quad (16)$$

$$\frac{d^4 v}{d\eta^4} - (\sigma^2 + \tau^2) \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \sigma^2 \tau^2 v = -\sigma^2 \mu U_0 u \quad (17)$$

$$\text{境界条件 } y=0 : u=v = \frac{dv}{d\eta} = 0$$

$$\eta=\infty : u=v = \frac{dv}{d\eta} = 0$$

境界条件に $dv/d\eta$ が含まれたのは, w を消去して方程式の階数が増したために, w についての境界条件を (10) を用いて $dv/d\eta$ で書き換えたことによる. 無次元パラメーター μ は係数 2 を除き δ を θ で置き換えれば Görtler パラメーター G の二乗に等しいことがわかる. Görtler は, (16), (17) の左辺の齊次方程式と境界条件から Green 関数を求め, これをそれぞれ, A, B として, 連立の線型方程式を連立積分方程式になおした. 即ち,

$$u(\eta) = -\int_0^\infty A(\eta; \hat{\eta}) \frac{dU_0(\hat{\eta})}{d\hat{\eta}} v(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \quad (18)$$

$$v(\eta) = \sigma^2 \mu \int_0^\infty B(\eta; \hat{\eta}) U_0(\hat{\eta}) u(\hat{\eta}) d\hat{\eta} \quad (19)$$

ここで,

$$A(\eta; \hat{\eta}) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} e^{-\tau \hat{\eta}} \sinh \tau \eta & \eta \leq \hat{\eta} \\ \frac{1}{\tau} e^{-\tau \eta} \sinh \tau \hat{\eta} & \eta > \hat{\eta} \end{cases} \quad (20)$$

$$B(\eta; \hat{\eta}) = \begin{cases} \frac{1}{(\sigma + \tau)(\sigma - \tau)^2} \left[(e^{-\sigma \hat{\eta}} - e^{-\tau \hat{\eta}}) (\cosh \sigma \eta - \cosh \tau \eta) \right. \\ \left. - \frac{1}{\sigma \tau} (\tau e^{-\sigma \hat{\eta}} - \sigma e^{-\tau \hat{\eta}}) (\tau \sinh \sigma \eta - \sigma \sinh \tau \eta) \right] & \eta \leq \hat{\eta} \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{1}{(\sigma+\tau)(\sigma-\tau)^2} \left[(e^{-\sigma\eta} - e^{-\tau\eta})(\cosh \sigma\hat{\eta} - \cosh \tau\hat{\eta}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sigma\tau} (\tau e^{-\sigma\eta} - \sigma e^{-\tau\eta})(\tau \sinh \sigma\hat{\eta} - \sigma \sinh \tau\hat{\eta}) \right] \quad \eta > \hat{\eta} \end{aligned} \right] \quad (21)$$

(18), (19) の積分は, 積分領域を境界層内にとり数層で近似する区分求積法で行なわれ, 各区分点における $u(\eta)$, $v(\eta)$ の係数についての永年方程式が導かれて, 個有値問題として σ , τ, μ の間の関係が調べられた. 同時に, 個有函数として分布函数が計算された. その結果, 次のことが知られた.

1. 曲率と Reynolds 数の影響は $\mu = 2(U_1\delta/\nu)^2(\delta/r)$ の形で入ってくるが, 実際に安定曲線上で Görtler 渦の発達を議論する場合には $\mu/2$ の平方根である $(U_1\delta/\nu)\sqrt{(\delta/r)}$ という量が対象となるので, r が正, 即ち, 凹面上のみに Görtler 渦による攪乱が存在できることになる.
2. この攪乱は σ のある範囲で, $(U_1\delta/r)\sqrt{(\delta/r)}$ がある臨界値を越えると発達する.
3. 種々の $U(y)$ について計算しても, 運動量厚 θ を特性長さとして整理すれば, 安定曲線の形は $U(y)$ にほとんどよらない.

以上から, 安定曲線としては, G と $\alpha\theta$ および増幅率について整理されたものが一般的であることがわかり, その中立安定曲線を第 16 図に示してある.

その後 Görtler と同じ攪乱を仮定して計算したのは Meksyn, Hämmerlin, および Di Prima などであるが, いずれも (16) と (17) およびそれらの境界条件を基礎としている. Meksyn は攪乱を級数に展開して計算したが, Görtler の結果に比べて G の臨界値が一桁大きく, その場合の $\alpha\theta$ も数倍になっている. Di Prima は Galerkin の方法は用いて中立安定曲線を計算し, その結果は Görtler の結果とよく一致している. Hämmerlin は, Görtler の計算が攪乱の波数の低い場合には精度が悪いことを指摘し, 波数の低い状態での修正結果を示した.

これに対して Smith は, 境界層内に発達する攪乱は時間的に発達するのではなく, x 方向に空間的に増幅するという観点から出発し, (9) の代りに次のように流れの場を仮定した.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u} &= U + u(y) \cos \alpha x e^{\int b(x) dx} \\ \tilde{v} &= v(y) \cos \alpha x e^{\int b(x) dx} \\ \tilde{w} &= w(y) \sin \alpha x e^{\int b(x) dx} \\ \tilde{p} &= P + p(y) \cos \alpha x e^{\int b(x) dx} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

この場合の基礎方程式は定常で x 方向の変化を考慮したものとなり, (16), (17) に比べて複雑であるが, Smith は Galerkin の方法および電子計算機を用いた繰返し計算により数値的結果を求めた.

われわれが実験的に境界層の遷移を調べる場合に測定される攪乱は, 時間的に増幅する型ではなく, x 方向に増幅するものである. したがって, 実験結果は Smith の理論と比較するのが妥当である.

(9) と (22) を問わず, 中立安定曲線の形は一致すべきものであり, 第 16 図には Görtler の結果のほかに, Hämmerlin の中立安定曲線, ならびに無次元化された空間的増幅率 $b\theta R_\theta$ をパラメーターとした Smith の安定曲線を示してある.

以上が線型理論についての簡単な紹介である。物理的な対応から、Smith の理論と実験値の比較を行なうことにするが、Görtler の計算の利点の一つは、計算が容易に行なえることであり、この論文でも、測定された分布函数を理論値と比較する場合には、Smith の結果がないために、Görtler の計算で得られる理論値を用いている。

b. 変分法による攪乱の考察

線型安定理論によって、個有値の関係で Görtler 渦についての知識を得られるが、物理的概念を与える意味で十分であるとはいいがたい。さらに直観的概念、たとえばエネルギーの交換というような形で、場の構成を理解できれば理解が一層容易になるであろう。そこで、筆者は変分法を用いて、場を支配する根本原理を調べてみることにした。

既に Görtler によって明かにされたように、平均風速の分布が Görtler 渦の発達におよぼす影響は、たとえば T-S 波の発達におけるほど顕著ではないので、ここでは計算の簡単さのために、平均風速分布を直線的として

$$U_0(\eta) = \eta \quad (23)$$

とおく。また、同じく計算上の便宜さから、Görtler によって導かれた (16) と (17) およびそれらの境界条件を用いて (23) を代入すると、

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} - \tau^2 u = v \quad (24)$$

$$\frac{d^4 v}{d\eta^4} - (\sigma^2 + \tau^2) \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \sigma^2 \tau^2 v = -\sigma^2 \mu \eta u \quad (25)$$

$$\text{境界条件 } \eta = 0 : u = v = \frac{dv}{d\eta} = 0$$

$$\eta = \infty : u = v = \frac{dv}{d\eta} = 0$$

(24) を (25) に代入して整理すると、

$$\frac{d^6 u}{d\eta^6} - (2\tau^2 + \sigma^2) \frac{d^4 u}{d\eta^4} + \tau^2(\tau^2 + 2\sigma^2) \frac{d^2 u}{d\eta^2} - \sigma^2 \tau^4 u + \sigma^2 \mu \eta u = 0 \quad (26)$$

$$\text{境界条件 } \eta = 0 : u = \frac{du}{d\eta} = \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0$$

$$\eta = \infty : u = \frac{du}{d\eta} = \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0$$

(26) は六階の線型常微分方程式であるが、この方程式は下記の函数 L を所謂 Euler の方程式 (27) に代入することによって導かれることがわかる。

$$\frac{d^3}{d\eta^3} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d^3 u}{d\eta^3} \right)} \right) - \frac{d^2}{d\eta^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{d^2 u}{d\eta^2} \right)} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{du}{d\eta} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (27)$$

ここで

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 u}{d\eta^3} \right)^2 + \frac{1}{2} (2\tau^2 + \sigma^2) \left(\frac{d^2 u}{d\eta^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \tau^2 (\tau^2 + 2\sigma^2) \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \tau^4 u^2 - \frac{1}{2} \sigma^2 \mu \eta u^2 \quad (28)$$

ところで、(27) を通して (26) を導くことは、積分

$$I = \int_0^{\infty} L d\eta \quad (29)$$

に極値を与えることと等価であり、したがって (26) を線型理論で扱うことは、(29) が極値をとるための条件を調べることと同じ内容を持つ。ここで、 L を次のように変形し

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d^3 u}{d\eta^3} \right)^2 - 2\tau^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right) \left(\frac{d^3 u}{d\eta^3} \right) + \sigma^2 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 - 2\sigma^2 \tau^2 u \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \tau^4 \left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 + \sigma^2 \tau^4 u^2 \right\} \\ + \frac{1}{2} \left\{ 2\tau^2 \frac{d}{d\eta} \left(\frac{du}{d\eta} \frac{d^2 u}{d\eta^2} \right) + 2\sigma^2 \tau^2 \frac{d}{d\eta} \left(u \frac{du}{d\eta} \right) - \sigma^2 \mu \eta u^2 \right\} \quad (30)$$

これを (29) に代入すると、第二の { } 内の第一および第二項は境界条件で 0 となる。さらに (10) と (24) から、第一の { } が v と w で表わされることがわかり、結局、積分は次のようになる。

$$I = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{\infty} (v^2 + w^2 - \mu U_0 u^2) d\eta \quad (31)$$

ただし、 U_0 は (23) で与えられている。この結果から、凹面に沿う境界層内の縦渦の交番配列の発達は、流れに垂直な y, z 面内での渦動エネルギーと、遠心力により平均流から攪乱の x 方向の速度成分に流入するエネルギーとの差に極値を与えるような条件で行なわれていることがわかる。この極値が極大値であるか極小値であるかは、この計算からは判別できないが、以下のように物理的に考察することは出来る。即ち、(9)~(13) の線型理論の基礎の表式から明らかのように、平均流は x 方向の成分のみを持ち、 x 方向に状態が変化しない以上、平均流と攪乱の干渉は (12) の左辺第二項の遠心力による U と u との間で行なわれるのみである。一方、 y, z 方向の攪乱成分は、 x 方向と同じ増幅率を持っているのであるから、Görtler 渦による攪乱が発達するためには、 u から v, w へのエネルギー分配がすみやかに行なわれることが不可欠の条件となるわけである。したがって、エネルギーがある速度成分のみに集中することがない以上、変分原理の極値は極小値であると解釈するのが妥当であろう。くりかえしてのべると、縦渦が発達するためには、まず平均流から攪乱の u にエネルギーが流入し、次に u から v と w にエネルギーが伝達されて、(31) を極小にするように場が形成されることになるのである。(31) の被積分関数は直ちに気付くように、解析力学における Lagrange 関数と同じ形であり、 y, z 面内の渦運動の運動エネルギーに対し、平均流と攪乱の干渉がポテンシャルエネルギーに対応していることが明らかである。

c. 乱流境界層に対する線型理論の応用

Tani [26] は線型理論の結果を凹面に沿う乱流境界層に応用して、この場合にも縦渦の交番配列が発生する可能性があることを示した。以下その論旨を紹介する。

Görtler 渦は時間的に変動する攪乱ではないから、境界層内の乱れには直接影響されない。したがって、境界層が乱流である場合にも縦渦の交番配列が発生するものであれば、層流の場合と区別される量は平均風速分布 $U(y)$ と、動粘性係数 ν による変化だけである。Görtler の理論では、運動量厚 θ を特性長さとして整理すれば、 $U(y)$ にほとんど無関係に縦渦の振舞が論じられるのであるから、 $U(y)$ についての考察は必要でないことになり、 ν だけについて考えればよい。そこで、 ν を乱流動粘性係数 ν_T で置き換えれば、境界層が乱流であることの影響が含まれる。したがって、平均風速に比べて攪乱が十分に小さく線型理論が成立

する範囲ならば、層流境界層を対象として組立てられた線型理論の結果を、そのまま乱流境界層に応用することが出来る。Clauser によれば、乱流境界層では壁の極く近傍を除いて、一様な乱流動粘性が支配しており、その値は Reynolds 数、圧力勾配、および壁の表面粘性に関係なく、 $\nu_T = 0.018 U_1 \delta_T^*$ で表わされる。平均風速分布が 1/7 乗法則に従うとすると $\delta_T^* = 1.3 \theta_T$ となり、 $\nu_T = 0.023 U_1 \theta_T$ となる。この ν_T を用いた Görtler パラメーターを G_T と書くことにすると

$$G_T = \frac{U_1 \theta_T}{\nu_T} \sqrt{\frac{\theta_T}{r}} = 43 \sqrt{\frac{\theta_T}{r}}$$

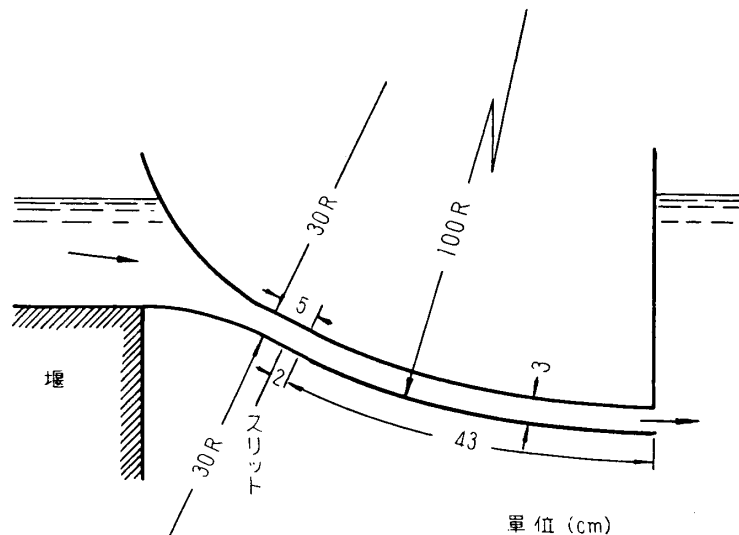
となる。

4. 実験装置および方法

既に理論の項で述べたことから明らかなように、Görtler 渦の発達は Görtler パラメーター $G = (U_1 \theta / \nu) \sqrt{(\theta / r)}$ で支配されている。そこで G についての主流速度 U_1 、前縁からの距離 x 、壁の曲率半径 r の影響を調べてみると、平均風速を Blasius 分布と仮定して $\theta \sim x^{1/2} U_1^{-1/2}$ とするとき、 $G \sim x^{3/4} U_1^{1/4} r^{1/2}$ であることがわかる。この関係から明らかなように、 r が一定の場合に G を変化させるには、 x を変化させるのが有効である。逆にいえば、主流の風速が多少変化しても、Görtler 渦の発生する位置にはほとんど影響がないことになる。そこで、仮りに $U_1 = 10 \text{ m/s}$ 、 $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$ として、Görtler 渦が発生するのに必要な G の臨界値を Smith の結果にしたがって 0.32 とすると、 $r = 1, 3, 5, 10 \text{ m}$ に対しそれぞれ $x = 0.6, 1.2, 1.7, 2.7 \text{ cm}$ となり、凹面板の前縁付近で既に Görtler 渦が発生する条件が作られていることがわかる。したがって、風洞に凹面板を設置し測定を行なう常識的な位置、即ち x が 10 cm 以上では、Görtler 渦はある程度発達して、臨界条件を実験的に調べるのが不可能に近いことが認められる。つまりわれわれは、ある程度発達した Görtler 渦の存在する状態、即ち安定曲線の不安定領域側の条件で凹面に沿う境界層の実験を行なうことになるわけである。

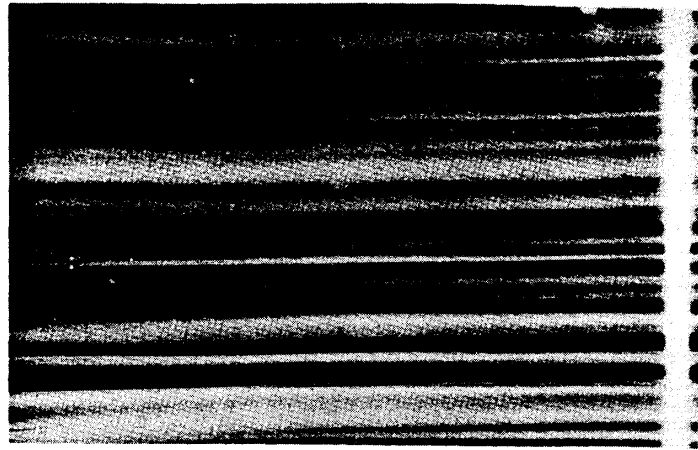
a. 水槽実験による観察

Görtler の渦は理論的に予言され、また Gregory & Walker の実験などで認められているが、実際にその存在を筆者の目で確認することは、以後の実験にとって役立つことであるので、

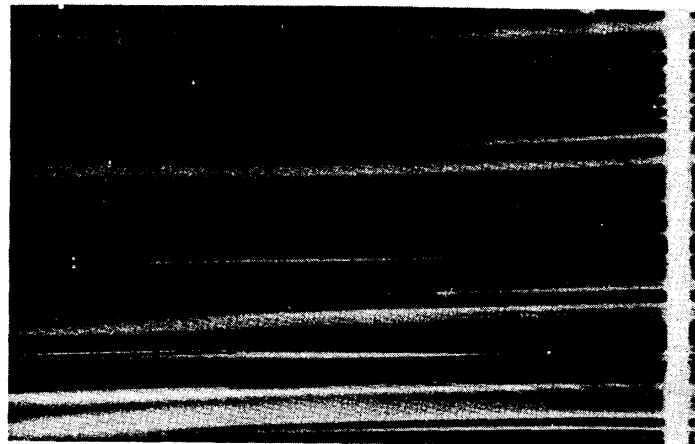


第1図 水槽実験に用いられた流路の横断面図
凹面の曲率半径は 1 m,

風洞での実験に先立って、水槽による簡単な予備実験を行なうこととした。第1図はそのために用いられた流路の横断面図である。流路の断面は高さ3cm、幅50cm、すべて厚さ3mmの透明アクリル樹脂板で作られている。流路の下面は曲率半径1mの凹面、上面はこれに平行な壁となり、上面を通して凹面上の流れを観察することが出来る。凹面の流路の反対側は黒色ペイントで塗られており、観察および写真撮影に便利になっている。色素は図中の0.5mmのスリットから出されたが、白色牛乳が用いられた。牛乳は比重が1.036であり、比重1の水の運動によく追従し、かつ黒色の壁とのコントラストがよいこと選ばれた。結果は第2図のように明瞭な縦縞を形成し、境界層内に x 方向に周期性があることが認められる。この縦縞の持つ意味を明らかにするために、よく知られている渦との関連を調べる目的で、孤立粗さの周りの色素の模様を調べたところ、色素は一对の渦によって吹き寄せられる部分に集まることがわかった。つまり(22)の $\tilde{w} \sim \sin \alpha z$ で、 $\tilde{w}=0$ の z では \tilde{w} の符号が逆になるが、そのうち両側から $\tilde{w}=0$ の位置に色素を吹き寄せてくる部分に色素がたまることになり、結局、縦縞の間隔は Görtler 渦の波長を示していることがわかる。また、Smith の



(a)



(b)



(c)

第2図 水槽実験による凹面上の流れの観察
流れの方向は左から右。

- (a) $U_1=10$ cm/s. 層流
- (b) $U_1=26$ cm/s. 遷移
- (c) $U_1=45$ cm/s. 乱流

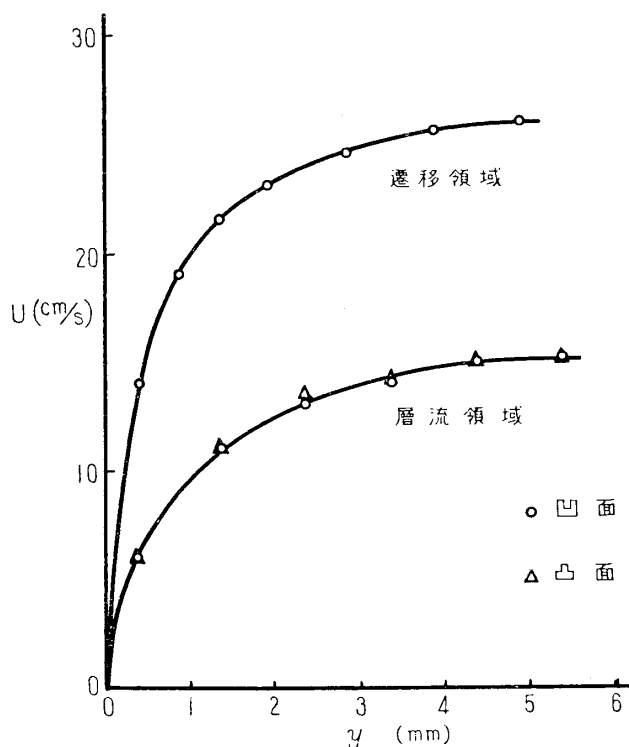
計算結果を \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} について調べてみると, x 方向の周期性で \tilde{u} が最大となる位置では, \tilde{v} は壁に向かって最大の大きさとなり, \tilde{w} は 0 であるが, この位置を境として方向が逆となる. \tilde{u} が最小となる x の位置では, \tilde{v} は境界層の端に向かって最大となり, \tilde{w} は 0 であるが, この位置に吹き寄せてくる状態となっている. したがって, 壁の上の色素は x 方向の流速の最も遅い x の位置に集まるともいえる. 水槽実験では主流速度を 10 cm/s (層流) から 45 cm/s (乱流) まで変えて観察したが, 境界層が遷移するまでは色素の縦縞の幅は約 1 cm で一定していた. 次にピトー管で境界層の速度分布を測定して, 運動量厚を特性長さとして整理した $\alpha\theta$ と G の関係を調べると, 安定曲線上で不安定領域に入ることがわかった.

