

No. 149.

(Published May, 1937.)

**On the Natural Vibration of Semi-Cantilever Beam
with One End Fixed or Pin-jointed.**

By

Mineo YAMAMOTO,

Member of the Institute,

and

Ziro SUZUKI,

Assistant in the Institute.

Abstract.

The natural vibration of the semi-cantilever beam having uniform section which is fixed at one end, free at the other and supported at the intermediate point is studied. Also the effects of the position and elasticity of the intermediate support, and the axial force in the inner bay are investigated in general case, and compared with the case of a beam with one end pin-jointed, the latter case without axial force in the inner bay having been studied by J. Morrow.

The modes of vibration of such beams in fundamental tone, and also first, second and third harmonics are calculated for a special wing spar as an example. The effect of the friction in the intermediate support and pin-jointed end on the vibration frequency is studied by a simple model experiment.

Our conclusions are as follows:—

(1) The frequency of the fundamental vibration of a semi-cantilever beam changes considerably with the position of the intermediate support and it is maximum when the length of overhang is about 28 and 36 per cent respectively of the length of inner bay according as the other end is fixed or pin-jointed.

(2) Effect of the condition of the end on the frequency of the fundamental vibration is comparatively large when the ratio of length of overhang to the length of inner bay is small, but it is small when the ratio is great. For the natural vibration of the semi-cantilever beam of aeroplane wing the effect of the end condition on the frequency is generally small.

(3) Effect of the elasticity of the intermediate support on the natural vibration of the beam is small when the rigidity of the support is comparatively large as for the case of aeroplane wing beam.

(4) Friction of the end opposite to the overhang and the intermediate support influences considerably on the natural frequency in the case of semi-cantilever beam with pin-jointed end. But, for the case of semi-cantilever beam the friction at the intermediate support changes the frequency by only a small amount.

中間に一支點を有し、一端が固着 或は滑節支持の半片持桁の振動

所 員 山 本 峰 雄
雇 員 鈴 木 二 郎

目 次

	頁
緒 言	321
1. 一端固着或は滑節、他端自由で中間に支點を持つ桁の固有振動 ..	322
1. 1. 内側張間に軸力を受けない場合	322
1. 2. 内側張間に軸力を受ける場合	324
2. 一端固着、他端滑節の棒の固有振動。軸力を受ける場合	327
3. 一端固着、他端自由で中間に彈性支點を持つ桁の固有振動。 内側張間に軸力を受けない場合	328
4. 一端固着、中間に一支點を有する棒の振動の一例	330
5. 支持點の位置の振動數に及ぼす影響及び其の實驗	334

緒 言

J. Morrow⁽¹⁾ は二點で支へられ一端に張出部を持つ桁の固有振動を扱ひ、之より Dunkerly⁽²⁾ も二點で支へられ一端に張出部を持つ廻轉軸の振動を扱ひ略々同様な結果を得てゐる。然し張出部と反對側の端が固着された場合は未だ計算されて居ない。最近の飛行機特に飛行艇等では一端固着された半片持桁を有するものが多い。著者の一人は嚮に白鳩號の事故調査を行つた際斯くの如き半片持桁の固有振動を計算した。⁽³⁾此の論文はその際計算した結果を補足したものである。計算は極めて簡単で

-
- (1) J. Morrow : "On the Lateral Vibration of Bar Supported at Two Points with One End Overhanging" Phil. Mag. 11 (1905) 354—374 頁。
(2) Dunkerly : "On the Whirling and Vibration of Shaft" Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), 1894, 279—309 頁。
(3) 航空評議會事故飛行機調査主査委員會、白鳩號事故調査報告、航空研究所報告 116 號、昭和 10 年 7 月、293 頁。

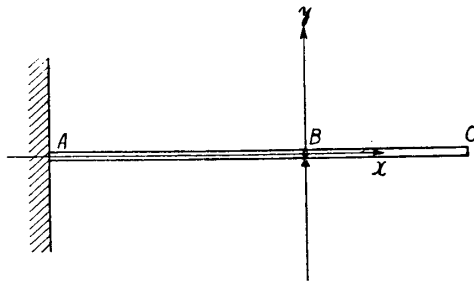
はあるが、実用的には興味あるものと考へたので發表することとした次第である。

内容は先づ一端固着他端自由であつて、其の中間に支點を持つ断面一樣な桁の固有振動に就て計算を行ひ、桁の固有振動數、振動様式、之等に及ぼす支點位置及び内側張間の軸力の影響を求め、次で中間を發條にて支持したる桁の固有振動數を扱ひ發條及び支點位置の振動に及ぼす影響を考察したものである。

1. 一端固着或は滑節、他端自由で中間に支點を持つ桁の固有振動

1. 1. 内側張間に軸力を受けない場合

断面一樣な棒が第 1 圖の如く A 點で固着され、 B 點で支へられて居るものとす



第 1 圖

る。 B 點を原點として圖の如く座標を取る。然るときは桁を上方に向つて凸に曲げるモーメントを正にとれば、此の棒の振動方程式は AB 部及び BC 部に於て夫夫

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

である。茲に E は棒の材料のヤング

係數、 I は棒の断面の慣性能率、 m は棒の單位長の質量、 t は時間である。

(1) の解を

$$y = e^{\frac{\kappa}{l}x} \cos pt \quad (2)$$

と置き之を (1) に代入すれば

$$\kappa^4 = \frac{mp^2 l^4}{EI} \quad (3)$$

或は

$$p = \kappa^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \quad (4)$$

を得る。

(3) より κ の値を求め之を (2) に代入することにより AB 部及び BC 部に於て夫夫

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos pt \left(C_1 \cosh \frac{\kappa}{l} x + C_2 \sinh \frac{\kappa}{l} x + C_3 \cos \frac{\kappa}{l} x + C_4 \sin \frac{\kappa}{l} x \right) \\ y_2 &= \cos pt \left(C_1' \cosh \frac{\kappa}{l} x + C_2' \sinh \frac{\kappa}{l} x + C_3' \cos \frac{\kappa}{l} x + C_4' \sin \frac{\kappa}{l} x \right) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。式中 $C_1, C_2, \dots, C_3', C_4'$ は勿論境界條件によつて定まる常數である。

