

プラズマ中の平面衝撃波の内部構造

丹 生 慶 四 郎*

Structures of the Plane Shock Wave in Plasma

By

Keishiro NIU

Abstract: The Structure of a plane shock wave which propagates in a plasma without magnetic fields is investigated by using the fully ionized model of the ion and the electron gases. The transport equations are of the Navier-Stokes type, the viscosity of the ion and the thermal conductivity of the electron being taken into account. To calculate the collision terms in the shocked region, the Mott-Smith type and the local equilibrium type are assumed to the distribution functions of the ion and the electron respectively, and the Fokker-Planck equation is employed. This formulation can always give the continuous solutions which do not miss a physical meaning for all Mach numbers. Then the three-fluid model which improves the transport equations for the ion is proposed. Alternative forms of considering the momentum of the electron are shown, too. In addition, the several authors' contributions to the structures of plane shock waves, caused by the collisions of the composed particles or by the external magnetic field without collisions, are reported concisely.

1. ま え が き

元来衝撃波の内部は典型的な非平衡の領域であるため、これまでの平衡状態を基礎として発展して来た方法がどの程度の妥当性を持つか、また如何なる新しい取扱い方法が適用可能であるか、興味ある研究対象である。特にプラズマの場合は、中性気体と異って構成粒子が電荷を持つため、外部電磁場と干渉しながら複雑な運動を行なうが、特に衝撃波の内部においては電荷分離でそれ自身で電場が発生し、これが流れの運動エネルギーと関連して、大きなプラズマ振動を引き起こすことが可能である。また構成粒子のイオンと電子との間に大きな質量差が存在するため、質量の大きいイオンが運動量の大半をにない、したがって衝撃波の波形を一義的に決定し、電子は圧力とエネルギーにおいて寄与しているに過ぎないと考えられる。エネルギーの散逸機構に関しても、たとえば粘性はイオンがにない、熱伝導には電子が主役を演じるといった事情にある。さらにこの大きな質量差は、イオンと電子との衝突に際して、運動量およびエネルギーの交換を小ならしめる原因を作っている。それゆえにプラズマを一流体として一括して取扱うよりは、イオンと電子とを別個の二流体として取扱い、両者の間に弱い関連が存在すると考えたほうが適切である場合があり得るが、衝撃波の内部はまさにその代表的な領域となっている。

プラズマ中の平面衝撃波の内部構造に関しては、既に多くの研究者たちが解析を試みてきたが、その初期においては一流体的な取扱いが多く [1]~[8]、その後の二流体的な取扱いもかなりの数にのぼっている [9]~[17]。さらに最近に至って、磁場中のプラズマに存在する衝突

* 大阪大学基礎工学部

なしの衝撃波に対する研究も顕著になってきた [18]~[27].

以下では主としてイオンと電子の二流体的方法に限定して、一般的な取扱い方法と、これまでに得られた主な結果について報告する。

2. 基礎方程式

前述のごとくわれわれの研究対象は典型的な非平衡状態であるから、イオンおよび電子に対する Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{K}_k \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{c}} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_c, \quad k=p \text{ or } e \quad (1)$$

より出発するのが適当であろうと考えられる。ここで f は分布函数、 t は時間、 $\boldsymbol{\gamma}$ は粒子の位置、 \mathbf{c} は速度、 \mathbf{K} は外力、 $()_c$ は衝突による変量、添字 p および e はそれぞれイオンおよび電子を表わしている。勿論プラズマの構成粒子間に働く Coulomb 力は遠隔力であるため Boltzmann 方程式自身の妥当性についての疑問は残るが、ここではそれを問わないことにする。しかしなお Boltzmann 方程式を初期値問題あるいは境界値問題として解くことは一般的には極めて困難である。そこで分布函数 f の形を適当に仮定して現象の解析にあたることが多い。よく採用される分布函数型としては、a) 局所平衡型、b) Mott-Smith 型 [28]、c) 二流体モデル型 [29], [30] がある。a) は粒子間の衝突頻度の高い電子に対してよく用いられ、b) は Mach 数の大きいプラズマ流内の衝撃波のイオンの分布函数としてしばしば採用される。c) は一成分気体に対して a) および b) を改良するために提案されたもので、衝撃波内の一成分の粒子群を二つに分類し、各々に別個の Boltzmann 方程式をたてる法である。勿論この考えはプラズマのたとえばイオンに対して適用できる。しかしよく知られているように、分布函数型の如何を問わず、(1) 式の零次、一次、二次のモーメント方程式として次の輸送方程式が与えられる。

$$\frac{Dn_k}{Dt} + n_k \frac{\partial V_k}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = 0 \quad (2)$$

$$n_k \frac{D\mathbf{p}_{ki}}{Dt} - n_k \mathbf{K}_{ki} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} \mathbf{F}_{kij} = \mathbf{R}_{ki} \quad (3)$$

$$\frac{D}{Dt} (n_k U_k) + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \mathbf{q}_k + n_k U_k \frac{\partial V_k}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{F}_{kij} \frac{\partial V_{ki}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} = Q_k - V_{ki} \mathbf{R}_{ki} \quad (4)$$

ここで n は粒子の数密度、 i は流体の速度、 \mathbf{p} は運動量、 U は内部エネルギー、 \mathbf{F} は応力テンサー、 \mathbf{q} は熱流を表わす。右辺の \mathbf{R} および Q は異種粒子との衝突によって単位時間当り持ち込まれる運動量およびエネルギーで、

$$\mathbf{R}_k = \int d\mathbf{c} m_k \mathbf{c} \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_c \quad (5), \quad Q_k = \int d\mathbf{c} \frac{1}{2} m_k \mathbf{c}^2 \left(\frac{\partial f_k}{\partial t} \right)_c \quad (6)$$

で与えられる。添字 i および j は座標成分を示す。今問題を定常一次元流に限定すると、(2)~(4) 式は

$$u_k \frac{dn_k}{dx} + n_k \frac{du_k}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$n_k u_k \frac{dp_k}{dx} - n_k K_k + \frac{dF_{kxx}}{dx} = R_k \quad (8)$$

$$u_k \frac{d}{dx} (n_k U_k) + \frac{dq_k}{dx} + n_k U_k \frac{du_k}{dx} + F_{kxx} \frac{du_k}{dx} = Q_k - u_k R_k \quad (9)$$

となる．一次元の \mathbf{r} , \mathbf{V} に対して x , u が用いてある． F および q は分布函数型が定まって始めて具体的に書き下すことができるが，ここでは Navier-Stokes 型を採用して

$$p_k = m_k u_k, \quad F_{kxx} = n_k k T_k - \frac{4}{3} \mu_k \frac{du_k}{dx}, \quad K_k = \pm e E, \quad U_k = \frac{3}{2} k T_k, \quad q_k = -\kappa_k \frac{dT_k}{dx} \quad (10)$$

で表わすこととする． k は Boltzmann 定数， T は温度， μ は粘注係数， κ は熱伝導係数， E は電場， e は陽子の電荷量である．これらを用いて (7)~(9) 式をイオンおよび電子に対して別個に書き下すと

$$\frac{d}{dx} (n_p u_p) = 0 \quad (11), \quad \frac{d}{dx} (n_e u_e) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} \left(m_p n_p u_p^2 + k n_p T_p - \frac{4}{3} \mu_p \frac{du_p}{dx} \right) - e n_p E = R \quad (13)$$

$$\frac{d}{dx} \left(m_e n_e u_e^2 + k n_e T_e - \frac{4}{3} \mu_e \frac{du_e}{dx} \right) + e n_e E = -R \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} m_p n_p u_p^3 + \frac{5}{2} k n_p u_p T_p - \frac{4}{3} \mu_p u_p \frac{du_p}{dx} - \kappa_p \frac{dT_p}{dx} \right) - e n_p u_p E = Q \quad (15)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} m_e n_e u_e^3 + \frac{5}{2} k n_e u_e T_e - \frac{4}{3} \mu_e u_e \frac{du_e}{dx} - \kappa_e \frac{dT_e}{dx} \right) + e n_e u_e E = -Q \quad (16)$$

となる．これに Poisson 方程式

$$\frac{dE}{dx} = 4 \pi e (n_p - n_e) \quad (17)$$

をつけ加えてわれわれの基礎式とする．

3. 衝突項

基礎方程式中の (13)~(16) 式の右辺に現われる衝突項 R および Q を具体的に書き下すためには，やはり電子およびイオンの分布函数が知られていねばならない．流れの Mach 数の極端に大きい場合には，イオンが衝撃波をすり抜けるに際してわずかに数回の衝突しか経験しない場合があるが，このような時でも電子同志はなお数百回の衝突を繰返す．従って電子は局所平衡型の分布

$$f_e(x, \mathbf{c}) = n_e(x) \left\{ \frac{m_e}{2\pi k T_e(x)} \right\}^{3/2} \exp \left[-\frac{m_e \{ \mathbf{c} + \mathbf{i} u_e(x) \}^2}{2k T_e(x)} \right] \quad (18)$$

