

垂直磁場によって変形された2次元 Couette 流の安定性

角 谷 典 彦*

The Hydromagnetic Stability of the Modified Plane Couette Flow in the Presence of a Transverse Magnetic Field

By

Tsunehiko KAKUTANI

Abstract: The hydromagnetic stability against small disturbances is investigated of the plane laminar motion of an electrically conducting fluid between parallel planes in relative motion in the presence of a transverse magnetic field. It is already established that the ordinary hydrodynamical plane Couette flow is ultimately stable for all Reynolds numbers so far as the small disturbances are concerned. On the other hand, it is known that the effect of a magnetic field on the stability of laminar flows of an electrically conducting fluid is generally of stabilizing nature. Therefore, it may be natural to suppose that the modified plane Couette flow is also stable against small disturbances for all Reynolds numbers.

Present investigation reveals, however, that this conjecture is not the case. In fact, it is found that the disturbances are amplified for a certain range of Reynolds number if Hartmann number M is larger than about 4. The final aim of the present investigation is to obtain the curve of neutral stability in the (α, Re) -plane (α , the wave-number of the disturbance; Re , Reynolds number) and to find the critical Reynolds number of the flow for various Hartmann numbers. At the present stage, however, the calculation has been carried out only for the disturbance of vanishing wave-number $\alpha=0$. It has been found that there exist two asymptotic branches of the neutral curve if $M > 3.91$. Both branches behave like $\alpha \propto Re^{-1}$ as $\alpha \rightarrow 0$.

The more detailed account of the complete work will be published elsewhere.

1. はしがき

垂直磁場の作用によって変形された、非圧縮・電気伝導性・粘性流体の2次元 Couette 流の安定性の問題を、微小攪乱の方法——いわゆる線型理論——で取り扱い、いろいろの Hartmann 数 M について、 (α, Re) -面 (α : 攪乱の波数, Re : Reynolds 数) における中立安定曲線を計算し、臨界 Reynolds 数を求めることを目的とする。

よく知られているように、通常の流体力学（磁場なし、または電気伝導性なし、または両方ともなし）の2次元 Couette 流は、微小攪乱に対しては、あらゆる Reynolds 数にわたって安定であると信じられており、（たとえば、Gallagher と McD. Mercer (1962)) [1] 円管 Poiseuille 流の安定性問題と並んで、線型理論では不安定が見出されていない歴史的な問題の一つである。一方、電気伝導性流体の層流安定性に対する磁場の影響は、多くの場合、流れを安定化させる傾向があることもよく知られている。（たとえば、Chandrasekhar (1953) [2], Stuart

* 京都大学理学部物理学科

(1954) [3], Lock (1955) [4] 等). ところが, この論文で取り扱う変形 2 次元 Couette 流の場合には, Hartmann 数が約 4 以上の場合には, ある Reynolds 数の範囲にわたって, 増大する攪乱が存在しうることが示される. したがってこの場合, 磁場の影響が流れを不安定化させるという数少ない例の一つになっている. 計算の現段階では未だ決定的なことは言えないが, $M \approx 4$ で不安定の mode が現れ始め, M の増加につれてしばらくの間は磁場は流れを不安定化させ, M がある値をこえて大きくなると, 磁場は流れを安定化させる傾向があるように思われる.

現在のところ, 攪乱の波数零の場合の計算が完了したところである. それによると, $M > 3.91$ ならば, 二つの中立曲線の分枝が存在することがわかり, それらは, いずれも, $\alpha \rightarrow 0$ のとき $\alpha \propto Re^{-1}$ のようにふるまう.

以下に問題の定式化と, 現在までに得られた主な結果を中間報告する.

2. 問題の定式化

基礎方程式は, よく知られた電磁流体力学の方程式 (非圧縮), すなわち, 運動方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mu}{4\pi\rho} (\text{curl } \mathbf{H} \times \mathbf{H}), \quad (2.1)$$

誘導方程式:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{curl} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}, \quad (2.2)$$

連続の式:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad (2.3)$$

$$\text{div} (\mu \mathbf{H}) = 0, \quad (2.4)$$

である. ただし, \mathbf{u} : 流速, \mathbf{H} : 磁場の強さ, p : 圧力, ρ : 密度, ν : 動粘性率, $\nu_m = (4\pi\sigma\mu)^{-1}$: 磁気粘性率, σ : 電気伝導率, μ : 透磁率であり, 電磁単位系を用いている.

まず最初に, 定常場を求めておこう. 間隔 $2a$ だけ離れた 2 枚の無限に長い平行板 (電気的には不導体とする) が互いに逆方向に, 一様な速さ U_0 で定常的に運動しており, その間に非圧縮・電気伝導性・粘性流体が満たされており, 板に垂直な方向に一様な外部磁場 H_0 がかけられているものとする. 両板の中央任意の点に原点 O をとり, 一方の板の運動方向に x_1 , 板に垂直に x_2 , それら双方に垂直な方向に x_3 軸をもつデカルト座標系を考える. この場合, 流れは板に平行であると考えられるから,

$$(1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(U_1, 0, 0),$$

$$(2) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(H_1, H_2, 0),$$

$$(3) \quad \mathbf{u}, \mathbf{H}, p \text{ は座標 } x_2 \text{ だけの関数}$$

と仮定することは自然である. そうすると, (2.1), (2.2) は次のように簡単化される.