境界條件は次の如くである。

$$\begin{aligned}
 x = -l_1 : y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \\
 x = 0 : y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} \\
 x = l_2 : \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

(5) を (6) に代入して $C_1, C_2, \dots, C_3', C_4'$ の未知數を消去すれば、固有振動數決定式として次の式を得る。

$$\begin{aligned}
 -(\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1)(1 + \cosh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2) \\
 + (\sinh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2 - \cosh \kappa \lambda_2 \sin \kappa \lambda_2)(1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

但し、 $\lambda_1 = \frac{l_1}{l}, \lambda_2 = \frac{l_2}{l}$ 。

之に對し前述の Morrow の得た一端を滑節支持にしたときの振動數決定式は

$$\begin{aligned}
 (\cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \sinh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1)(\cosh \kappa \lambda_2 \sin \kappa \lambda_2 - \sinh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2) \\
 + 2 \sinh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1 (1 + \cosh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2) = 0 \tag{5}
 \end{aligned} \tag{8}$$

である。

次に振動様式は (5) に於て C_4' を任意常數と置くことにより

$$\begin{aligned}
 y_1 = C_4' \cos pt \left(A \cosh \frac{\kappa}{l} x + B \sinh \frac{\kappa}{l} x + C \cos \frac{\kappa}{l} x + D \sin \frac{\kappa}{l} x \right) \\
 y_2 = C_4' \cos pt \left(E \cosh \frac{\kappa}{l} x + F \sinh \frac{\kappa}{l} x + G \cos \frac{\kappa}{l} x + \sin \frac{\kappa}{l} x \right)
 \end{aligned} \tag{9}$$

で與へられる。

茲に、

$$\begin{aligned}
 A = \frac{C_1}{C_4'} = \frac{1}{\Delta} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1) \\
 B = \frac{C_2}{C_4'} = \frac{1}{\Delta} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (1 + \sinh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \\
 C = \frac{C_3}{C_4'} = \frac{1}{\Delta} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1) \\
 D = \frac{C_4}{C_4'} = \frac{1}{\Delta} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (1 - \sinh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \\
 E = \frac{C_1'}{C_4'} = -\frac{1}{\Delta} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1)
 \end{aligned}$$

(5) 前掲 (1)。

$$F = \frac{C_2'}{C_4'} = \frac{I}{A} \{ (\cosh \kappa \lambda_2 + \cos \kappa \lambda_2) (\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1) \\ + 2 \sin \kappa \lambda_2 (1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \}$$

$$G = \frac{C_3'}{C_4'} = \frac{I}{A} (\sinh \kappa \lambda_2 + \sin \kappa \lambda_2) (\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1)$$

$$A = (\cosh \kappa \lambda_2 + \cos \kappa \lambda_2) (\cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1 - \sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \\ + 2 \sinh \kappa \lambda_2 (1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1)$$

である。

1. 2. 内側張間に軸力を受ける場合

此の場合は飛行機の翼の主桁の如く斜支柱に依つて内側張間に軸力を受ける場合に相当する。

今、内側張間に於ける軸力を P で表せば、内側張間の振動方程式は 1. 1. の場合と同様に符號を定めれば、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \pm P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

但し、第二項の正號は軸力が壓縮力の場合、負號は軸力が張力の場合である。

先づ壓縮力の場合を考へる。内側張間に對しては前同様 (10) の解として

$$y_1 = \cos pt (C_1 \cosh \frac{\kappa_1}{l} x + C_2 \sinh \frac{\kappa_1}{l} x + C_3 \cos \frac{\kappa_2}{l} x + C_4 \sin \frac{\kappa_2}{l} x) \quad (11)$$

を得る。

茲に

$$\kappa_1^2 = \frac{-P l^2 + \sqrt{P^2 l^4 + 4 E I m p^2 l^4}}{2 E I}, \quad \kappa_2^2 = \frac{P l^2 + \sqrt{P^2 l^4 + 4 E I m p^2 l^4}}{2 E I}$$

である。而して之より

$$p = \kappa_1 \kappa_2 \sqrt{\frac{E I}{m l^4}}, \quad \kappa_2^2 - \kappa_1^2 = \frac{P l^2}{E I}$$

なる關係を得る。

次に張出部の部分に對しては 1. 1. の微分方程式を解くことにより、

$$y_2 = \cos pt (C_1' \cosh \frac{\kappa_3}{l} x + C_2' \sinh \frac{\kappa_3}{l} x + C_3' \cos \frac{\kappa_3}{l} x + C_4' \sin \frac{\kappa_3}{l} x) \quad (12)$$

を得る。

茲に

$$p = \kappa_3^2 \sqrt{\frac{E I}{m l^4}}$$

而して此の關係と上の關係とから、

$$\kappa_1 \kappa_2 = \kappa_3^2$$

を得る。

(1. 1.), (1. 2.) の二式に 1. 1. と同様な境界条件を代入し、 $C_1, C_2, \dots, C_3', C_4'$ を消去すれば、此の場合の振動数決定式として次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)(\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 \cos \kappa_2 \lambda_1 - \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 \sin \kappa_2 \lambda_1)(1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2) \\ & - \kappa_3(\sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2 - \cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2) \{ 2\kappa_1 \kappa_2 (1 - \cosh \kappa_1 \lambda_1 \cos \kappa_2 \lambda_1) \\ & + (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \sinh \kappa_1 \lambda_1 \sin \kappa_2 \lambda_1 \} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