に従うと仮定してさしつかえない． \mathbf{i} は x 方向の単位ベクトルである．勿論電子がイオンとの間に相対速度をもつ現在のよう問題においては，いわゆる runaway effect 等により電子の分布形が (18) 式より異なることは十分考えられるが，電子イオン間の運動量に関する相互作用は，電場を通じて行なわれるものが一義的であって，衝突項は，電場によって引き起されるプラズマ振動の damping に寄与するに過ぎない．またエネルギーに関する相互作用は，緩和時間の相違によって，イオン電子間の相対速度が消滅した後において行なわれる．それゆえ衝突項に対してわれわれが選ぶ電子の分布函数は (18) 式である．

次にイオンには Mott-Smith 型の分布 [28]

$$f_p(x, \mathbf{c}) = n_{p1}(x) \left(\frac{m_p}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_p (\mathbf{c} - \mathbf{i} u_{p1})^2}{2k T_1} \right\} \\ + n_{p2}(x) \left(\frac{m_p}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_p (\mathbf{c} - \mathbf{i} u_{p2})^2}{2k T_2} \right\} \quad (19)$$

を仮定する。添字 1 は衝撃波の前方の性質を持つ量に対して付け加えられ、2 は後方のものに対して付されている。(19) 式は Mach 数の小さな流れに対して近似が悪く、衝突不変量に対するモーメント方程式は適切なものを与えず、速度、温度の変化が u_1 と u_2 および T_1 と T_2 の間だけしか記述できない。また粘性および熱伝導を導入できるように変形することが困難などの欠点を有するが、Mach 数の比較的大きな流れに対してはよい衝撃波形を与える表式である。ここで

$$n_{p1}(x) + u_{p2}(x) = n_p(x) \quad (20), \quad n_{p1}(x)u_1 + n_{p2}(x)u_2 = n_p(x)u_p(x) \quad (21)$$

なる関係を使って (19) 式中の変数 n_{p1} , n_{p2} を n_p , u_p に書き換えれば

$$f_p(x, \mathbf{c}) = n_p(x) \frac{u_p(x) - u_2}{u_1 - u_2} \left(\frac{m_p}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_p(\mathbf{c} - \mathbf{i}u_{p1})^2}{2kT_1} \right\} \\ + n_p(x) \frac{u_1 - u_p(x)}{u_1 - u_2} \left(\frac{m_p}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_p(\mathbf{c} - \mathbf{i}u_{p2})^2}{2kT_2} \right\} \quad (22)$$

なる変形された Mott-Smith 型分布を得る。

さてこれらの分布函数を用いて衝突項を計算するには、a) 遮屏ポテンシャルを用いて二体衝突で計算する方法 [31], b) Fokker-Planck 方程式による方法 [32], などがあるが、ここでは後者を用いる。即ち

$$\frac{1}{\Gamma} \left(\frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_c = -\frac{\partial}{\partial c_i} \left(f_p \frac{\partial H}{\partial c_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial c_j} \left(f_p \frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\partial}{\partial c_j} G \right) \\ H = \frac{u_p + u_e}{m_e} \int d\mathbf{c}' \frac{f_e(\mathbf{c}')}{|\mathbf{c} - \mathbf{c}'|}, \quad G = \int d\mathbf{c}' f_e(\mathbf{c}') |\mathbf{c} - \mathbf{c}'|, \quad \Gamma = \frac{2\pi e^4}{m_p^2} \ln \left\{ \frac{9}{16\pi n_1} \left(\frac{kT_1}{e^2} \right)^3 \right\} \quad (23)$$

を使用する。これより R は

$$R = \frac{2\Gamma m_p(m_p + m_e)n_p n_e(u_p - u_2)}{\pi^{3/2} m_c(u_1 - u_2)(u_1 - u_e)} \left[\frac{1}{\left\{ \frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right\}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(u_1 - u_e)^2}{\frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e}} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{u_1 - u_e} \operatorname{erf} \frac{u_1 - u_e}{\left(\frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}} \right] \\ - \frac{2\Gamma m_p(m_p + m_e)n_p n_e(u_1 - u_p)}{\pi^{3/2} m_e(u_1 - u_2)(u_e - u_2)} \left[\frac{1}{\left\{ \frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right\}^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(u_e - u_2)^2}{\frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e}} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{u_e - u_2} \operatorname{erf} \frac{u_e - u_2}{\left(\frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}} \right] \quad (24)$$

と与えられる。ここで $m_e \ll m_p$ を考慮し、exp および erf の引数を小と仮定して展開すると、 R は

$$\bar{R} = \frac{16\pi^{1/2} e^4 n_p n_e m_e^{1/2}}{3(2kT_e)^{3/2}} \ln \left\{ \frac{3}{4e^3} \left(\frac{k^3 T_1^3}{\pi n_1} \right)^{1/2} \right\} (u_e - u_p) \quad (25)$$

で近似できる。これは Spitzer [33] の比抵抗から得られる式

$$\bar{R} = \frac{\pi^{3/2} e^4 n_e^2 m_e^{1/2}}{2(2kT_e)^{3/2}} \ln \left\{ \frac{3}{4e^3} \left(\frac{k^3 T_e^3}{\pi n_e} \right)^{1/2} \right\} (u_e - u_p) \quad (26)$$

と実質的には常数係数だけしか異ならず、この差は仮定した分布函数の差から生じたものである。一方 Q は

$$\begin{aligned}
Q = & -\frac{\Gamma m_p n_p n_e (u_p - u_2)}{\pi^{1/2} (u_1 - u_2)} \left[\frac{1}{\left\{ \frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right\}^{1/2}} \left\{ \frac{4kT_1 (m_p + m_e)}{m_p m_e \left(\frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2(m_p + m_e) u_1}{m_e (u_1 - u_e)} \right\} \exp \left\{ -\frac{(u_1 - u_e)^2}{\frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e}} \right\} + \frac{2}{u_1 - u_e} \left\{ \frac{(m_p + m_e) u_1}{m_e (u_1 - u_e)} - 1 \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{u_1 - u_2}{\left(\frac{2kT_1}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}} \right\} \right] \\
& -\frac{\Gamma m_p n_p n_e (u_1 - u_p)}{\pi^{1/2} (u_1 - u_2)} \left[\frac{1}{\left\{ \frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right\}^{1/2}} \left\{ \frac{4kT_2 (m_p + m_e)}{m_p m_e \left(\frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2(m_p + m_e) u_2}{m_e (u_e - u_2)} \right\} \exp \left\{ -\frac{(u_e - u_2)^2}{\frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e}} \right\} - \frac{2}{u_e - u_2} \left\{ \frac{(m_p + m_e) u_2}{m_e (u_e - u_2)} + 1 \right\} \operatorname{erf} \left\{ \frac{u_e - u_2}{\left(\frac{2kT_2}{m_p} + \frac{2kT_e}{m_e} \right)^{1/2}} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{27}$$

となる。これは (25) 式を得たと同様な近似を施して

$$\bar{Q} = \frac{3}{2} k n_p \frac{T_e - T_p}{\tau} + \bar{R} u_p, \quad \tau = \frac{3 m_e m_p k^{3/2}}{8 (2\pi)^{1/2} n_e e^4 \ln \left\{ \frac{3}{4e^3} \left(\frac{k^3 T_1^3}{\pi n_1} \right)^{1/2} \right\}} \left(\frac{T_e}{m_e} \right)^{3/2} \tag{28}$$

となる。この温度に対する緩和時間 τ は Spitzer の与えるもの [33] と完全に一致している。

(16) 式の右辺を (28) 式を変形して、

$$-\bar{Q} = \frac{3}{2} k n_e \frac{T_p - T_e}{\tau} - \bar{R} u_e + \bar{R} (u_e - u_p) \tag{29}$$

と書けば、衝突によるエネルギー交換は、a) 温度差による熱流、b) 摩擦力のする仕事、c) 摩擦で発生する熱、の三項からなると考えられ、この中 c) は全部電子に吸収されているわけである。

