

Daí 17 Gô.

(Nukigaki)

Hitosii Hayasa no Ten no Kiseki.

Syokutaku, C. WIESELSBERGER.

Kono Ronbun wa itiyôni nagarete iru Ryûtai no nakani Kotai wo oita tokini, aru kimatta Hayasa de Ryûtai ga nagarete iru Ten no Kiseki wo motometa no de aru. Ni-*dimension*-no Mondai de Marubasira no mawarini Meguri (*Circulation*) ga aru toki to nai toki to ni tuite keisansita. Sore kara Kazu no Kandyô to Dusiki-kandyô to ni yotte *Foukowsky*-gatano Hane no mawarino hitosii Hayasa no Ten no Kiseki wo kimeru koto ga dekita.

No. 17.

(Published June 1926)

Linien konstanter Strömungs- geschwindigkeit.

VON

C. WIESELSBERGER

a. o. Mitglied d. Institutes

Im folgenden werden die Ergebnisse von einigen Rechnungen mitgeteilt, welche zur Aufsuchung der Linien konstanter Geschwindigkeit in einer Flüssigkeitsströmung ausgeführt wurden. Diese Linien sind in gewissen Fällen von praktischem Interesse. Bei der Messung der Geschwindigkeit eines Flugzeuges mittels eines Staugerätes oder Anemometers kommt es darauf an, das Messinstrument möglichst an eine Stelle zu setzen, an welcher die wirkliche Fluggeschwindigkeit angezeigt wird, so dass weitere Berichtigungen nicht erforderlich sind. Dies wird offenbar erreicht, wenn sich das Messinstrument an einem Punkte befindet, in welchem die relative Strömungsgeschwindigkeit dieselbe ist, wie in sehr grosser Entfernung vom Flugzeuge oder mit anderen Worten: wenn sich das Instrument auf einer Linie konstanter, dem absoluten Betrage nach ungestörter Geschwindigkeit befindet. Die folgenden Rechnungen wurden für die zweidimensionale Strömung einer idealen Flüssigkeit ausgeführt. Sie sind daher nicht ohne weiteres auf die Strömung um ein Flugzeug übertragbar, wo ausser dem Einfluss der Ränder auch noch andere, die Strömung verändernde Einflüsse (Schraubenstrahl, Rumpf u. s. w.) vorhanden sind. Die Linien konstanter Geschwindigkeit wurden zuerst für eine Kreiscylinderströmung berechnet, und daraus die entsprechenden Kurven für einen Tragflügel mit Joukowsky'schen Querschnitt abgeleitet.

I. Cylinderströmung.

Wir betrachten zunächst die ebene Strömung um einen Kreiscylinder vom Radius a , welcher senkrecht zur Achse von einem Luftstrom von der Geschwindigkeit u getroffen wird. Der Schnittkreis des Cylinders liege in einer z -Ebene ($z=x+iy$) und sein Mittelpunkt im Punkte $z=0$. Die Richtung der Geschwindigkeit u im Unendlichen erfolge in Richtung der negativen X -Achse. Neben der Parallelströmung existiere auch eine Zirkulationsströmung um den Cylinder, deren Stärke wir mit I bezeichnen. Für die Strömungsfunktion W haben wir dann den bekannten Ausdruck:

$$W = -u \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{iI}{2\pi} \lg \operatorname{nat} z$$

Das Potential Φ der Strömung ergibt sich als Realteil dieses Ausdruckes zu

$$\Phi = -ux - \frac{ua^2 x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Die Geschwindigkeits-Komponenten v_x und v_y in einem beliebigen Punkte des Strömungsfeldes ergeben sich durch partielle Differentiation des Potentials nach der X bzw. Y -Richtung zu:

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Die resultierende Geschwindigkeit v ist daher

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2}$$

Um die Kurven zu erhalten, auf welchen die resultierende Geschwindigkeit den Absolutwert der ungestörten Strömung hat, haben wir den vorstehenden Ausdruck einfach gleich u zu setzen und bekommen somit die folgende Bestimmungsgleichung:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2} = u$$

oder

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{u^2} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