又 C_4' を任意常数とすれば

$$\begin{aligned} y_1 &= C_4' \cos pt \left(A \cosh \frac{\kappa_1}{l} x + B \sinh \frac{\kappa_1}{l} x + C \cos \frac{\kappa_2}{l} x + D \sin \frac{\kappa_2}{l} x \right) \\ y_2 &= C_4' \cos pt \left(E \cosh \frac{\kappa_3}{l} x + F \sinh \frac{\kappa_3}{l} x + G \cos \frac{\kappa_3}{l} x + \sin \frac{\kappa_3}{l} x \right) \end{aligned}$$

茲に

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2}{\Delta} \kappa_3^2 (\sinh \kappa_3 \lambda_2 + \sin \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 - 1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \\ B &= \frac{2}{\Delta} \kappa_3^3 (\sinh \kappa_3 \lambda_2 + \sin \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sin \kappa_2 \lambda_1 & -\cos \kappa_2 \lambda_1 + \cosh \kappa_1 \lambda_1 \\ \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 & \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 + \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 \end{vmatrix} \\ C &= \frac{2}{\Delta} \kappa_3^3 (\sinh \kappa_3 \lambda_2 + \sin \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \\ D &= -\frac{2}{\Delta} \kappa_3^3 (\sinh \kappa_3 \lambda_2 + \sin \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & -\cos \kappa_2 \lambda_1 + \cosh \kappa_1 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 + \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 \end{vmatrix} \\ E &= -\frac{1}{\Delta} \kappa_3 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\sin \kappa_3 \lambda_2 + \sinh \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \\ F &= -\frac{1}{\Delta} \left[2\kappa_3^2 \sin \kappa_3 \lambda_2 \left\{ \kappa_1 \begin{vmatrix} \cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 + \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \kappa_2 \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 + \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 \end{vmatrix} \right\} \right. \\ & \quad \left. - \kappa_3 (\cos \kappa_3 \lambda_2 + \cosh \kappa_3 \lambda_2) (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta = -2\kappa_3^3 \left\{ \frac{\kappa_1}{\kappa_3} \sinh \kappa_3 \lambda_2 \begin{vmatrix} \cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \right. \\ \left. + \frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{2\kappa_3^2} (\cos \kappa_3 \lambda_2 + \cosh \kappa_3 \lambda_2) \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \sin \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_2 \cos \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \right. \\ \left. + \frac{\kappa_2}{\kappa_3} \sinh \kappa_3 \lambda_2 \begin{vmatrix} \sinh \kappa_1 \lambda_1 & \cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1 \\ \kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 & \kappa_1 \sinh \kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \sin \kappa_2 \lambda_1 \end{vmatrix} \right\}$$

である。

張力の場合は P が負になるだけである。

之に對し一端を滑節支持にした棒の内側張間に軸力の働く場合は I. 2. の境界条件の

$$x = -l_1 : \quad y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0,$$

の代わりに

$$x = -l_1 : \quad y_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0$$

と置くことにより前と同様にして次の振動数決定式及び各係数の値を得る。

$$\kappa_3 (\kappa_1 \cosh \kappa_1 \lambda_1 \sin \kappa_2 \lambda_1 + \kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 \cos \kappa_2 \lambda_1) (\sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2 - \cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2) \\ + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \sinh \kappa_1 \lambda_1 \sin \kappa_2 \lambda_1 (1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2) = 0 \quad (14)$$

$$A = \frac{1}{\Delta} 2\kappa_3^2 (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

$$B = \frac{1}{\Delta} 2\kappa_2 \kappa_3^2 (\cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2) \\ - 2\kappa_3 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \sin \kappa_2 \lambda_1 (1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

$$C = -\frac{1}{\Delta} 2\kappa_3^2 (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

$$D = -\frac{1}{\Delta} 2\kappa_1 \kappa_3^2 (\cosh \kappa_1 \lambda_1 - \cos \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2) \\ + 2\kappa_3 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \sinh \kappa_1 \lambda_1 (1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

$$E = -\frac{1}{\Delta} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

$$F = \frac{1}{\Delta} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2)$$

$$G = -\frac{1}{\Delta} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (\cosh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2 - \sinh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2)$$

茲に $\Delta = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) (\kappa_2 \sinh \kappa_1 \lambda_1 - \kappa_1 \sin \kappa_2 \lambda_1) (1 + \cosh \kappa_3 \lambda_2 \cos \kappa_3 \lambda_2 + \sinh \kappa_3 \lambda_2 \sin \kappa_3 \lambda_2)$ 。

2. 一端固着、他端滑節支持の棒の固有振動。 軸力ある場合

此の場合一端に張出部が無い場合で、飛行機の主翼の支柱に屢々見られる形式のものである。

軸力の働いてゐる場合には (I0) の振動方程式及び (II) の解に境界条件

$$x=0 : \quad y=0, \quad \frac{\partial y}{\partial x}=0$$

$$x=l : \quad y=0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$$

を代入し固有振動数決定式を求むれば

$$\kappa_2 \sinh \kappa_1 \cos \kappa_2 - \kappa_1 \cosh \kappa_1 \sin \kappa_2 = 0$$