速度分布 (第 3 図) は Blasius とは異なるが, 念のために上面の凸面部の境界層の速度分布を測定したところ, 両者にはほとんど違いが認められず, 結局流路が有限長さで終わっているための影響で, 加速流型の速度分布となっているのではないかと考えられた. 縦縞は流速が遅い場合は一様かつ定常であるが, 流速が早くなると x 方向に揺れ動くようになり, 境界層の遷移は, 縦縞をなす色素が局所的かつ間欠的に, 激しく揺れたり散ったりすることで認められた. 縦縞の x 方向の動揺は発達に伴う Görtler 渦の本質的な性質であり

得るかもしれないが, 厚さ 0.5 mm, 翼弦 7 mm, 翼長 8 mm の真鍮の対称円弧翼型を凹面上に垂直に流れに対し迎角 0 で立てることにより, 近傍の縦縞を固定することが出来た. このような予備実験の結果, Görtler 渦が凹面に沿う境界層内に発生し, 線型安定理論の結果とも矛盾がないことがわかったので, 風洞を用いて更に定量的な測定を行なうことになった.

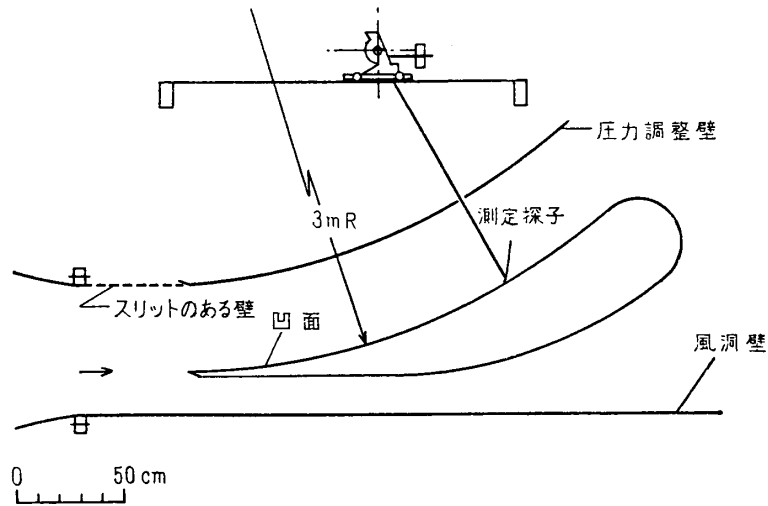
b. 風洞および曲面板

風洞による実験は, 曲率半径 3, 5, 10 cm の三種類の凹面板について行なわれた. 第 4 図はそれぞれの場合の測定部における模型の状態を示している. 曲率半径 $r=5$ m の模型は, 1 m \times 1 m の Göttingen 型風洞に凹面を下にして設置された. 測定部外側は鉄製アングルで骨組され, 上面と側面は厚さ 5 mm のハードボードで囲まれ, この内部にある模型の凹面にはほぼ平行に, 凹面上の圧力分布を調整する圧力調整壁が設けられた. 圧力調整壁は数枚の薄いステンレス鋼板およびアクリル樹脂板からなり, 測定部両側面内のレールにより主流の

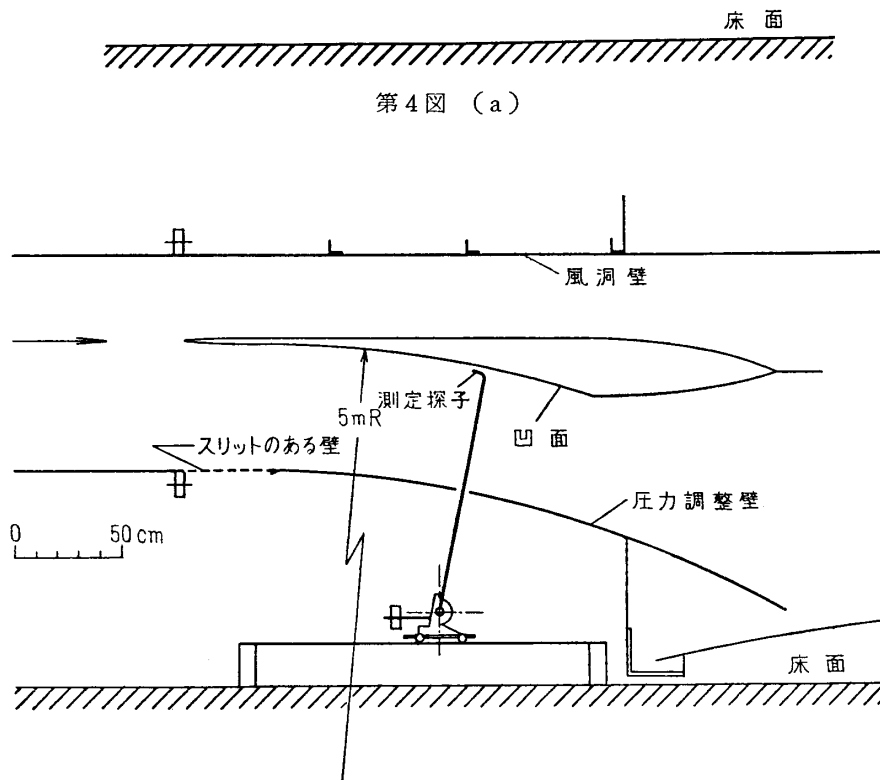


第 3 図 水槽実験における境界層の平均速度分布

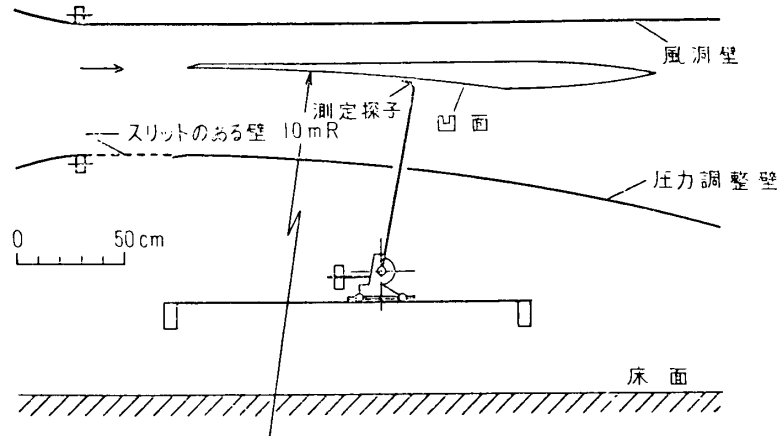
方向に移動出来る。測定探子の支柱が流れを横切って移動できるように、圧力調整壁にはスリットが切られている。圧力調整壁と凹面との間隔は約 60 cm であり、模型は測定部脊面が上流からの流れに平行であるように設置されている。模型の凹面部は、木型に厚さ 3 mm のアルミ板を張って正確に整形されている。他の面は厚さ 5 mm のハードボードで作られ、



第4図 (a)



第4図 (b)



第4図 (c)

第4図 凹面模型の設置の状態

- (a) 曲率半径 3 m の場合
- (b) 曲率半径 5 m の場合
- (c) 曲率半径 10 m の場合

下流側は流線型に整形されている。模型の全長は 260 cm で、このうち凹面部の長さは 150 cm であり、幅は 99 cm である。なお模型には上流側に、長さ 40 cm、厚さ 2 cm の平板が取付けられている。凹面部にはまた合計 12 個の静圧孔が開けられていて、壁圧分布が調べられるようになってきている。壁圧と測定部上流の静圧の差を動圧で割った圧力係数の値は、測定範囲ではほぼ一様に -0.025 になっている。凹面部の前方に平板が取付けられているが平面と凹面との接合部を x 軸の原点とし、下流方向を x の正方向としている。

曲率半径 $r=3$ m, 10 m の模型は、いずれも断面が 60 cm×60 cm の吹出型の低乱風洞に設置された。 $r=5$ m の測定に用いられた Göttingen 型風洞の乱れが主流の 0.15% であるのに対し、この低乱風洞では 0.05% であり、境界層遷移の実験に適切な考慮が払われていること、前方に平板を取付けず前縁から一定曲率であることなどから、凹面境界層の遷移を研究する上に輪郭が明瞭であるといえよう。測定部の形式、模型の工作等は、 $r=5$ m の場合と同様であるから省略するが、模型の寸法の概略は、 $r=3$ m では、全長 230 cm で、このうち凹面部は 200 cm、幅は 59 cm、最大厚さ 40 cm である。一方、 $r=10$ m では、全長 220 cm で、このうち凹面部は 150 cm、幅は 59 cm、最大厚さ 13 cm である。特に $r=3$ m の場合に凹面部が上になるように設置されたのは、測定探子の移動の容易さのためである。

c. 微動装置

第5図は使用された微動装置の写真である。この実験では測定探子を x, y, z 三方向に移動する必要があるが、測定面が彎曲しているために x を変えたときは面の法線方向に移動できるように探子の支柱の角度の調整を行なう必要がある。 y, x 方向の移動は、レール上での x 位置をクランプしてから、圧力調整壁のスリットを通して気流外から操作される。距離はダイヤルゲージで読まれたが、 y 軸の読みの修正は探子を充分面に近づけた後、側方から反射鏡を用いた写真撮影を行なってなされた。ダイヤルゲージの読みの精度は 0.01 mm である。

d. 進行波発生装置

進行波を発生させるための振動リボンは、 $r=3\text{ m}$ と 5 m の模型に取付けられた。リボンは厚さ 0.02 mm 、幅 2 mm の燐青銅であり、 1.5 ないし 1.8 kg の張力が加えられている。 $r=5\text{ m}$ の場合には、 $x=20\text{ cm}$ 、 $z=\pm 20\text{ cm}$ に高さ 1.2 mm ベークライトのスペーサーを置き、スペーサーと側面のハードボードの間には、リボンが凹面に接触しないように雲母の細長い箔が置かれている。リボンはスペーサーに乗り、両端はハードボードを通して引出されているが、模型の脊面の $x=20\text{ cm}$ 、 $z=\pm 15\text{ cm}$ には二個の永久磁石が置かれて、リボンに磁力をおよぼ

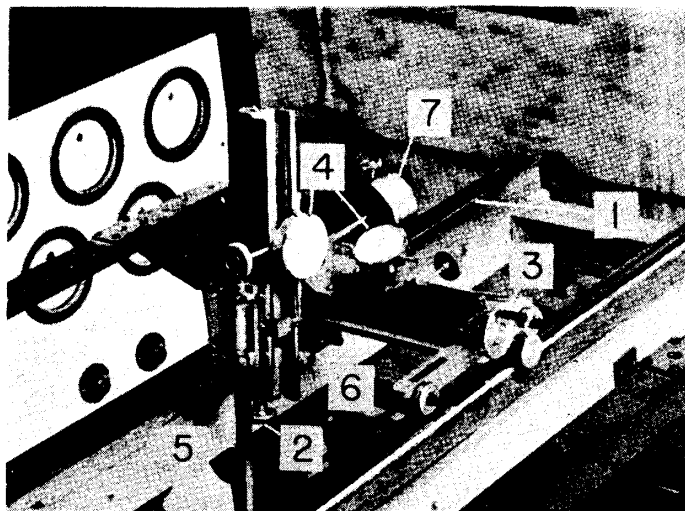
している。 $r=3\text{ m}$ の模型でも形式は同様であるが、リボンの位置は $x=50\text{ cm}$ 、 $y=0.8\text{ mm}$ で、模型中央部に 30 cm にわたって張られ、永久磁石の位置は凹面部の裏側の $x=50\text{ cm}$ 、 $z=\pm 12\text{ cm}$ となっている。振動リボンに流す交番電流の周波数は 60 サイクル、電流の強さは最大 3 アンペアまでであったが、電流の出力波形はこの範囲では正弦形であった。

e. 測定方法

凹面上の静圧分布の測定は、測定部上流の静圧管を Göttingen 型マノメーターの一方のコックにつないで基準とし、凹面壁の静圧孔から他方のコックに順次配管して、基準静圧との差を調べることにより行なわれた。

平均風速の測定には、内径 0.1 mm 、肉厚 0.15 mm のピトー管と傾斜マノメーター、ならびに熱線風速計、また、変動風速の測定にはもっぱら熱線風速計が用いられた。熱線風速計は定電流型であり、熱線には 10% ロジウム-白金線が用いられ、線の直径は 5 ミクロン、長さは約 1.5 mm である。

変動量中 60 サイクルの成分は帯域フィルターを通して測定された。変動の強さは二乗出力計で測定された。同時に二現象オシロスコープで、振動リボンへの交番電流の入力波形と、熱線風速計で測定される変動波形を観察した。両波形の比較観察により、変動波形が正弦形であるかどうか、および、振幅がどうかを調べ、更に、位相の定量測定を行なった。



第5図 微動装置

1. x 方向に移動するためのレール
2. y 方向に微動するためのハンドル
3. z 方向に微動するためのハンドル
4. ダイアルゲージ
5. 測定端子の支持柱
6. 支持柱の傾斜の調整用ネジ
7. つり合いのための錘

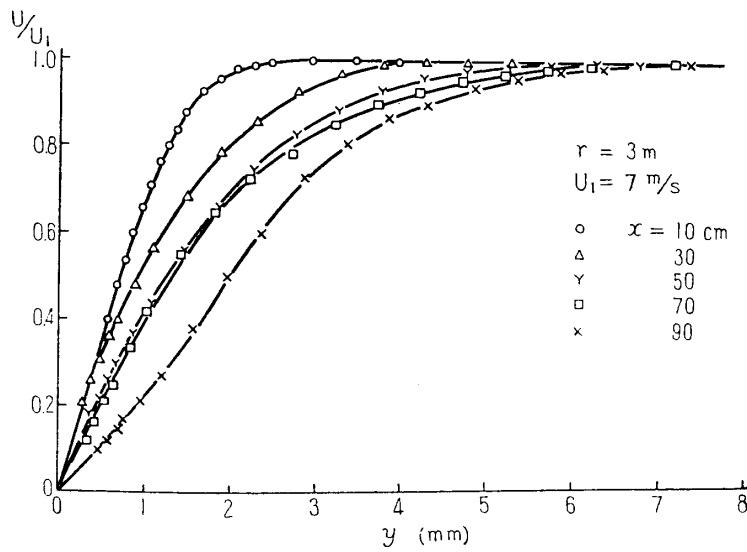
5. 実験結果と考察

先に述べたように、曲率半径 $r=3\text{ m}$ 、 5 m 、および 10 m の凹面について実験が行なわれ

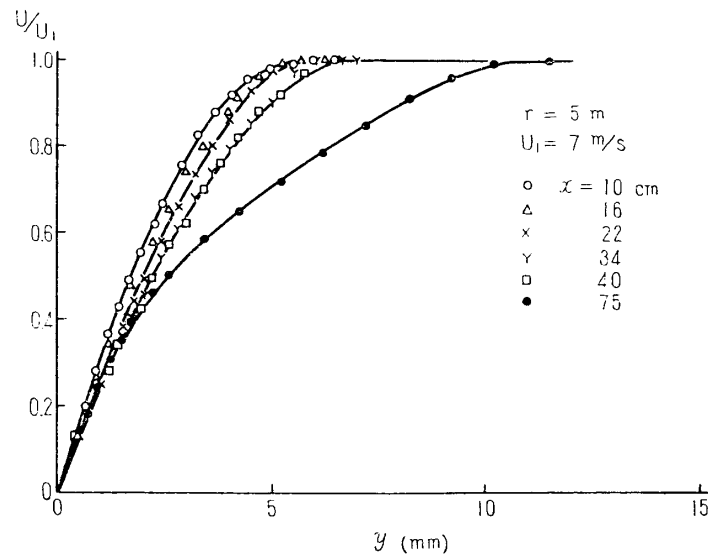
たが、このうちわれわれの所期の目的、即ち、(1) Görtler 渦の振舞を調べること、(2) 境界層の遷移の三次元的性質を調べること、の両方にわたって測定されたのは $r=3\text{ m}$ と 5 m である。しかし、 $r=5\text{ m}$ の場合は、先に記したように風洞の乱れが多く、また、測定凹面の前方に平板が付いていて、純粹に凹面に沿う境界層の遷移がとらえられていない恐れも考えられるので、この論文では $r=3\text{ m}$ の場合を中心に説明し、 $r=5\text{ m}$ および 10 m での測定結果はこれと比較しながら付言してゆきたい。 $r=3\text{ m}$ は使用した模型の中で曲率半径が最も小さいので、凹面に沿う境界層の性質を最も顕著に示している。

a. 層流および遷移領域における Görtler 渦の発達

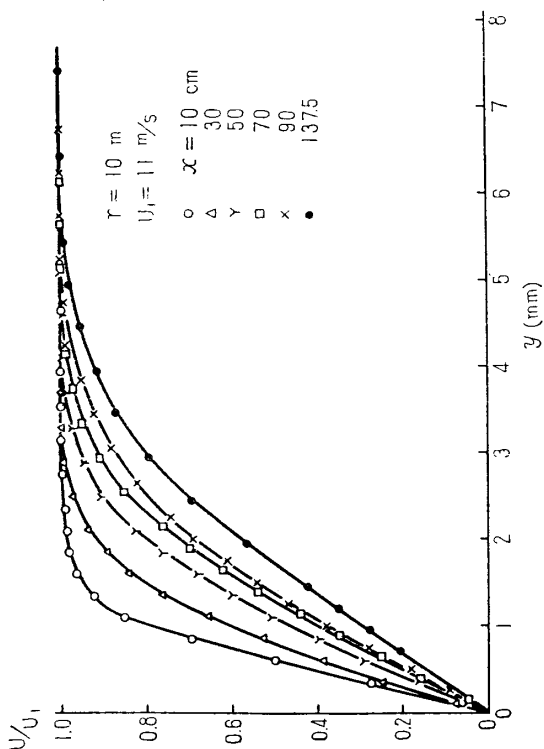
$r=3\text{ m}$ の場合に、主流の速度 $U_1=7\text{ m/s}$ として、平均風速分布 $U(y)$ の下流方向への変化を調べると、 $x=30\text{ cm}$ まではほぼ Blasius 分布で、以後は次第に遷移型となることがわかる(第6図)。同じく $U_1=7\text{ m/s}$ で、 $r=5\text{ m}$ の場合の $U(y)$ は第7図に示したが、こ



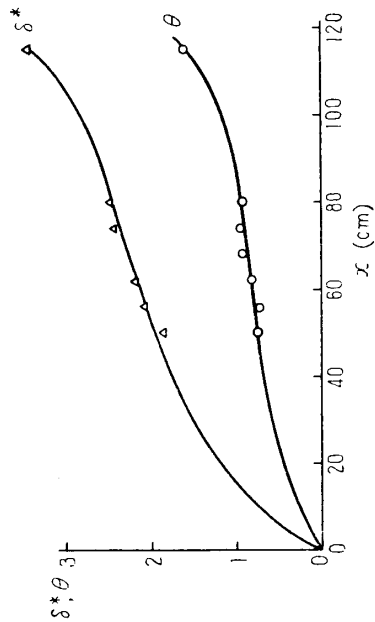
第6図 境界層の平均風速分布. 曲率半径 3m, 主流の速度 7m/s の場合



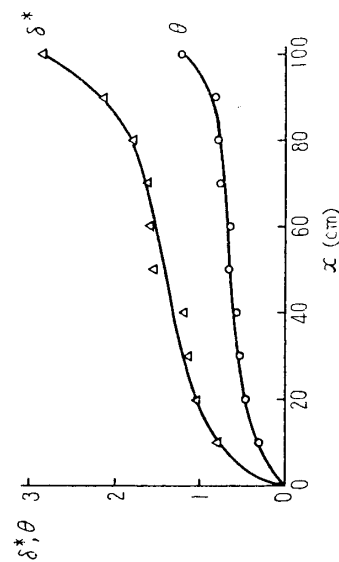
第7図 境界層の平均風速分布. 曲率半径 5m, 主流の速度 7m/s の場合



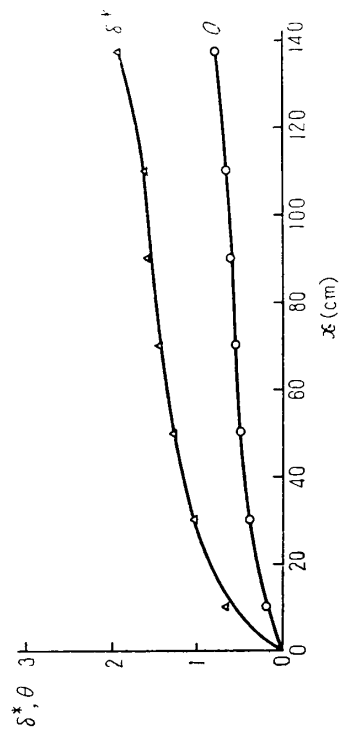
第8図 境界層の平均風速分布. 曲率半径 10 m, 主流の速度 11 m/s の場合.



