

No. 263.

(Published July, 1943.)

---

**The Stress Distribution in an Annular Thin Plate Due  
to Normal Pressure and Uniform Shearing Load  
along its Inner Boundary.**

By

Yosimaru YOSIMURA, *Rigakushi*,

Research Associate of the Institute.

---

**Abstract.**

For the case in which the deflection of a circular plate with a circular hole at its center is no longer small in comparison with the thickness of the plate, the deflection and the stress produced by normal uniform pressure and uniform shearing load  $\frac{1}{2} r_i p$  carried along the inner boundary  $r=r_i$  was calculated. To analyse the problem without tedious calculation, it was assumed that (1) at the outer boundary, the plate is clamped, i.e.  $\frac{dw}{dr}=0$ , (2) radial tension  $T_1$  also vanishes, and (3) at the inner boundary, the plate is connected with the inner complete circular plate of radius  $r_i$  in the way that there is no constraint for the radial displacement, i.e.  $T_1=0$ . The value of  $\frac{dw}{dr}$  at the inner boundary is determined from the fixity at the circle of combination and the bending rigidities of the two plates. These conditions were taken into consideration by introducing an arbitrary parameter  $\nu$ , which is to be determined in general by experiment.

The stress distribution in the annular plate which supports the window glass, obtained experimentally with the pressurised circular window, was in

agreement with the distribution of the composite stress consisting of the two components, one of which is the two dimensional stress due to the tensile force at the outer boundary and another is the stress due to bending calculated under the above assumptions. Consequently, in designing the pressurised window, it will be possible to determine the most reasonable thickness and width of the fixing frame by calculating the stress according to the present analysis.

# 薄い有孔環状圓板が内壓と内周に沿ふ 一様な剪斷力を受ける場合の應力

(内壓を受ける圓窓枠の強補に對する應用)

囑託 吉 村 慶 丸

## 目 次

1. 緒 言 .....	331
2. 有孔圓板の撓み .....	332
3. $\lambda, \mu, \nu$ の決定 .....	338
4. 實驗結果 .....	339
5. 計算結果及びその實驗との比較 .....	341
6. 壓力を受ける開口部の補強について .....	344

## § 1. 緒 言

本報告に於いては、二つの同心圓によつて境された薄い有孔圓板が、其の面に垂直な一様な壓力を受けると同時に、内側の境界  $r=r_i$  に於て、板の面に垂直な  $r_i p/2$  なる大きさの剪斷力を受け、半径方向の引張力  $T_1=0$  なる如き場合、即ち  $r=r_i$  に於て有孔圓板と緩く結合された内側の圓板の受ける荷重がその周圍に於て何等かの方法で支へられる場合に就いて、平板の有限變形の式を用ひて其の變形及び應力分布状態を求めた。此の際、變形は中心に對して對稱であり、且つ外側の境界  $r=r_a$  に於ては、 $dw/dr=0$  及び  $T_1=0$  なる假定を用ひ、内側の境界  $r=r_i$  に於ける  $dw/dr$  の値は内側に接續される圓板の其の周邊に於ける抱束の程度（固定、支持及び其の中間の状態）及び其の曲げ剛性によつて決定されるものであつて、このために任意に定め得る一つのパラメーターを導入することによつて此等の條件を考慮に入れた。

尙最後に内壓を受ける窓を支持する外板の應力分布に就いて行つた測定結果を示した。この實驗の條件は上記の計算に用ひた假定と可成り異なる點があるので、計算結果を直ちに適用することは出来ないが、本計算に於て得た解に外側の境界に實際