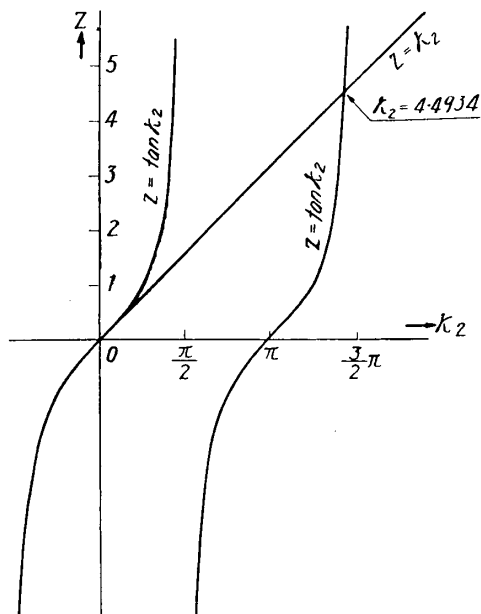
を得る。

尙、 $p \rightarrow \infty$ に對する壓縮荷重、即ち挫屈荷重を求めて見ると

$$\kappa_1 \rightarrow 0$$

$$\kappa_2 \rightarrow \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}}$$

$$\lim_{\kappa_1 \rightarrow 0} \frac{\sinh \kappa_1}{\kappa_1} = 1, \quad \lim_{\kappa_1 \rightarrow 0} \cosh \kappa_1 = 1$$



なるが故に

$$\kappa_2 - \tan \kappa_2 = 0$$

を得る。之を圖式解法に依つて解き (第 2 圖)

$$\kappa_2 = 4.4934$$

を得る。

$$\text{故に } P = 20.1907 \times \frac{EI}{l^2}$$

此の式はオイラーの挫屈荷重

$$P = \frac{2.047\pi^2 EI}{l^2}$$

と一致する。

第 2 圖

3. 一端固着、他端自由で中間に弾性支点を持つ桁 の固有振動。内側張間に軸力を受けない場合

此の場合は飛行機の翼の桁に於ける如く中間を斜支柱に依つて支持せられた場合に相当するものである。勿論支柱の完全なる影響を調べるためには支柱と桁との聯成振動を解かなければならない。然し此處では簡單の爲に發條を以て支柱の弾性的影響を表はし得るものと考へた。

今第1圖に於ける B 点を發條係數 c なる發條に依つて支へられてゐるものとす。

軸方向の力の働いてゐない場合であるから 1. 1. の場合と同様な微分方程式が成立する。而して其の境界條件は

$$\begin{aligned} x = -l_1 : \quad & y_1 = 0, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \\ x = 0 : \quad & y_1 = y_2, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}, \\ & EI \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = EI \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - y_B c \\ x = l_2 : \quad & \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} = 0 \end{aligned}$$

である。但し y_B は B 点の撓みである。之等の境界條件より振動數決定式

$$\begin{aligned} & -(\sinh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1 - \cosh \kappa \lambda_1 \sin \kappa \lambda_1)(1 + \cosh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2) \\ & + (\sinh \kappa \lambda_2 \cos \kappa \lambda_2 - \cosh \kappa \lambda_2 \sin \kappa \lambda_2)(1 - \cosh \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \\ & + \frac{2\kappa^3}{k}(1 + \cosh \kappa \cos \kappa) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。但し

$$k = \frac{l^3 c}{EI}$$

である。

而して支點が剛體なる場合には $c = \infty$, 従つて $k = \infty$ となるから式 (15) の第三項は零となり (7) 式と同様になる。又 $c = 0$, 或は $k = 0$, 即ち中間支點がない場合には第一項、第二項は零となり

$$1 + \cosh \kappa \cos \kappa = 0$$

を得る。此の式は片持桁の振動數決定式である。

勿論、此の場合に於ても p と κ は

$$p = \kappa^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

の関係で結び付けられてゐる。

次に各係数は

$$A = E = -\frac{I}{\Delta} \begin{vmatrix} -\sinh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & -\cos \kappa \lambda_1 \\ -\sin \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 \\ -\cos \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 & \cos \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$B = -\frac{I}{\Delta} \begin{vmatrix} \cosh \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 \\ -\sinh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 \\ \sinh \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$C = G = -\frac{I}{\Delta} \begin{vmatrix} \cosh \kappa \lambda_1 & -\sinh \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 \\ -\sinh \kappa \lambda_1 & \cosh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 \\ \sin \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$D = -\frac{I}{\Delta} \begin{vmatrix} \cosh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & -\sinh \kappa \lambda_1 & -\sinh \kappa \lambda_1 \\ -\sinh \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 & \cosh \kappa \lambda_1 & \cosh \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 \\ \sinh \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$F = \frac{I}{\Delta} \begin{vmatrix} \cosh \kappa \lambda_1 & -\sinh \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 \\ -\sinh \kappa \lambda_1 & \cosh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & -\sin \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 \\ \sinh \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

但し、

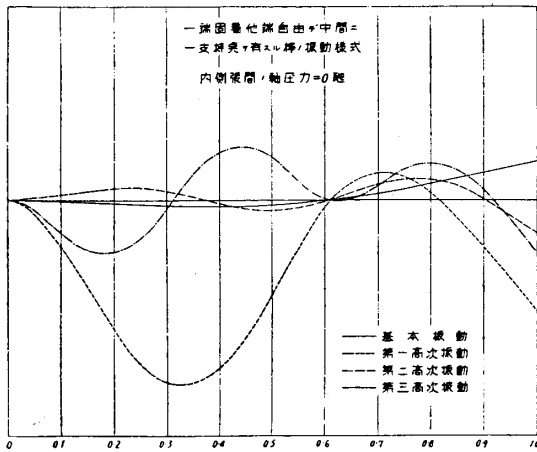
$$\Delta = \begin{vmatrix} \cosh \kappa \lambda_1 & -\sinh \kappa \lambda_1 & -\sin \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 \\ -\sinh \kappa \lambda_1 & \cosh \kappa \lambda_1 & \cos \kappa \lambda_1 & \sin \kappa \lambda_1 \\ \cosh \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 & \sinh \kappa \lambda_2 & -\cos \kappa \lambda_2 \\ \sinh \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 & \cosh \kappa \lambda_2 & \sin \kappa \lambda_2 \end{vmatrix}$$