4. 基礎方程式の変形と無次元化

電子とイオンとの大きな質量差を考慮して、基礎方程式 (11)~(17) 中の p_e , μ_e , κ_p を零とよくと二階微係数を消去することができ、

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e (n_p - n_e) \equiv I \tag{30}$$

$$\frac{dn_p}{dx} = \frac{3n_p^2}{4n_1 u_1 \mu_p} \left\{ m_p n_1 u_1^2 + 2k n_1 T_1 - \frac{m_p n_1^2 u_1^2}{n_p} - k n_p T_p - k n_e T_e + \frac{E^2}{8\pi} \right\} \equiv F \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_e}{dx} = & \frac{1}{\kappa_e} \left\{ -\frac{1}{2} m_p n_1 u_1^3 - 5k n_1 u_1 T_1 + (m_p n_1^2 u_1^3 + 2k n_1^2 u_1 T_1) \frac{1}{n_p} - \frac{m_p n_1^3 u_1^3}{2n_p^2} \right. \\
& \left. + \frac{3}{2} k n_1 u_1 T_p + \frac{5}{2} k n_1 u_1 T_e - \frac{k n_1 u_1 n_e T_e}{n_p} + \frac{n_1 u_1 E^2}{8\pi n_p} \right\} \equiv G
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\frac{dn_e}{dx} = -\frac{1}{kT_e} \{ k n_e G + e n_e E + R \} \equiv H \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_p}{dx} = & \frac{2}{3k n_p^2} \left\{ m_p n_1 u_1^2 + 2k n_1 T_1 - k n_e T_e + \frac{E^2}{8\pi} - \frac{m_p n_1^2 u_1^2}{n_p} \right\} F + \frac{2T_e}{3n_p} H \\
& + \frac{2n_e}{3n_p} G - \frac{E}{6\pi k n_p} I + \frac{2eE}{3k} + \frac{2Q}{3k n_1 u_1} \equiv J
\end{aligned} \tag{34}$$

と変形できる。粘性係数として [31]

$$\mu_p = \frac{5}{8} \left(\frac{m_p k T_p}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{k T_p}{e^2} \right)^2 \left\{ \ln \frac{2k T_p}{e^3} \left(\frac{k T_p}{4\pi n_p} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \right\}^{-1} \quad (35)$$

を用いると、これを基準にした熱伝導係数および自由平均行路 [34] は

$$\kappa_e = \frac{15}{4} k \mu_p \left(\frac{1}{m_p m_e} \right)^{1/2} \quad (36), \quad \lambda = \frac{\mu_p}{9.98 \times 10^{-1} n_p} \left(\frac{\pi}{2m_p k T_p} \right)^{1/2} \quad (37)$$

として与えられる。

さてここで

$$\nu = \frac{n_p}{n_1}, \quad \rho = \frac{n_e}{n_1}, \quad \theta = \frac{T_p}{T_1}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_1}, \quad \varepsilon^2 = \frac{E^2}{16\pi k n_1 T_1}, \quad \xi = \frac{x}{\lambda_1} \quad (38)$$

なる関係で変数を無次元化し、

$$\mu_p = \mu_1 \theta^{3/2}, \quad \kappa_e = \kappa_1 \tau^{5/2} \quad (39)$$

および無次元定数

$$M^2 = \frac{3(m_p + m_e)u_1^2}{10kT_1}, \quad m = \frac{m_p}{m_e}, \quad u = \frac{u_2}{u_1}, \quad T = \frac{T_2}{T_1} \quad (40)$$

を用いると (30)~(34) 式は

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = A(\nu - \rho) \equiv N \quad (41)$$

$$\frac{d\nu}{d\xi} = B \frac{\nu}{\theta^{5/2}} \left\{ (10M^2 + 6)\nu - 10M^2 - 3\nu^2\theta - 3\nu\rho\tau + 6\nu\varepsilon^2 \right\} \equiv W \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{d\xi} = C \frac{1}{\nu^2 \tau^{5/2}} \left\{ -(10M^2 + 30)\nu^2 + (20M^2 + 12)\nu - 10M^2 \right. \\ \left. + 9\nu^2\theta + 15\nu^2\tau - 6\nu\rho\tau + 12\nu\varepsilon^2 \right\} \equiv X \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{1}{\tau} \left\{ \rho X + 4A\varepsilon\rho + D \frac{m+1}{1-u} \rho^2 \left(\frac{1-u\nu}{\rho-1} R_1 - \frac{\nu-1}{1-u\rho} R_2 \right) \right\} \equiv Y \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{9\nu^3} \left\{ (20M^2 + 12 - 6\rho\tau + 12\varepsilon^2)\nu - 20M^2 \right\} W + \frac{2\tau}{3\nu} Y \\ + \frac{2\rho}{3\nu} X - \frac{8\varepsilon}{3\nu} N + \frac{8}{3} A\varepsilon - \frac{2D\rho}{3(1-u)} \left\{ (1-u\nu)Q_1 + (\nu-1)Q_2 \right\} \equiv Z \end{aligned} \quad (45)$$

となる。\$R_1, R_2, Q_1, Q_2\$ は (24) および (27) 式より

$$R_1 = \theta_1 \exp(-\theta_1^2 \Omega_1^2) - \frac{1}{\Omega_1} \operatorname{erf}(\theta_1 \Omega_1) \quad (46)$$

$$R_2 = \theta_2 \exp(-\theta_2^2 \Omega_2^2) - \frac{1}{\Omega_2} \operatorname{erf}(\theta_2 \Omega_2) \quad (47)$$

$$Q_1 = (m+1)\theta_1 \left(\frac{1}{1+m\tau} - \frac{1}{\Omega_1} \right) \exp(-\theta_1^2 \Omega_1^2) + \frac{1}{\Omega_1} \left(\frac{m+1}{\Omega_1} - 1 \right) \operatorname{erf}(\theta_1 \Omega_1) \quad (48)$$

$$Q_2 = (m+1)\theta_2 \left(\frac{T}{T+m\tau} + \frac{u}{\Omega_2} \right) \exp(-\theta_2^2 \Omega_2^2) - \frac{1}{\Omega_2} \left(\frac{m+1}{\Omega_2} u + 1 \right) \operatorname{erf}(\theta_2 \Omega_2) \quad (49)$$

$$\theta_1 = \left\{ \frac{5M^2}{3(1+m\tau)} \right\}^{1/2}, \quad \theta_2 = \left\{ \frac{5M^2}{3(T+m\tau)} \right\}^{1/2}, \quad \Omega_1 = 1 - \frac{1}{\rho}, \quad \Omega_2 = \frac{1}{\rho} - u \quad (50)$$

で与えられる。また各常数は

$$A = e\lambda_1 \left(\frac{\pi n_1}{RT_1} \right)^{1/2}, \quad B = \frac{\lambda_1 k n_1 T_1}{4u_1 \mu_1}, \quad C = \frac{\lambda_1 k n_1 u_1}{6\kappa_1}, \quad D = \frac{4\pi^{1/2} e^4 \lambda_1 n_1}{m_p k T_1 u_1^2} \ln \left\{ \frac{9}{16\pi n_1} \left(\frac{kT_1}{e^2} \right)^3 \right\} \quad (51)$$

である。

(41)~(45) 式においては衝撃波の前面は $\xi = -\infty$ に対応し、その点における $d\varepsilon/d\xi$ 等の値は尽く零であるため、これを初期値として積分曲線を求めることは不可能である。そこで各式を (42) 式で割って

$$\frac{d\varepsilon}{d\nu} = \frac{N}{W}, \quad (52), \quad \frac{d\tau}{d\nu} = \frac{X}{W} \quad (53), \quad \frac{d\rho}{d\nu} = \frac{Y}{W} \quad (54), \quad \frac{d\theta}{d\nu} = \frac{Z}{W} \quad (55)$$

とすると、衝撃波の前面は函数空間 $(\nu, \varepsilon, \tau, \rho, \theta)$ 内の $(\nu = \tau = \rho = \theta = 1, \varepsilon = 0)$ なる有限点へ引き寄せることができる。しかしこの点においては、 W, N, X, Y, Z は尽く零であって、 $d\varepsilon/d\nu$ 等の初期値は別途の方策を講じて求めなければ不確定である。そこで

$$\left(\frac{d\rho}{d\nu} \right)_{ini} = a, \quad \left(\frac{d\tau}{d\nu} \right)_{ini} = b, \quad \left(\frac{d\theta}{d\nu} \right)_{ini} = c, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{d\nu} \right)_{ini} = f \quad (56)$$

で表わして、

$$\nu = 1 + d\nu, \quad \rho = 1 + ad\nu, \quad \tau = 1 + bd\nu, \quad \theta = 1 + cd\nu, \quad \varepsilon = fd\nu \quad (57)$$