第10図 運動量厚, 排除厚の流れの方向の変化. 曲率半径 5 m, 主流の速度 7 m/s の場合.



第9図 運動量厚, 排除厚の流れの方向の変化. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s の場合.



第11図 運動量厚, 排除厚の流れの方向の変化. 曲率半径 10 m, 主流の速度 11 m/s の場合.

の場合に境界層の厚さが大きいのは前方にある平板のためである。 $U_1=11$ m/s としたときの $r=10$ m の $U(y)$ は、主流速度が早いにもかかわらず、比較的下流まで Blasius 分布を保っていることがわかる (第 8 図)。

これらのデータを整理して、運動量厚 θ と排除厚 δ^* の x 方向の変化を調べると第 9~11 図のようになる。この結果から、われわれは θ と δ^* の発達が著しく変化する位置で、境界層が遷移したことを知ることが出来る。即ち $r=3$ m では、 $x=90$ cm 以後の θ の増加が著しいが、 $x=90$ cm において $R_\theta=415$ である。一方 $r=5$ m でも、 $x=90$ cm が遷移点とみなされるが、ここでの R_θ は 467 である。しかるに、 $r=5$ m の曲面板を入れた風洞での平板境界層の遷移が $R_\theta=1065$ で起ることがわかっているので、凹面に沿う境界層の遷移が平板上の境界層の遷移に比べて早いことが認められる。 $r=10$ m の場合には $U_1=11$ m/s としても、風速分布は下流まで Blasius 分布に近く、 θ の x 方向の変化からも、測定範囲で境界層が遷移していないことがわかる。この場合、 $x=137.5$ cm での R_θ は 587 である。

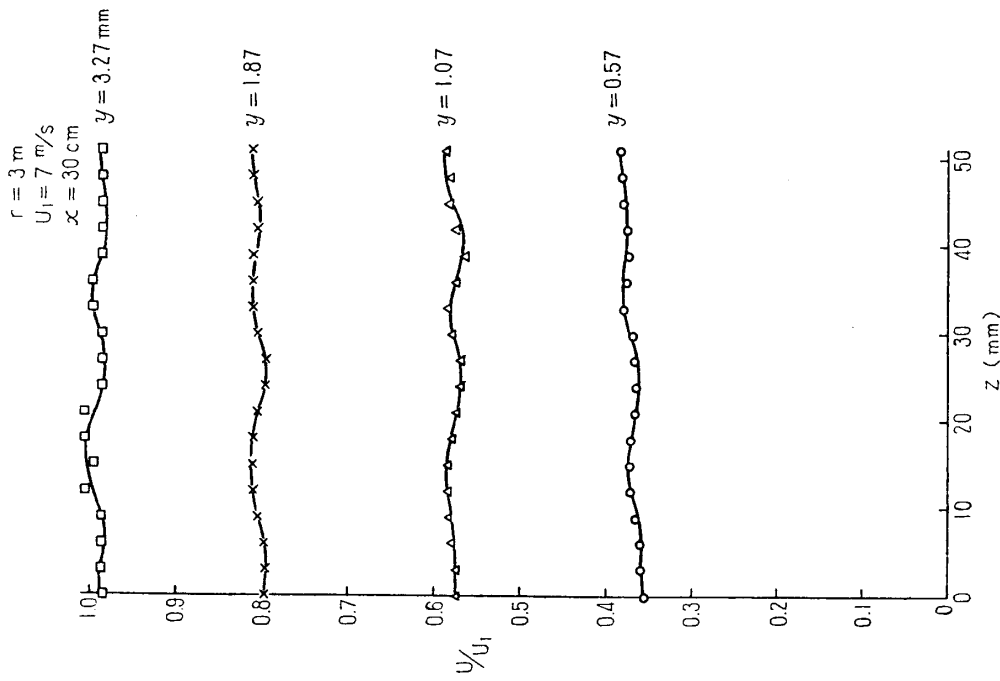
以上の結果から、凹面に沿う境界層では遷移 Reynolds 数は曲率半径が小さいほど低下していることがわかる。そこで、遷移を R_θ ではなく、これに曲率半径が含まれる量で表わすのが妥当であろうと考えられ、このために Görtler パラメーター G を計算してみると、 $r=3$ m と 5 m の場合に、遷移はそれぞれ $G=6.78$ と 6.81 で起っていることがわかる。 $r=10$ m, $U_1=11$ m/s の場合の G の最大が 5.25 であり、上の数値に達していない。模型の形状や風洞の違いにもかかわらず、境界層の遷移がこのように G の略一定の値で起っていることは、凹面に沿う境界層の遷移が曲率の影響に支配されていることを示している。しかし、もし境界層の遷移と壁の曲率が直接に結びつくとすれば、それはたとえば Görtler [4] の計算でわかるように、平均風速分布が曲率の影響で変化することにより T-S 波の増幅が変化するためであるが、 δ/r が微量である限り顕著な影響はあり得ない。したがって、われわれの実験で認められた壁の曲率の顕著な影響は、Görtler 渦の発達に伴う三次元性が原因であると考えられる。ひるがえって、平板上の境界層の遷移が三次元性に支配されていることに注意すると、 G は単に凹面に沿う境界層の遷移を示す一つのパラメーターに過ぎず、遷移にとって本質的な要素はむしろ三次元性にあると考えられる。

われわれの実験では、Görtler 渦による z 方向の周期性は、 x 方向の速度成分の周期性を測定することによって定められる。(22) で、 x 方向の速度成分は、

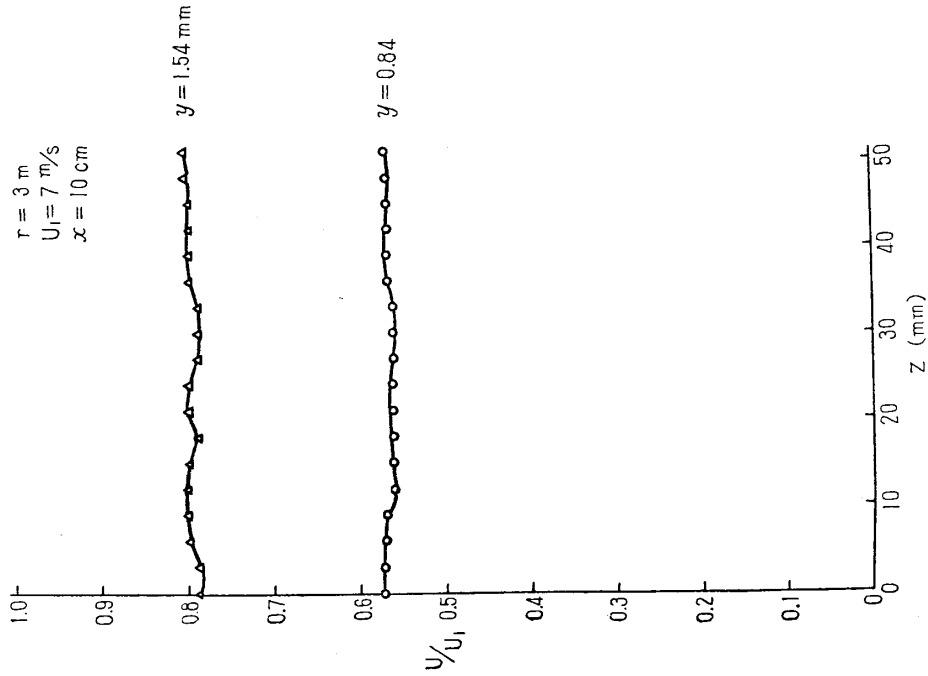
$$\tilde{u}=U+u(y) \cos \alpha z e^{\int b(x) dx}$$

と記述されるから、まず x の値を適当に選び、それぞれ一定の y で探子を z 方向に移動しながら測定すれば、 y 方向の速度分布の z 方向の周期性がわかり、いろいろの x でこの測定を繰返せば、 x 方向の増幅率 $b(x)$ も求められる。

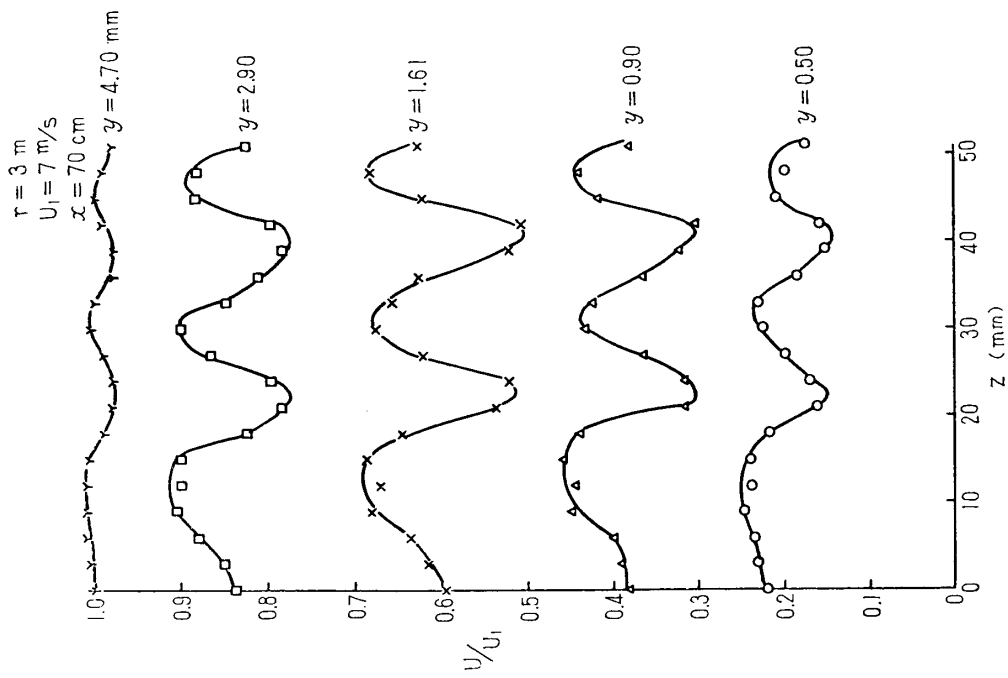
$r=3$ m の場合には、 $x=10, 20, \dots, 100$ cm につき、 U/U_1 がほぼ 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 の y で、 z 方向に 3 mm 間隔で 54 mm の範囲にわたり速度の測定を行なった (第 12 図)。 z 方向の周期性は、既に $x=20$ cm で認められるが、 $x=30$ cm では明瞭となり、下流に行くほど振幅が増大してゆくことがわかる。 z 方向の波長は 18 mm で、下流になっても変わらず、一様な波長の縦渦の交番配列が上流から下流にわたり整列していることになり、この模様は水槽で得られた結果と一致している。周期性は、 $x=50$ cm まではほぼ正弦型であ



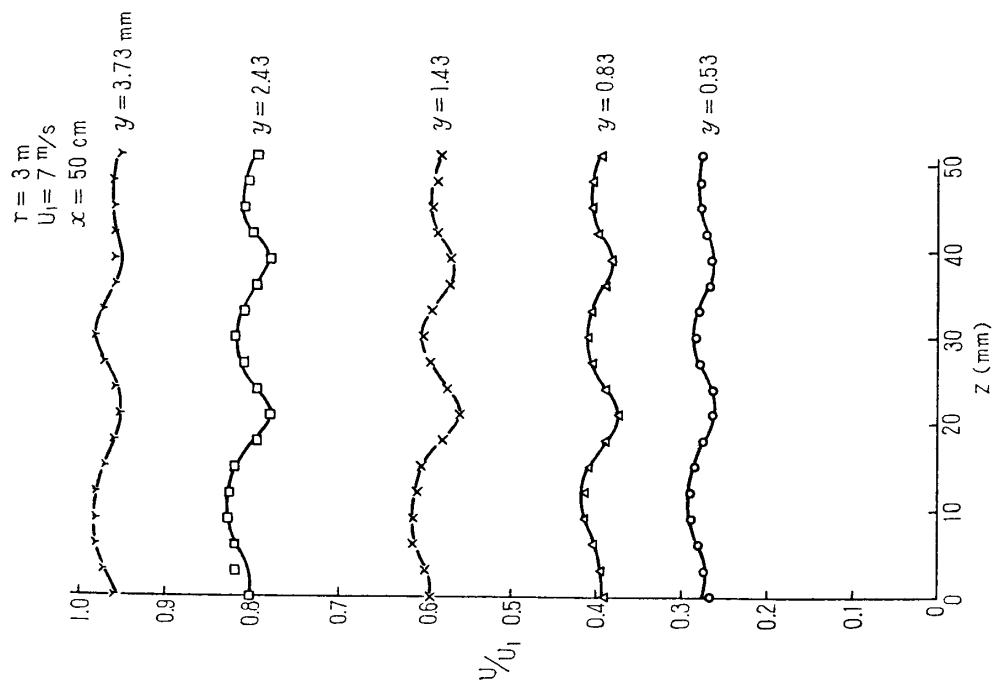
第12图 (b)



第12图 (a)

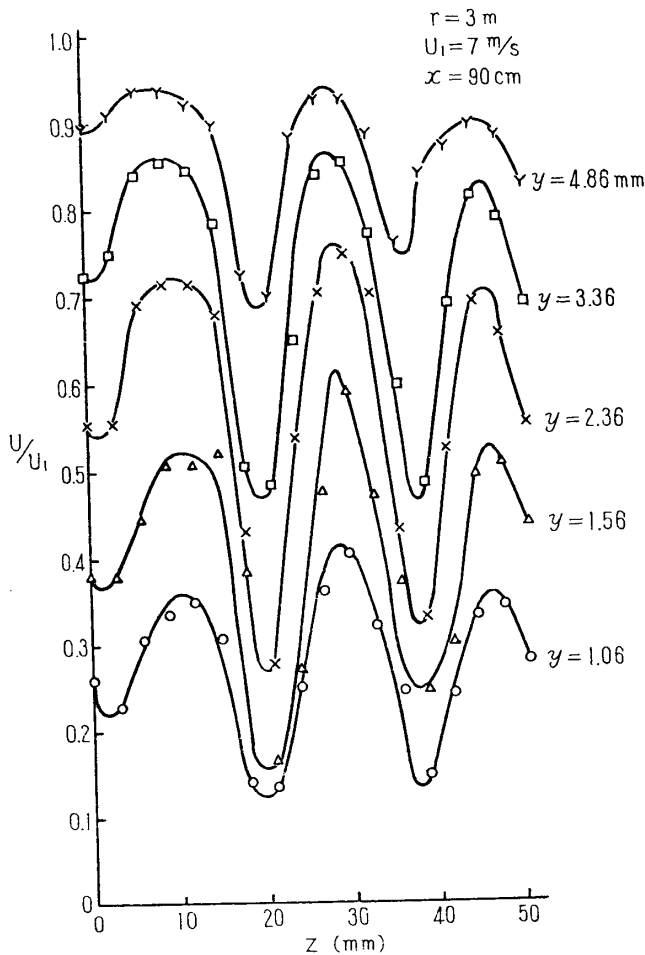


第 12 図 (d)



第 12 図 (c)

るが、70 cm 以後は、風速の高い部分は頭打ちして z 方向に広がり、低い部分は狭い範囲に集中して切込みが深くなり、第12図 d, e のように z 方向の周期性は鐘乳石のような歪波型分布となる。したがって x が 70 cm 以後の $U(y)$ は線型理論で記述される平均風速分布とは対応が完全でなく、非線型効果が含まれることになるが、ここでは一貫して $U(y)$ を測定



第12図 (e)

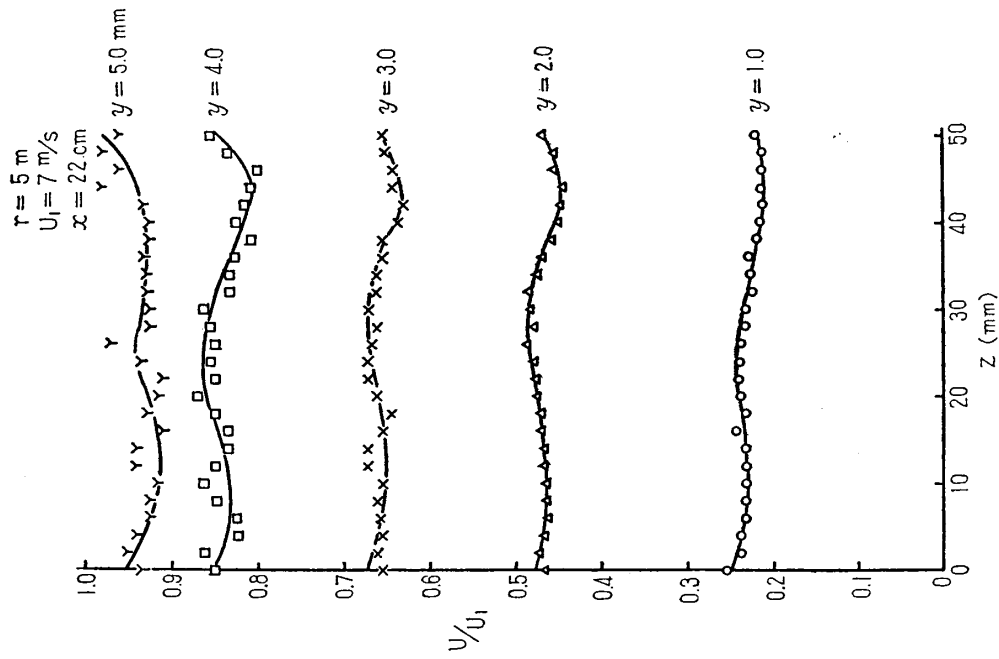
第12図 風速の z 方向の変化. 曲率半径 3 m,
主流の速度 7 m/s の場合.