である。

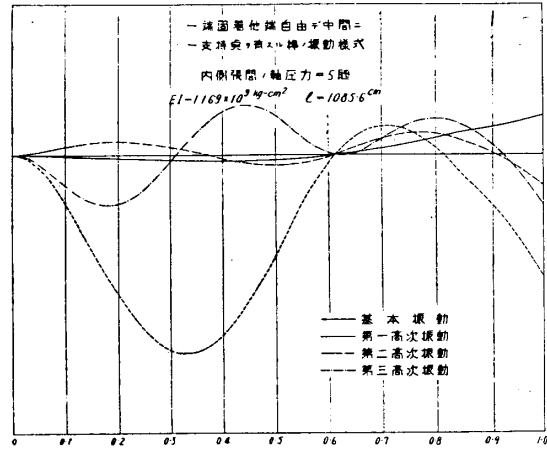
4. 一端固着中間に一支点を有する棒の振動の一例

以上の解を用ひ二、三の實例を扱つて見た。

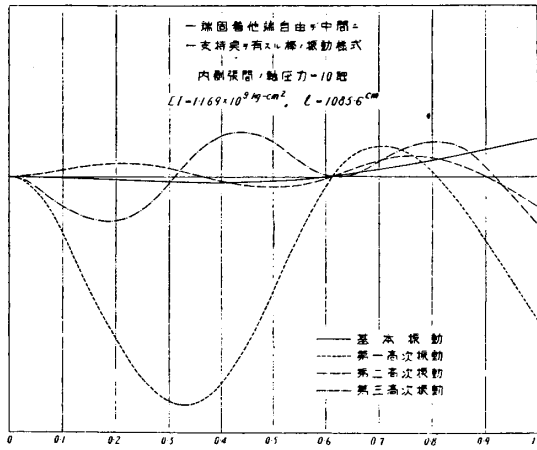
曲げ剛性率 $1.1689 \times 10^9 \text{ kg-cm}^2$, 單位長さの重量 0.08377 kg/cm , 全長 1085.6 cm , $\lambda_1=0.6131$, $\lambda_2=0.3869$ ⁽⁵⁾ なる棒の軸方向に力の働かない場合、軸方向の壓縮力が 5 廳、10 廳、及び 15 廳の各場合については基本振動乃至第三高次振動の振動



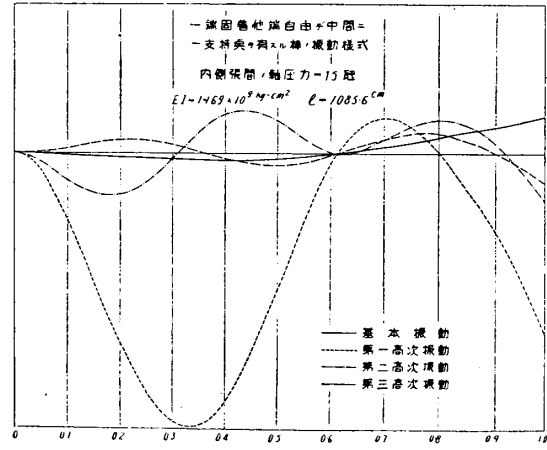
第 3 圖



第 4 圖



第 5 圖



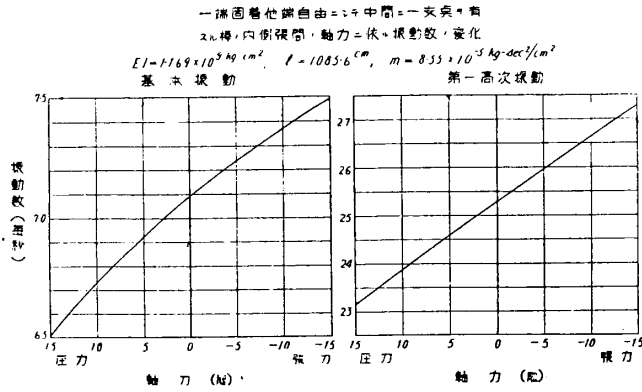
第 6 圖

(5) 之等の値はドルニエー、ワール型飛行艇白鳩號の桁の平均値である。

數、振動様式を求め(第3圖、第4圖、第5圖、第6圖)、張力5 廳、10 廳、及び15 廳の場合について其の振動數のみを求めた。振動數は勿論張力と共に増加し壓力と共に減小する。其の關係は