$$\nu \frac{d^2 U_1}{dx_2^2} + \frac{\mu}{4\pi\rho} H_2 \frac{dH_1}{dx_2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx_2} \left(p + \frac{\mu}{8\pi} H_1^2 \right) = 0, \quad (2.6)$$

$$H_2 \frac{dU_1}{dx_2} + \nu_m \frac{d^2 H_1}{dx_2^2} = 0, \quad (2.7)$$

$$\nu_m \frac{d^2 H_2}{dx_2^2} = 0. \quad (2.8)$$

速度場の連続式 (2.3) は上の仮定 (1), (3) により自動的に満たされている. 磁気誘導 $\mu \mathbf{H}$ の法線成分が境界上で連続であるという条件を考慮すると, (2.8) 式より, H_2 は外からかけた磁場 H_0 に等しい定数であることがわかる. このことは磁気誘導の連続式 (2.4) から導かれる. ただし, ここで流体の透磁率 μ と板のそれとが等しいという仮定をしている. (この仮定は, そんなに制限的なものではなく, 両者が異なる場合には, 両者の比がかかるだけである.) さて H_2 が一定であるから (2.6) より $p + \frac{\mu}{8\pi} (H_1^2 + H_2^2)$ もまた x_2 によらない定数であることがただちにわかる. すなわち, 流体圧と磁気圧との和は流場内で一定値をとる. $H_2 = H_0$ (定数) を考慮して, (2.5) と (2.7) とから H_1 を消去すると,

$$\frac{\mu H_0^2}{4\pi\rho\nu\nu_m} \frac{dU_1}{dx_2} = \frac{d^3 U_1}{dx_2^3} \quad (2.9)$$

が得られる. 流体の板への粘着条件:

$$x_2 = \pm a \text{ で } U_1 = \pm U_0 \quad (2.10)$$

を満たす (2.9) の解は,

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\sinh\left(\frac{Mx_2}{a}\right)}{\sinh M} + \frac{A}{M} \left(\cosh\left(\frac{Mx_2}{a}\right) - \cosh M \right), \quad (2.11)$$

ただし, A は積分定数, $M = \mu a H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$ は Hartmann 数. 一方, 板は電気的の不導体と仮定しているから, 板における磁場 \mathbf{H} の接線成分の連続性により,

$$x_2 = \pm a \text{ で } H_1 = 0 \quad (2.12)$$

なる境界条件が得られる. (2.11) を (2.5) に代入して H_1 を計算し, 条件 (2.12) を考慮すると, $A=0$ となり, 結局 U_1, H_1 は

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\sinh\left(\frac{Mx_2}{a}\right)}{\sinh M}, \quad (2.13)$$

$$\frac{H_1}{H_0} = -\frac{R_m}{M \sinh M} \left[\cosh\left(\frac{Mx_2}{a}\right) - \cosh M \right] \quad (2.14)$$

で与えられる. 先に求めた

$$\frac{H_2}{H_0} = 1, \quad (2.15)$$

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho U_0^2} = -S \frac{H_1^2}{H_0^2} + \text{const.} \quad (2.16)$$

と合わせて求める定常場がすべて決定した. ただし, $R_m = 4\pi\sigma\mu a U_0$ は磁気 Reynolds 数, $S = \mu H_0^2 / (4\pi\rho U_0^2)$ は磁気圧力数である. $M \rightarrow 0$ の極限では (2.13) は, $U_1/U_0 \rightarrow x_2/a$ となり, 通常の流体力学における直線速度分布に帰着する.

次に, 微小攪乱を支配する方程式に移ろう. 定常場 (2.13)~(2.16) に重畳する微小攪乱 $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{h}(h_1, h_2, h_3)$ および \bar{p} は通常のように正弦型の周期函数とする. すなわち, \mathbf{v} , \mathbf{h} および \bar{p} はいずれも x_2 だけの函数である微小振幅に, $\exp[i\{\kappa_1(x_1 - \bar{c}t) + \kappa_3 x_3\}]$ なる因子

がかかったものである。ここに \bar{c} は複素位相速度, κ_1, κ_3 はそれぞれ x_1, x_3 方向の波数を表わす。 κ_1, κ_3 は常に正であるから, \bar{c} の虚数部の正負にしたがって, 攪乱は時間的に増大したり減衰したりする。 \bar{c} の虚数部零が中立安定の攪乱に相当する。さて, 定常場 (2.13)~(2.16) に \mathbf{v}, \mathbf{h} および \bar{p} を重畳し, 基礎方程式 (2.1)~(2.4) に代入し, \mathbf{v}, \mathbf{h} および \bar{p} について線型化する。とくに,

$$\begin{aligned} v_2 &= U_0 v(x_2) \exp [i\{\kappa_1(x_1 - \bar{c}t) + \kappa_3 x_3\}], \\ h_2 &= H_0 \psi(x_2) \exp [i\{\kappa_1(x_1 - \bar{c}t) + \kappa_3 x_3\}], \end{aligned}$$

とすると, $v_1, v_3, h_1, h_3, \bar{p}$ 等はすべて消去されて, v と ψ に関する次のような無次元の連立方程式が得られる。(Lock (1955)).

$$H_x v - \frac{i}{\alpha} v' = (U - c)\psi + \frac{i}{\alpha R_m} (\psi'' - \alpha_1^2 \psi), \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} (U - c)(v'' - \alpha_1^2 v) - U'' v + \frac{i}{\alpha R_e} (v^{iv} - 2\alpha_1^2 v'' + \alpha_1^4 v) \\ = S \left[H_x (\psi'' - \alpha_1^2 \psi) - \frac{i}{\alpha} (\psi''' - \alpha_1^2 \psi') - H_x'' \psi \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