として (52)~(55) 式の右辺に代入し、 $d\nu$ の高次項を省略すると

$$(a+b)(10M^2 - 3 - 3a - 3b - 3c) = -4 \frac{A}{B} f + \frac{4D}{B} \frac{m+1}{1-u} \left[\left\{ \frac{5M^2}{3(1+m)} \right\}^{1/2} \frac{2(1-u)}{3} a + \frac{R_2'}{1-u} \right] \quad (58)$$

$$b(10M^2 - 3 - 3a - 3b - 3c) = 3 \frac{C}{B} (-2 - 2a + 3b + 3c) \quad (59)$$

$$\left(c - \frac{2}{3} \right) (10M^2 - 3 - 3a - 3b - 3c) = \frac{4D}{3B(1-u)} \left[\left\{ \frac{5M^2}{3(1+m)} \right\}^{1/2} \frac{2(1-u)}{3} \left(m + 1 - \frac{5}{3} M^2 \right) a + \frac{m+1}{1-u} R_2' - Q_2' \right] \quad (60)$$

$$f(10M^2 - 3 - 3a - 3b - 3c) = \frac{A}{B} (1-a) \quad (61)$$

なる代数方程式を得る。ただし

$$R_2' = \left\{ \frac{5M^2}{3(T+m)} \right\}^{1/2} \exp \left\{ -\frac{5M^2(1-u)^2}{3(T+m)} \right\} - \frac{1}{1-u} \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{5M^2}{3(T+m)} \right\}^{1/2} (1-u) \right] \quad (62)$$

$$Q_2' = \left\{ \frac{5M^2}{3(T+m)} \right\}^{1/2} (m+1) \left\{ \frac{T}{T+m} + \frac{u}{1-u} \right\} \exp \left\{ -\frac{5M^2(1-u)^2}{3(T+m)} \right\} - \frac{1}{1-u} \left\{ \frac{(m+1)u}{1-u} + 1 \right\} \operatorname{erf} \left[\left\{ \frac{5M^2}{3(T+m)} \right\}^{1/2} (1-u) \right] \quad (63)$$

である。(58)~(61) 式より根を求めて、これを初期値として (52)~(55) 式で函数空間上の積分曲線を求め、その中より Rankine-Hugoniot の関係を満足するものを選んでその曲線上に適当な位置に原点を定め、(41)~(45) 式を使って物理面へ曲線を変換すると、求める衝撃波

の波形が得られるわけである。この方法によれば、§9 および §10 で述べられる不連続性は、表われず、すべての Mach 数にわたって物理的に意味のある解を求めることが可能である。

5. イオンに対する三流体モデル

§2 で導いた基礎方程式中 (13)~(16) 式は、右辺の衝突項を除くと Navier-Stokes 方程式と完全に同一である。したがって Mach 数の大きい流れのイオンの振舞いを表示するにはよい近似ではない。これを改良するために、ここでは Ziering, Ek, Koch [29] および Glansdroff [30] の二流体モデルを拡張して、次のような三流体モデルを考えてみる。即ち衝撃波中のイオン粒子を次の三群に分ける。

$$f_{p1} = n_{p1}(x) \left\{ \frac{m_p}{2\pi k T_1} \right\}^{3/2} \exp \left[-\frac{m_p(\mathbf{c} - i\mathbf{u}_1)^2}{2k T_1} \right] \quad (64)$$

$$f_{p2} = n_{p2}(x) \left\{ \frac{m_p}{2\pi k T_2} \right\}^{3/2} \exp \left[-\frac{m_p(\mathbf{c} - i\mathbf{u}_2)^2}{2k T_2} \right] \quad (65)$$

$$f_{pl} = n_{pl}(x) \left\{ \frac{m_p}{2\pi k T_l(x)} \right\}^{3/2} \exp \left[-\frac{m_p\{\mathbf{c} - i\mathbf{u}_l(x)\}^2}{2k T_l(x)} \right] + \text{skew term} \quad (66)$$

f_{p1} は衝撃波前方の性質を持つ粒子群、 f_{p2} は後方の性質を持つ粒子群、 f_{pl} は局所平衡的性質を持つ粒子群を表わしている。これは、衝撃波中の非平衡状態にあるイオンの分布函数を Maxwell 型に展開し、未知変数を求めるためのモーメント方程式が衝突不変量より得られるものの中に落つくように、最大を選んで (64)~(66) の三項を得たということである。 f_{pl} は散逸機構をよくするために skew term を含んでいるものとする。この三つの分布函数を個々に Boltzmann 方程式に代入し、零次、一次、二次モーメント方程式を作れば次の 9 式を得る。

$$u_{p1} \frac{dn_{p1}}{dx} = -\alpha_{12} - \alpha_{11}, \quad (67), \quad u_{p2} \frac{dn_{p2}}{dx} = \alpha_{12} + \alpha_{12} \quad (68)$$

$$\frac{d}{dx} (u_{pl} n_{pl}) = \alpha_{11} - \alpha_{12} \quad (69)$$

$$(m_p u_{p1}^2 + k T_{p1}) \frac{dn_{p1}}{dx} - e n_{p1} E = R_1 - \alpha_{12} m_p \frac{u_{p1} + u_{p2}}{2} - \alpha_{11} m_p \frac{u_{p1} + u_{pl}}{2} \quad (70)$$

$$(m_p u_{p2}^2 + k T_{p2}) \frac{dn_{p2}}{dx} - e n_{p2} E = R_2 + \alpha_{12} m_p \frac{u_{p1} + u_{p2}}{2} + \alpha_{12} m_p \frac{u_{pl} + u_{p2}}{2} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(m_p n_{pl} u_{pl}^2 + k u_{pl} T_{pl} - \frac{4}{3} \mu_{pl} \frac{du_{pl}}{dx} \right) - e n_{pl} E \\ & = R_l + \alpha_{11} m_p \frac{u_{p1} + u_{pl}}{2} - \alpha_{12} m_p \frac{u_{pl} + u_{p2}}{2} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} m_p u_{p1}^3 + \frac{5}{2} k u_{p1} T_{p1} \right) \frac{dn_{p1}}{dx} - e n_{p1} u_{p1} E \\ & = Q_1 - \alpha_{12} \left\{ m_p \frac{u_{p1}^2 + u_{p2}^2}{4} + 3k \frac{T_{p1} + T_{p2}}{4} \right\} - \alpha_{11} \left\{ m_p \frac{u_{p1}^2 + u_{pl}^2}{4} + 3k \frac{T_{p1} + T_{pl}}{4} \right\} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} m_p u_{p2}^3 + \frac{5}{2} k u_{p2} T_{p2} \right) \frac{dn_{p2}}{dx} - e n_{p2} u_{p2} E \\ & = Q_2 + \alpha_{12} \left\{ m_p \frac{u_{p1}^2 + u_{p2}^2}{4} + 3k \frac{T_{p1} + T_{p2}}{4} \right\} + \alpha_{12} \left\{ m_p \frac{u_{pl}^2 + u_{p2}^2}{4} + 3k \frac{T_{pl} + T_{p2}}{4} \right\} \end{aligned} \quad (74)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} m_p n_{pl} u_{pl}^3 + \frac{5}{2} k n_{pl} u_{pl} T_{pl} - \frac{4}{3} \mu_{pl} u_{pl} \frac{du_{pl}}{dx} - \kappa_{pl} \frac{dT_{pl}}{dx} \right\} - e n_{pl} u_{pl} E = Q_i$$

$$+ \alpha_{1i} \left\{ m_p \frac{u_{p1}^2 + u_{pl}^2}{4} + 3k \frac{T_{p1} + T_{pl}}{4} \right\} - \alpha_{i2} \left\{ m_p \frac{u_{p2}^2 + u_{pl}^2}{4} + 3k \frac{T_{p2} + T_{pl}}{4} \right\} \quad (75)$$

α_{ij} は i 種の分布函数に属していた粒子が、衝突によって単位時間当たり j 種の分布函数に移って行く、いわゆる遷移確率で、この種の考え方では必然的に導入される未知変数で、今の場合 x の函数である。したがってこれらは

$$-\alpha_{i2} - \alpha_{1i} = \int dc \left(\frac{\partial f_{p1}}{\partial t} \right)_c, \quad \alpha_{1i} - \alpha_{i2} = \int dc \left(\frac{\partial f_{pl}}{\partial t} \right)_c, \quad \alpha_{i2} + \alpha_{i2} = \int dc \left(\frac{\partial f_{p2}}{\partial t} \right)_c \quad (76)$$

なる関係を有する。 P_i, Q_i は粒子の遷移を考えない時、 i 粒子群がイオンの他の粒子群および電子との衝突によって運び込まれる、運動量およびエネルギーの割合で

$$P_i = \int dc m_p c \left(\frac{\partial f_{pi}}{\partial t} \right)_c \quad (77), \quad Q_i = \int dc \frac{1}{2} m_p c^2 \left(\frac{\partial f_{pi}}{\partial t} \right)_c \quad (78)$$

で表わされる。これ以外に、粒子の遷移に伴って受授される運動量およびエネルギーがある。その表示は、この種の考え方における一つの問題点ではあるが、ここでは遷移に関する二つの粒子群の考察量の平均値でもって受授されるものとした。(72) および (75) 式に表われている粘性係数 μ_{pl} および熱伝導係数 κ_{pl} は、(66) 式中の skew term より導入されたものと考え、プラズマ中の衝撃波形を求める際、解の連続性に重要な役割を果たすものである。このイオンの三流体モデルの導入によって、イオンの振舞いは Mach 数のすべての領域にわたってかなりよく近似されると思われるが、ここで持ち込まれた未知変数は $n_1, n_2, n_i, u_i, T_i, \alpha_{i2}, \alpha_{1i}, \alpha_{i2}$ の 8 個であって、輸送方程式は (67)~(75) の 9 式が存在するため、1 式は差し当たり省略して解を求め、後程得られた解の近似度を調べるために使用することができる。