Für den Fall, dass wir diejenigen Punkte suchen, für welche die Geschwindigkeit v um einen Faktor n von u verschieden ist, also $v = nu$ ist an Stelle von (1) zu schreiben

$$\frac{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}{u^2} = n^2 \dots\dots\dots(2)$$

Im vorliegenden Falle ergibt die Differentiation des Potentials die folgenden Ausdrücke für die Geschwindigkeits-Komponenten

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{ua^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \left(u + \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)}\right) = v_x \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{2ua^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)} = v_y \dots\dots\dots(4)$$

Für die weitere Rechnung ist es nun zweckmässig, die Zirkulation durch die Geschwindigkeit u auszudrücken, weil sich dann die Ausdrücke wesentlich vereinfachen. Wir tun dies, indem wir die Zirkulation in der Form schreiben

$$\Gamma = 2\pi cu \dots\dots\dots(5)$$

Die Stärke der Zirkulation ist jetzt durch den Faktor c zum Ausdruck gebracht. Er gibt an, um wieviel die Geschwindigkeit der reinen Zirkulationsströmung am Cylinderumfang grösser ist als die Geschwindigkeit u der ungestörten Parallelströmung. Nehmen wir den Radius des Cylinders a gleich der Einheit und setzen nun die Ausdrücke für $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ gemäss den Gl. 3 und 4 in unsere Restimmungsgleichung (1) ein, so ergibt sich nach einiger Rechnung für die Kurve,

auf welcher die Geschwindigkeit überall $=u$ ist, die folgende Gleichung

$$1 - (2 - c^2)x^2 + (2 + c^2)y^2 + 2cy + 2cy(x^2 + y^2) = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

Diese Gleichung enthält ausser den Koordinaten nur noch die Konstante c , welche die Stärke der Zirkulation angibt. Für die zirkulationsfreie Strömung ($c=0$) ergibt sich hieraus sofort die Linie konstanter Geschwindigkeit zu

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

also eine Hyperbel, deren Asymptoten unter 45° gegen die Achsen geneigt sind (Abb. 1).

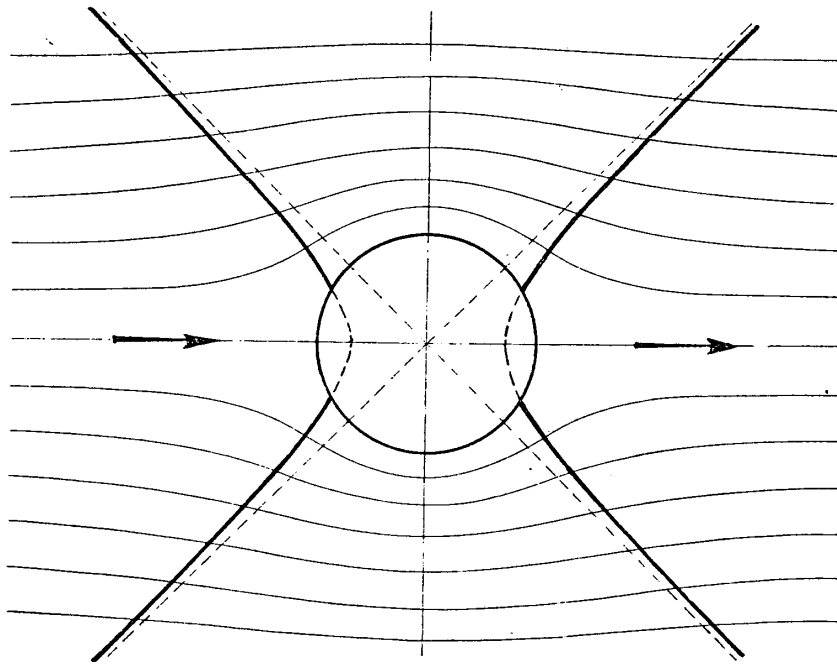


Abb. 1.