に現れると考へられる張力による應力を重ね合せれば實驗結果は略説明される。

## § 2. 有孔圓板の撓み

$\epsilon_1$  : 半徑方向の伸び

$\epsilon_2$  : 圓週方向の伸び

$u, w$  : 半徑方向及び面に垂直な方向の變位

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}$$

$k_1 = \frac{1}{\rho}, k_2 = \frac{1}{n}$  : 半徑方向及び圓周方向の變形後の曲率

$T_1, T_2$  : 半徑方向及び圓周方向の合應力

$G_1, G_2$  : 曲げモーメント

$p$  : 壓力

$2h = t$  : 板厚

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} : \text{曲げ剛さ}$$

とすれば

$$\epsilon_1 = \frac{du}{dr} + \frac{\varphi^2}{2}, \quad \epsilon_2 = \frac{u}{r} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$k_1 = \frac{1}{\rho} = \frac{d \sin \varphi}{dr}, \quad k_2 = \frac{1}{n} = \frac{\sin \varphi}{r} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$T_1 = \frac{3D}{h^2} (\epsilon_1 + \sigma \epsilon_2), \quad T_2 = \frac{3D}{h^2} (\epsilon_2 + \sigma \epsilon_1) \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$G_1 = -D(k_1 + \sigma k_2), \quad G_2 = -D(k_2 + \sigma k_1) \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{d(G_1 r)}{ds} - G_2 \cos \varphi = Nr \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\frac{d(Nr)}{ds} + T_1 \frac{r}{\rho} + T_2 \sin \varphi - pr = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{d(T_1 r)}{ds} - T_2 \cos \varphi = \frac{Nr}{\rho} \quad \dots\dots\dots(7)$$

茲に中心から歪んだ面の子午線に沿つて測つた距離を  $s$  を以て表す。式(6)及び(7)より  $T_2$  を消して  $dr/ds = \cos \varphi$  なることを考慮すれば

$$r(N \cos \varphi + T_1 \sin \varphi) - \frac{1}{2} pr^2 = c \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(8)に於て, 完全な圓板の場合には  $e=0$  なることは明かであるが, 有孔圓板の場合にも

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 0 \\ N &= \frac{1}{2} pr \frac{1}{\cos \varphi} \end{aligned} \right\}, \quad r=r_i \quad \dots\dots\dots(9)$$

なる條件を假定すれば, やはり  $e=0$  となる. 従つて(8)より

$$N = \frac{1}{2} pr \left( 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) - T_1 \varphi \quad \dots\dots\dots(10)$$

一方式(5)に(2)を入れて  $\varphi$  及び其の微係數の三乗以上を省略すれば(以下同様)

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi = -\frac{N}{D} (1 + \varphi^2) \quad \dots\dots\dots(11)$$

(10), (11) より

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi = -\frac{1}{2D} pr - \frac{3}{4D} pr \varphi^2 - \frac{T_1}{D} \varphi \quad \dots\dots(12)$$

茲に(9)の第一の條件及び

$$T_1 = 0 \quad r=r_a \quad \dots\dots\dots(13)$$

なる條件が存在する場合には,  $T_1$  は  $r$  の總ての値に對して  $\varphi$  に関して一次以上の量であることは式(7)を考へ合せば容易に分ることである. 従つて式(12)の右邊の第三項は  $\varphi^2$  以上の微量となり,  $\varphi$  及びその微係數の一次の項のみを取れば, (12)の解は

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} - \frac{p}{16D} r^3$$

或ひは

$$w = \frac{A}{2} r^2 + B \log r - \frac{p}{64D} r^4 + C \quad \dots\dots\dots(14)$$

次に式(7)に於て  $\rho \rightarrow \infty$ , 即ち變形後に於ける力の板の面内の成分の釣合の代りに, 變形前の釣合を考へれば,  $T_1, T_2$  は應力函數  $\phi$  を用ひて

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2Eh \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \\ T_2 &= 2Eh \frac{d^2 \phi}{dr^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(15)$$

によつて表はされるから<sup>(1)</sup> 式(6)は

(1) この假定は嚴密には正しくないが,  $\rho^2/a^2$  の量を省略すれば近似的に成立つ.

$$p = D\nabla^4 w - \frac{2Eh}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \right)^{(1)} \dots\dots\dots(16)$$

又式(1)及び(2)より

$$\left. \begin{aligned} T_1 - \sigma T_2 &= 2Eh \left( \frac{du}{dr} + \frac{\varphi^2}{2} \right) \\ T_2 - \sigma T_1 &= 2Eh \frac{u}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

(17)より  $u$  を消去して, (15) を用ひれば

$$r \frac{d}{dr} (\nabla^2 \phi) + \frac{\varphi^2}{2} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

となる. 通常式(18)の右邊に表れる積分常數は有孔圓板の場合にも0となることが分る.