6. 電子の運動量を考慮する場合

§4 においては、電子の質量がイオンの質量に比して充分小さいことを考慮して、 $p_e = \mu_e = \kappa_p = 0$ と置くことにより、基礎方程式を数値積分可能な型式に簡略化し得ることを示した。しかし電子の質量が小さいことは、電子が外界の微小な変動にも影響されやすいことを意味している。したがって §4 の結果が、衝撃波形の特に初期勾配等において、正確な値を与え得るかどうかの疑問が存在する。また最近の実験において、プラズマ中の衝撃波のかなり前方に電子密度の高い領域が張り出しているという、いわゆる precursor effect が検出された [35]~[37]。この現象に関しては、定義 (40) からわかるごとく、イオンおよび電子が別個の流体であると考えた時のそれぞれの Mach 数 M が質量に依存して大きく異なること、電子とイオンとの衝突断面積が相対速度の大きいものほど小さいことによる runaway effect 等、色々の原因を思い起させるが、何れにしても電子の運動量を無視しては説明不可能のように考えられる。そこで基礎方程式 (11)~(17) 中、電子の運動量はそのまま残し、電子の粘性、イオンの熱伝導に関する項は

$$\mu_e \frac{dn_e}{dx} = \left(\frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right) \mu_p \frac{dn_p}{dx}, \quad \kappa_p \frac{dT_p}{dx} = \left(\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right) \kappa_e \frac{dT_e}{dx} \quad (79)$$

と変形して、括弧内の微量の変化は無視して常数として与式を変形した後、各考察点の値を選ばせると、かなり複雑ではあるが (30)~(34) 式に対応する下記の 5 式を導き得る。

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e (n_p - n_e) \equiv I' \quad (80)$$

$$\frac{dn_p}{dx} = \frac{3n_p^2 n_e^2}{4n_1 u_1 \mu_p \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left\{ (m_p + m_e) n_1 u_1^2 + 2k n_1 T_1 \right. \\ \left. - \frac{n_1^2 u_1^2}{n_p n_e} (m_p n_e + m_e n_p) - k(n_p T_p + n_e T_e) + \frac{E^2}{8\pi} \right\} \equiv F' \quad (81)$$

$$\frac{dT_e}{dx} = \frac{1}{\kappa_e \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} \left\{ -\frac{1}{2} (m_p + m_e) n_1 u_1^3 - 5k n_1 u_1 T_1 + \frac{n_1^3 u_1^3}{2n_p^2 n_e^2} (m_p n_e^2 + m_e n_p^2) \right. \\ \left. + \frac{5}{2} k n_1 u_1 (T_p + T_e) + \frac{4n_1^2 u_1^2 \mu_p}{3n_p^3 n_e^3} \left(n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right) F' \right\} \equiv G' \quad (82)$$

$$\frac{dn_c}{dx} = \left[Q + en_1 u_1 E - \frac{(R + en_p E) \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)}{k n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \right] \left\{ \frac{5k n_1 u_1}{2 \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} \right. \\ \left. - \frac{k n_1 u_1}{n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \frac{n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{n_e} \right) \right\} \\ - \left[\frac{n_1 u_1 E}{4\pi n_p \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \frac{n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{n_e} \right) \right. \\ \left. + \frac{n_e^2 E}{4\pi k n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left\{ \frac{5k n_1 u_1}{2 \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{k n_1 u_1}{n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \frac{n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{n_e} \right) \right\} \right] I' + \left[\frac{n_1^3 u_1^3}{\left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right) n_p^3} \right. \\ \left. + \frac{4n_1^2 u_1^2 \mu_p}{3n_p^4 \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left\{ \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \frac{n_p^2 (2n_p - 3n_e) \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} - n_e^3}{n_e} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} (n_e^2 + 3n_p^2) \right\} F' \right. \\ \left. - \frac{n_1 u_1}{n_p \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left(\frac{m_p n_1^2 u_1^2}{n_p^2} - k T_p \right) \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \frac{n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{n_e} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{k n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left\{ \left(k T_p - \frac{m_p n_1^2 u_1^2}{n_p} \right) n_p \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8n_1 u_1 \mu_p}{3n_p} \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} F' \right\} \left\{ \frac{5k n_1 u_1}{2 \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{kn_1 u_1}{n_e^2 + n_p^2} \left(\frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \right) \right) \Big] F' \\
& + \left[\frac{5}{2} kn_1 u_1 \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} + \frac{kn_1 u_1}{n_p \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left\{ n_e^3 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \left(n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right) \right\} \right. \\
& - \frac{n_e^3}{n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left\{ \frac{5kn_1 u_1}{2 \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} - \frac{kn_1 u_1}{n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \right) \right\} \Big] G' \Big] \div \left[\frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} m_e n_1^3 u_1^3}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} n_e^3} \right. \\
& + \frac{4n_1^2 u_1^2 \mu_p \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{n_p n_e \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left(1 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} 2n_e^3 - n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} 3n_e^3} \right) F' \\
& + \frac{n_1 u_1}{n_p \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right)} \left(\frac{m_e n_1^2 u_1^2}{n_e^2} - k T_e \right) \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \right) \\
& - \frac{1}{kn_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left(\frac{8n_1 u_1 \mu_p}{3n_e} \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} F' + m_e n_1^2 u_1^2 - kn_e^2 T_e \right) \left\{ \frac{5kn_1 u_1}{2 \left(1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} \right)} \right. \\
& \left. - \frac{kn_1 u_1}{n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left(n_e^2 - \frac{\frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e} n_e^3 + n_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}}{1 + \frac{\kappa_p}{\kappa_e} \frac{dT_p}{dT_e}} \right) \right\} \equiv H' \tag{83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dT_p}{dx} &= \frac{1}{kn_p^3 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p}} \left[(R + en_p E) \left(n_e^2 + n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} \right) - \frac{n_e^2 E}{4\pi} I' \right. \\
& - \left. \left\{ \left(k T_p - \frac{m_p n_1^2 u_1^2}{n_p^2} \right) n_p^2 \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} - \frac{8n_1 u_1 \mu_p}{3n_p} \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} F' \right\} F' \right. \\
& \left. + kn_e^3 G' - \left(\frac{8n_1 u_1 \mu_p}{3n_e} \frac{\mu_e}{\mu_p} \frac{dn_e}{dn_p} + m_e n_1^2 u_1^2 - n_e^2 k T_e \right) H' \right] \equiv J' \tag{84}
\end{aligned}$$

7. Tidman の解析

以下の数節は、すでに得られている結果の簡単な紹介である。Tidman [10] はプラズマ中の衝撃波の厚さを示す代表的な量として、イオンの運動量に変化する距離 l 、イオンと電子との間に温度差が認められる距離 l_i 、イオンと電子との間に速度差の認められる距離 l_v 、の三つを考え、この三量は order を異にすると考えて、それぞれ独立に Mach 数を parameter とし

て表示した. 計算に際して, 電子は局所平衡型, イオンは Mott-Smith 型の分布函数を採用し, 衝突項は Fokker-Planck 式を使用している. その結果は

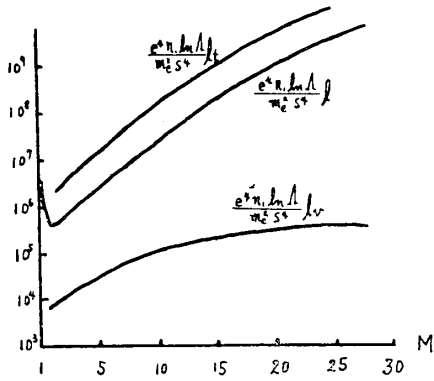


Fig. 1

$$l \rightarrow \frac{29.1 M^4 S^4}{512 \pi n_1 \Gamma} \text{ as } M \rightarrow \infty,$$

$$l \rightarrow \frac{3}{10} \left(\frac{3\pi}{10} \right)^{1/2} \frac{S^4}{n_1 \Gamma (M-1)} \text{ as } M \rightarrow 1 \quad (85)$$

$$l_i \frac{e^4 n_1 \ln A}{m_e^2 S^4} = \frac{3 m^{5/2}}{8192 \sqrt{\pi}} (3 + M^2)^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{20 M^4} + \frac{21}{10 M^2} \right)^{3/2} \quad (86)$$

$$l_v \frac{e^4 n_1 \ln A}{m_e^2 S^4} = \frac{3}{16\pi} \left(\frac{3\pi}{5} \right)^{1/2} m^{3/2} M \quad (87)$$

である. ただし

$$A = \frac{3}{4(\pi n_1)^{1/2}} \left(\frac{k T_1}{e_2} \right)^{3/2}, \quad S^2 = \frac{10 k T_1}{3 m_p} \quad (88)$$

で, 概略は Fig. 1 の示す通りである.