Ist Zirkulation vorhanden, so ergeben sich die Koordinaten der Kurven konstanter Geschwindigkeit am einfachsten durch Auflösung der Gleichung (6) nach x^2 zu

$$x^2 = \frac{1 + (2 + c^2)y^2 + 2cy(1 + y^2)}{2 - c - 2cy} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Ich habe den Verlauf der Kurven konstanter Geschwindigkeit u für die Werte $c=1$ und $c=2$ bestimmt. Im Falle $c=2$ rücken die normalerweise vorhandenen beiden Staupunkte in einen einzigen Punkt zusammen.

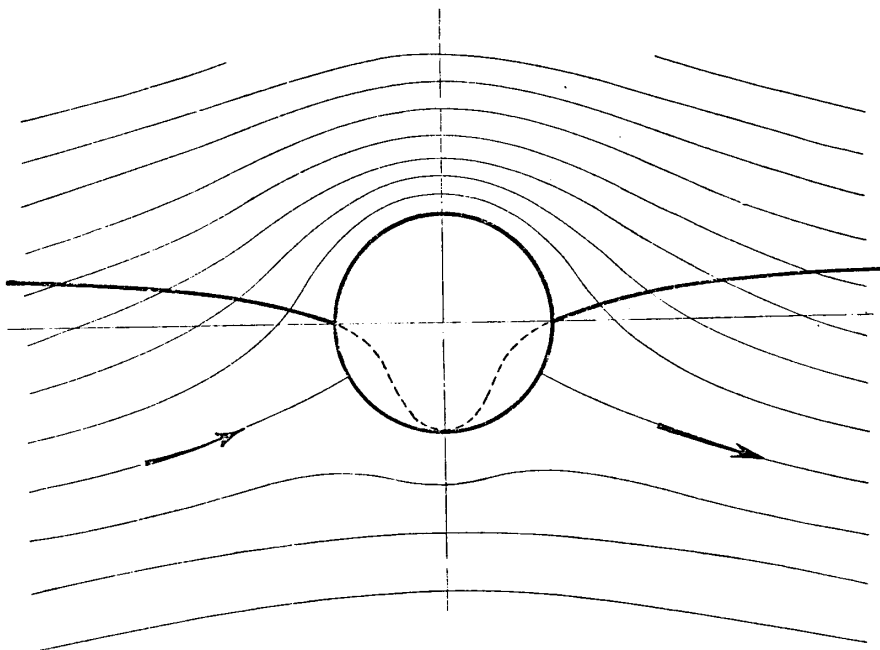


Abb. 2.

Der Verlauf der Kurven ist aus Abb. 2 und 3 ersichtlich, Für den Fall $c=2$ erhält man für x stets imaginäre Werte. Man bekommt indessen eine Lösung, wenn man aus Gl. (6) y als Funktion von x bestimmt. In diesem Falle ist eine Gleichung 3. Grades mittels der Cardanischen Formel zu lösen und es ergibt sich das einfache Resultat

$$y = -\frac{1}{2}$$

also eine Parallele zur X -Achse im Abstand $y = -\frac{1}{2}$. Die Kurven konstanter Geschwindigkeit setzen sich in das Innere des Cylinders fort (gestrichelt gezeichnet). Dies hat seine Ursache darin, dass bei der theoretischen Behandlung ein fester Körper in der Flüssigkeit zunächst

gar nicht vorhanden ist. Dieser kommt nachträglich erst dadurch hinein, dass man sich die kreisförmige Stromlinie, die im vorliegenden Falle von unserer Strömungsfunktion geliefert wird, erstarrt denkt. Dann kann man sich das Innere des Kreises auch mit Masse erfüllt denken, ohne dass sich dadurch die äussere Strömung ändert.