ただし,

$$U = \frac{U_1}{U_0} = \frac{\sinh M\eta}{\sinh M}, \quad (2.19)$$

$$H_x = \frac{H_1}{H_0} = -\frac{R_m}{M \sinh M} [\cosh M\eta - \cosh M], \quad (2.20)$$

$$\eta = x_2/a, \quad c = \bar{c}/U_0,$$

$$\alpha = \kappa_1 a, \quad \alpha_1^2 = a^2(\kappa_1^2 + \kappa_3^2),$$

$$R_e = aU_0/\nu \text{ は Reynolds 数,}$$

プライムは η についての微分を表わす。

通常われわれが取り扱う電気伝導性流体においては $R_m \ll 1$ の条件が満たされることが多い。以下の解析ではとくに $R_m \ll 1$ の場合に議論を限ることとする。そうすると, (2.17), (2.18) から ψ が消去できて,

$$(U - c)(v'' - \alpha_1^2 v) - U'' v = -\frac{i}{\alpha R_e} [v^{iv} - (2\alpha_1^2 + M^2)v'' + \alpha_1^4 v] \quad (2.21)$$

のような v だけの方程式 ('変形された' Orr-Sommerfeld の方程式) が得られる。Lock (1955) が指摘したように, この場合には通常の流体力学の安定理論における Squire の定理 (Squire (1933))[5] に類似の定理が成り立つ。(今のような垂直磁場の場合には, $R_m \ll 1$ が成立しないときには, Squire の定理が成り立たないことに注意!!)。そこで, 一般性を失うことなく, 2 次元攪乱のみを取り扱えば充分となる。それゆえ, (2.21) で $\alpha_1 = \alpha$ とおいて (すなわち $\kappa_3 = 0$),

$$(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U'' v = -\frac{i}{\alpha R_e} [v^{iv} - (2\alpha^2 + M^2)v'' + \alpha^4 v]. \quad (2.22)$$

これは, 速度場の η 方向の攪乱振幅 v だけの 4 階方程式であるから, 速度攪乱が板上で消えるという 4 つの境界条件

$$\eta = \pm 1 \text{ で } v = v' = 0 \quad (2.23)$$

($v' = 0$ の条件は速度場の連続式 (2.3) より得られる) だけで決定系を作る。(すなわち磁場の

境界条件を考える必要がない!!)。したがって問題は、 v について4階の線型方程式 (2.22) を同次境界条件 (2.23) のもとで解くという固有値問題の形に定式化される。

3. 主流の変曲点と非粘性の極限における安定性との関係

方程式 (2.22) を境界条件 (2.23) のもとで解く前に、主流の速度分布 (2.19) が変曲点を持っていることにかんがみ、非粘性の極限 $Re \rightarrow \infty$ における安定性と、この変曲点との関係を吟味しておこう。

一般に、非粘性の極限において、中立以外の攪乱が存在するためには速度分布は変曲点をもつことが必要であり、ある種の速度分布については、その逆もまた真であることが証明されている。(Rayleigh (1880) [6] と Tollmien (1935) [7])。実際、対称または境界層型速度分布に対しては、非粘性の極限において、もし速度分布が変曲点をもてば、増大攪乱が必ず存在し、変曲点における流速に等しい位相速度をもつ中立攪乱が存在する。

さて、われわれの変形2次元 Couette 流の場合はどうであろうか。 $Re \rightarrow \infty$ の場合には、(2.22) は

$$(U-c)(v''-\alpha^2 v)-U''v=0 \quad (3.1)$$

に帰着する。この方程式は2階方程式だから、境界条件は二つで必要充分である。したがって、境界条件としては、条件 (2.23) のうちで、板上で切線速度が零になるという条件 $v'=0$ を除いて(非粘性であるから‘横すべり’が許される!!)

$$\eta = \pm 1 \text{ で } v=0 \quad (3.2)$$

をとればよい。さて主流 (2.19) の変曲点 η_s は零であり、したがって変曲点の流速 U_s もまた零。そこで位相速度が零になるような中立攪乱を探すことにする。 $c=c_s=0$ とおき、 $U''=M^2U$ を考慮すると、(3.1) は

$$v''-(\alpha^2+M^2)v=0 \quad (3.3)$$

となる。したがって、

$$v=A \exp[\sqrt{\alpha^2+M^2}\eta]+B \exp[-\sqrt{\alpha^2+M^2}\eta], \quad (3.4)$$

A, B は積分定数。同次条件 (3.2) により、 v が意味をもつためには、

$$\begin{vmatrix} \exp[\sqrt{\alpha^2+M^2}] & \exp[-\sqrt{\alpha^2+M^2}] \\ \exp[-\sqrt{\alpha^2+M^2}] & \exp[\sqrt{\alpha^2+M^2}] \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

でなければならない。しかるに (3.5) は $\sqrt{\alpha^2+M^2}=0$ を導くから、(3.4) にもどると、 $v=\text{const}=0$ ((3.2) により) という意味のない解しか与えない。かくして、反対称速度分布であるわれわれの変形2次元 Couette 流の場合には、主流の変曲点と非粘性極限の安定性との間には、対称または境界層型速度分布の場合にあったような密接な関連性がないことが示される。

4. 変形 Orr-Sommerfeld 方程式 (2.22) の解

通常の流体力学における2次元 Couette 流 ($M=0$) が、微小攪乱に対しては、すべての Reynolds 数にわたって安定であることを考慮すると、増大攪乱が存在しうる変形 Couette 流の Hartmann 数 M はかなり大きいものと期待されるから(実際、あとでわかるように小さくとも4の程度である)、以後の解析を進めるに当たって、次のような scale-change をするのが便利である。すなわち、

$$M\eta=y, \quad \alpha/M=\beta, \quad R_e/M=R \quad (4.1)$$

このとき、方程式 (2.22) および境界条件 (2.23) はそれぞれ

$$(U-c)(v''-\beta^2v)-U''v=-\frac{i}{\beta R}[v^{iv}-(2\beta^2+1)v''+\beta^4v], \quad (4.2)$$