- (a) $x=10$ cm (b) $x=30$ cm (c) $x=50$ cm
(d) $x=70$ cm (e) $x=90$ cm

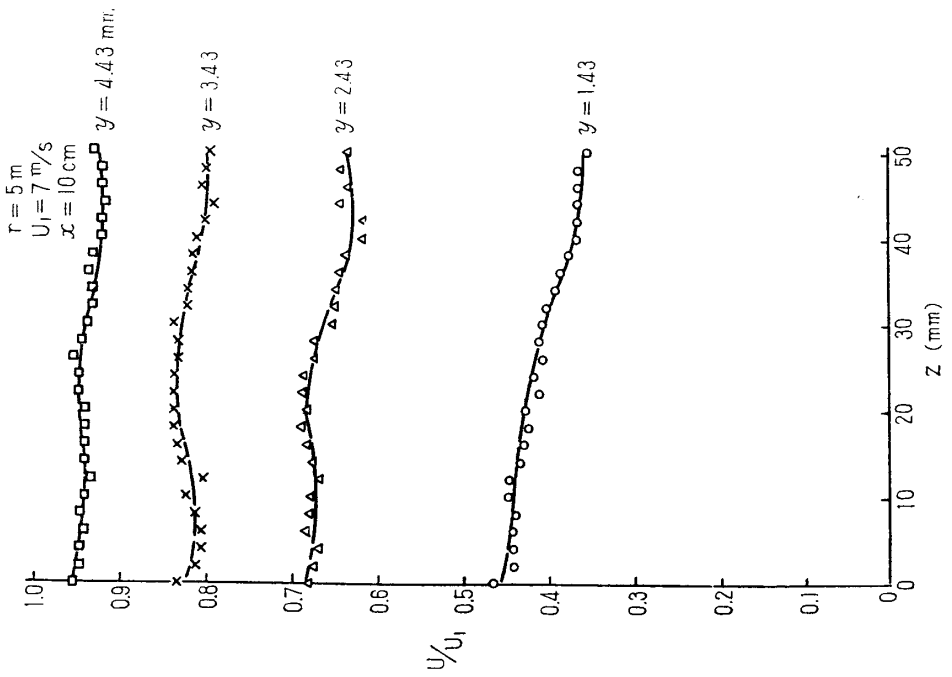
する z の位置は \bar{u} の z 方向の周期性で最大の風速を与える点と最少の風速を与える点のちょうど中間の位置とした. $x=90$ cm 以後は遷移型となるが、層流の状態に比べて Görtler 渦の z 方向の動揺が著しく非定常性が現われてくる. $r=5$ m, $U_1=7$ m/s の場合の測定 (第13図) は、 $r=3$ m または 10 m の場合に比べて、Görtler 渦が動揺して測定が難しかった. これは風洞の乱れが多いことによると思われる. なお他に、 U_1 を 3 m/s, 13 m/s に変えた測定を行なったが、 z 方向の波長は 3.5 cm で風速によって変わらず、この性質は水槽での観察と一致している.

$r=10$ cm, $U_1=11$ m/s の場合 (第14図), Görtler 渦は動揺がなかったが、 z 方向の風速の変化は下流にゆくほど増幅し、次第に鐘乳石型となる性質が現われている. この場合も、 U_1 を 16 m/s としても z 方向の波長は変わらず 2.1 cm である (第15図).

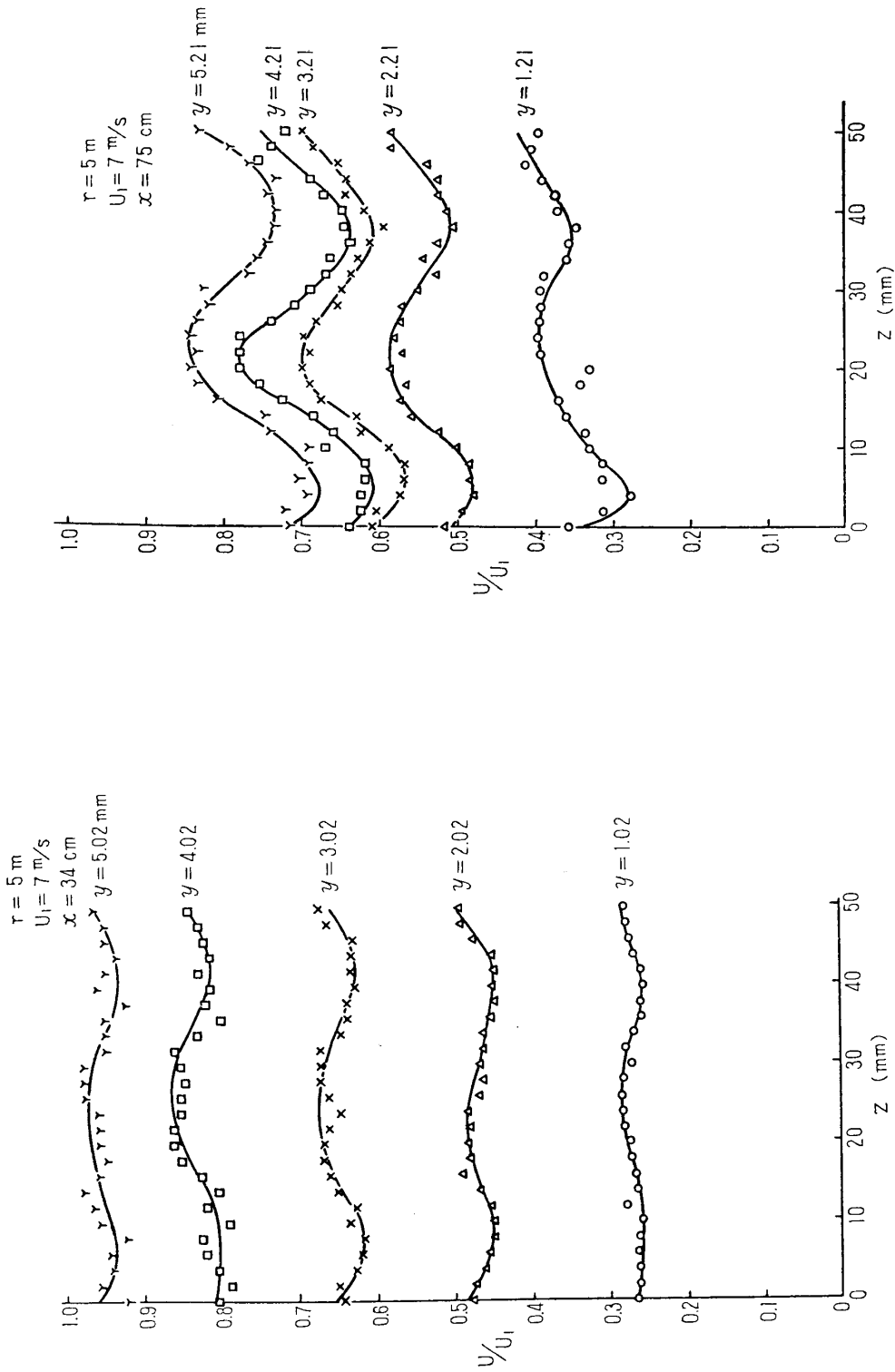
以上の測定で、 z 方向の周期性を与える波長が各模型について決まっていることに気付く. Görtler 渦は、理論的にその発生のための臨界条件があり、一定の G の値に対して最も増幅され易い状態がある. したがって純粋に流体力学的に考えれば、主流の速度の変化に応じて、最適の状態が実現するように渦の波長が変化するはずのものである. 勿論、Görtler 渦の不安定領域の条件を満足するのであれば、どのような波長のものでも可能なわけであるが、たまたま境界層の中に Görtler 渦の発達に適する三次元性が残存し、それが Görtler 渦の核となる微小攪乱として選択されたものと考えられる. $r=3$ m と $r=10$ m の模型は同一の風洞に設置されたのであるから



第 13 図 (b)



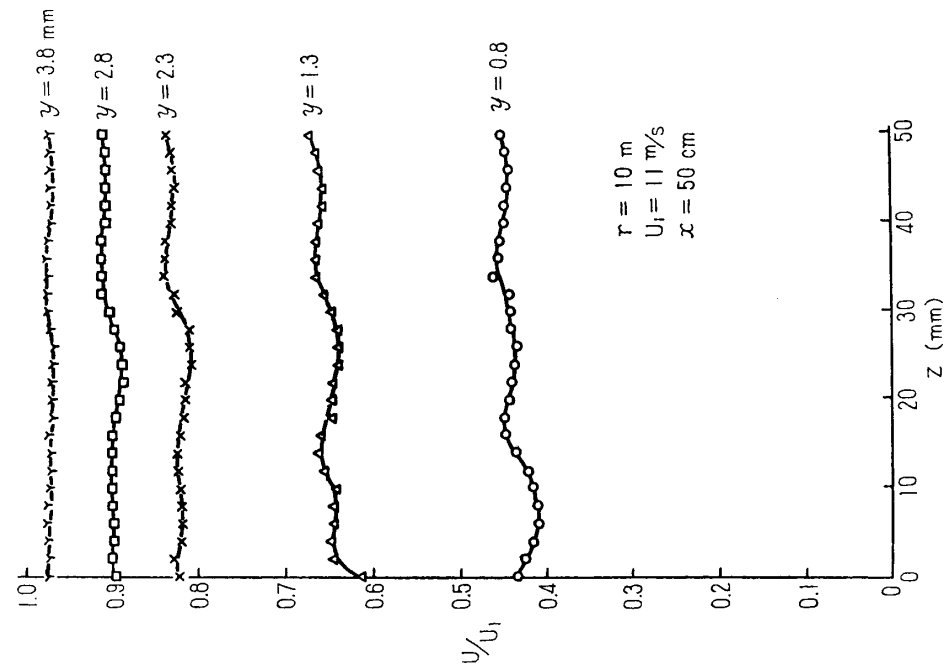
第 13 図 (a)



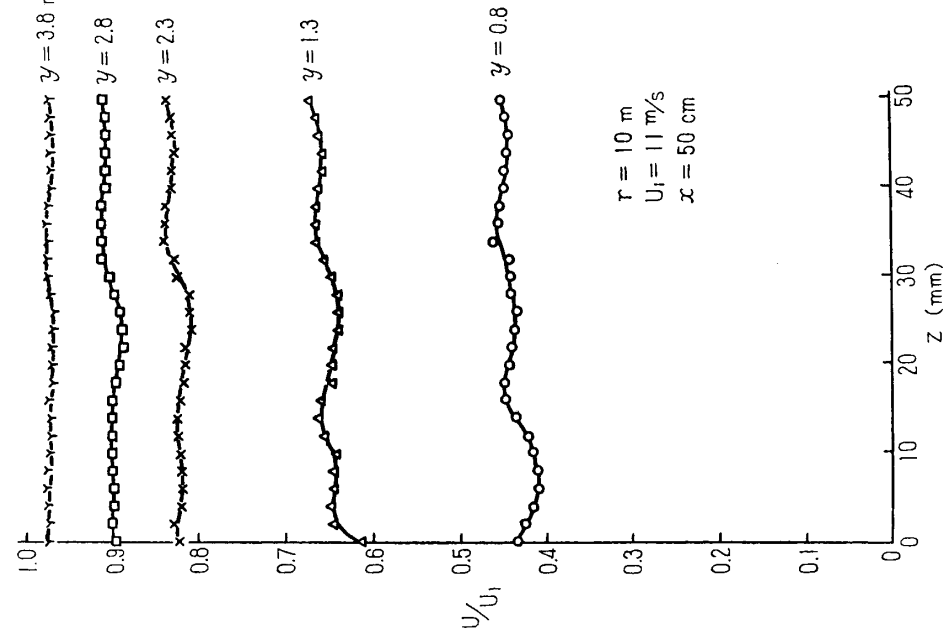
第13図 (d)

第13図 風速の z 方向の変化. 曲率半径 5 m, 主流の速度 7 m/s の場合

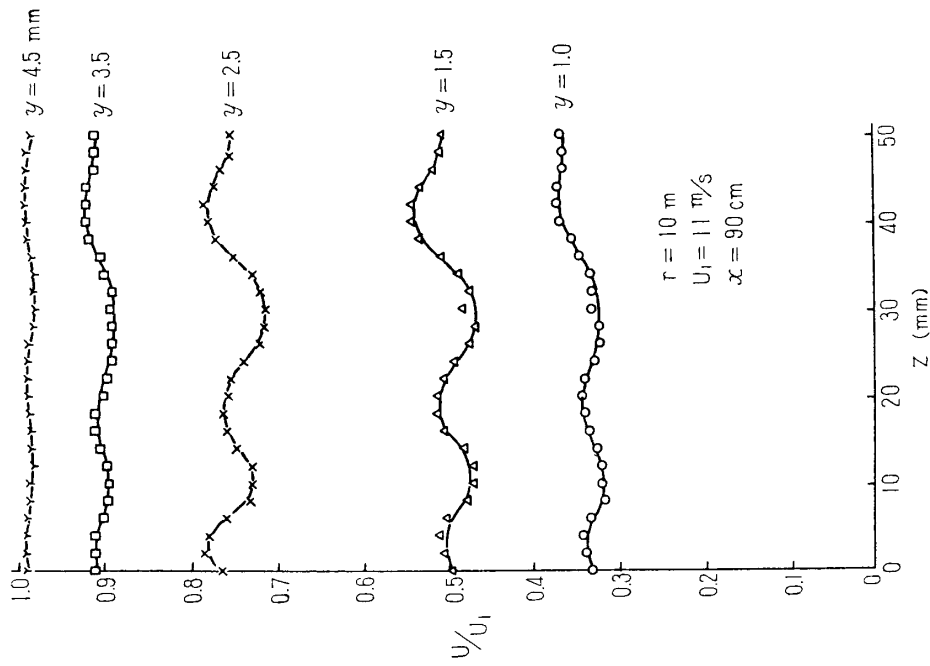
(a) $x = 10$ cm (b) $x = 22$ cm (c) $x = 34$ cm (d) $x = 75$ cm



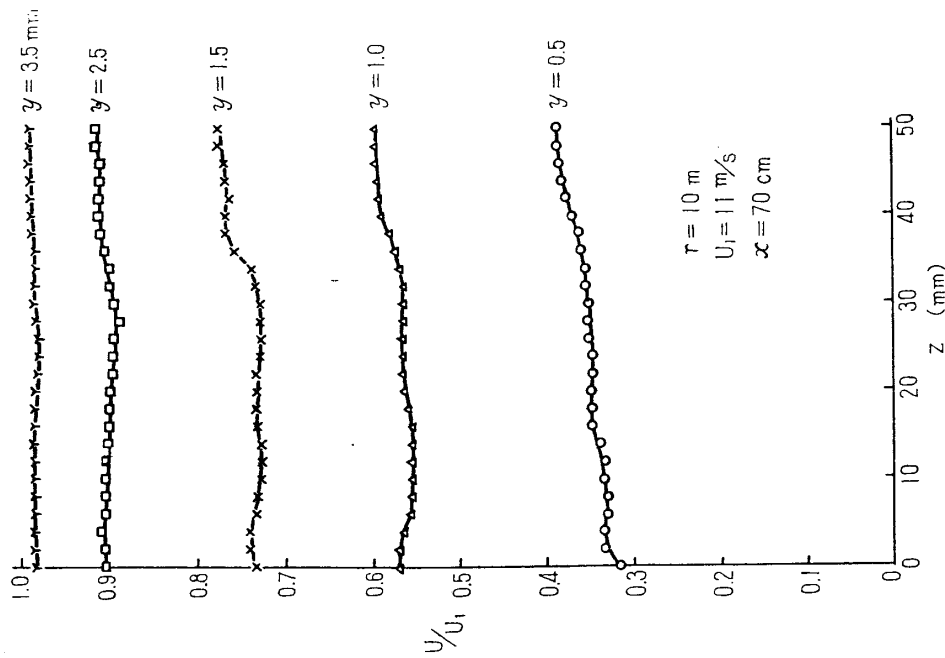
第 14 図 (a)



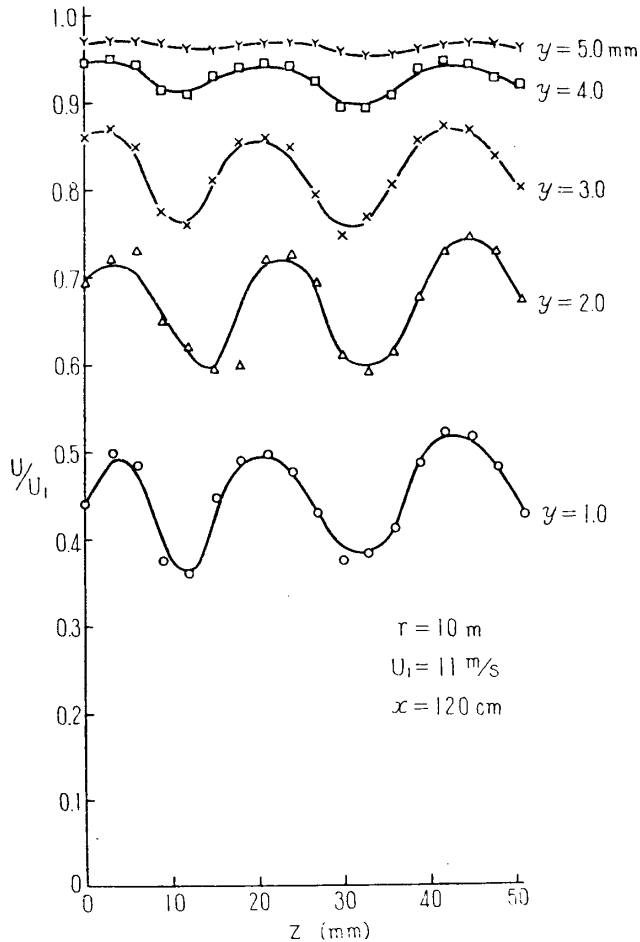
第 14 図 (b)



第14図 (d)



第14図 (c)



第 14 図 (e)

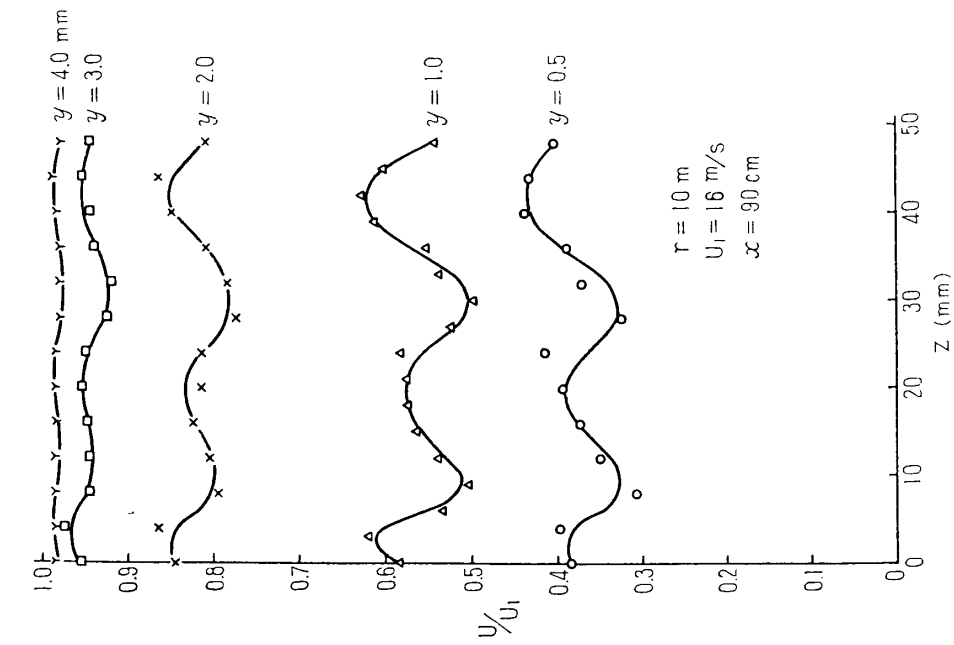
第 14 図 風速の z 方向の変化. 曲率半径 10 m,
主流の速度 11 m/s の場合.