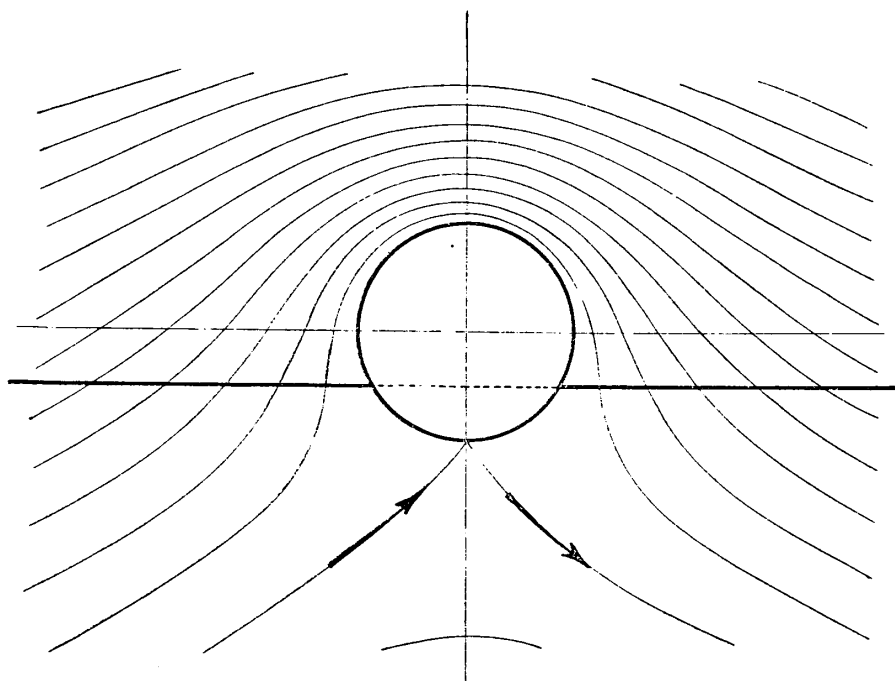


Abb. 3.

Handelt es sich darum, die Geschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte in der Umgebung des Cylinders zu ermitteln, so gelangen wir von der Gl. (2) ausgehend zu der Gleichung

$$(n^2 - 1)(x^2 + y^2)^2 = 1 - (2 - c^2)x^2 + (2 + c^2)y^2 + 2cy + 2cy(x^2 + y^2) \dots \dots \dots (8)$$

aus welcher sich die Verhältniszahl $n = \frac{v}{u}$ leicht berechnen lässt.

Wir werden davon im nächsten Abschnitt Gebrauch machen.

II. Tragflügelströmung.

Die vorstehenden Betrachtungen erleichtern uns nun die Auffindung der Linien konstanter Geschwindigkeit für ein Joukowski'sches Flügelprofil. Bekanntlich erhält man ein Joukowski'sches Profil, indem man die Strömung mit Zirkulation um einen in der z -Ebene liegenden Kreis mittels der Transformation

$$\zeta = z + \frac{(l/2)^2}{z} \dots\dots\dots(9)$$

in eine ζ -Ebene ($\zeta = \xi + i\eta$) konform abbildet. Diese Abbildung ist derart, dass der Kreis K' mit dem Radius $l/2$ in die gerade Linie $A-B$ von der Länge $2l$ in der ζ -Ebene übergeht, während der Kreis K in das gezeichnete Joukowski-Profil übergeht.¹⁾ (Abb. 4). Ferner gehen konzentrische Kreise um den Punkt $z=0$ in confokale Ellipsen und das gezeichnete Strahlenbündel durch $z=0$ in eine Schar confokaler Hyperbeln über. Der Mittelpunkt M des Kreises K fällt nicht mit $z=0$ zusammen. Er liegt auf einer Geraden, welche mit der X -Achse den Winkel β bildet und welche durch den Schnittpunkt C des Kreises K' mit der X -Achse hindurchgeht. Dieser Punkt C geht durch die Abbildung in die Hinterkante des Joukowski-Profiles über, er ist wichtig für die Bestimmung der Zirkulation. Nach Kutta wird nämlich die Stärke der Zirkulation so gewählt, dass der hintere Staupunkt gerade mit der Hinterkante des Profils zusammenfällt; in der z -Ebene muss daher der hintere Staupunkt mit dem Punkte C zusammenfallen. Dadurch ist die Stärke der Zirkulation eindeutig festgelegt. Erfolgt die Strömung unter einem Winkel α gegen die X -Achse, so ergibt sich für die Zirkulation der Wert²⁾

-
- 1) Die Bestimmungsstücke des gezeichneten Profils in der z -Ebene sind folgende:
Radius des Kreises K $a=1$, Radius des Kreises K' $=0.875$ Winkel $\beta=6.5$.
 - 2) Näheres hierüber findet sich z. B. in:
v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenauftriebes, ZFM 1917, S. 157 u. ff.
oder: Fuchs-Hopf, Aerodynamik.