従來の方法と同様に, 式(16)に  $w r dr$  を乘じて  $r_i$  より  $r_a$  まで積分すれば

$$\int_{r_i}^{r_a} p w r dr = D \int_{r_i}^{r_a} w r \nabla^4 w dr - 2Eh \int_{r_i}^{r_a} w \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) dr \dots\dots(19)$$

今

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 0 \\ \frac{dw}{dr} &= 0 \\ w &= 0 \end{aligned} \right\}, r = r_a \dots\dots\dots(20)$$

の中の何れか一つ及び(9)の第一の條件が成立つと假定すれば

$$\int_{r_i}^{r_a} w \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) dr = - \int_{r_i}^{r_a} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \frac{d\phi}{dr} dr \dots\dots\dots(21)$$

又(18)及び(9)の第一式, (20)の第一式による時は

$$\int_{r_i}^{r_a} w \frac{d}{dr} \left( \frac{d\phi}{dr} \frac{dw}{dr} \right) dr = -2 \int_{r_i}^{r_a} r (\nabla^2 \phi)^2 dr \dots\dots\dots(22)$$

---

(1) 茲では  $-\frac{2Eh}{r} \frac{d^2\phi}{dr^2} \frac{dw}{dr}$  を省略したが, 之は 2.5 に示す如く  $\frac{dT_1}{dr}$  が小さいから大なる誤りは生じない. 斯かる高次の項に關しては吉村慶丸: 薄い平板撓みの方程式の省略項に就いて, 航研報告 231 號参照.

従つて、(9)の第一の條件及び(20)の何れか一つが成立する場合には

$$\int_{r_i}^{r_a} pwr \, dr = D \int_{r_i}^{r_a} wr \nabla^4 w \, dr + 2Eh \int_{r_i}^{r_a} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \frac{d\phi}{dr} \, dr \quad \dots\dots\dots(23)$$

更に條件をせまくして、(9)の第一及び(20)の第一の條件が成立する場合には(19)は

$$\int_{r_i}^{r_a} pwr \, dr = D \int_{r_i}^{r_a} wr \nabla^4 w \, dr + 4Eh \int_{r_i}^{r_a} r(\nabla^2 \phi)^2 \, dr \quad \dots\dots\dots(24)$$

今

$$\frac{r}{r_a} = x, \quad \frac{r_i}{r_a} = \xi \quad \dots\dots\dots(25)$$

と置けば、式(23)、(24)は夫々

$$r_a^4 \int_{\xi}^1 pwx \, dx = D \int_{\xi}^1 wx \nabla_x^4 w \, dx + 2Eh \int_{\xi}^1 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \frac{d\phi}{dx} \, dx \quad \dots\dots\dots(25)'$$

及び

$$r_a^4 \int_{\xi}^1 pwx \, dx = D \int_{\xi}^1 wx \nabla_x^4 w \, dx + 4Eh \int_{\xi}^1 (\nabla_x^2 \phi)^2 x \, dx \quad \dots\dots\dots(26)$$

wの近似式(14)は

$$w = f(1 + \lambda x^2 + \mu \log x + \nu x^4) \quad \dots\dots\dots(14)'$$

なる形に書き直すことが出来るから

$$\frac{dw}{dx} = f \left( 2\lambda x + \mu \frac{1}{x} + 4\nu x^3 \right) \quad \dots\dots\dots(27)$$

従つて式(18)より

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\phi}{dx} \right) \\ &= -\frac{1}{2} f^2 \left\{ -\frac{\mu^2}{2x^2} + 4\lambda\mu \log x + 2(\lambda^2 + 2\mu\nu)x^2 + 4\nu\lambda x^4 + \frac{8\nu^2}{3} x^6 \right\} + c_1 \quad (28) \end{aligned}$$

$$x \frac{d\phi}{dx} = -f^2 a(x) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 \quad \dots\dots\dots(29)$$

茲に

$$a(x) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mu^2}{2} \log x + 2\lambda\mu x^2 \left( \log x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda^2 + 2\mu\nu}{2} x^4 + \frac{2\nu\lambda}{3} x^6 + \frac{\nu^2}{3} x^8 \right\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