- (a) $x=30 \text{ cm}$
- (b) $x=50 \text{ cm}$
- (c) $x=70 \text{ cm}$
- (d) $x=90 \text{ cm}$
- (e) $x=120 \text{ cm}$

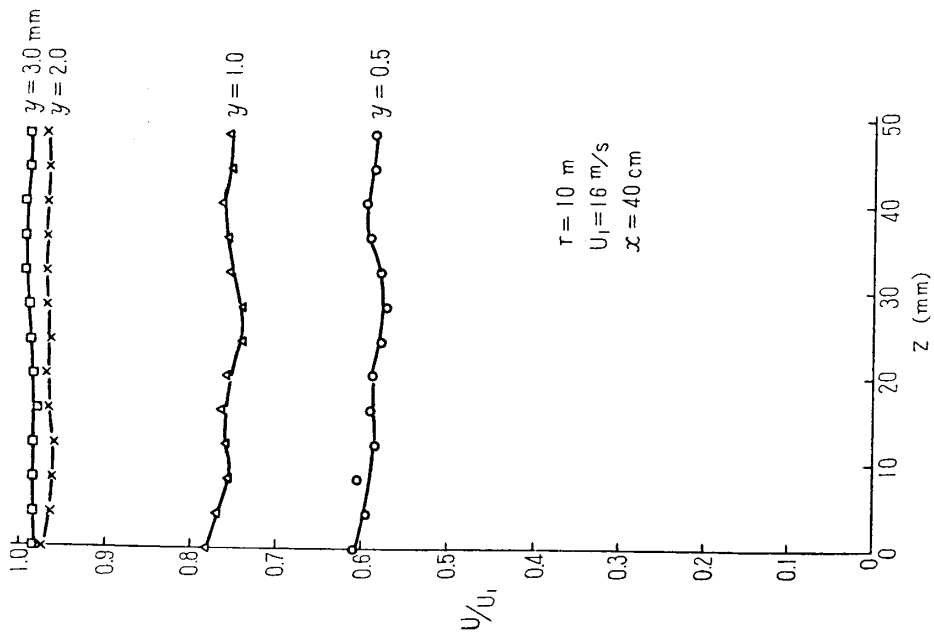
線型理論と比較してみる. 線型理論は境界値問題, あるいは個有値問題として解かれているので, 個有値 (安定曲線), 個有函数 (分布函数), およびこれらのパラメーター (増幅率) を実験値と比較することになる. 第 16 図は線型理論で得られた Görtler 渦の安定曲線と実験値を示しているが, 実験値はいずれも不安定領域にあり, この意味で理論とは矛盾していない. 図中, $(U_1 r / \nu)(\alpha r)^{-3/2} = 30, 60, 120$ の斜線が引かれているが, この意味は次の通りである. 前述のように, 各模型について, 主流の風速 U_1 と無関係に Görtler 渦の波長 λ , または波数 $\alpha = 2\pi/\lambda$ が一定である. このことは, Görtler パラメーター G と無次元波数 $\alpha\theta$ の間に函数関係を与える. 即ち, $\theta = (\alpha\theta)/\alpha$ として, $G = (U_1\theta/\nu)\sqrt{\theta/r}$ に代入すれば, $G = (U_1 r/\nu)(\alpha r)^{-3/2}(\alpha\theta)^{3/2}$ が得られる. したがって, 一つの模型の上の Görtler 渦につい

もし風洞個有の三次元性のみが原因であるならば, z 方向の波長は同一のものであるべきである. 異なる波長が現われたのは, 必ずしもそうではなくて, そのほかにたとえば模型前縁の仕上げの相違なども影響をおよぼすのではないかと考えられる. 先に指摘した通り, Görtler 渦は現在の実験条件の下では, 前縁から 3 cm 以下の距離で発生する可能性を持っているので, 前縁のわずかな不均一性が波長の決定に重要な役割を持つことは十分あり得ることである. 要するに, Görtler 渦の波長を決定しているものは, 流体力学的以外の原因であること, しかも, このような原因で出来た攪乱を核として Görtler 渦が発達する以上, 場が三次元性を選択する際の性質は比較的寛容なのであろうということが推論できる. 場の選択性は, 第 16 図の安定曲線で中立安定曲線の臨界条件付近の G が, 波数に対し比較的平坦であることからもうなづける.

次に, 上記のデータを整理して



第15図 (b)



第15図 (a)

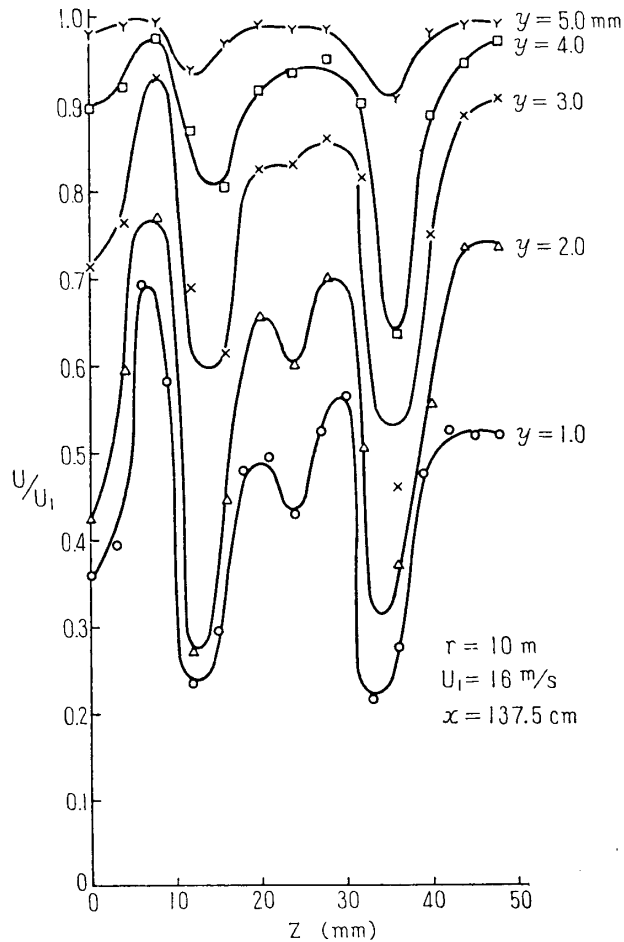
では、 U_1 を決めれば、両対数表示された安定曲線上で、 G は $\alpha\theta$ に対し勾配が $3/2$ の直線的関係となる。第 16 図で明らかのように、実験的に得られる G と $\alpha\theta$ の関係は、 $(U_1 r/\nu)(\alpha r)^{-3/2}$ が 30 ないし 120 の範囲内で、 $G \propto (\alpha\theta)^{3/2}$ を満足していることがわかる。主流の風速 U_1 を変えると、 $(U_1 r/\nu)(\alpha r)^{-3/2}$ の値は変えるから、実験値の配列は平行に移動することになる。ここで、 G および $\alpha\theta$ の変化は θ の変化によるもので、測定する x の位置を下流に動かすことにより、 θ を次第に増加して測定が行なわれたわけである。

線型理論では、 $U(y)$ を Blasius 分布として計算されているが、実験の結果によれば $U(y)$ は必ずしも Blasius 分布ではない。それにもかかわらず、非線型効果の認められる状態まで含めて、実験結果が理論で示される傾向と一致するのは、Görtler の計算で明らかのように、異なる $U(y)$ の仮定のもとに Görtler 渦の安定性を計算しても、 θ を特性長さとして整理す

れば、安定曲線の形はほとんど変わらないことによるのである。この安定曲線において中立安定曲線が波数に対して示している広がり状態は、 $G \propto (\alpha\theta)^{3/2}$ の関係を一度作った Görtler 渦は、下流で再び減衰する可能性がなく、一方的に下流に行くほど増幅して行くことを示している。

分布函数および増幅率を調べるために、各 x について Görtler 渦の振幅を表わす $u(y)$ を U_1 で無次元化した結果を第 17, 18 図に示す。既に第 12~15 図の説明で述べたように、下流では z 方向の周期性は正弦的でなく鐘乳石型となるので、風速の最大値と最小値の差の半分を各 y での $u(y)$ とした。分布函数の振幅は、 $r=3\text{ m}$, 10 m とともに下流に行くほど増幅し、 $r=3\text{ m}$ の場合に $x=100\text{ cm}$ では、 $u(y)$ は U_1 の 30% を越えている。

$r=5\text{ m}$ の場合は、分布函数を実験的に求めるほど精度の良い測定値が得られていないが、下流に行くほど Görtler 渦が増幅する性質に変わりはない。



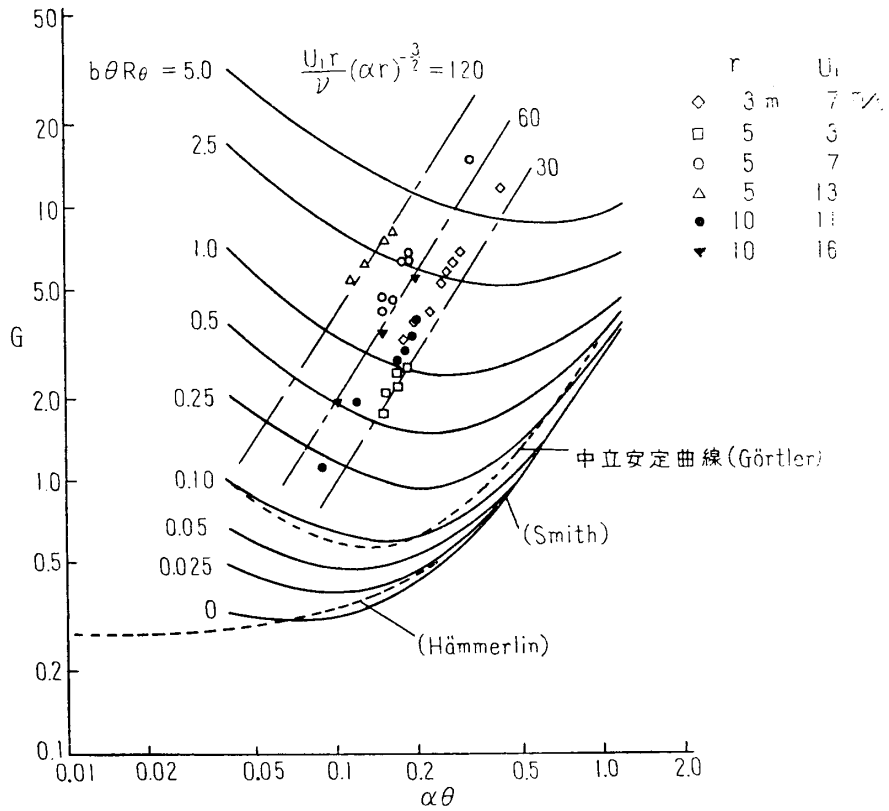
第 15 図 (c)

第 15 図 風速の z 方向の変化。曲率半径 10 m, 主流の速度 16 m/s の場合。

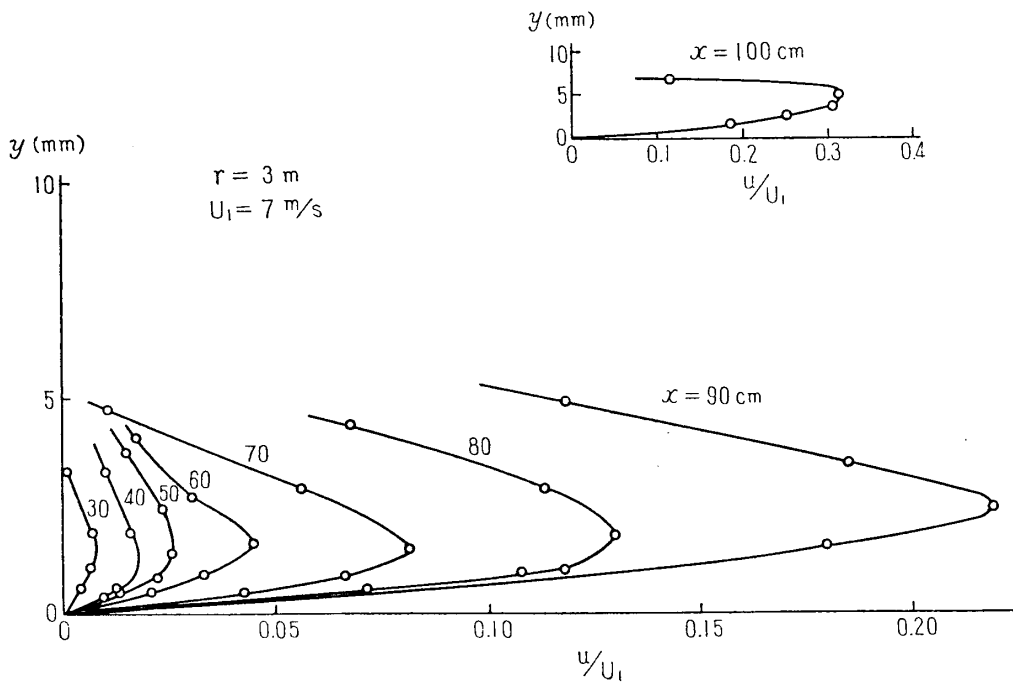
(a) $x=40\text{ cm}$

(b) $x=90\text{ cm}$

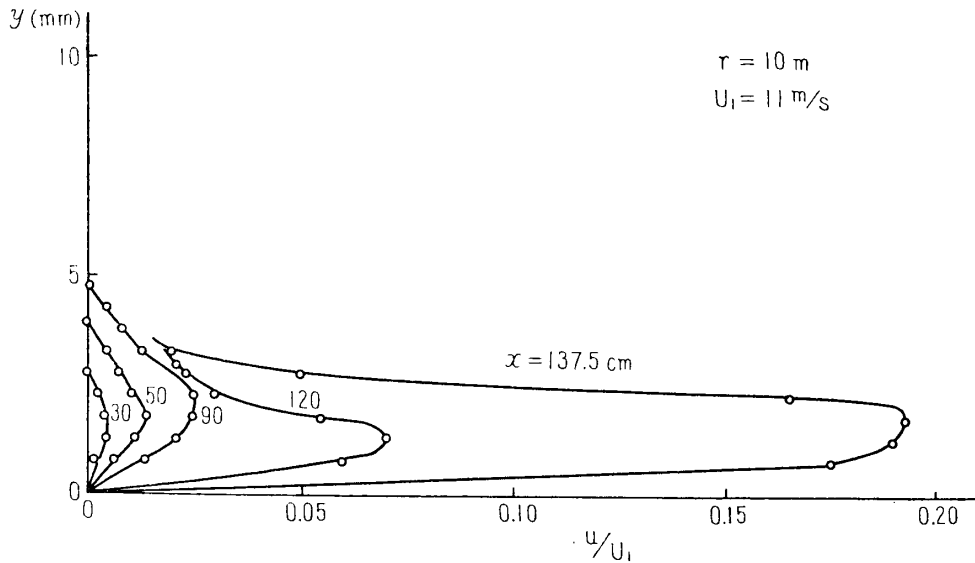
(c) $x=137.5\text{ cm}$



第16図 Görtler パラメーター G と縦渦の交番配列の無次元波数 $\alpha\theta$ との関係。



第17図 Görtler 渦の強さの境界層内での分布。曲率半径 3m。主流の速度 7 m/s の場合。

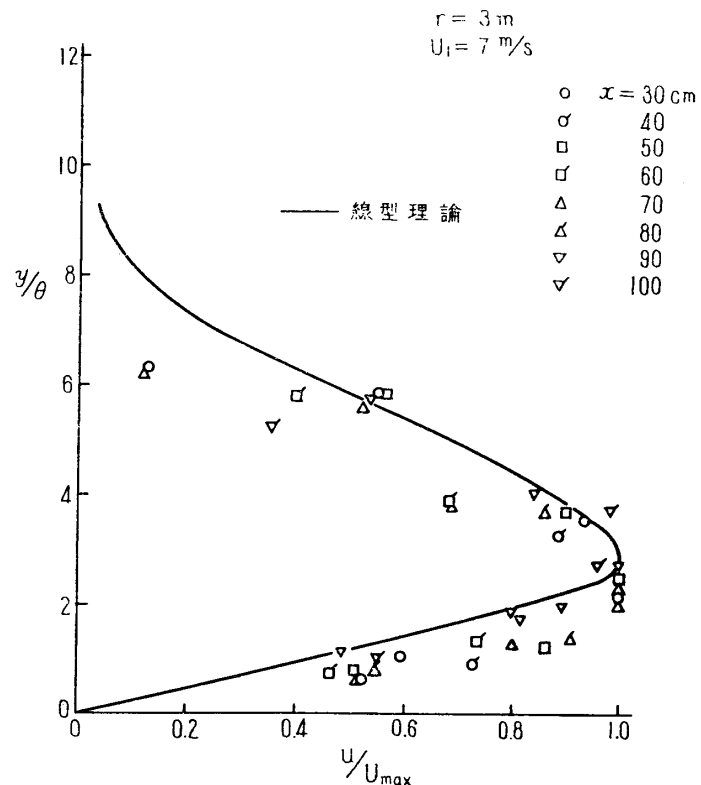


第 18 図 Görtler 渦の強さの境界層内での分布. 曲率半径 10 m, 主流の速度 11 m/s の場合.

第 17, 18 図でわかるように, $u(y)/U_1$ の最大値は下流ほど壁から離れるが, その傾向は, y を境界層の発達を特徴づける長さで無次元化すれば, 分布が x によらずに相似になることを予想させる. 第 19, 20 図

に, 縦軸には y/θ をとり, 横軸には各 x について $u(y)/U_1$ をそれぞれの $(u(y)/U_1)_{\max}$ で正準化した実験値を示したが, すべてのデータがほぼ一本の曲線に乗るように見える. そこで, $r=3\text{m}$ と 10m の場合について, $x=30\text{cm}$ での個有値および対応する理論上の増幅率を用いて分布関数を計算し, これを第 19, 20 図に記入したが, 実験値と大体良い一致を示している. 安定曲線と同様, 分布関数も速度分布や線型理論の限界にあまり制約されることなく, 運動量厚 θ を特性長さとする限り, Blasius の速度分布に基づく線型理論で説明されるようである.

もっとも第 17, 18 図からわかるように, 縦渦は著しく増幅



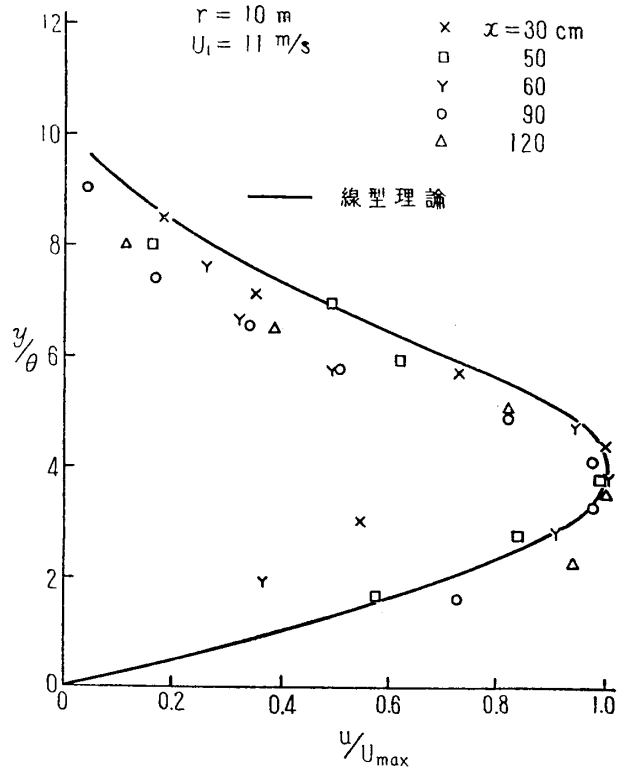
第 19 図 分布関数の理論値と実験値の比較. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s の場合.