8. Jukes の解析

Jukes [11] はイオンと電子間の密度差は無視して, 温度差を考慮して得られる衝撃波形を求めている. エネルギー式はイオンおよび電子について別個にたて,

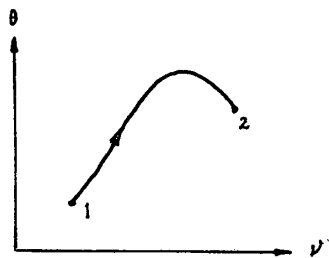


Fig. 2

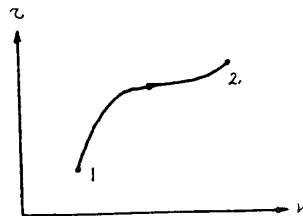


Fig. 3

$$k u \left(\frac{3}{2} n \frac{dT_p}{dx} - T_p \frac{dn}{dx} \right) = \frac{4}{3} \mu_p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{L n^2}{T_e^{3/2}} (T_e - T_p) \quad (89)$$

$$k u \left(\frac{3}{2} n \frac{dT_e}{dx} - T_e \frac{dT_e}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\kappa_e \frac{dT_e}{dx} \right) - \frac{L n^2}{T_e^{3/2}} (T_e - T_p) \quad (90)$$

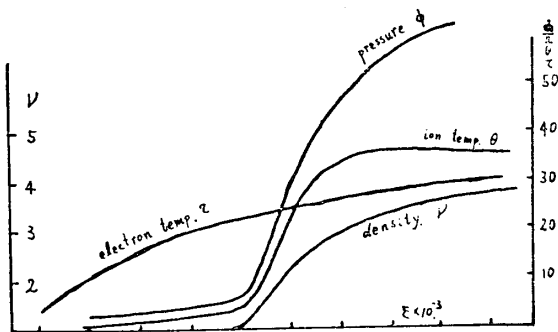


Fig. 4

とする. ただし

$$L = \left(\frac{32\pi}{m_e k} \right)^{1/2} \frac{e^4 m_e \ln A}{m_p} \quad (91)$$

である. 連続式および運動量式はイオンおよび電子をこみにして,

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (92)$$

$$P + \rho u^2 - \frac{3}{4} \mu_p \frac{du}{px} = [P + \rho u^2]_1 = [P + \rho u^2]_2 \quad (93)$$

を選ぶ。ここに ρ は密度, P は圧力である。これらより消去可能な変数は消去し, 残りを無次元化すれば, 結局, v, θ, τ の三変数となる。この三変数を作る三次元空間でまず積分曲線を求めて (Fig. 2 および Fig. 3), それを物理面へもどせば Fig. 4 のごとくなる。イオン温度 θ は, 一度イオンの運動エネルギーが熱に変換されるため上り過ぎるが, その後電子へ一部が伝導されて, 両者共通の一定値に落ちつくのである。電子温度の高い領域が前方へ伸びるのは電子の熱伝導度が大きいためである。

9. Greenberg, Sen & Trève の解析

上記の三名 [13] は, Jukes の解析に反して, イオンと電子との温度差は無視し, 数密度間の相違を考慮しながら衝撃波形を求めようとした。基礎式としては, 運動量式

$$\frac{d}{dx} \left(P + Gv - \frac{E^2}{8\pi} \right) = 0 \quad (94)$$

エネルギー式

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{G^3 v^2}{2} + 5GPvf \right) = 0 \quad (95)$$

拡散式

$$u_p - u_e = \frac{1}{2} \left(\frac{3kT_1}{m_e} \right)^{1/2} \lambda_1 \frac{1}{f(1-f)} \left\{ \frac{1-f}{P} \frac{dP}{dx} - \frac{df}{dx} + \frac{(1-f)neE}{P} \right\} \quad (96)$$

Poisson 式

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi e(n_p - n_e) \quad (97)$$

を選ぶ。ただし

$$G = \rho u, \quad v = \frac{1}{\rho}, \quad f = \frac{n_p}{n_p + n_e} \quad (98)$$

である。 v の無次元量を ψ で表わすと, これらは結局二次元空間 (ε, ψ) 内の積分曲線を求める問題となり (Fig. 5), 物理面での変動は Fig. 6 または Fig. 7 のごとくなる。Debye の遮断距離を λ_D で表わせば, 解は M と λ/λ_D の二つの parameter の組み合わせによって, 振動型 (Fig. 6. Fig. 5 では実線に相当する) と, 非振動型 (Fig. 7. Fig. 5 では点線に相当する)

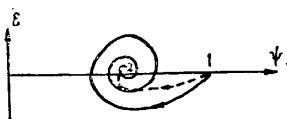


Fig. 5

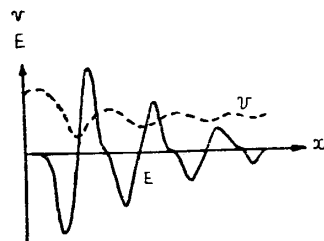


Fig. 6

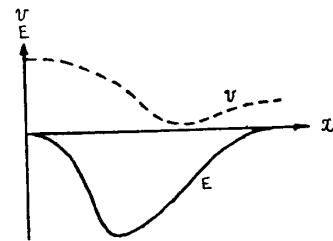


Fig. 7

の二種類に分類される。しかしこの方法によっては, Mach 数が 1.966 より小さい流れにおいてのみ, 連続解を有するに過ぎない。

10. Greenberg & Trève の解析

Greenberg と Trève [14] は §9 の結果を改良すべく、分布函数のモーメント方程式を基礎として出発した。イオンおよび電子は衝撃波内においては温度も数密度も異なるものと考え、電子は局所平衡型、イオンは Mott-Smith 型の分布函数を仮定した。これらの零次のモーメント方程式はそれぞれ

$$n_e(x)u_e(x) = n_1u_1 \quad (99) \quad \sum_{\lambda=1}^2 n_p^\lambda(x)u^\lambda = n_1u_1 \quad (100)$$

を与える。一次のモーメント方程式は、イオンと電子の和をとって

$$\sum_{\lambda=1}^2 n_p^\lambda(x) \{m_p(u^\lambda)^2 + kT^\lambda\} + n_e(x)kT_c(x) - \frac{E(x)^2}{8\pi} = m_p n_1 u_1^2 + 2n_1 k T_1 \quad (101)$$

となる、二次のモーメント方程式は、和

$$\sum_{\lambda=1}^2 n_p^\lambda(x) u^\lambda \{m_p(u^\lambda)^2 + 5kT^\lambda\} + 5n_e(x)u_e(x)kT_c(x) = n_1u_1(m_p u_1^2 + 10kT_1) \quad (102)$$

と、イオン単独のもの

$$\sum_{\lambda=1}^2 \left[\frac{d}{dx} [n_p^\lambda(x) u^\lambda \{m_p(u^\lambda)^2 + 3kT^\lambda\}] - 2eE(x)n_p^\lambda(x)u^\lambda \right] = m_p \int c_x^2 \left(\frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_c dc \quad (103)$$

を残す。これに Poisson 式

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi e \left\{ \sum_{\lambda=1}^2 n_p^\lambda(x) - n_e(x) \right\} \quad (104)$$

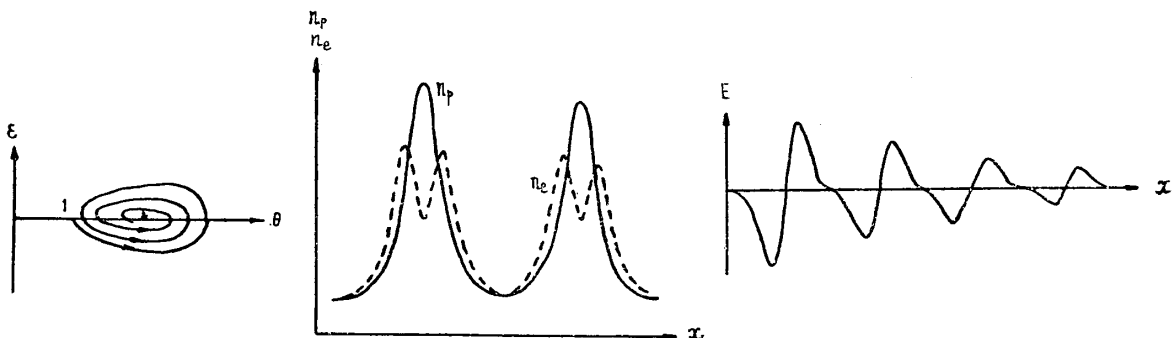


Fig. 8

Fig. 9

Fig. 10

をつけ加えて基礎式とする。(103)式右辺の衝突項は Fokker-Planck 方程式を使用して計算する。まず二次元空間 (ϵ, θ) 内で積分曲線を求め (Fig. 8), 次に物理面にもどして衝撃波形を求める (Fig. 9 および Fig. 10)。この方法によって、彼等は連続解の存在する範囲を幾分拡張することはできたが、なお Mach 数が 2.19 を越える領域では物理的に意味ある解を求め得なかった。