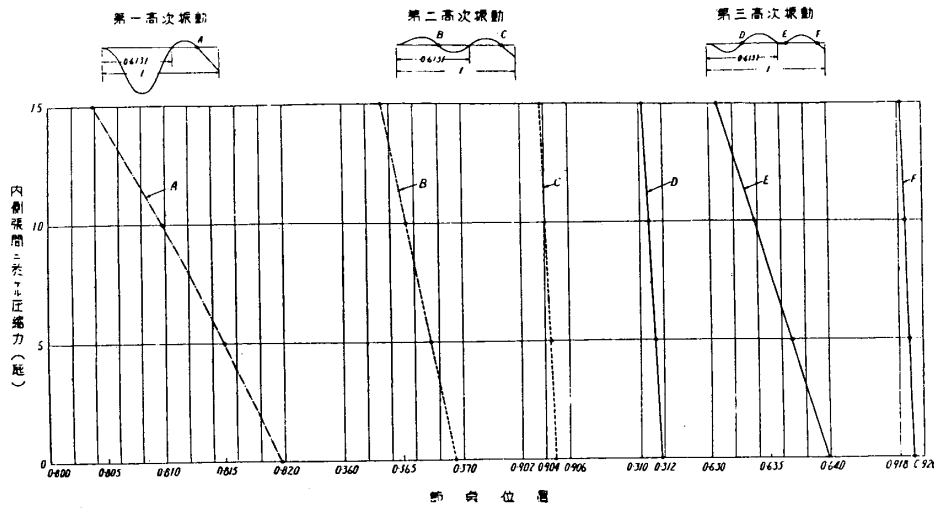
第7圖に示す如くである。

基本振動は支點の位置に節點を有する振動であり、第一高次振動は支點の位置以外に更に一つの節點を有し、第二高次振動に於ては同じく二つ、第三高次振動に於ては同じく三つの節點を有する。之等の節點は壓縮力の増加と共に第8圖に示した如く内側に



第 7 圖

$EI = 1.169 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$, $l = 1085.6 \text{ cm}$

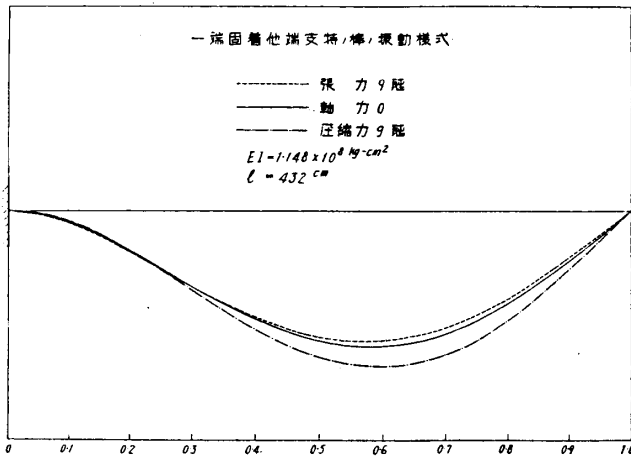


第 8 圖

移動する。

張出部のない場合、即ち一端固着、他端滑節支持の棒の振動の一例としては、曲げ剛性率 $1148 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ 、單位長さの重量 0.0253 kg/cm 、長さ 432 cm の棒の軸方向に力の働かない場合、壓縮力9 廳及び張力9 廳の場合の基本振動様式を求めたのが第9圖である。第10圖は軸方向の力と振動數との關係を示したものであつ

(6) 之等の數値は白鳩號の斜支柱の値である。



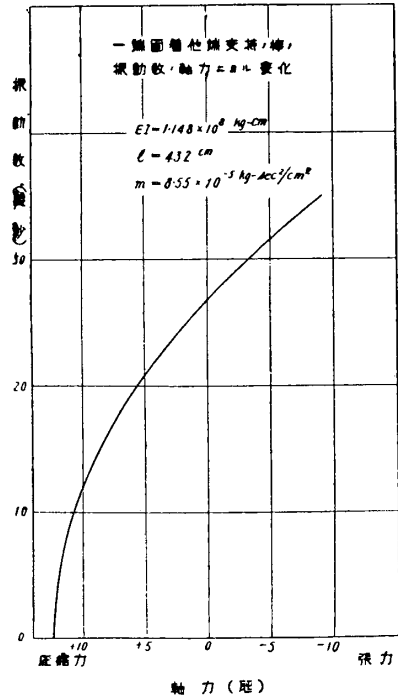
第 9 圖

て振動数零に對する壓縮力の大きさは即ち棒の挫屈荷重である。

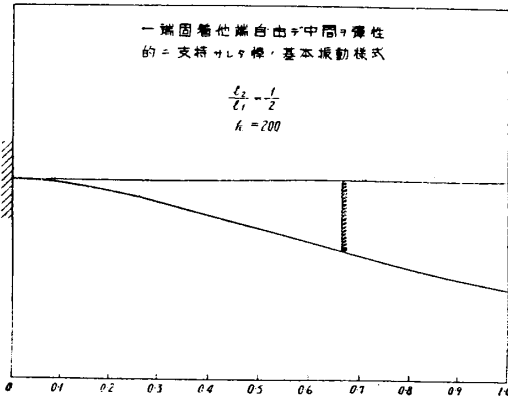
以上の支持點は何れも支點が移動しない場合であるが、之を發條にて支へた場合の振動様式を 3. の解より求めた結果は第 11 圖及び第 12

圖である。但しこの場合 $l_2/l_1 = \frac{1}{2}$, $k=200$ 及び $k=1,000$ として計算した。白鳩

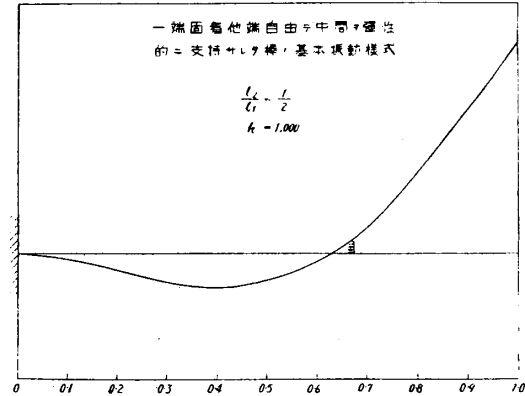
號の桁の EI 及び l を用ひて之に對する c を計算すると夫々、 $c=183 \text{ kg/cm}$, 915 kg/cm となる。然るに上記白鳩號の軸方向の壓縮力に依る桁と垂直方向の分力を求めて見ると、 $6,670 \text{ kg/cm}$ となり上記の c に比して著しく大きい。而して $k=200$ 及び $1,000$ の場合の振動数は支點が動かない場合の夫れの 80.5%, 及び 95%