および

$$y=\pm M \text{ で } v=v'=0 \quad (4.3)$$

のように変換される。ただし、このとき、 $U=\sinh y/\sinh M$ となる。また、以後プライムは y についての微分を表わすものとする。

非粘性解

方程式 (4.2) の 4 つの基本解のうち、2 つは βR の逆べき展開によって得られる。中立または増大攪乱に対する βR は充分大きいと期待できるから、1 にくらべて $O(1/\beta R)$ の程度を無視して、展開の第 1 項のみを採用すると、方程式 (4.2) は、形式的には非粘性方程式

$$(U-c)(v''-\beta^2v)-U''v=0 \quad (4.4)$$

に帰着する。Lin (1955) [8] はこの意味で、 βR の逆べき展開によって得られる解を‘非粘性解’と名付けている。方程式 (4.4) の 2 つの基本解は β^2 の収束べき級数の形で次のように求められる。

$$\left. \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\} = (U-c) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} \begin{pmatrix} h_{2n}(y) \\ k_{2n+1}(y) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

ただし、

$$\left. \begin{matrix} h_0=1, h_{2n+2}=\int_{-M}^y (U-c)^{-2} dy \int_{-M}^y (U-c)^2 h_{2n} dy \quad (n \geq 0) \\ k_1=\int_{-M}^y (U-c)^{-2} dy, k_{2n+3}=\int_{-M}^y (U-c)^{-2} dy \int_{-M}^y (U-c)^2 k_{2n+1} dy \quad (n \geq 0) \end{matrix} \right\} \quad (4.6)$$

これ以後、とくに断らない限り中立攪乱のみを取り扱うことにする。すなわち c は実数とする。主流の速度分布 $U(y)=\sinh y/\sinh M$ は y について反対称であるから、もし c が固有値であれば、 $-c$ もまた同じ資格で固有値になる。それゆえ、一般性を失うことなく、今後は $c < 0$ と仮定する。さて c が負の実数であれば、 $(U-c)$ は $-M \leq y \leq 0$ の範囲の $U(y_c)=c$ なる y_c で零となり、この点 y_c は方程式 (4.4) の特異点となる。けれどもこの点 y_c はもとの方程式 (4.2) にもどれば通常点である。Lin (1955) によって示されたように、この‘みかけ’の特異性は、特異点 y_c の近傍で、複素 y 平面の下半部 ($U_c' > 0$ の場合) を通る積分路に沿って、 h_{2n} , k_{2n+1} を計算すればさけることができ、こうすれば、解 (4.5) はもとの方程式 (4.2) の解の正しい漸近形を与える。

粘性解

方程式 (4.2) の残る二つの基本解は、

$$v=\exp\left[\int_{y_c}^y g dy\right], \quad g=\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha R)^{\frac{1-n}{2}} g_n$$

の形に仮定して、つぎのように得られる。

$$\left. \begin{matrix} v_3 \\ v_4 \end{matrix} \right\} = (U-c)^{-\frac{5}{4}} \exp\left[\mp \int_{y_c}^y \sqrt{i\beta R(U-c)} dy\right] (1+O(\beta R)^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.7)$$

境界値問題

さて、方程式 (4.2) の一般解は v_1, v_2, v_3, v_4 の一次結合として与えられるわけであるが、(4.3) の境界条件を考慮すると、この解が意味をもつためには、

$$E(\beta^2, \beta R, c, M) = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} \\ v_{11}' & v_{21}' & v_{31}' & v_{41}' \\ v_{12}' & v_{22}' & v_{32}' & v_{42}' \end{vmatrix} = 0, \quad (4.8)$$

(ただし、 $y_1 = -M, y_2 = M, v_{11} = v_1(y_1)$ 等とする) なる固有値方程式が成立しなければならない。今 $O[\exp(-\sqrt{\beta R})]$ を 1 にくらべて無視すると、(4.8) は、

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{v_{31}}{v_{31}'} + \frac{v_{42}}{v_{42}'} \frac{f_2}{f_3} - \frac{v_{31}}{v_{31}'} \frac{v_{42}}{v_{42}'} \frac{f_4}{f_3} \quad (4.9)$$

のように簡単化される。ただし、 $f_i (i=1, 2, 3, 4)$ は非粘性解に関する量で、それぞれ、

$$f_1 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix}, \quad f_2 = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12}' & v_{22}' \end{vmatrix}, \quad f_3 = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{12}' \\ v_{21}' & v_{22}' \end{vmatrix}, \quad f_4 = \begin{vmatrix} v_{11}' & v_{21}' \\ v_{12}' & v_{22}' \end{vmatrix}. \quad (4.10)$$

さて、粘性解に関する量 $v_{31}/v_{31}', v_{42}/v_{42}'$ を表式 (4.7) を用いて計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{31}}{v_{31}'} &= \left[-\sqrt{\beta R(1+c)} e^{-\frac{\pi}{4}i} + \frac{5U_1'}{4(1+c)} \right]^{-1} \\ \frac{v_{42}}{v_{42}'} &= \left[\sqrt{\beta R(1-c)} e^{\frac{\pi}{4}i} - \frac{5U_2'}{4(1-c)} \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