され、当然非線型効果が生じるので、増幅率が下流まで線型理論とよく一致しているとは考えられない。

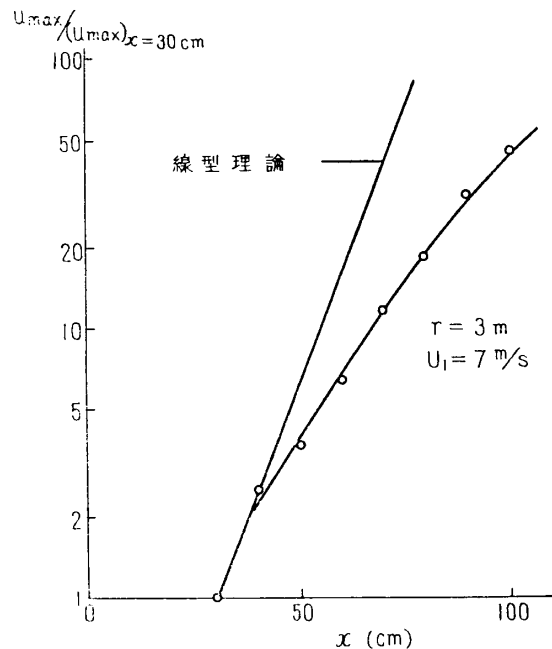
$r=3\text{ m}$ の場合に、 $x=30\text{ cm}$ の $(u(y)/U_1)_{\max}$ を基準にして、 $(u(y)/U_1)_{\max}$ の下流への増加を半対数表示(第21図)すると、 $x=40\text{ cm}$ ($(u(y)/U_1)_{\max}$ は 1.8%) までは線型理論に従うが、 $x=50\text{ cm}$ ($(u(y)/U_1)_{\max}$ は 2.5%) 以後の増幅率は線型理論の結果よりも低くなる。Smith の理論による増幅率は $\exp(\int b(x)dx)$ であり、流体の実質部分は各 x で個々の $b(x)$ という増幅率で増幅されながら流れて行くので、任意の x での Görtler 渦の増幅は、 $G \propto (\alpha\theta)^{3/2}$ の線上での増幅率の積分値となるわけである。そこで、われわれの実験条件に合せて $b(x)$ を計算してみると、 $b(x)$ は実験範囲では $x=30\text{ cm}$ における値で十分代表されることがわかったので、 $\exp(\int b(x)dx)$ は $\exp(bx)$ (ただし、 b は $x=30\text{ cm}$ での増幅率) と表わされ、図で理論的増幅率は半対数表示で直線となっている。

$r=10\text{ m}$ の場合は、 $x=60\text{ cm}$ ($(u(y)/U_1)_{\max}$ は 1.75%) までは理論と実験の増幅率は一致するが、 $x=90\text{ cm}$ ($(u(y)/U_1)_{\max}$ は 2.6%) 以上では、測定された増幅率は線型理論から導かれる結果に比べて低くなる(第22図)。

以上の二つの場合を総合して、 $(u(y)/U_1)_{\max}$ が 1.8% を越えると、線型理論が厳密には成立しなくなるといってよい。しかし、このように線型理論の限界を越えても、 z 方向の波長は変わらない。通常周期的な現象の非線型性は基本波長の $1/2, 1/3, \dots$ の波



第20図 分布函数の理論値と実験値の比較。
曲率半径 10 m, 主流の速度 11 m/s の場合。



第21図 Görtler 渦の流れの方向への増幅。
曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s の場合。

長の周期性が生じることを特徴とするが、Görtler 渦による周期性に対する非線型性は、波長が一定のまま波形を正弦型から鐘乳石型に歪ませる。即ち、風速の早い部分の振幅をおさえて x 方向に広げ、遅い部分の振幅を大きくかつ狭い範囲に集中させるように変化させることで特徴づけられている。

このように基本的な波長が下流まで続き、二次的配

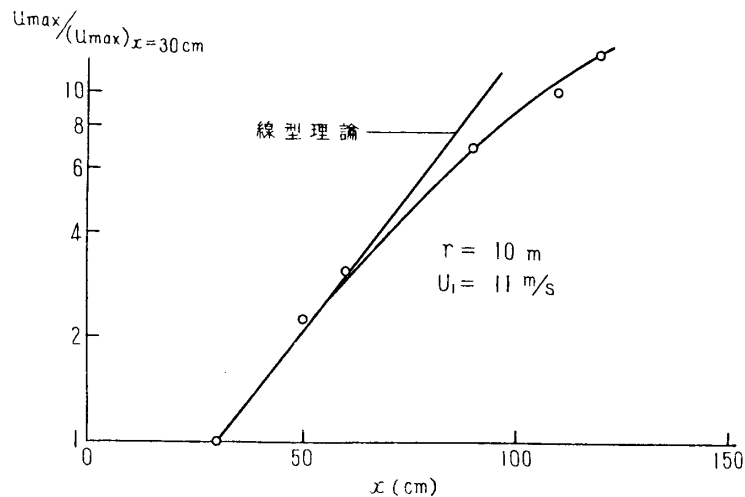
列が作り出されないのは、前に述べた変分原理による考察からうかがわれるように、平均流から Görtler 渦に与えられるエネルギーが、 u を通して v や w の成分に分配され、流れの方向に軸を持つ渦のエネルギーとして蓄えられることによるのではないかと考えられる。

更に、正弦的な波形が増幅するにつれて鐘乳石型の歪み波形となり、二次的配列が発生しないような非線型効果について考えてみる。単振動が順次に高調波を作り重畳された波形を作る限り、波形は上下対称であり、Görtler 渦のような上下非対称な波形をとることはない。このような非対称振動が作られる例を探してみると、初期歪みのある梁の振動の波形が鐘乳石型であることに気づく。即ち、梁に初期歪みを与えて振動させると、微小振動の間は正弦振動をするが、有限振幅となると、初期歪みの方向に振れる時は、振幅が小さく変位している時間が長い、初期歪みと反対の方向に振れる時は、振幅が大きく変位の時間は短い。したがって、その波形は非線型領域での Görtler 渦の周期性と類似している。そこで、梁の振動における初期歪みを、凹面に沿う境界層内の平均風速分布が、Blasius 分布から遷移型分布に変化した際の差に置き換えると、Görtler 渦の周期性の非線型性が類推的に理解できる。もっとも、梁の振動では、初期歪みと振動は独立に与えられるものであるが、われわれの取扱う問題では、平均風速分布の変化や Görtler 渦の増幅は、非線型的に一つの場合を構成している。したがって、類似性は認められるにしても、われわれにとり重要な、このような状態に至る過程の追求に手掛りを与えるものとはいえない。

b. 乱流境界層における縦渦の交番配列

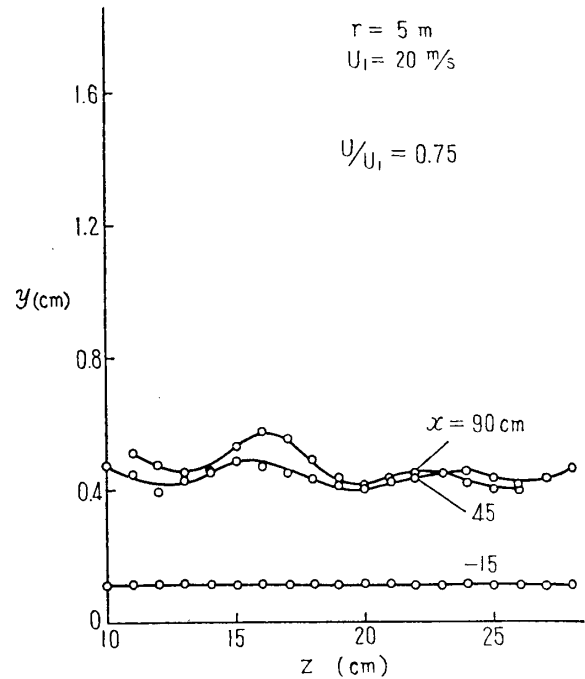
先に紹介した Tani [26] の論理によれば、乱流境界層においても、縦渦の発生する可能性が考えられるので、それを確かめるための実験を行なった。

乱流境界層を実現するために、 $r=3\text{ m}$ の場合は凹面上流側に長さ 40 cm 、幅 59 cm の平板を取付けて、平板の前縁から 10 cm の位置に、境界層を乱流にするための直径 1.3 mm のピアノ線をはり、 $r=5\text{ m}$ の場合も上流側の平板の前縁から 10 cm に 0.5 mm のピアノ線をはった。また、 $r=10\text{ m}$ の場合は凹面の前縁から 10 cm の位置に、直径 1.3

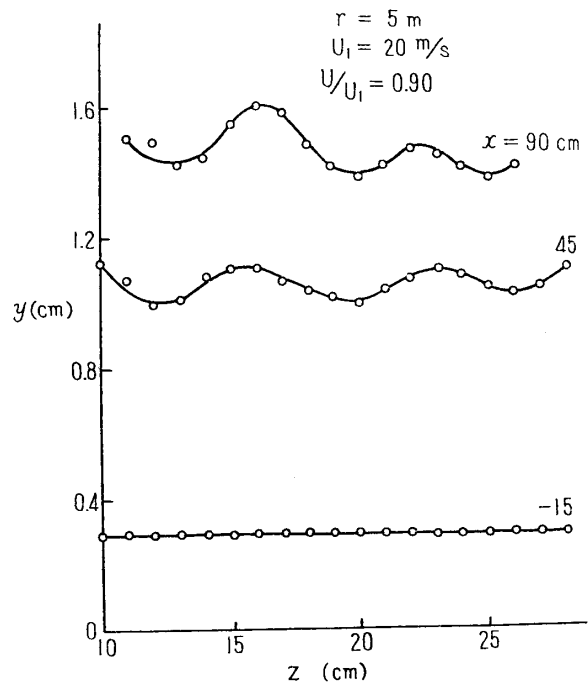


第 22 図 Görtler 渦の流れの方向への増幅。
曲率半径 10 m 、主流の速度 11 m/s の場合。

mm のピアノ線をはった。これらのピアノ線の直後では、個々の周期的な三次元性がないことが確められた。層流の場合と同様に、平均風速の z 方向の分布を測定して波長を定めてみると、乱流境界層では層流の場合に比べて、波長がいずれも大きくなるのがわかる。即ち、 $r=3\text{ m}$ では、層流での波長が 1.8 cm に対し、乱流での波長は 3.6 cm 、また $r=5\text{ m}$ では、層流で 3.5 cm に対し乱流で 6.5 cm 、 $r=10\text{ m}$ では層流で 2.1 cm に対し乱流で 3.1 cm である。 $r=5\text{ m}$ の場合の測定値を第23図に示してあるが、層流の場合と比較して、乱流の場合には波長が大きくなることのほかに、Görtler渦の振幅が小さいこと、下流でも顕著な増幅を示さないことが特徴的である。これは次のように解釈される。実験から得られた G_T と $(\alpha\theta)_T$ の関係を第24図の安定曲線上に示すと、 $G_T \propto (\alpha\theta)_T^{1/2}$ であることがわかるが、これは理論的にも、 $\theta_T = (\lambda_T/2\pi)(\alpha\theta)_T$ を $G_T = 43\sqrt{(\theta_T/r)}$ に代入すれば、 $G_T = 43(\lambda_T/2\pi r)^{1/2}(\alpha\theta)_T^{1/2}$ となることから明らかである。この $G_T \propto (\alpha\theta)_T^{1/2}$ という関係を中立安定曲線の形と比べると、乱流境界層では縦渦の配列が発生しても下流では再び安定領域に入り、十分に発達することなく減衰しはじめることがわかる。これは測定された振幅が小さく、増幅もあまり認められないことに説明を与える。また、層流に比べて波長が大きくなるのは、波長が大きくなると不安定領域に入れないためである。いい換えれば、波長の大きな攪乱のみが場を選択されることになるのである。試みに $43(\lambda/2\pi r)^{1/2}$ を計算してみると、 $r=3\text{ m}$ として $\lambda=2\text{ cm}$ では 1.4 、 $\lambda=5\text{ cm}$ では 2.3 であるが、十分に不安

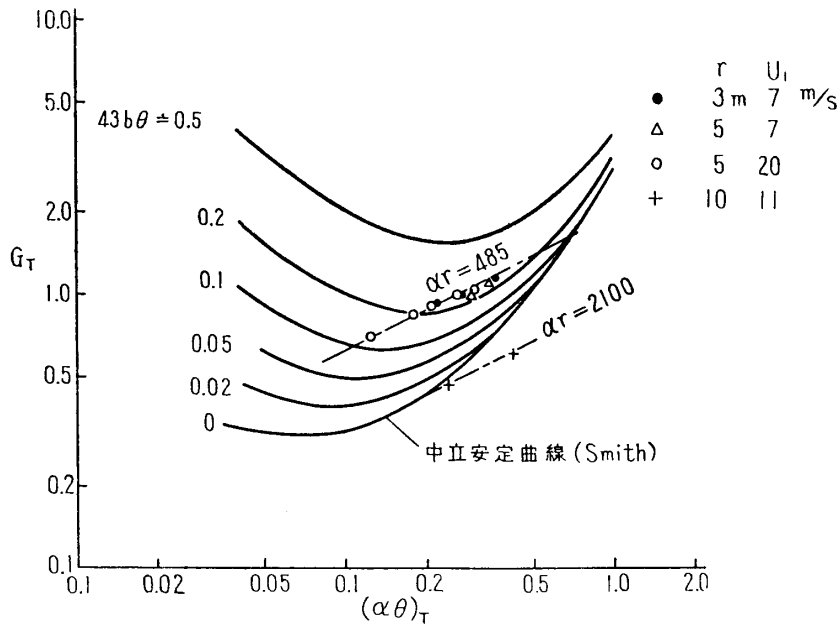


(a)



(b)

第23図 乱流境界層における風速の z 方向の変化。
曲率半径 5 m 、主流の速度 20 m/s の場合。
(a) $U/U_1=0.75$ の場合
(b) $U/U_1=0.90$ の場合



第 24 図 乱流境界層における Görtler パラメーター G_T と縦渦の交番配列の無次元化波数 $(\alpha\theta)_T$ との関係。

定領域に入って x 方向の周期性を示すためには、波長が層流の場合よりも大きくなる必要があることが認められる。層流境界層では、模型に個有の波長は下流ほど増幅するので、波長に対する選択性が問題とならないが、乱流境界層では、Görtler 渦に対する安定性が波長の選択に重要な役割を果していると考えられる。

c. 凹面に沿う境界層における進行波の発達

既に筆者は凹面に沿う境界層において、Görtler 渦の発達に伴い場が三次元的になることを知った。そこでこのような境界層における遷移を、三次元的な場における進行波の振舞との関連で調べ、平板境界層の遷移の三次元的機構と比較することにより、凹面に沿う境界層の遷移の特質を明らかにしようとするわけである。

凹面に沿う境界層の遷移の機構を平板境界層と比較することは、両者とも境界条件が同一であり、平均風速分布もほぼ同じであることから妥当である。ただ注意すべきことは、平板境界層に与えられる制御可能の場の三次元性(たとえば Tani および Komoda [25] は主流の中に薄い翼を置き、その迎角を変えることにより、平板境界層の三次元性を制御した)は流れの方向に境界層の発達の程度で発達するが、凹面の場合の三次元性は、Görtler 渦の個有の増幅率で発達していること、ならびに両者では流れの方向に軸を持つ縦渦としての性質に相違があり得るであろうということである。

実験は $r=3\text{ m}$ と 5 m の模型について行なわれた。振動リボンにより 60 サイクルの二次元進行波が重畳されたが、この周波数はリボンの位置から測定域にわたる Reynolds 数の範囲で、平板上の境界層の T - S 波が増幅するような範囲にある。

$r=3\text{ m}$ の場合は $U_1=7\text{ m/s}$ で、測定ははじめ $x=70, 80, 90, 100\text{ cm}$ で行なわれたが、 $x=90, 100\text{ cm}$ では進行波を重畳するとき、縦渦が揺れ動いて測定が困難になったため、 x

=70, 75, 80 cm (以後, 振動リボンからの距離 $x-x_r=20, 25, 30$ cm で表わす; $x_r=50$ cm) でデータがとられた. リボンに流す電流の強さ i_r は, 0.6A と 1.2A の二種類であるが, 熱線風速計への入力波形をオシロスコープで観察した結果, 測定範囲での変動量 u_f' (フィルタによる 60 サイクルの成分) の y 分布の最大値は, 0.6A では i_r に比例しているが, 1.2A では比例しなくなる点で区別される. Tani および Komoda [25] にならってこの i_r と $(u_f')_{\max}$ の比例関係が成立する範囲を線型的, 比例しなくなる範囲を非線型的と呼んで区別することとする.

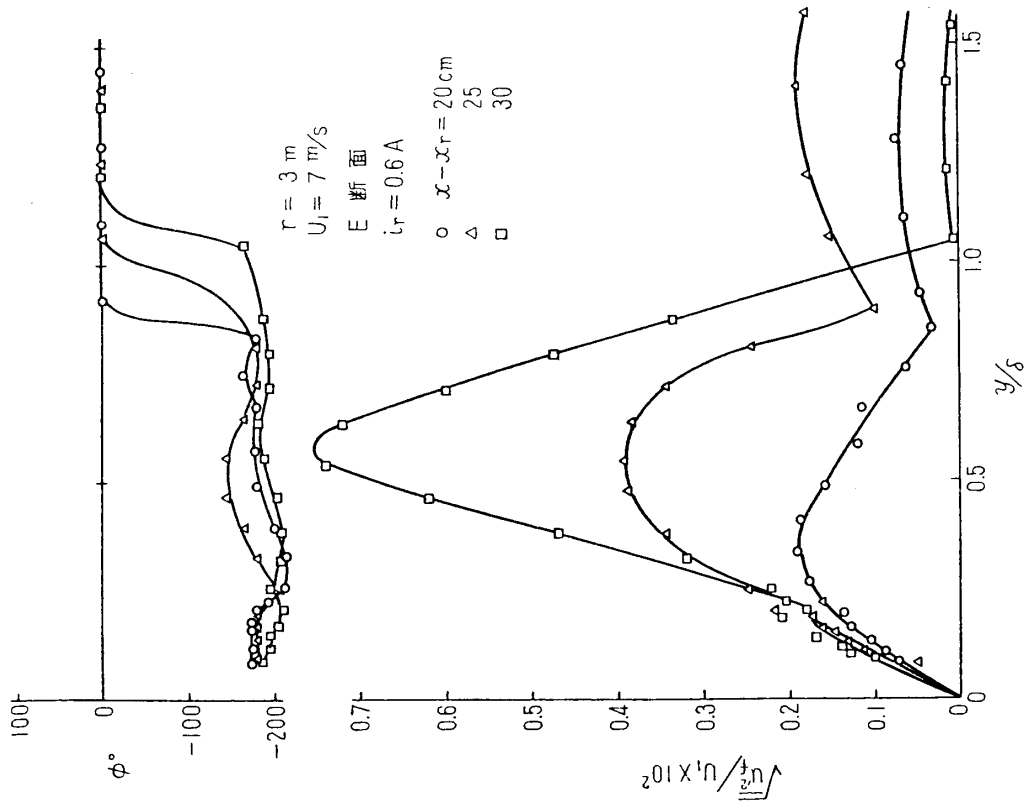
また境界層内の一定の高さ y で平均風速の x 方向の周期性を調べ, その任意の半波長について風速最大の位置を A 断面, 最小位置を E 断面と呼ぶこととする. この定義も, 平板境界層に人為的に縦渦を重畳した場合の実験 [25] での定義にみなられている. 三次元性の特徴的性質を A と E の両断面で調べることとし, 60 サイクル附近の変動速度成分 u_f' と位相 ϕ および平均風速 $U(y) \pm u(y)$ を i_r を変えて測定した.

$r=5$ m の場合は, 主流風速 $U_1=7$ m/s, 振動リボン位置 $x_r=20$ cm である. 測定は $x-x_r=15, 20, 25, 30$ cm の A および E 断面で, $i_r=0.5 \sim 3A$ の範囲で行なわれた. 実験の際には, データの再現性についての注意, 特に測定時間中に縦渦の配列の移動がなかったことの確認を怠らなかった.

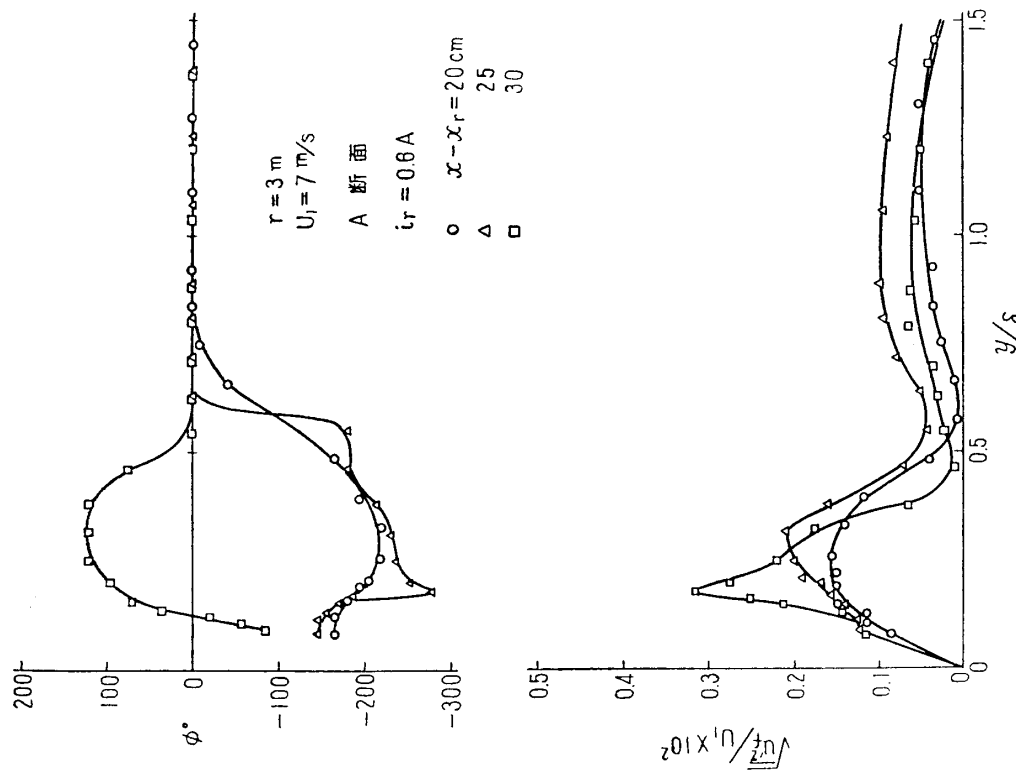
第 25 図は $r=3$ m, $i_r=0.6A$ の場合の, A 断面における $\sqrt{u_f'^2}$ と ϕ の y 分布である. $x-x_r=20, 25$ cm では, $\sqrt{u_f'^2}$ の最大の位置は, それぞれ $y/\delta=0.25, 0.3$ と次第に壁から離れるが, 30 cm では $y/\delta=0.18$ となり壁に近づく. 位相角 ϕ はすべて壁から十分離れた位置での位相を基準としているが, $x-x_r=20$ から 25 cm では $y/\delta=0.2$ 附近の遅れが大きくなり, $\sqrt{u_f'^2}$ が最小となる $y/\delta=0.5 \sim 0.6$ ($\sqrt{u_f'^2}$ は壁から十分離れた位置では当然 0 となるので, $\sqrt{u_f'^2}$ の y 分布にできる谷に最小という表現を用いるのは不適當であるとも考えられるが, $\sqrt{u_f'^2}$ は境界層内で最大値を持つので, これに対応させて, 最小という表現をとることにする) で比較的ゆるやかに反転するが, 30 cm では $y/\delta=0.1$ 附近で位相が 0 となり, $y/\delta=0.3 \sim 0.4$ で最も進み, 以後比較的ゆるやかに $y/\delta=0.5$ 附近で境界層外側の位相に近づいている.