據つて (9) の第一, (2) の第一條件式により

$$\left. \begin{aligned} -f^2 a(1) + \frac{1}{2} c_1 + c_2 &= 0 \\ -f^2 a(\xi) + \frac{1}{2} c_1 \xi^2 + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(31)$$

即ち

$$c_1 = 2f^2 \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2}, \quad c_2 = f^2 \frac{a(\xi) - \xi^2 a(1)}{1 - \xi^2} \quad \dots\dots\dots(32)$$

となり, 式 (28), (29) は

$$x \frac{d\phi}{dx} = -f^2 \left\{ a(x) - \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} x^2 - \frac{a(\xi) - \xi^2 a(1)}{1 - \xi^2} \right\} \quad \dots\dots(33)$$

$$\nabla^2 \phi = -f^2 \left\{ -\frac{\mu^2}{4x^2} + 2\lambda\mu \log x + (\lambda^2 + 2\mu\nu)x^2 + 2\nu\lambda x^4 + \frac{4\nu^2}{3} x^6 - 2 \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} \right\} \quad \dots\dots\dots(34)$$

以上の計算に於て  $w, \phi$  を導く場合の假定は式 (26) を導くに當つて用ひた假定と何等矛盾しないから, 式 (24) に於て,  $w, \phi$  として夫々式 (14'), (34) を用ふれば

$$\int_{\xi}^1 p w x dx = p f [F(1, \nu) - F(\xi, \nu)] \quad \dots\dots\dots(35)$$

但し

$$F(x, \nu) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\lambda}{4} x^4 + \frac{\mu}{2} x^2 \left( \log x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\nu}{6} x^6 \quad \dots\dots\dots(36)$$

茲に  $F(x, \nu)$  を  $\nu$  の函數と考へる理由 (以下同様) は後述の如く,  $\nu$  は圓板の内周又は外周に於ける支持の方法により異なる値を示し,  $\lambda$  及び  $\mu$  は  $\nu$  の函數と考へられることによるものである. 又同様にして

$$\int_{\xi}^1 w x \nabla^4 w dx = 64 f \nu [F(1, \nu) - F(\xi, \nu)] \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$\int_{\xi}^1 (\nabla^2 \phi)^2 \cdot x dx = f^4 [\theta(1, \nu) - \theta(\xi, \nu)] \quad \dots\dots\dots(38)$$



茲に

$$\begin{aligned} \theta(x, \nu) = & -\frac{\mu^4}{32} \frac{1}{x^2} - \frac{\mu^2(\lambda^2 + 2\mu\nu)}{4} x^2 - \frac{\lambda\mu^2\nu}{4} x^4 + \frac{1}{6} \left\{ (\lambda^2 + 2\mu\nu)^2 - \frac{2\mu^2\nu^2}{3} \right\} x^6 \\ & + \frac{\nu\lambda(\lambda^2 + 2\mu\nu)}{2} x^8 + \frac{1}{10} \left\{ 4\nu^2\lambda^2 + \frac{8\nu^2(\lambda^2 + 2\mu\nu)}{3} \right\} x^{10} + \frac{4\nu^3\lambda}{9} x^{12} + \frac{8\nu^4}{63} x^{14} \\ & + 2 \left\{ \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} \right\}^2 x^2 - 4 \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} \left\{ -\frac{\mu^2}{4} \log x + \lambda\mu x^2 \left( \log x - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^2 + 2\mu\nu}{4} x^4 + \frac{\nu\lambda}{3} x^6 + \frac{\nu^2}{6} x^8 \right\} + 2\lambda^2\mu^2 x^2 \left\{ (\log x)^2 - \log x + \frac{1}{2} \right\} \\ & - \frac{\lambda\mu^3}{2} (\log x)^2 + \lambda\mu(\lambda^2 + 2\mu\nu)x^4 \left( \log x - \frac{1}{4} \right) + \frac{4\lambda^2\mu\nu}{3} x^6 \left( \log x - \frac{1}{6} \right) \\ & + \frac{2\lambda\mu\nu^2}{3} x^8 \left( \log x - \frac{1}{8} \right) \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

従つて式 (26) は結局

$$\begin{aligned} r_a^4 p f \{ F(1, \nu) - F(\xi, \nu) \} = & 64 D f^2 \nu \{ F(1, \nu) - F(\xi, \nu) \} \\ & + 4 E h f^4 \{ \theta(1, \nu) - \theta(\xi, \nu) \} \end{aligned}$$