同様な困難は、外部磁場のある場合に対しても Comisar [16] によって経験された。これらの方法の欠陥は、エネルギーの散逸機構の取り入れ方の不完全さにあるように思われる。仮定された分布函数 (あるいは拡散方程式) の不正確さに寄因するところが大と思われるが、この種の問題に対する Fokker-Planck 方程式の妥当性を検討する余地も残されている。

11. 衝突のない衝撃波

今までの解析では全く、粒子間の衝突が衝撃波の形成の直接の原因をなしていた。しかしな

がら外部磁場の中に存在するプラズマ流においては、粒子間の衝突によることなく、全く異質の原因によって衝撃波の形成されることが、天体現象と関連して推測されている。この粒子の衝突によらない衝撃波に対する理論的裏付けを与えるべく、最近幾つかの提案がなされてきた。Kantrowitz 一派 [20]~[22] は、流れの場が乱流であることに基礎を置き、乱流中の電磁エネルギーの mode の中に、衝撃波によってエネルギーの増幅されるものがあるとして、衝撃波の維持を説明しようとしている。これに対して Colgate [23] は、あまり強くない外部磁場の中の層流中に、非常に強い衝撃波が形成されたと仮定する。衝撃波前面には電荷分雑によって生じた強い電場があり、衝撃波内へ流入してきた粒子はこの電場によって強く加速されるが、それによって得たエネルギーの一部は熱に変換されて、衝撃波が維持されると考えるのである。この両者は基礎方程式から出発して、数学的に解の存在を証明しようとするのではなく、適当に物理的な模型を考えて、現象の実在性を主張しようとするにある。

これに反して New York 大学一派の人々 [24]~[27] は、衝突項を落した Boltzmann 方程式から出発して、一貫した数学的手法を用いて外部磁場中の衝撃波の存在を証明すべく努めてきたようにみうけられる。以下 Morawetz [27] の論文に沿って、簡単にその論旨を紹介する。

12. 衝突のない衝撃波に対する基礎方程式

定常状態における Maxwell 方程式

$$\frac{\partial}{\partial k} \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (105), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{E} = 0 \quad (106), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (107), \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = q \quad (108)$$

と、定常で衝突を無視した Boltzmann 方程式

$$\mathbf{c} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}} \pm \frac{e}{m_k} (\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{H}) \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{c}} = 0, \quad k = p \text{ or } e \quad (109)$$

がこの場合の基礎式となる。電流 \mathbf{j} および電荷 q は

$$\mathbf{j} = e \int d\mathbf{c} (f_p - f_e) \mathbf{c} \quad (110), \quad q = e \int d\mathbf{c} (f_p - f_e) \quad (111)$$

によって分布函数と結ばれている。 \mathbf{H} は磁場を示す。今 $x = -\infty$ においてある一様状態を表わし、 $x = +\infty$ で $x = -\infty$ とは異なる別の様状態を示す (105)~(109) 式の解を求めるのがわれわれの目標である。しかしながら、厳密解は目下のところ未だ発見されていない。そこで以下のような近似解法を試みる。

今 $x = -\infty$ において平均流の方向を x 軸にとり、電場は y 方向に、磁場は z 方向にあって、一様状態に保たれているものとする。全領域で現象は一次元的であるとすれば、 E_y は必然的に常数となる。以下分布函数は c_z で積分したものをを用いるので

$$f_k = \int d c_z f_k \quad (112)$$

で表わし、また各変数は次のように無次元化して、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{\frac{1}{e} \sqrt{\frac{m_1}{n_1}}}, & \tilde{E}_x &= \frac{\epsilon E_x}{E_y}, & \tilde{H}_z &= \frac{H_z}{H_{z1}} \\ \tilde{c}_x &= \frac{c_x}{u_1}, & \tilde{c}_y &= \frac{c_y}{u_1} \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

ここで改めて \sim は省略する。 ϵ は $\left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{1/2}$ を表わし、今後この量を用いて諸変量を展開する

が, (113) において E_x が ϵ に依存しているのは一つの大きな仮定である. これらの関係を考慮して (109) 式を書き換えれば,

$$Ac_x \frac{\partial f_p}{\partial x} + (E_x + \epsilon c_y H_z) \frac{\partial f_p}{\partial c_x} + \epsilon (1 - c_x H_z) \frac{\partial f_p}{\partial c_y} = 0 \quad (114)$$

$$Ac_x \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{E_x}{\epsilon} + c_y H_z \right) \frac{\partial f_e}{\partial c_x} - \frac{1}{\epsilon} (1 - c_x H_z) \frac{\partial f_e}{\partial c_y} = 0 \quad (115)$$

となる. また (105)~(108) 式は

$$\frac{dH_z}{dx} = -\epsilon A \left(\frac{v_p}{u_p} - \frac{v_e}{u_e} \right) \quad (116), \quad K \frac{dE_x}{dx} = \left(\frac{1}{u_p} - \frac{1}{u_e} \right) \quad (117)$$

に還元できる. ただし

$$K = \frac{c_e^2}{A \epsilon^2 u_1^2}, \quad A^2 = \frac{m_p n_1 u_1^2}{H_{z1}^2} \quad (118)$$

で, c_e は真空中の光速である. 粒子の数密度および平均流速は, 分布函数と

$$n_k = \iiint dc_x dc_y f_k \quad (119), \quad u_k = \frac{1}{n_k} \iiint dc_x dc_y c_x f_k \quad (120), \quad v_k = \frac{1}{n_k} \iiint dc_x dc_y c_y f_k \quad (121)$$

で結ばれている.

13. 電子群の運動

(115) 式を変形後 f_e を ϵ で展開し, (120), (121) 式に代入すると, 結局電子の流速は電磁場を通じて

$$u_e = \left\{ H_z + \frac{d}{dx} \left(\frac{A E_x}{H_z} \right) \right\}^{-1} + 0(\epsilon^2) \quad (122), \quad \epsilon v_e = -\frac{E_x}{H_z} + 0(\epsilon^2) \quad (123)$$

と表わされる. これら二式を (116), (117) 式に代入すると

$$\frac{d}{dx} \left(H_z + \frac{1}{2} \eta^2 \right) = \eta H_z - \frac{A \epsilon v_p}{u_p} \quad (124), \quad \frac{d}{dx} \left(\eta + \frac{K \eta H_z}{A} \right) = -\frac{1}{u_p} + H_z \quad (125)$$

となる. ただし

$$\eta = -\frac{A E_x}{H_z} \quad (114)$$

である. 以下後のために少し式の変形をする. まず (114) 式に c_x をかけて速度空間で積分すれば,

$$A \frac{d}{dx} \iiint dc_x dc_y c_x^2 f_p + \iiint dc_x dc_y \left(\frac{\eta}{A} - \epsilon c_y \right) H_z f_p = 0 \quad (127)$$

$$\text{あるいは} \quad I(x) = \iiint dc_x dc_y c_x^2 f_p \quad (128)$$

と書いて

$$I(x) + \frac{H_z^2}{2A^2} (1 - K \eta^2) = \text{const} \quad (129)$$

となる. また電場のポテンシャル Φ は (126), (124) 式を用いて

$$\begin{aligned}
A\Phi = -A \int_{-\infty}^{\infty} E_x dx = \int_{-\infty}^x \eta H_z dx = -1 + H_z + \frac{\eta^2}{2} \\
+ \epsilon A \int_{-\infty}^x \frac{v_p}{u_p} dx = \text{const} + H_z + \frac{\eta^2}{2} + \epsilon A \int_{x_*}^x \frac{v_p}{u_p} dx
\end{aligned} \quad (130)$$

と書ける。*は適当な基準点を表わすのに用いる。

14. イオン群の運動

$f_p = \text{const}$ で与えられる位相空間内のイオン粒子の道すじは、(114) 式より

$$\frac{dc_x}{dt} = c_x \frac{dc_x}{dx} = \frac{1}{A} (E_x + \epsilon c_y H_z) \quad (131), \quad \frac{dc_y}{dt} = c_x \frac{dc_y}{dx} = \frac{\epsilon}{A} (1 - c_x H_z) \quad (132)$$

で与えられる。あるいは書きなおして

$$\frac{c_x^2}{2} = \frac{c_{x*}^2}{2} - \frac{\phi(x) - \phi(x_*)}{A} + \epsilon \int_{x_*}^x c_y H_z dx \quad (133)$$

$$c_y = c_{y*} + \frac{\epsilon(t - t_*)}{A} - \frac{\epsilon}{A} \int_{x_*}^x H_z dx \quad (134)$$

である。ここで c_x, c_y を ϵ で展開して

$$c_x = c_x^{(0)} + \epsilon c_x^{(1)} + \dots \quad c_y = c_y^{(0)} + \epsilon c_y^{(1)} + \dots \quad (135)$$