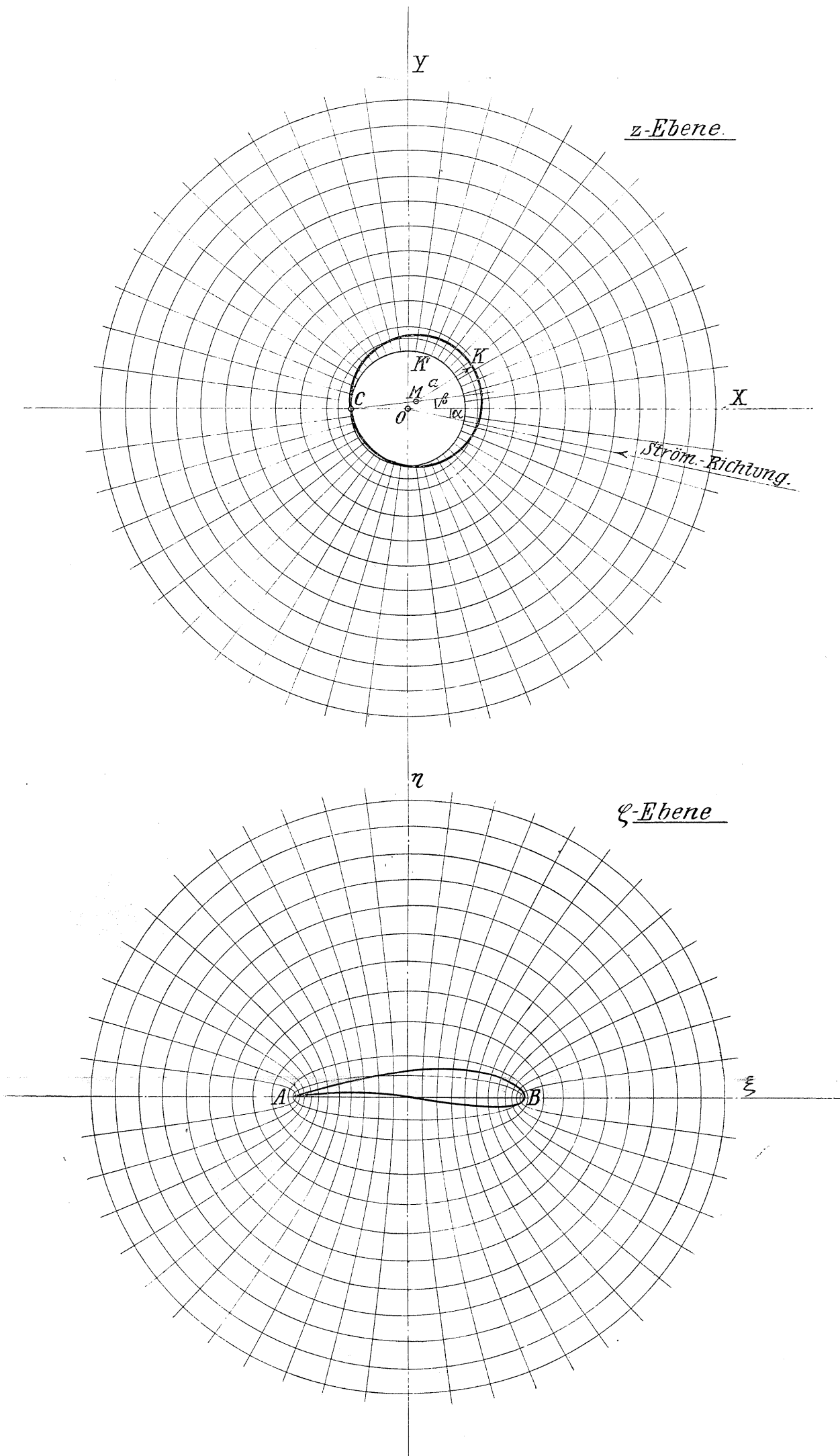


Abb. 4.