或ひは

$$\frac{r_a^4 p}{t^4 E} = \frac{16}{3} \frac{\nu}{1 - \sigma^2} \frac{f}{t} + 2 \frac{\theta(1, \nu) - \theta(\xi, \nu)}{F(1, \nu) - F(\xi, \nu)} \left( \frac{f}{t} \right)^3 \dots\dots\dots(40)$$

式 (40) に依つて  $f$  が求まれば、應力は (15) 及び (29) によつて

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{T_1}{2h} = & \frac{E}{r_a^2} \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} \\ = & -\frac{E}{r_a^2} f^2 \left\{ \frac{a(x)}{x^2} - \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} - \frac{a(\xi) - \xi^2 a(1)}{1 - \xi^2} \frac{1}{x^2} \right\} \\ \sigma_2 = \frac{T_2}{2h} = & \frac{E}{r_a^2} \frac{d^2\phi}{dx^2} \\ = & -\frac{E}{r_a^2} f^2 \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{a(x)}{x} \right) - \frac{a(1) - a(\xi)}{1 - \xi^2} + \frac{a(\xi) - \xi^2 a(1)}{1 - \xi^2} \frac{1}{x^2} \right\} \end{aligned} \quad (41)$$

茲に

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{a(x)}{x} \right) = & \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mu^2}{2} \frac{1 - \log x}{x^2} + 2\lambda\mu \left( \log x + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{3(\lambda^2 + 2\mu\nu)}{2} x^2 + \frac{10\nu\lambda}{3} x^4 + \frac{7\nu^2}{3} x^6 \right\} \end{aligned}$$

となる。

### § 3. $\lambda, \mu, \nu$ の 決 定

以上の考察によつて明かである如く、式 (40) は (9) の二つの条件及び (20) の三つの条件を總て満足することが出来るから、今  $\lambda, \mu, \nu$  を決定するに當つて上記五条件の中

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r_a} \frac{dw}{dx} = 0 \\ w = 0 \end{array} \right\}, \quad x=1 \quad \dots\dots\dots(42)$$

の二つは常に満足されるものとする。而して内周に於ける条件として

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{r_a} \frac{dw}{dx} = 0, \quad x=\xi \quad \dots\dots\dots(43)$$

又は

$$G_1 = \frac{D}{r_a^2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{\sigma}{x} \frac{dw}{dx} \right) = 0, \quad x=\xi \quad \dots\dots\dots(44)$$

或ひはその中間の状態に對應する条件、或ひは  $G_1$  又は  $dw/dx$  がある定つた値を取る様な条件を考へることが出来る。(43) は有孔圓板の内側に接續される圓板の曲げ剛性が無限に大きく、接續圓上に於て内側の圓板が完全に固定されてゐる様な場合であり、(44) は内側の圓板の曲げ剛性の如何に拘らず、それが接續圓上に於て單に支持されてゐる場合に相當するものである。一般には之等の中間の状態又は  $G_1$  が正の値を示す様な状態が實現されるものと考へられ、その条件は

$$x=\xi \text{ に於て } \frac{dw}{dx}, G_1 \text{ が連続} \quad \dots\dots\dots(45)$$

によつて與へられる。而してこの際の  $dw/dx, G_1$  の値は外側及び内側の圓板の曲げ剛性によつて決まるものと考へられる。

而して (42) 及び (43) の条件に對しては

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \lambda + \nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 4\nu = 0 \\ 2\xi\lambda + \frac{1}{\xi}\mu + 4\xi^2\nu = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(45)$$