第 26 図は $r=3$ m, $i_r=0.6A$ の場合の, E 断面における $\sqrt{u_f'^2}$ と ϕ であり, 第 25 図に比べると, A 断面とは特徴的な違いがあることに気づく. まず, 同じ $x-x_r$ について, E 断面の方が $\sqrt{u_f'^2}$ が大きく, 最大値をとる y/δ が $x-x_r=20, 25, 30$ cm でそれぞれ 0.35, 0.55, 0.6 で, A 断面よりも壁から離れ, また, 下流ほど壁から離れていることがわかる. 更に, $\sqrt{u_f'^2}$ の最小の位置も, $x-x_r=20, 25, 30$ cm でそれぞれ $y/\delta=0.85, 0.9, 1.05$ と次第に壁から離れ, いずれも A 断面に比べて境界層の端に近い. 一方, ϕ は $y/\delta=0.2 \sim 0.3$ で 180° よりやや遅れ, 0.5 附近でやや進むが, 境界層全体にわたりほぼ一様で, $\sqrt{u_f'^2}$ が最小になる位置で急激に 180° の反転が行なわれる. ϕ の y 分布は u_f' の増幅とは関係なく一様な形である.

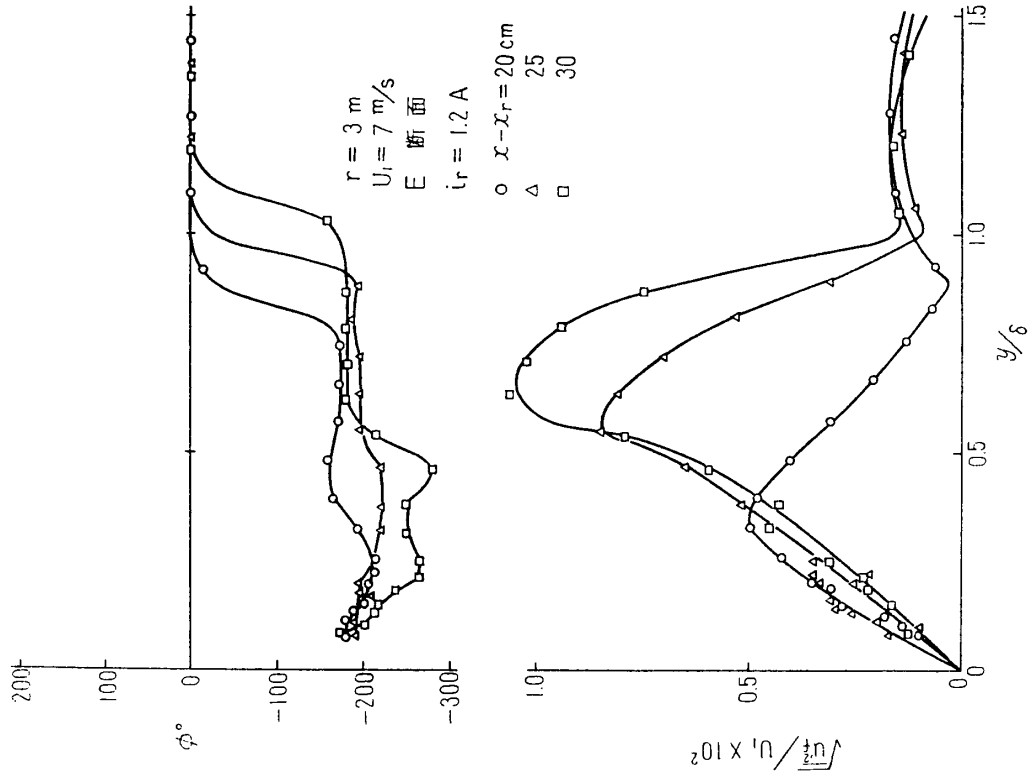
第 27 図は $r=3$ m, $i_r=1.2A$ の場合の, A 断面における $\sqrt{u_f'^2}$ と ϕ であり, $\sqrt{u_f'^2}$ は $x-x_r=20, 25$ cm では $y/\delta=0.25$ で最大値をとるが, 30 cm では $y/\delta=0.18$ となり壁に近づく. $\sqrt{u_f'^2}$ が最小となる位置も, $x-x_r=20, 25$ cm では $y/\delta=0.55$ であるが, 30 cm では 0.4



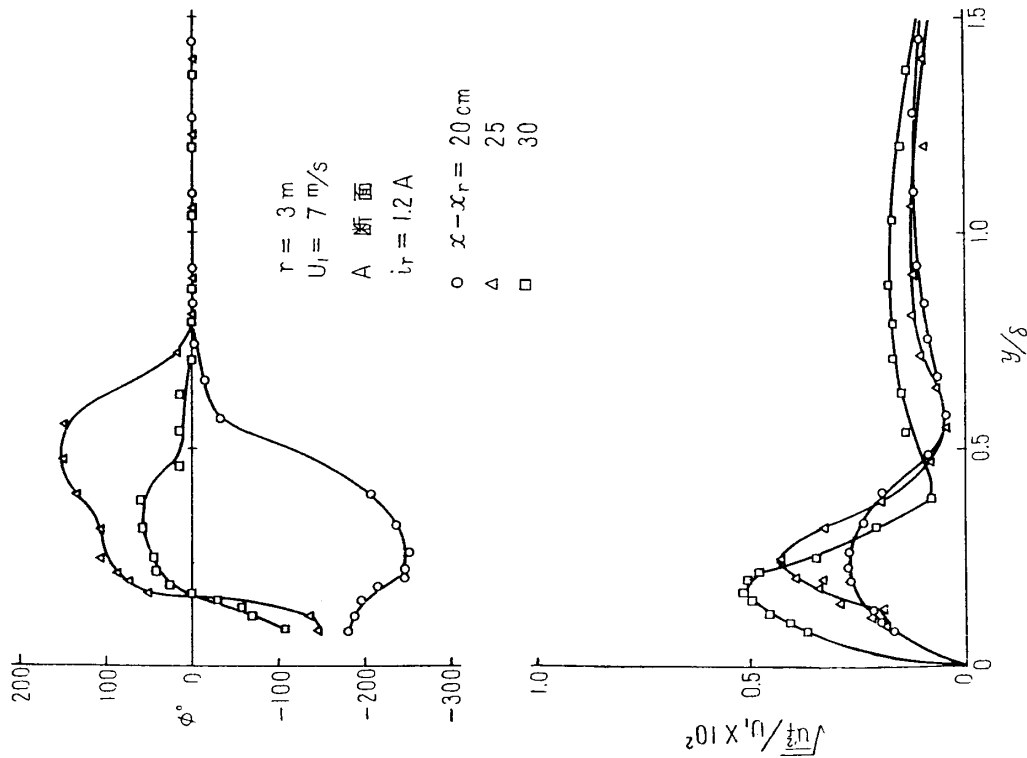
第26図 E断面における進行波の振舞。曲率半径3m, 主流の速度7m/s. 線型的増幅の場合.



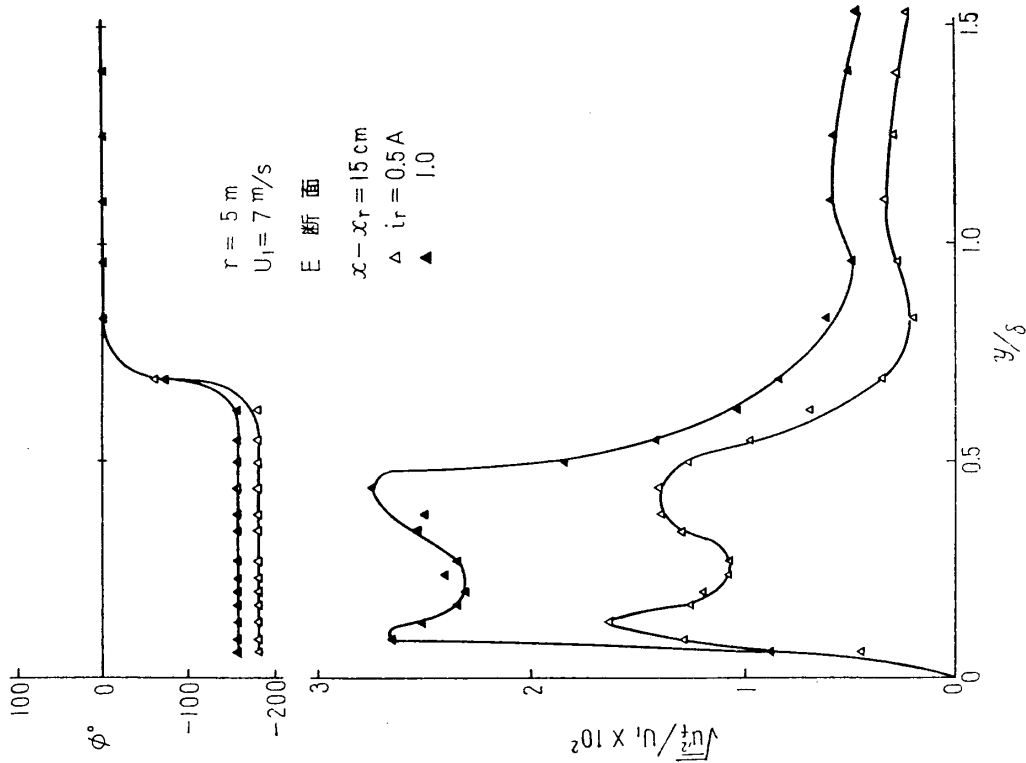
第25図 A断面における進行波の振舞。曲率半径3m, 主流の速度7m/s. 線型的増幅の場合.



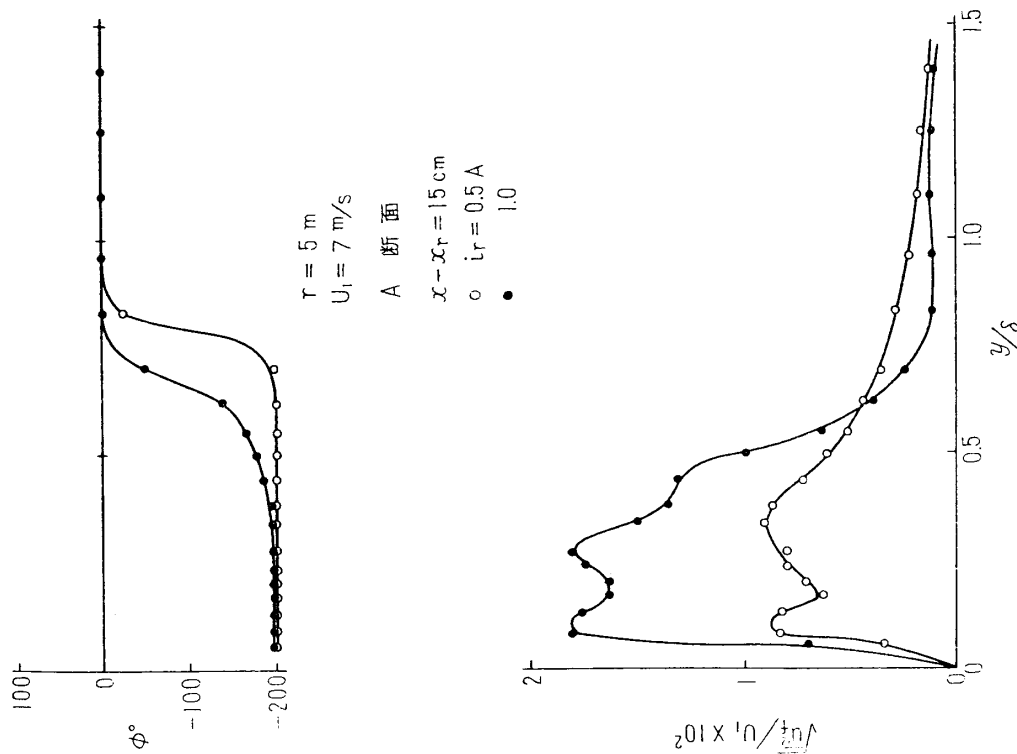
第28図 E断面における進行波の振舞. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s, 非線型的増幅の場合.



第27図 A断面における進行波の振舞. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s, 非線型的増幅の場合.



第 30 図 E 断面における進行波の振舞. 曲率半径 5 m, 主流の速度 7 m/s, 線型的増幅の場合



第 29 図 A 断面における進行波の振舞. 曲率半径 5 m, 主流の速度 7 m/s, 線型的増幅の場合

となり壁に近づく。φは $x-x_r=20$ cm で $y/\delta=0.2\sim 0.3$ の遅れが大きくなり、25, 30 cm では $y/\delta=0.15$ で0となって逆に進む傾向を示し、いずれも $\sqrt{u_f'^2}$ の最小の位置から $y/\delta=0.8$ 付近にかけてゆるやかに境界層外側の位相につながる。

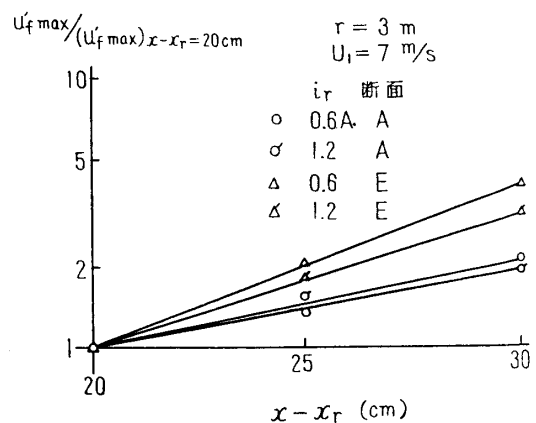
第28図は $r=3$ m, $i_r=1.2A$ の場合の、E断面における $\sqrt{u_f'^2}$ とφであり、 $\sqrt{u_f'^2}$ の傾向は $i_r=0.6A$ の場合(第26図)と同様である。φについてもほぼ同じであるが、 $x-x_r=25, 30$ cm では $y/\delta=0.2\sim 0.5$ での遅れが目立ってくる。 $i_r=0.6A$ の場合と同じく、 $\sqrt{u_f'^2}$ が最小となる位置で、位相は急激に 180° 反転する。この $i_r=1.2A$ の場合にも、E断面での $\sqrt{u_f'^2}$ はA断面に比べて大きい。

$r=5$ m, $U_1=7$ m/s の場合にも、AおよびE断面を比較すると、E断面の $\sqrt{u_f'^2}$ が大きいことがわかる(第29, 30図)。またφの分布についても、 $r=3$ mの場合と同じ傾向である。

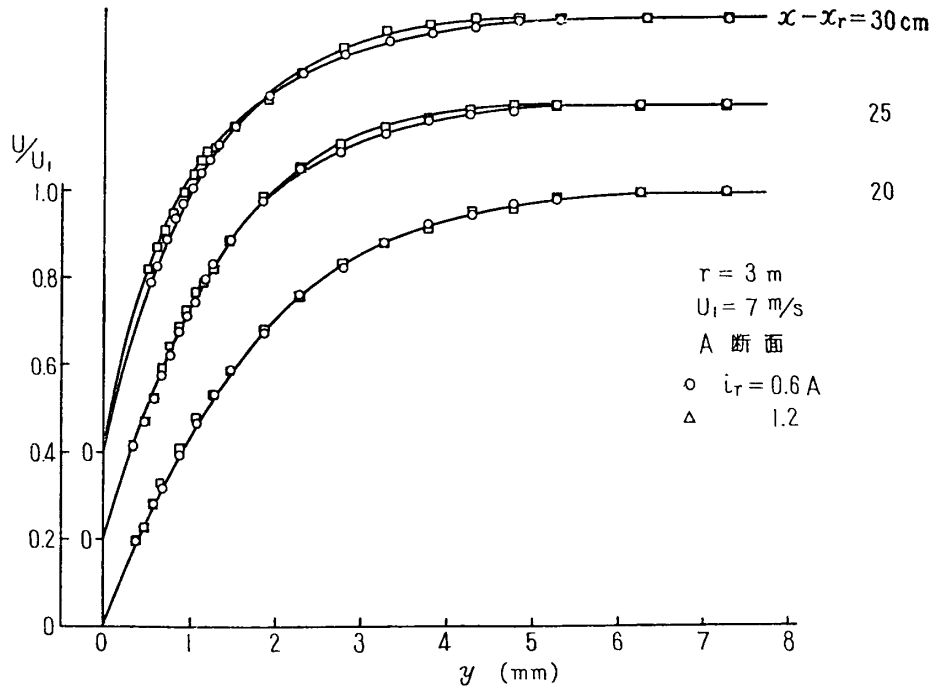
以上の結果から、A, E両断面には特徴的な違いのあることが認められる。線型および非線型の範囲で、進行波の振幅はE断面が大きい、振幅の絶対値ばかりでなく、その増幅率もE断面の方が大きい(第31図)。即ち、A断面は i_r の大小によらず一定の増幅率を示すが、E断面は総じてA断面より増幅率が大きく、特に線型の範囲での増幅率が大きいわけである。

第32, 33図は、進行波を重畳した場合の平均風速分布であるが、これを見ても非線型的効果がE断面で著しいことがわかり、上記の結果が理解できる。なお、この平均風速分布から、E断面では乱流斑点の発生が起りやすいことも想像される。

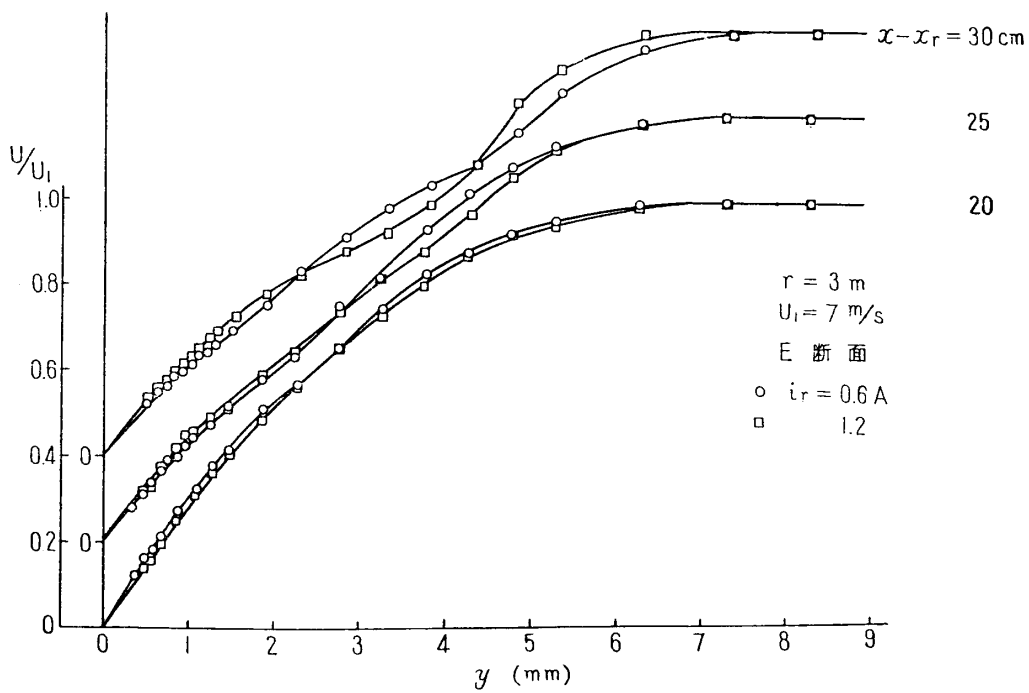
ここで得られた $\sqrt{u_f'^2}$ とφの分布は、Schubauer [14] や Tani-Komoda [25] の観察した平板境界層の遷移の実験と比較して、 $\sqrt{u_f'^2}$ の大きい断面では $\sqrt{u_f'^2}$ の最小の位置で位相が急激に 180° 反転し、 $\sqrt{u_f'^2}$ の小さい断面では位相がゆるやかに反転するという点ではよく一致しているが、これらの断面が平均風速の x 方向の分布のそれぞれ最小位置(E断面)および最大位置(A断面)に対応するという点では逆になっている。このA, E断面の対応の逆転の原因としてまず考えられることは、振動リボンによる進行波が完全に二次元的ではなく、A, E断面と進行波の振舞の組合せを逆にするような初期攪乱が作られている(つまり特にE断面で強い攪乱が作られている)のではないかという疑問である。この疑問に答えるために、 $r=3$ mの模型の振動リボンの下に、Görtler渦の半波長に相当する9mmの間隔で、厚さ0.3mm、長さ9mmのセロハンテープを x 方向に周期的にはることににより、E断面での $\sqrt{u_f'^2}$ を小さくし、A断面での $\sqrt{u_f'^2}$ を大きくするように制御された進行波を重畳したところ、A, E断面とも $\sqrt{u_f'^2}$ の最大値は減少した(第34, 35図)が、 $(\sqrt{u_f'^2})_{\max}$ の比は第25, 26図の場合と同じ