ただし、 $U_1' = U'(y_1) = \coth M, U_2' = U'(y_2) = \coth M$. ここで、非粘性解の場合と同様に特異点 y_c における正しい分枝のえらび方は、Lin (1955) によって示されたように、複素 y 平面で、 $\int_{y_c}^y \sqrt{i\beta R(U-c)} dy$ の実数部が単調増大するような積分路に沿って計算したものがとられている。ところで、Hartmann 数 M がかなり大きいときには、主流の速度分布は板の近傍で局所的に境界層型になること、および第3節の結論から固有値 c は -1 に近い(もし $c > 0$ とすれば $+1$ に近い) ことが予想される。換言すれば、 $U=c$ を与えるような‘内部摩擦層’は主流の速度分布の変曲点の付近ではなくて、板の近くにあることが期待される。したがって $1+c (\equiv \delta)$ は、かなり小さくなることを期待されるから、(4.11) の v_{31}/v_{31}' の方は βR が大きくても $\sqrt{\beta R(1+c)}$ は必ずしも大きくなるとは限らず、(4.11) の v_{31}/v_{31}' の右辺は βR の大きい値に対するよい漸近形を与えることは期待できなくなる。一方 v_{42}/v_{42}' の方は依然としてよい漸近形になっており、大きさとしては $O[(\beta R)^{-\frac{1}{2}}]$ である。(もし $c > 0$ とすれば、逆に、 v_{42}/v_{42}' の方がわるくなり、 $v_{31}/v_{31}' = O[(\beta R)^{-\frac{1}{2}}]$ となる)。そこで、粘性解の境界値の比 v_{31}/v_{31}' に対しては (4.11) の右辺を用いずに、Tietjens 函数 $F(z)$ を含む表式

$$\frac{v_{31}}{v_{31}'} = -(1+\lambda) \frac{\delta}{U_1'} F(z) \quad (4.12)$$

を用いることにする。ただし、

$$\left. \begin{aligned} F(z) &= \frac{-\int_{\infty}^{-z} d\zeta \int_{\infty}^{\zeta} \zeta^{\frac{1}{2}} d\zeta H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}} \right]}{z \int_{\infty}^{-z} \zeta^{\frac{1}{2}} d\zeta H_{\frac{1}{3}}^{(1)} \left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}} \right]}, \\ z &= (\beta R U_c')^{\frac{1}{2}} (y_c - y_1), \quad \lambda = \frac{U_1'}{\delta} (y_c - y_1) - 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

このことは、粘性解として (4.7) をとる代わりに、つぎのようにして得られる解 x をとって

ることに相当する。すなわち,

$$\begin{aligned}\zeta &= (\beta R U_c')^{\frac{1}{3}}(y - y_c), \\ v(y) &\equiv \chi(\zeta) = \chi^{(0)}(\zeta) + (\beta R)^{-\frac{1}{3}}\chi^{(1)}(\zeta) + \dots\end{aligned}$$

とおき, これを (4.2) に代入する. この方法によると, 4 つの基本解が一度に求まり, それらはいずれも 1/3 次の Hankel 関数 $H_{\frac{1}{3}}^{(1),(2)}[(2/3)(i\zeta)^{\frac{3}{2}}]$ を含む. このうち, 必要な v_3 に相当するものは

$$\chi_3 \approx \int_{\infty}^{\zeta} d\zeta \int_{\infty}^{\zeta} H^{(1)}\left[\frac{2}{3}(i\zeta)^{\frac{3}{2}}\right] \zeta^{\frac{1}{2}} d\zeta$$

である (Lin (1955)).

さて, (4.9) に戻って, $O[(\beta R)^{-\frac{1}{2}}]$ を 1 にくらべて無視すると, v_{42}/v_{42}' のかかった項は省略されて, (4.9) は簡単に,

$$f_1/f_3 = v_{31}/v_{31}' \quad (4.14)$$

となる. 一方, (4.5), (4.6), (4.10) より f_1/f_3 を計算すると,

$$\frac{f_1}{f_3} = \frac{-\delta v_{22}}{U_1' v_{12} + \frac{v_{12}}{\delta}} \quad (4.15)$$

が得られる. これを (4.14) の左辺に代入し, 簡単な計算を行なうと, 固有値方程式 (4.14) は結局

$$1 + \frac{U_1' \delta v_{22}}{v_{12}} = \left(1 + \frac{U_1' v_{31}}{\delta v_{31}'}\right)^{-1} \quad (4.16)$$

となる. 今,

$$1 + \frac{U_1' \delta v_{22}}{v_{12}} \equiv u + iv \quad (4.17)$$

と定義し, これを (4.16) の左辺に代入し, (4.12) の右辺を (4.16) の右辺に代入すると, (4.16) は

$$u + iv = [1 - (1 + \lambda)F(z)]^{-1} \quad (4.18)$$

とかける. ここでさらに

$$[1 - F(z)]^{-1} \equiv \mathcal{F}(z) \quad (4.19)$$

で定義される $\mathcal{F}(z)$ を導入し, これを (4.18) に代入して \mathcal{F} についてとくと,

$$\mathcal{F} = \frac{(1 + \lambda)(u + iv)}{1 + \lambda(u + iv)}, \quad (4.20)$$

あるいは, 実部と虚部にわけて,

$$\left. \begin{aligned}\mathcal{F}_r &= \frac{(1 + \lambda)\{u(1 + \lambda u) + \lambda v^2\}}{(1 + \lambda u)^2 + (\lambda v)^2}, \\ \mathcal{F}_i &= \frac{(1 + \lambda)v}{(1 + \lambda u)^2 + (\lambda v)^2}.\end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

ここに, \mathcal{F}_r , \mathcal{F}_i はそれらの z に関する第 1 次微係数とともに z の函数として数表の形で与えられている (Lin (1955)).