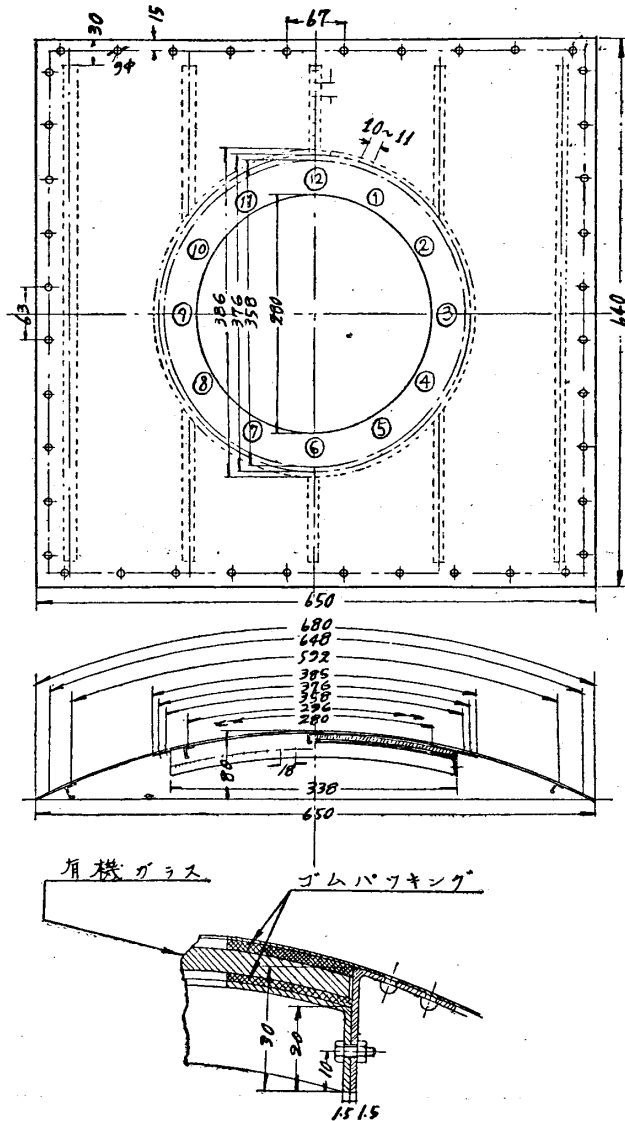
(42) 及び (44) の条件に對しては

$$\left. \begin{aligned} 1 + \lambda + \nu &= 0 \\ 2\lambda + \mu + 4\nu &= 0 \\ 2(1 + \sigma)\lambda - \frac{1 - \sigma}{\xi^2} \mu + 4(3 + \sigma)\xi^2 \nu &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

となる。即ち $\nu$ は内側の接續圓上に於ける條件によつて變化するパラメーターと考へることが出来る。

§ 4, 實驗結果

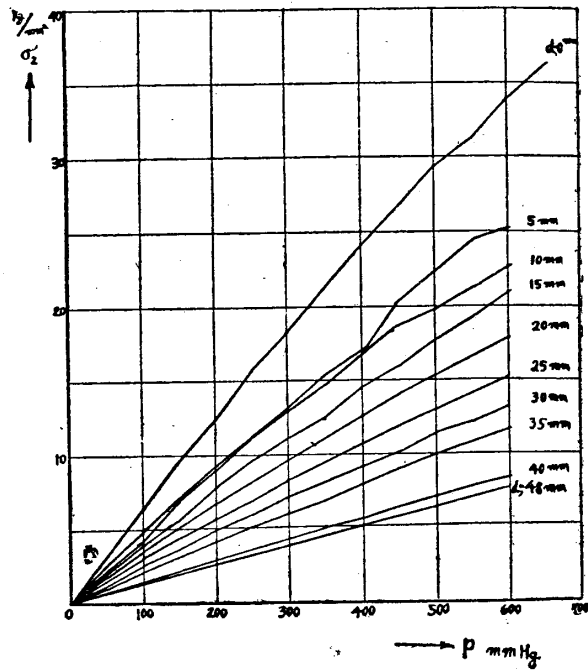
實際上の目的から第1圖の如き試験用窓を加壓槽に取付け、内壓によつて生ずる窓枠部の板の應力を測定した。板はすべて厚さ1mm SDH, 窓硝子としては有機硝子を用ひ、厚さは4mm 及び 6mm の二種類に就いて實驗を行つた。硝子の支持方法としては第1圖の如く厚さ1.5mm の圓形補強材を用ひ、外板との間で硝子を挟んで固定し、硝子を直接鋏締めることは壁けた。尙硝子の両面には厚さ2mm のゴムパッキング及び特殊のゴム塗料を用ひて氣密を保持した。試験片に數個の縦通材を取付けたのはある特殊の目的によるものであるが、現在は實驗裝置の關係上その目的を果すことが出来なかつたが、これは現在の實驗には關係のないものである。