とし、(133), (134) 式に代入すると

$$c_x^2 = c_{x*}^2 - \frac{2}{A} [\Phi(x) - \Phi(x_*)] + \frac{2\epsilon}{A} c_{y*} [p(x) - p(x_*)] + 0(\epsilon^2) \quad (136)$$

$$c_y = c_{y*} + \frac{\epsilon}{A} \left[\int_{x_*}^x \left\{ c_{x*}^2 - \frac{2}{A} [\Phi(x) - \Phi(x_*)] \right\}^{\frac{1}{2}} dx - p(x) + p(x_*) \right] + 0(\epsilon^2) \quad (137)$$

を得る。ただし

$$p(x) - p(x_*) = \int_{x_*}^x H_z dx \quad (138)$$

である。今 x_1 および x_2 点にポテンシャル Φ の極大値が存在すると、(136), (137) 両式の ϵ の零次の項のみに着目して得られるイオン粒子の道すじは、Fig. 11 に示すごとく、through, bouncing, pseud-trapped, returning の4種類に分けられるが、 $x = -\infty$ におけるイオンの分布函数を

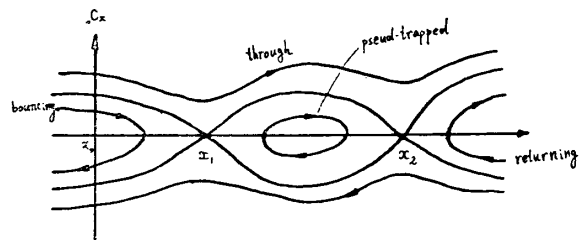


Fig. 11

$$\left. \begin{aligned}
f_{p1} = F\{(c_x - 1)^2 + c_y^2\} \neq 0 & \text{ for } (c_x - 1)^2 + c_y^2 \leq R_c^2 \\
= 0 & \text{ for } (c_x - 1)^2 + c_y^2 > R_c^2
\end{aligned} \right\} \quad (139)$$

のごとく仮定して、粒子速度の大きさに剪断 R_c を導入し、 $R_c < 1$ とすれば、(136), (137) 式を ϵ の一次の項まで含めて検討した結果、イオンの4種類の道すじの中 through と bouncing だけが許されることとなる。

さて $x_* \leq x \leq x_1$ なる点 x の (128) 式で定義される I を $I_A(\Phi)$ で表わし、 $x_1 \leq x \leq x_2$ なる点の I を $I_B(\Phi)$ とすれば、bouncing ion の存在のために一般に

$$f_{pA}(c_x, c_y, \phi) \geq f_{pB}(c_x, c_y, \phi), I_A(\Phi) \geq I_B(\Phi) \quad (140)$$

で, $x=x_1$ 即ち $\Phi=\Phi_1$ に対して

$$f_{pA}=f_{pB} \quad I_A(\Phi_1)=I_B(\Phi_1) \quad (141)$$

が成り立つ。

15. 場の変化

a) bouncing ions がない時

剪断 R_c を 0 に近づけると, bouncing ion はなくなって ion は through ばかりとなる. x_1

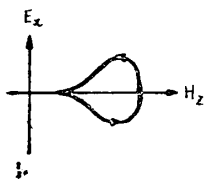


Fig. 12

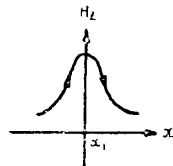


Fig. 13

を狭む二点, 即ち $x' < x_1 < x''$ なる二点 x', x'' を選んで, この二点で $\Phi(x') = \Phi(x'')$ であるとするれば, (136) 式から $I_A(x') = I_B(x'')$ となり, また (129), (139) 式を考慮して $H_z(x') = H_z(x'')$, $\eta(x')^2 = \eta(x'')^2$ も導ける. さらに $d\Phi = (1/A)\eta H_z dx$ なる関係よりみて $|x' - x_1| = |x'' - x_1|$ となって, 電磁場の変動は x_1 点の前後で完全に対称である.

それゆえにこの場合は衝撃波は形成されず, 単なる pulse が存在するに過ぎない。

b) bouncing ions がある時

今上で述べた二点 x', x'' において $H(x') = H(x'')$ としよう. その時は (129), (130) により

$$I_A[\phi(x')] - KH_z^2 \Phi(x') A = I_B[\phi(x'')] - KH_z^2 \Phi(x'') A \quad (142)$$

なる関係がある. 一方 H を固定して考えれば, (136) 式より c_z^2 が, また (128) 式の I の定義から $I_A(\Phi)$, $I_B(\Phi)$ が, 従って $I_A(\Phi) - KH_z^2 \Phi A$, $I_B(\Phi) - KH_z^2 \Phi A$ もまた Φ の減少関数

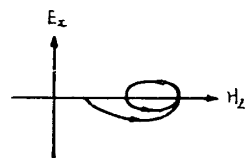


Fig. 14

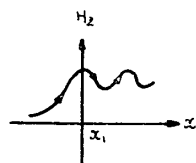


Fig. 15

である. 一方 R_c が 1 に近い時必ず存在する bouncing ion のために, x_1 をはさむ二点において Φ の値が等しければ当然 $I_A(\Phi) > I_B(\Phi)$ でなければならない. この事を考慮すれば, (142) 式が成立するためには $\Phi(x') > \Phi(x'')$ でなければならない, また (130) 式より $\eta(x')^2 > \eta(x'')^2$

でなければならない. 即ち電磁場は x_1 点の前後において非対称となり, 衝撃波の存在を示唆するのである。

文 献

- [1] F. De Hoffmann & E. Teller; Phys. Rev. **80** (1950) 692.
- [2] H.K. Sen; Phys. Rev. **102** (1956) 5.
- [3] W. Marshall; Proc. Roy. Soc. **A 233** (1956) 367.
- [4] M.H. Rose; Inst. Math. Sciences, New York Univ. NYO-7693 (1956).
- [5] C.S. Morawetz; Inst. Math. Sciences, New York Univ. NYO-8677 (1959).
- [6] A.C. Kolb; Phys. Rev. **112** (1958) 291.
- [7] R.M. Patrick; Phys. Fl. **2** (1959) 589.
- [8] N.H. Kemp & H.E. Petschek; Phys. Fl. **2** (1959) 599.
- [9] N.D. Safranov; Soviet Phys. (J.E.T.P.) **32** (1957) 1453.
- [10] D.A. Tidman; Phys. Rev. **111** (1958) 1439.
- [11] J.D. Jukes; J. Fl. Mech. **3** (1958) 275.
- [12] M. Krook; Ann. Phys. **6** (1959) 188.
- [13] O.W. Greenberg, H.K. Sen & Y.M. Trève; Phys. Fl. **3** (1960) 379.
- [14] O.W. Greenberg & Y.M. Trève; Phys. Fl. **3** (1960) 769.

- [15] Y-C. Whang & C-C. Chang; Phys. Fl. 5 (1962) 228.
- [16] G.G. Comisar; Phys. Fl. 5 (1962) 1590.
- [17] F.S. Sherman; J. Fl. Mech. 8 (1960) 465.
- [18] L. Davis, R. Lüst & A. Schlüter; Z. Naturforsch. 139 (1958) 916.
- [19] K. Hain, R. Lüst & A. Schlüter; Rev. Modern Phys. 32 (1960) 967.
- [20] H. E. Petschek; Rev. Modern Phys. 30 (1958) 966.
- [21] A.R. Kantrowitz, R.M. Patrick & H.E. Petschek; AVCO Research Rept. 63 (1959).
- [22] F.J. Fishman, A.R. Kantrowitz & H.E. Petschek; Rev. Modern Phys. 32 (1960) 959.
- [23] S.A. Colgate, Phys. Fl. 2 (1959) 485.
- [24] H. Grad; Conf. Controlled. Thermonuclear Reaction, Berkeley, Calif. T.I.D.-7536 (1957).
- [25] C.S. Gardner et al.; Conf. Peaceful Use of Atomic Energy 31 (1958) 230.
- [26] H. Grad et al.; Inst. Math. Sciences, New York Univ. NYO-2538 (1959).
- [27] C.S. Morawetz; Phys. Fl. 4 (1961) 988.
- [28] H.M. Mott-Smith; Phys. Rev. 82 (1951) 885.
- [29] S. Ziering, F. Ek & P. Koch; Phys. Fl. 4 (1961) 975.
- [30] P. Glansdorff; Phys. Fl. 5 (1962) 371.
- [31] T. Kihara; J. Phys. Soc. Japan 14 (1959) 402.
- [32] M.N. Rosenbluth, W.M. Macdonald & D.L. Judd; Phys. Rev. 107 (1957) 1.
- [33] L. Spitzer, Jr; Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, 1956).
- [34] S. Chapman & T.G. Cowling; The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases (Cambridge, 1952).
- [35] R.N. Hollyer; Appl. Phys. Lab. Johns Hopkins Univ. T.R. No. CM-903.
- [36] H.D. Weymann; Phys. Fl. 3 (1960) 545.
- [37] P. Gloersen; Phys. Fl. 3 (1960) 857.