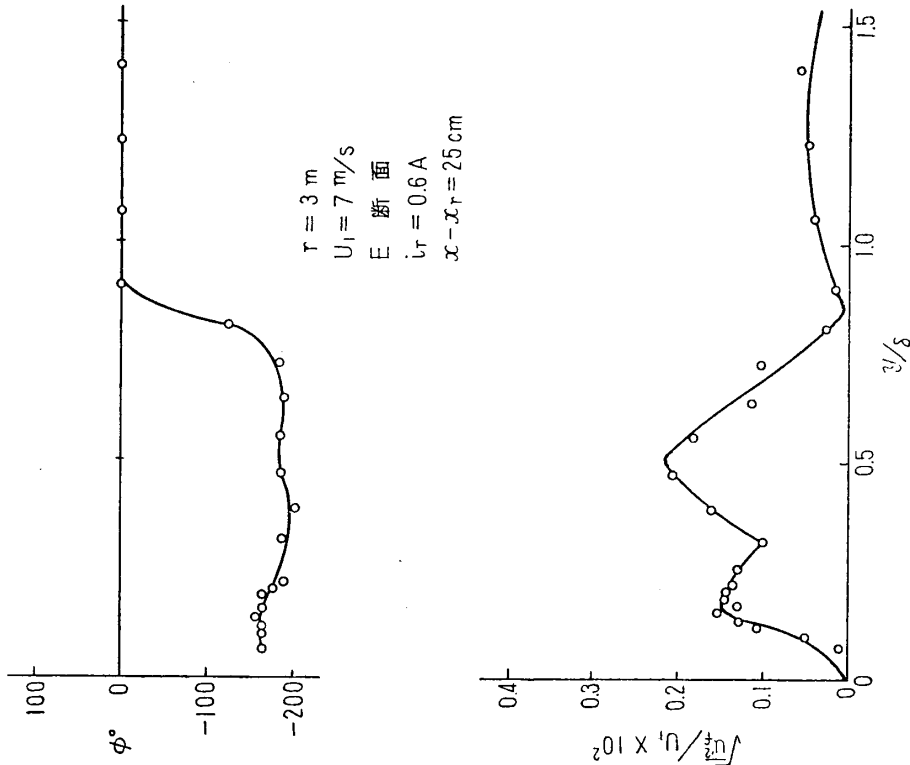
第31図 進行波の流れの方向の増幅。曲率半径3m, 主流の速度7m/sの場合。



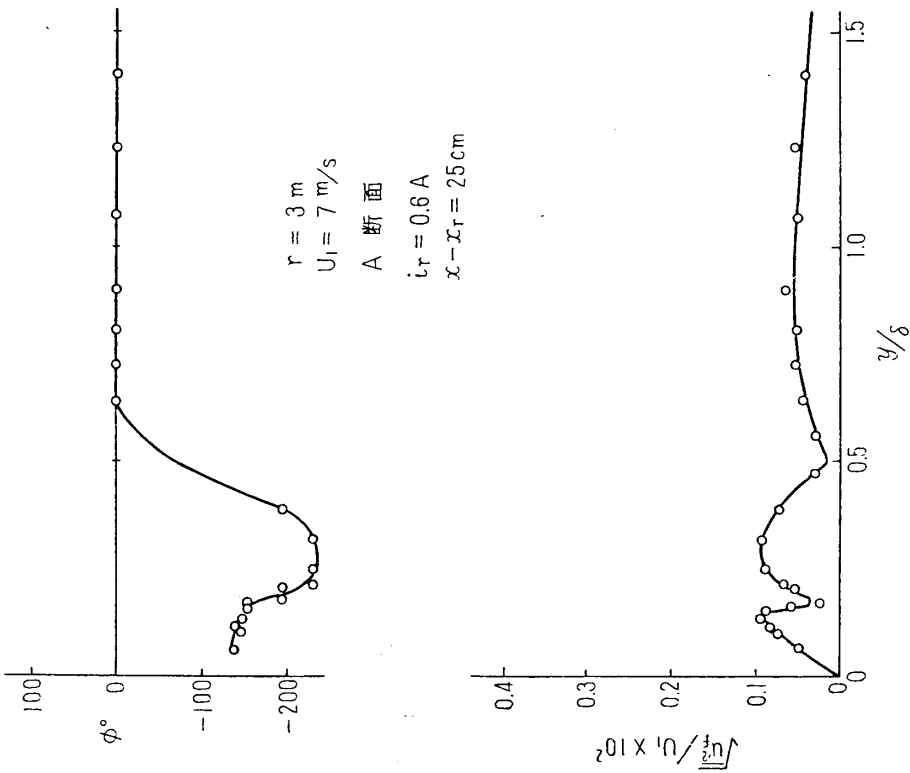
第 32 図 A 断面における平均風速分布. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s の場合.



第 33 図 E 断面における平均風速分布. 曲率半径 3 m, 主流の速度 7 m/s の場合.



第35図 E断面における進行波の振舞. 擾乱に人為的三次元性を与えた場合.



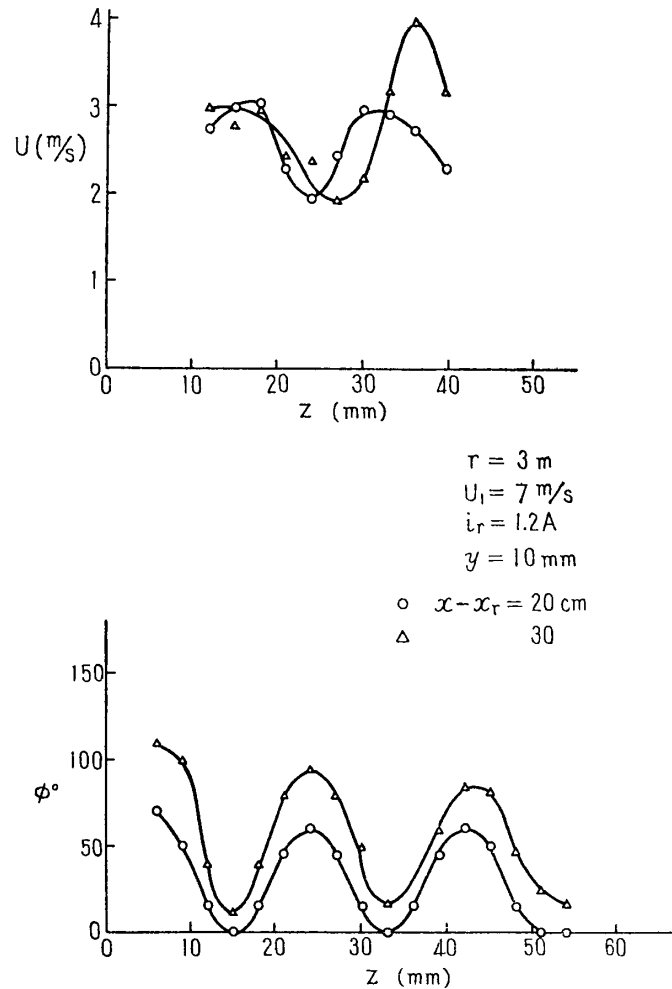
第34図 A断面における進行波の振舞. 擾乱に人為的三次元性を与えた場合.

で、依然として E 断面での進行波の発達は A 断面に比べて著しいことがわかった。 A, E 断面とも $\sqrt{u_r'^2}$ の y 分布は最大値付近で M 型分布となるなどの変形を示し、初期攪乱の持つ三次元性により進行波の y 分布は影響を受けるが、 E 断面での増幅が著しいという場の個有の選択性は、依然として支配的に残るものの如くである。第 36 図は境界層外側で ϕ の z 分布を測定した結果があるが、進行波波面は E 断面で進み、 A 断面で遅れるように屈曲している。この結果は、変動の著しい断面で波面が進むという通常の進行波の性質 [14], [25] とよく合致している。もっとも、筆者の結果と同様の組合せを得ている実験の例もある。それは、Klebanoff, Tidstrom, および Sargent の実験 [24] であって、平板上の二次元的な境界層に、

z 方向に周期性を持つ三次元的な進行波を重畳した場合に、非線型効果によって平均風速も z 方向に周期的になるが、その周期性は進行波の振幅の小さい位置で平均風速が増加し、進行波の大きい位置で平均風速が減少するようになる。これは攪乱の発達や減衰が平均流とのエネルギー交換にもとづいている結果であると解釈できるが、ただそれだけでは Schubauer [14], Tani および Komoda [25] のような逆の組合せの可能性を説明することが出来ない。

そこで、単に平均風速の z 方向の周期性で各断面を区別せずに、各断面の平均風速の y 分布に着目することにしよう。そうすると第 33 図でわかるように、 E 断面の平均速度分布は Görtler 渦の発達に伴って極めて不安定な状態を作り、この断面での変動を著しく増加させることが理解できる。また、 A 断面の平均速度が安定な分布であることから、同断面での変動が小さいことを理解することもできる。

もちろん場の性質としては、 x 方向の平均風速のほかに、 (y, z) 面内の縦渦の運動も考慮されなければならない。第 25~28 図の変動の y 分布を見て気づくことは、 A 断面での変動は下流に行くにつれて分布の重心が壁に近づき、逆に E 断面では壁から遠ざかることである。ここでもう一度、Görtler 渦の性質を調べてみると、Görtler 渦の v 成分は A 断面



第 36 図 境界層外側での進行波の位相の z 方向分布

と E 断面で絶対値が最も大きい、その方向は A 断面では壁に向い、 E 断面では境界層の外側に向っている。結局進行波は、Görtler 渦の v 成分によって、 A 、 E 断面における振幅の y 分布を変えられていることがわかる。第 36 図で見るように、波面は E 断面で進み、 A 断面で遅れるが、波の進行速度の大小を決めているのは、両断面における風速分布の型であり、結局、Görtler 渦の x 方向成分の攪乱が、波面を屈曲させることになると言ってよい。更に、振幅分布の形を A 、 E 断面で異なるものにするのは、攪乱の y 方向成分の働らきであり、また、 z 方向成分も、進行波の波面が屈曲する際に渦糸を引きのばす働らきをしているものと思われる。平板境界層でも、増幅の著しい断面で非線型効果が現われると、変動の最大値が壁から離れるようになり、凹面境界層と類似の性質が観察される。ただ凹面境界層の三次元性は、渦という明瞭な性質を持つために、結果も強調されて理解されやすい。通常、非線型効果は、進行波と場の両方に影響が現われるものであるが、ここで取扱われた問題では、進行波が場の三次元性の影響を強く受けている点に著しい特徴が認められる。

6. 結 論

以上の研究から、次のような結論が導かれる。

1. 凹面に沿う境界層には、横幅方向に周期的な交番縦渦、いわゆる Görtler 渦が発生し、そのために三次元的な速度の場が作られる。Görtler 渦の発達は、線型安定理論で予知されるものと一致する。
2. 曲率半径の異なる凹面では、それぞれ個有の波長の周期性が現われる。その波長は線型理論の示す不安定領域にあるが必ずしも最大の増幅度を持つものではない。波長をきめるものは風洞や模型に固有な攪乱であるかも知れない。このことは逆にいえば、線型理論において不安定な三次元攪乱に対しては、凹面に沿う境界層の選択性が鋭くないことを意味する。
3. Görtler 渦の振幅が主流速度のおよそ 2% を越えると、線型理論との一致がわるくなり、非線型効果が現われてくる。境界層の平均風速分布の運動量厚が、急激に増加するところを遷移と考えると、それは Görtler パラメーター $G = (U_1 \theta / \nu) \sqrt{\theta / r}$ が 6.6~6.8 になるときに起っている。
4. Görtler 渦は下流に行くほど増幅する。平均速度の主流方向成分の z 方向の周期性分布は、はじめ正弦型であるが、やがて風速の早い部分が頭打ちして z 方向に広がり、遅い部分は狭い範囲に集中して深い切込みが作られ、非線型効果による二次配列は出来ない。これは平均流から攪乱の x 方向成分に伝達されたエネルギーが、 y および z 方向の速度成分に分配されて蓄積されるために、周期性分布が正弦的でなくなっても、二次配列が発生しないのであると解釈できる。
5. 凹面に沿う境界層が乱流の場合にも縦渦が発生するが、その振舞は動粘性 ν を乱流動粘性 ν_T で置き換えた線型理論で説明できる。
6. 凹面に沿う境界層に二次元進行波を重畳すると、 E 断面（平均速度の周期性分布で速度の最小となる断面）での振幅が大きくなり、位相は境界層の端附近で急激に 180° 反転し、進行波の振幅の y 分布における重心は下流ほど境界層の外側へ出る。これと反対に、 A 断面（周期性分布で速度の最大となる断面）での振幅は小さく、位相は境界層の中央付近でゆ

るやかに反転し、進行波の振幅の y 分布の重心は下流ほど壁に近づく。

7. 進行波は E 断面で進み、 A 断面で遅れるように波面が屈曲するが、これは両断面の風速分布が波の位相速度に影響しているためである。

8. 進行波の振舞は、振幅が小さくて線型の場合と、振幅が大きくて非線型の場合の違いよりも、むしろ A, E などの断面での違いの方が著しい。このことは渦によって作られた三次元性が、進行波に支配的影響を持つことを示している。

9. 凹面に沿う境界層では、変動は初期の三次元性に依らずに、 E 断面で大きくなるような選択性がある。それは Görtler 渦の発達によって、 E 断面での風速分布が極めて不安定な形となるためである。

10. 凹面境界層の遷移において、Görtler 渦は本質的な役割を果しているのではない。Görtler 渦は速度場に三次元性を与えることにより間接的に遷移に影響をおよぼしているのである。それは、Görtler 渦によって作られた三次元的速度場における進行波の振舞が、平板境界層について既に知られている進行波の三次元的振舞と、一致していることから明らかである。即ち、Görtler 渦は速度場を三次元的にすることにより進行波の増幅を著しくして、境界層の遷移に媒介的な影響をおよぼしているのである。

本研究において、終始懇切な御指導をいただいた谷一郎教授に深く感謝の意を表す。また、佐藤浩教授はじめ境界層研究グループの方々の有益な御助言に感謝の意を表す。本実験で一貫して御協力下さった井内松三郎氏に厚く御礼申し上げる。末尾ながら、測定や作図等で多大な御尽力をいただいた京谷右、田籠勝美、倉田栄昭の諸氏に厚く御礼申し上げる次第である。

参 考 文 献

- [1] Taylor, G. I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 223, pp. 289-343, 1923.
- [2] Terada, T., and Second Year Students of Physics: Some experiments on periodic columnar forms of vortices caused by convection. Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., Rep. No. 31, 1928.
- [3] Terada, T., and Tamano, M.: Further researches on periodic columnar vortices produced by convection. Aero. Res. Inst., Tokyo Imp. Univ., Rep. No. 53, 1929.
- [4] Görtler, H.: Über den Einfluß der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz. z. angew. Math. Mech., Bd. 20, Nr. 3, pp. 138-147, 1940.
- [5] Görtler, H.: Über eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. Göttingen Nachr., Math. Phys. Kl., Vol. 2, No. 1, 1940.
- [6] Liepmann, H. W.: Investigation of boundary layer transition on concave walls. NACA Adv. Conf. Rep., 4J28, Feb. 1945: published as NACA Wartime Rep. W-87, 1945.
- [7] Meksyn, D.: Stability of viscous flow over concave cylindrical surfaces. Proc. Roy. Soc. (London) A 203, pp. 253-265, 1950.
- [8] Gregory, N., and Walker, W. S.: The effect on transition of isolated surface excrescences in the boundary layer. ARC Tech. Rep. 13,436, 1950; published as ARC R. & M. No. 2779, 1956.
- [9] Hämmerlin, G.: Über das Eigenwertproblem der dreidimensionalen Instabilität laminarer Grenzschichten an konkaven Wänden. J. Rat. Mech. Anal., Vol. 4, pp. 279-321, 1955.
- [10] Di Prima, R. C.: Application of the Galerkin Method to Problems in Hydrodynamic Stability Quart. Appl. Math., Vol. 13, pp. 55-62, 1955.

- [11] Smith, A. M. O.: On the Growth of Taylor-Görtler Vortices along Highly Concave Walls. *Quart. Appl. Math.*, Vol. 13, pp. 233-262, 1955.
- [12] Di Prima, R. C. and Dunn, D. W.: The effect of heating and cooling on the stability of boundary-layer flow of a liquid over a Curved surface. *Jour. Aeron. Sci.* 23, pp. 913-916, 1956.
- [13] Stuart, J. T.: On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.* 4, pp. 1-21, 1958.
- [14] Schubauer, G. B.: Mechanism of Transition at Subsonic Speeds. *Boundary Layer Res., Proc. Int. Union and Appl. Mech.*, H. Görtler, ed., Springer Verlag (Berlin), pp. 85-108, 1958.
- [15] Görtler, H. and Witting, H.: Theorie der sekundären Instabilität der laminarer Grenzschichten. *Boundary Layer Res., Proc. Int. Union and Appl. Mech.*, H. Görtler, ed., Springer Verlag (Berlin), pp. 110-126, 1958.
- [16] Görtler, H.: Über eine Analogie zwischen den Instabilitäten laminarer Grenzschichtströmung an konkaven Wänden und an erwärmten Wänden. *Ing. Arch.*, Vol. 28, pp. 71-78, 1959.
- [17] Stuart, J. T.: Non-linear effects in hydrodynamic stability. *Tenth Int'l. Cong. Cong. Appl. Mech.*, Stresa, Italy, 1960.
- [18] Stuart, J. T.: On three-dimensional non-linear effects in the stability of parallel flows. *Sec. Int'l. Cog. ICAS, Zurich, Switzerland*, 1960.
- [19] Benney, D. J. and Lin, C. C.: On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow. *Physics of Fluids*, 3, pp. 656-657, 1960.
- [20] Aihara, Y.: Stability of the Compressible Boundary Layer along a Curved Wall under Görtler-Type Disturbances. *Aero. Res. Inst., Univ. Tokyo, Rep. No. 362*, 1962.
- [21] Benney, D. J.: A non-linear theory for oscillations in a parallel flow. *J. Fluid Mech.*, 10, pp. 209-236, 1961.
- [22] Tani, I.: Some Aspects of Boundary Layer Transition at Subsonic Speeds. *Advances in Aeron. Sci.*, Vol. 3, pp. 143-160, 1961.
- [23] Hämmerlin, G.: Über die Stabilität einer kompressible Strömung längs einer konkaven Wand bei verschiedenen Wandtemperaturverhältnissen. *D.V.L. Bericht Nr. 176*, 1961.
- [24] Klebanoff, P. S., Tidstrom, K. D., and Sargent, L. M.: The Three-Dimensional Nature of Boundary Layer Instability. *J. Fluid Mech.*, Vol. 12, pp. 1-34, 1962.
- [25] Tani, I. and Komoda, H.: Boundary-Layer Transition in the Presence of Streamwise Vortices. *J. Aerospace Sci.*, Vol. 29, pp. 440-444, 1962.
- [26] Tani, I.: Production of Longitudinal Vortices in the Boundary Layer along a Concave Wall. *J. Geophys. Res.*, Vol. 67, No. 6, June 1962.