さて, Hartmann 数 M を固定して考えると, (4.21) の右辺は c (すなわち δ) および β^2 のみの函数であり, 左辺は上述のように z のみの函数である. したがって, β^2 を固定すれば,

(4.21) は z と c (すなわち δ) についての連立方程式とみることができる。これを解いて、 z と δ とがある β^2 についてきまれば、 βR は (4.13) を逆にといて、

$$\beta R = \frac{1}{U_c'(1+\lambda)^3} \left(\frac{U_1' z}{\delta} \right)^3 \quad (4.22)$$

より計算することができる。 (λ は M を固定すれば、(4.13) からわかるように c (すなわち δ) だけの函数である)。いろいろの β^2 について (4.22) を計算すれば、ある M に対する所求の (β, R) 面における中立安定曲線を描くことができる。

最後に、(4.21) の右辺を計算するのに必要な u, v を計算しておこう。そのためには、(4.17) に戻って、 v_{22}/v_{12} の評価をしなければならない。(4.5) より、

$$v_{12} = (1-c) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} H_{2n}, \quad v_{22} = (1-c) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} K_{2n+1}, \quad (4.23)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= 1, \quad H_{2n+2} = h_{2n+2}(y_2) = \int_{-M}^M (U-c)^{-2} dy \int_{-M}^u (U-c)^2 h_{2n} dy \quad (n \geq 0), \\ K_1 &= \int_{-M}^M (U-c)^{-2} dy, \quad K_{2n+3} = k_{2n+3}(y_2) = \int_{-M}^M (U-c)^{-2} dy \int_{-M}^u (U-c)^2 k_{2n+1} dy \quad (n \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

ゆえに、

$$u + iv = 1 + U_1' \delta \left(\frac{K_1 + \beta^2 K_3 + \beta^4 K_5 + \dots}{1 + \beta^2 H_2 + \beta^4 H_4 + \dots} \right) \quad (4.25)$$

さらに、

$$\begin{aligned} H_{2n} - H_2 H_{2n-2} &= M_{2n}, \\ K_1 H_{2n+2} - K_{2n+3} &= N_{2n+3}, \end{aligned}$$

なる M_{2n}, N_{2n+1} を導入して (4.25) をかきなおすと、

$$u + iv = 1 + U_1' \delta K_1 - U_1' \delta \beta^2 (1 - \beta^2 H_2) \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n} N_{2n+3}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} \beta^{2n} M_{2n}} \quad (4.26)$$

となる。このような変換をする理由は、Lin (1955) によって指摘されたように、もし δ が小さいときには、 M, N の虚数部が小さくなるからで、近似的に、 β^2 の如何にかかわらず、

$$v = U_1' \delta \mathcal{J}_m(K_1) \quad (4.27)$$

とおくことができるからである。

(4.24) の積分のうちで、 K_1 は厳密に計算することができ、次のように explicit にかける。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_e(K_1) &= -\frac{2}{c^2 D^3} \left[\frac{2ABD(1+A^2)}{4A^2B - (1-A^2)^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+A^2-2AD}{1+A^2+2AD} \right| \right], \\ \mathcal{J}_m(K_1) &= -\frac{\pi}{c^2 D^3} \frac{c}{|c|}, \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

ただし、

$$A = \tanh \frac{M}{2}, \quad B = \frac{\operatorname{cosech}^2 M}{c^2}, \quad D = \sqrt{1+B}.$$

計算の結果、あとでわかることであるが、増大攪乱が現われ始める Hartmann 数が4の程度であることを考慮して、以後の計算において $O(e^{-2M})$ を1にくらべて無視することにする。

そうすると, ($c < 0$ の場合)

$$\left. \begin{aligned} U_1' &= 1, U_c' = |c|, y_c = -M - \ln|c|, \\ \lambda &= -\frac{\ln|c|}{\delta} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_e(K_1) &= -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{1-c^2} - M + \frac{1}{2} \ln \left| 1 - \frac{1}{c^2} \right| \right], \\ \mathcal{I}_m(K_1) &= \pi/c^2, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

$$\beta R = -\frac{z^3}{|c| \ln^3|c|}, \quad (4.31)$$

となる.

5. $\beta^2 = 0$ の場合 (波数零) の固有値問題

一般の波数 $\beta^2 (\neq 0)$ についての固有値方程式 (4.21) を解く前に, まず簡単で, かつ重要な $\beta^2 = 0$ (波数零・無限長波長の攪乱) の場合の固有値問題を解くことにする. このとき, (4.26) は簡単に,

$$\left. \begin{aligned} u + iv &= 1 + \delta K_1, \\ u &= 1 + \delta \mathcal{R}_e(K_1), v = \delta \mathcal{I}_m(K_1), \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

あるいは,

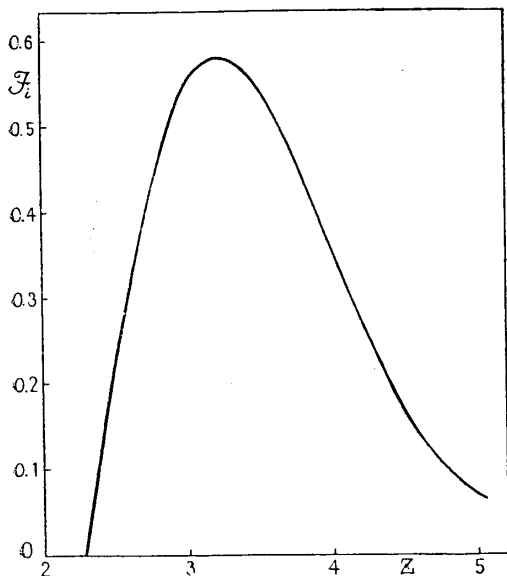
となる. これを (4.21) に代入して, z と δ とを計算するわけであるが, 実際計算を行なう場合には, (4.21) の代りに,

$$\mathcal{F}_i = \frac{(1+\lambda)v}{(1+\lambda u)^2 + (\lambda v)^2}, \quad (5.2)$$