$$\Gamma = 4\pi au \sin(\alpha + \beta) \dots \dots \dots (10)$$

Durch Vergleich dieser Gleichung mit der Gl. (5) findet man für die Grösse c den Wert

$$c = 2 \sin(\alpha + \beta)$$

Durch die konforme Abbildung gehen ferner die Stromlinien um den Kreis K in die Stromlinien um das Flügelprofil über.

Uns interessieren hier nur die Geschwindigkeiten in der Umgebung des Joukowsky-Profiles. Bei Berechnung der Geschwindigkeiten ist zu beachten, dass durch die Transformation (9) auch die Geschwindigkeiten in entsprechenden Punkten verändert werden. Bezeichnet man mit $v(x, y)$ die Geschwindigkeiten um den Kreis und mit $w(\xi, \eta)$ die Geschwindigkeiten um das Profil, so gilt für entsprechende Punkte die Beziehung

$$w(\xi, \eta) = \frac{v(x, y)}{\left| \frac{d\xi}{dz} \right|} \dots \dots \dots (11)$$

Die Geschwindigkeit im Unendlichen bleibt indessen ungeändert, weil $\frac{d\xi}{dz}$ für $z = \infty$ den Wert 1 annimmt (vergl. Gl. (12)). Da das Geschwindigkeitsfeld um den Kreis als vollständig bekannt anzusehen ist, so kann bei Berücksichtigung von (11) die Geschwindigkeit auch in jedem beliebigen Punkte in der Umgebung des Profiles berechnet werden. Bei Ausführung der Berechnung ist indessen zu beachten, dass der Mittelpunkt M des Kreises K nicht mit dem Anfangspunkt $z = 0$ zusammenfällt, ferner dass die Strömung im allgemeinen nicht parallel zur X -Achse, sondern unter dem Anstellwinkel α gegen diese geneigt ist. Durch diesen Umstand wird die Rechnung insofern unbequem, als man mit sehr langen Ausdrücken zu operieren hat. Ich habe daher zur Bestimmung der Linien konstanter Geschwindigkeit einen Teil der Rechnung durch ein zeichnerisches Verfahren umgangen und zwar in folgender Weise:

In der z -Ebene wurde mit Hilfe von Gl. (8) die Geschwindigkeit in einigen Punkten berechnet. Diese Punkte wurden mit Hilfe der in Abb. 4 gezeichneten Netze in die ζ -Ebene übertragen, gleichzeitig aber die berechnete Geschwindigkeit gemäss Gl. (11) durch den Faktor

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \left(\frac{l/2}{z} \right)^2 \dots\dots\dots (12)$$

dividiert. Durch graphische Interpolation wurden dann die Punkte ermittelt, für welche $n = \frac{v}{u} = 1$ ist und so die Kurven konstanter Geschwindigkeit u gefunden. In der z -Ebene wurden die Punkte auf den konzentrischen Kreisen angenommen, weil für diese $\frac{d\zeta}{dz}$ einen konstanten Wert hat, was die Rechnung etwas vereinfacht. Da die ungefähre Lage der gesuchten Kurven aus Versuchen bekannt ist¹⁾, so ist es nicht nötig die Geschwindigkeit im ganzen Feld zu berechnen, sondern nur in zwei verhältnissmassig kleinen Sektoren, die von der Vorder- und Hinterkante ausgehen. Man kommt deshalb ziemlich schnell zum Ziele. Die Linien konstanter Geschwindigkeit wurden für 3 verschiedene Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ, 6^\circ$ und 12° bestimmt. Diese Winkel beziehen sich auf die Linie $A-B$, welche sich bei der konformen Abbildung als natürliche Bezugslinie ergibt und welche im vorliegenden Falle einen Winkel von 3° mit der Profilschne bildet. Der berechnete

1) Vergl. L. W. Bryant and D. H. Williams, An investigation of the flow of air around an aerofoil of infinite span. Phil. Trans. of the Royal Society of London, Series A, Vol. 225. S. 199-245 (1925). Die Verf. haben das Geschwindigkeitsfeld eines Flügels in ebener Strömung mit einem Hitzdrahtinstrument ausgemessen und daraus die Linien konstanter Geschwindigkeit konstruiert.