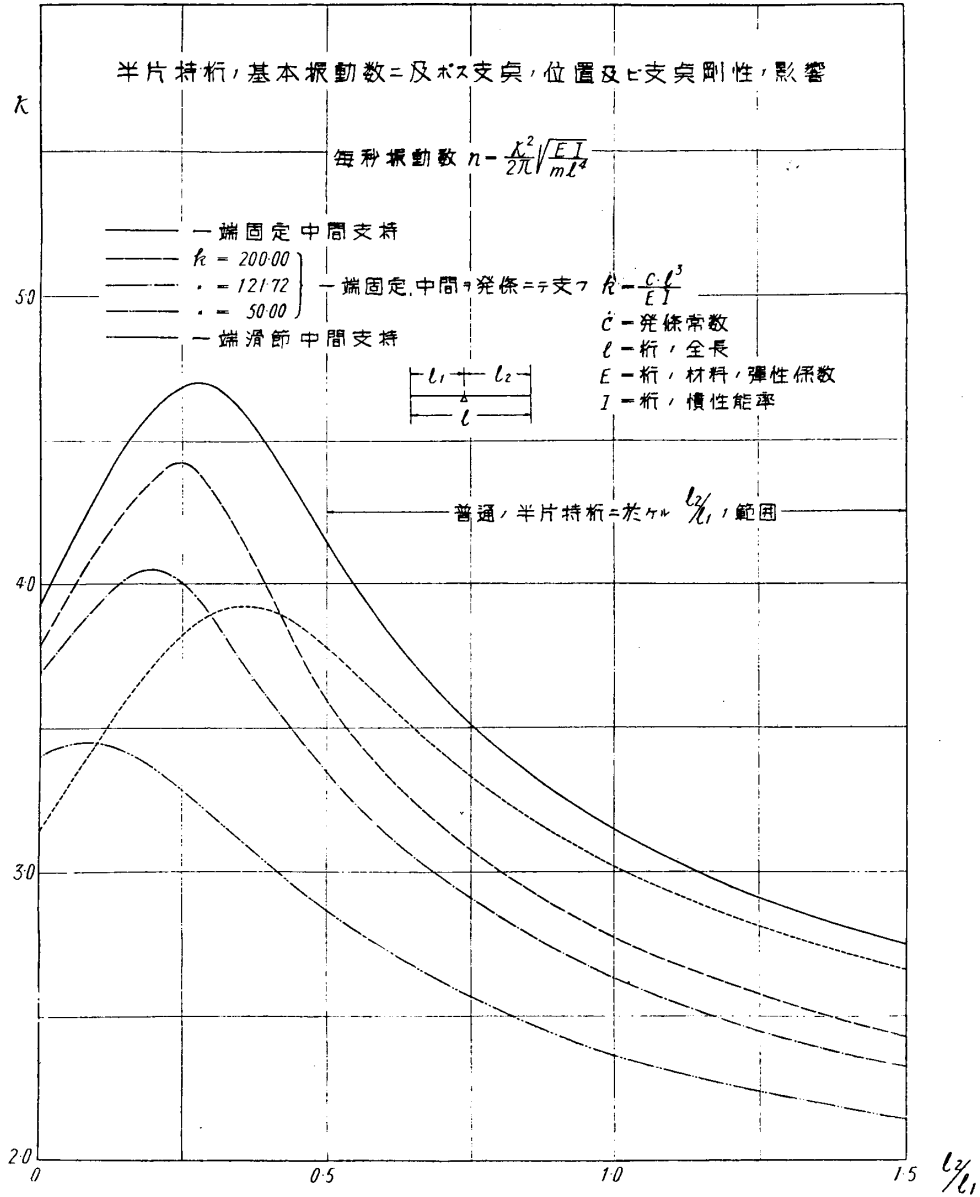
第 10 圖



第 11 圖



第 12 圖



第 13 圖

である。即ち普通の飛行機の半片持翼の支柱付根が支柱の圧縮によつてのみ變移する場合には、弾性支點となつたための振動數に及ぼす影響は僅かであることが判る。振動様式は發條が弱い場合に相當變化し、當然豫想される様に基本振動の節點は第 12 圖に示した様に内側に移動する。發條が非常に弱い場合には基本振動は第 11 圖の如く片持桁と同様な振動様式を示して來る。