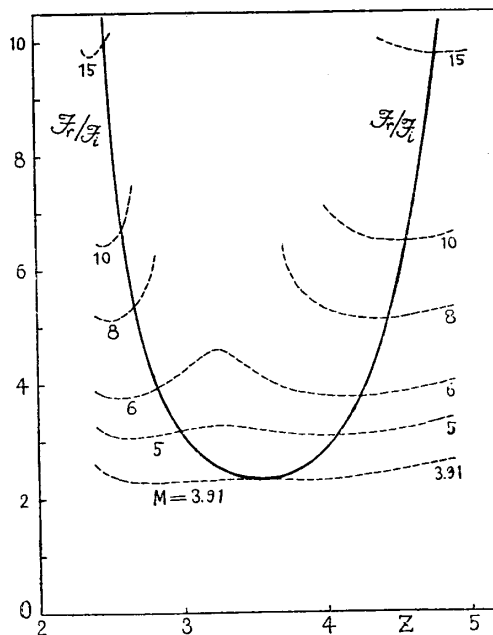
$$\frac{\mathcal{F}_r}{\mathcal{F}_i} = \frac{u(1+\lambda u) + \lambda v^2}{v}, \quad (5.3)$$

の形になおす方が便利である.

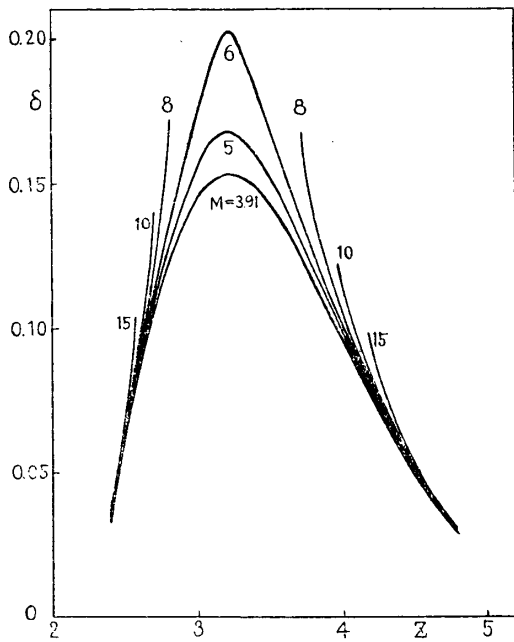
\mathcal{F}_i および $\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_i$ のグラフは Lin (1955) の数表よりそれぞれ第 1 図および第 2 図の実線の



第 1 図



第 2 図



第3図

が求める δ_1, δ_2 である。これに対応する位相速度 c_1, c_2 はそれぞれ, $c_1 = -(1-\delta_1), c_2 = -(1-\delta_2)$ である。(全く同じ資格で $1-\delta_1, 1-\delta_2$ も位相速度 c の固有値である!!) (4.21) の \mathcal{F}_r に対する第1式は, 以上の結果を check するのに用いられる。こうして, (δ, z) の組がきまると, これを (4.31) に代入して, 対応する $(\beta R)_1, (\beta R)_2$ が求まる。計算は $M=3.91, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20$ の各場合について行った。結果は次表の通りである。

M	z_1	z_2	δ_1	δ_2	$(\beta R)_1$	$(\beta R)_2$
3.9	—	—	—	—	—	—
3.91	3.525	3.525	0.140	0.140	1.48×10^4	1.48×10^4
4	3.355	3.672	0.151	0.128	1.02×10^4	2.19×10^4
5	2.968	4.069	0.152	0.0900	6.92×10^3	8.82×10^4
6	2.819	4.236	0.138	0.0736	7.95×10^3	1.84×10^5
8	2.678	4.438	0.116	0.0544	1.16×10^4	5.28×10^5
10	2.589	4.552	0.0939	0.0440	2.00×10^4	1.08×10^6
15	2.485	4.770	0.0625	0.0308	6.09×10^4	3.66×10^6
20	2.440	4.953	0.0500	0.0230	1.13×10^5	9.87×10^6

$\beta^2=0$ で $(\beta R)_1$ も $(\beta R)_2$ も有限であるから, (β, R) 面で中立安定曲線の漸近形は, 双曲線になる。そして各 M について, $(\beta R)_1 < \beta R < (\beta R)_2$ を満たす βR は増大攪乱に, $(\beta R)_1$ より小さいか, $(\beta R)_2$ より大きい βR は減衰攪乱に対応する。Hartmann 数 M が 3.91 より小さいときは, 流れは ($\beta^2=0$ に対して) 安定であり, $M=3.91$ を境にして増大する攪乱が現われ始め, M の増加とともに中立攪乱を与える βR は増加する。(ただし $(\beta R)_1$ の方は, はじめ少し減少するが)。以上の結果は, 波数零という特別な場合に対するものであって, これからだけでは決定的なことは言えないが, M が約 4 以下では流れは安定であり, M が 4 からある値までは磁場は流れを不安定化させ, M がその値をこえると, 逆に安定化の作用をもつように思われる。

表からわかるように, M が充分大きくなると, δ が非常に小さくなるから, $M \gg 1, \delta \ll 1, M\delta = O(1)$ として, 中立安定条件の漸近形を求めておこう。このとき,

ようになる。

まず, M を固定しておいて, いろいろの δ に対して (5.2) の右辺を計算し, これと第1図とから (5.2) を満足するような (z, δ) を求める。これを (z, δ) 面でプロットしたのが第3図である。つぎに, その δ に対する (5.3) の右辺を計算し, それに対応する z を第3図から読みとって, (5.3) の‘右辺’を‘ z の函数’としてプロットしたのが第2図の点線で示されたグラフである。この図からわかるように, それが丁度 $\mathcal{F}_r/\mathcal{F}_i$ と接するのは $M=3.91$ のときで, M がそれ以下であると, 交点はなくなり, それ以上であると, 二つの交点ができる。その二つの交点の z 座標が求める z_1, z_2 であり, 第3図から, この z_1, z_2 に対する δ 座標を読めば, それ