Ferner: Fr. Ahlborn, Orte für Messgeräte an Flugzeugen. ZFM 1925, S. 2
 Ahlborn hat die Kurven ungestörter Geschwindigkeit aus photographischen Aufnahmen der Stromlinien ermittelt. Die von der Hinterkante eines Eindeckers ausgehende Kurve hat nach seinen Ergebnissen einen anderen Verlauf als die erwähnten englischen Versuche und als die vorstehenden Rechnungen ergeben. Woher diese Abweichung rührt lässt sich nicht ohne weiteres sagen. Über die Versuchsanordnung sind Einzelheiten nicht angegeben. Durch die (vermutlich) endliche Spannweite des Flügels scheint sie mir nicht erklärt werden zu können.

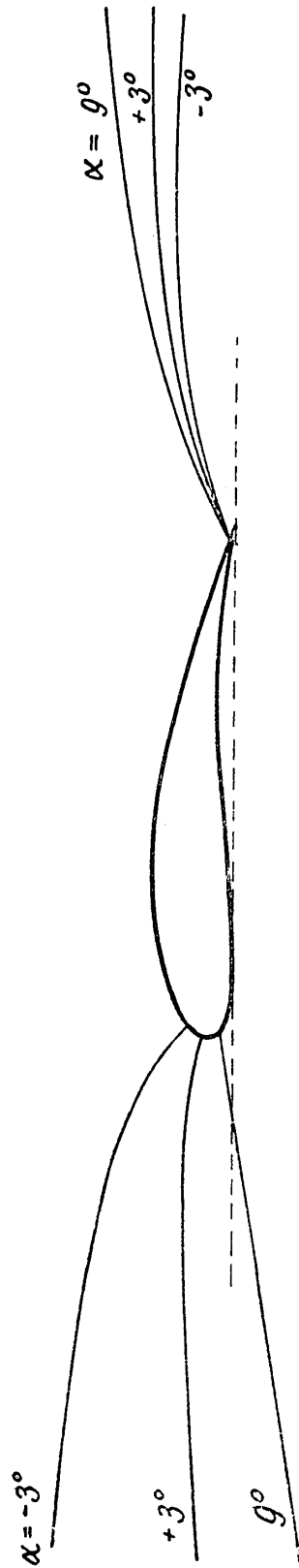


Abb. 5.

Verlauf der Kurven ist aus Abb. 5 ersichtlich. Die eingeschriebenen Anstellwinkel beziehen sich auf die Profilschne. Die Kurven gehen von Punkten in der Nähe der Vorder- und Hinterkante aus. Es ist bemerkenswert, dass die Lage der von der Hinterkante ausgehenden Kurven weniger vom Anstellwinkel abhängig ist, als die Lage der vorderen Kurven.

Bei Bestimmung der Kurven für einen Tragflügel von endlicher Spannweite in einer mit Reibung behafteten Flüssigkeit ist zu beachten, dass die Zirkulation infolge des Einflusses der Reibung und infolge des vom Flügel ausgehenden Wirbelbandes bei gleichem geometrischen Anstellwinkel kleiner ist als der der Theorie zu Grunde gelegte Wert. Ferner ist die Zirkulation längs der Spannweite nicht konstant, sondern hängt von der Entfernung von der Flügelmitte ab. Für die Berechnung der Kurven in diesem Falle empfiehlt es sich Versuchsergebnisse zu benutzen und den Wert der Zirkulation aus dem Auftrieb an der betreffenden Stelle zu bestimmen. Auftrieb und Zirkulation sind ja durch die Kutta-Joukowski'sche Formel eindeutig miteinander verknüpft. Ist die Zirkulation bestimmt, so ist der Gang der Rechnung derselbe wie vorstehend.