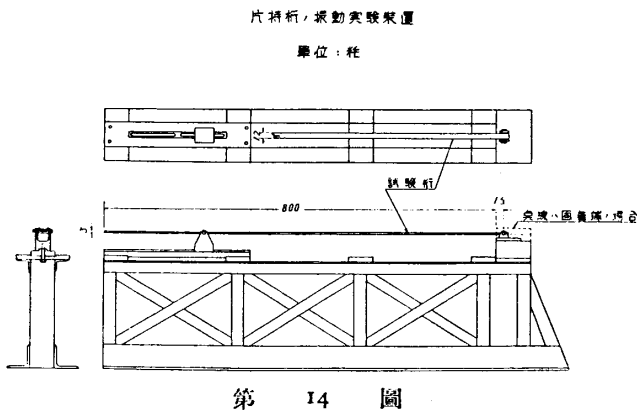
5. “支持點の位置の振動數に及ぼす影響及び其の實驗

振動數を決定する κ の値は、一端固着中間支持の棒に於ては軸方向に力が働かなければ(7)式から明かな如く l_2/l_1 の値に依つてのみ定まり、其の斷面の形狀及び材質には無關係である。又支持點を發條にて支へた場合にも $k = \frac{\beta c}{EI}$ の値を與へれば l_2/l_1 に依つてのみ定る。依つて l_2/l_1 に對する κ を求めたものが第 13 圖である。圖中實線は一端固着中間に一支點を有する棒、點線は一端が滑節になつた場合である。後者は J. Morrow の表に二、三點加へて圖にしたものである。破線、鎖線、二重鎖線は中間を發條にて支持したる場合で k の値は夫々 200, 121.7, 及び 50 である。

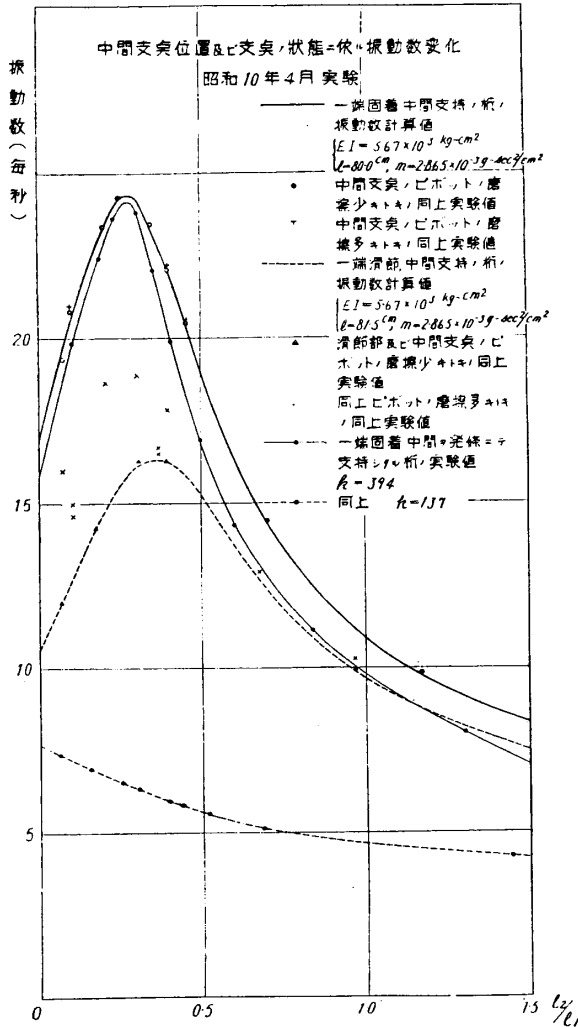
此の圖より明かな如く、一端固着或は滑節なるに従ひ夫々 l_2/l_1 が 2.28 及び 0.36 附近に於て振動數は極大値を示す。而して極大値に對する l_2/l_1 の値は中間支點の發條常數が小さい程小さくなる。又一端固着中間支持の κ の値と、固着端が滑節支持になつた場合の κ の値との差は、 l_2/l_1 が小なるほど大きく、 l_2/l_1 が $\frac{1}{2}$ 以上になると其の差は急激に小さくなる。即ち一般の半片持桁の飛行機の主翼の如く l_2/l_1 が $\frac{1}{2}$ 内外の場合に於ては、翼取付點は滑節支持にしても、固着にしても其の振動

數は大した變化はないと考へられる。

中間支持點の弾性の影響は、 k が或る程度以上大きい場合に於ては、 l_2/l_1 が大きくなるほど差が大きいが、 k が小さくなると共に逆に l_2/l_1 が大きくなるほど差が小さくなり、且つ曲線の極大部が平になる。然



(7) 前掲 (1)。



第 15 圖

る。前者の場合には摩擦の影響は殆ど認められないが、後者の場合には支持點の摩擦が小さい時はよく計算値と一致してゐるが、ピボットの摩擦が僅に増加すると振動数は急激に増加して一端固着の場合に近づく。此の結果から實際の飛行機の如く中間支柱の滑節にピンを用ひた場合にはピンの摩擦が相當影響することが豫想される。

細い点線及び實線は中間を發條にて支へた場合の實驗結果であつて其の k は夫々 136.5 及び 394 である。此の場合に對する計算は行はなかつたが第 13 圖とその傾向はよく一致してゐる。

し以上何れの場合に於ても l_2/l_1 が無限大になつた極限に於ては片持梁の k の値 1.785 に一致する。

以上は支點の摩擦の影響が含まれて居ないので之を確める爲に昭和十年四月に次に示す簡単な實驗を行つた。實驗装置は第 14 圖に示す如く、滑節にはピボットを用ひ、梁には厚さ 3 mm. 幅 12 mm. 長さ 800 mm. の板狀の鋼の棒を用ひ、一端固着、中間支持の場合及び固着端を滑節支持にした場合につき l_2/l_1 を夫々變へて振動数を測定した。振動は電磁石を用ひて持續振動を起させたものと、自由減衰振動を起させたものとの二つの場合を行つた。何れも媒煙紙に書かせて之等の結果を比較して見たが、自由減衰振動によりて求めた方がよく計算値と一致し、電磁石を用ひた方は一般に振動数が高く出てゐる。第 15 圖は實驗結果である。圖中太い實線及び太い点線は計算値で夫々一端固着中間支持及び二點とも支持の場合であ