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{R}_c(K_1) &= - \left[\left(\frac{1}{\delta} - 2M \right) + \ln \delta + \left(\frac{5}{2} + \ln 2 - 4M\delta \right) + 2\delta \ln \delta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{23}{4} + 2 \ln 2 - 6M\delta \right) \delta + O(\delta^2 \ln \delta) \right], \\
 \mathcal{J}_m(K_1) &= \pi(1 + 2\delta + 3\delta^2 + O(\delta^3)), \\
 \lambda &= \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{2}{3}\delta + \delta^2 + O(\delta^3) \right) \\
 \beta R &= \left(\frac{z}{\delta} \right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\delta + O(\delta^2) \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

となるから, (5.1), (5.4) より (5.2), (5.3) の右辺は, それぞれ,

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{(1+\lambda v)}{(1+\lambda u)^2 + (\lambda v)^2} &= \pi \delta \left[1 + \left(\frac{5}{2} - 2M\delta \right) \delta + \delta^2 \ln \delta \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{41}{6} + \ln 2 - \frac{31}{3}M\delta + 3M^2\delta^2 \right) \delta^2 + O(\delta^3 \ln \delta) \right], \\
 \frac{u(1+\lambda u) + \lambda v^2}{v} &= \frac{1}{\pi \delta} \left[2M\delta - \delta \ln \delta - \left(\frac{5}{2} + \ln 2 - 2M^2\delta^2 \right) \delta - 2M\delta\delta^2 \ln \delta \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{3}{4} + (2 \ln 2 + 5)M\delta - \frac{16}{3}M^2\delta^2 \right\} \delta^2 + O(\delta^3 \ln^2 \delta) \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

となる.

まず $z_1, \delta_1, (\beta R)_1$ の漸近形を求めよう. このとき, z_1 は \mathcal{F}_i を零とする $z_0 = 2.294$ に近いから,

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 &= z_0 + \Delta z \\
 \mathcal{F}_r &= \mathcal{F}_r(z_0) + \mathcal{F}_r'(z_0) \Delta z \\
 \mathcal{F}_i &= \mathcal{F}_i'(z_0) \Delta z
 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

と仮定する. ただし, $z_0 = 2.294$, $\mathcal{F}_r(z_0) = 2.292$, $\mathcal{F}_r'(z_0) = -0.6187$, $\mathcal{F}_i'(z_0) = 1.220$. (Lin (1955) による). (5.5), (5.6) を (5.2), (5.3) に代入して, 面倒であるが初等的な計算によって,

$$\left. \begin{aligned}
 z_1 &= 2.294 \left\{ 1 + \frac{1.286}{M} + O\left(\frac{\ln M}{M^2} \right) \right\}, \\
 \delta_1 &= \frac{1.146}{M} \left\{ 1 - 0.5 \frac{\ln M}{M} - \frac{0.6836}{M} + O\left(\frac{\ln^2 M}{M^2} \right) \right\}, \\
 (\beta R)_1 &= 8.021 M^3 \left\{ 1 + 1.5 \frac{\ln M}{M} + \frac{5.337}{M} + O\left(\frac{\ln^2 M}{M^2} \right) \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

を得る.

つぎに, $z_2, \delta_2, (\beta R)_2$ の漸近形を求める. このとき, z_2 はかなり大きくなるから, $\mathcal{F}_r, \mathcal{F}_i$ に, $z \gg 1$ の場合の漸近形 (Lin(1955) による)

$$\mathcal{F}_i = \frac{1}{\sqrt{2z_2^3}}, \quad \mathcal{F}_r/\mathcal{F}_i = \sqrt{2z_2^3} + 1 \quad (5.8)$$

を用いて, 同様の計算を行なうと,

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{\sqrt{2}M}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left\{ 1 + \frac{\ln M}{3M} - \frac{1}{3M}(2+\pi) + O\left(\frac{\ln^2 M}{M^2}\right) \right\}, \\ \delta_2 &= \frac{1}{2M} \left\{ 1 - \frac{\ln M}{2M} + \frac{1}{2M}\left(\frac{1}{2} + \pi\right) + O\left(\frac{\ln^2 M}{M^2}\right) \right\}, \\ (\beta R)_2 &= \frac{16M^5}{\pi^2} \left\{ 1 + \frac{5 \ln M}{2M} - \frac{1}{M}\left(3 + \frac{5}{2}\pi\right) + O\left(\frac{\ln^2 M}{M^2}\right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

を得る。

以上が現在までに得られた主な結果である。今後、 $\beta^2 \neq 0$ の場合の計算、および臨界 Reynolds 数の M に対する依存性を求めることが、主な宿題であり、現在計算遂行中である。

最後に、親切な助言と、有益な討論をしていただいた巽友正・後藤金英両博士に厚くお礼申し上げます。

文 献

- [1] A.P. Gallagher & A. McD. Mercer 1962: J. Fluid Mech. **13** (1962) 91.
- [2] S. Chandrasekhar 1953: Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **216** (1953) 293.
- [3] J.T. Stuart 1954: Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **221** (1954) 189.
- [4] R.C. Lock 1955: Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **233** (1955) 105.
- [5] H.B. Squire 1933: Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **142** (1933) 621.
- [6] Lord Rayleigh 1880: Scientific Papers, **1** Camb. U.P.
- [7] W. Tollmien 1935: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse **50** (1935) 79.
- [8] C.C. Lin 1955: *The Theory of Hydrodynamic Stability* Camb. U.P.