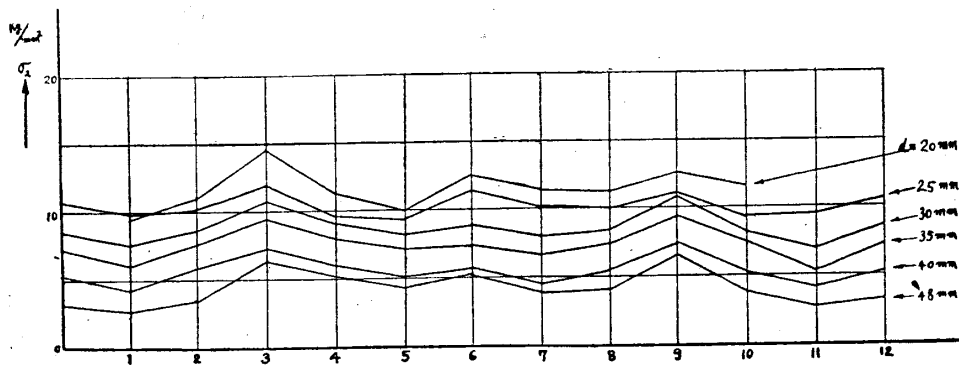
第 1 圖

歪の測定は、第1圖の番號で示される如く 12 方向に等分し、各方向共窓際及び窓際より 5 mm 置きの圓に就いて鉄の列に到るまでの圓周方向の歪を測定した。その際上記の如き試験片では圓周方向の曲率の變化による歪の補正が必要な譯であるが、その影響は極めて小さいから省略した。半径方向の歪は圓周方向のものに對して極めて小さいと考へられる上に、曲率變化の測定を並用しなければならぬので現在の場合には測定を行はなかつた。

尚壓力は 50 mmHg 置きに 600 mmHg まで上げたが、このために幾分の永久歪が認められたが、これは測定結果から見て極めて僅かなものである。今厚さ 6 mm の硝子の試験片の各圓周に就いての平均應力を壓力に對して圖示すれば第2圖の如くである。圖に於ては  $d=48$  mm は窓枠用補強材と外板とを結合する二列鉄の丁度中央に相當する圓周である。又上記應力の圓周方向の分布は第3圖の如くであり、3, 6, 9, 12 の位置で夫々極大を示し、その中間で極小であるが、その變動は豫期よりも小さい。之は試験片の曲率

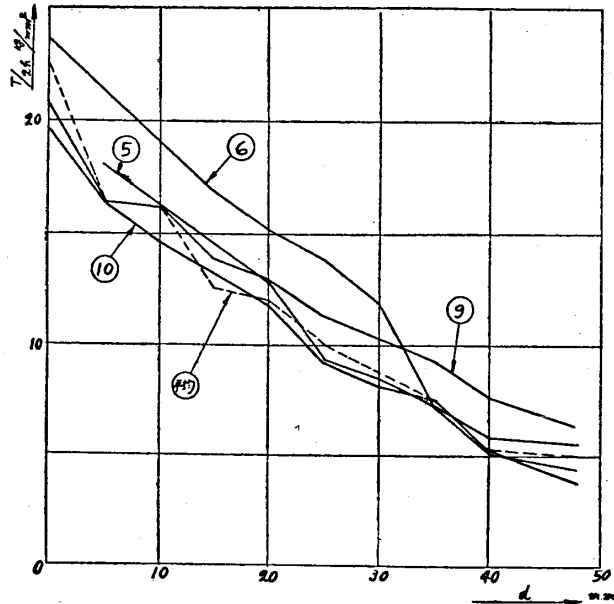


第 2 圖



第 3 圖

の影響であると共に、試験片全體としての撓みによる孔の周りの應力集中によるものと考へられる。次に1から12までの各方面に就いて窓際よりの距離  $d$  に対する



第 4 圖

應力及びその平均値の分布を圖示すれば第4圖の如くなる。(圖は1から12までの中對稱な位置にあるものゝ1つづゝを示す),

### § 5. 計算結果及びその實驗との比較

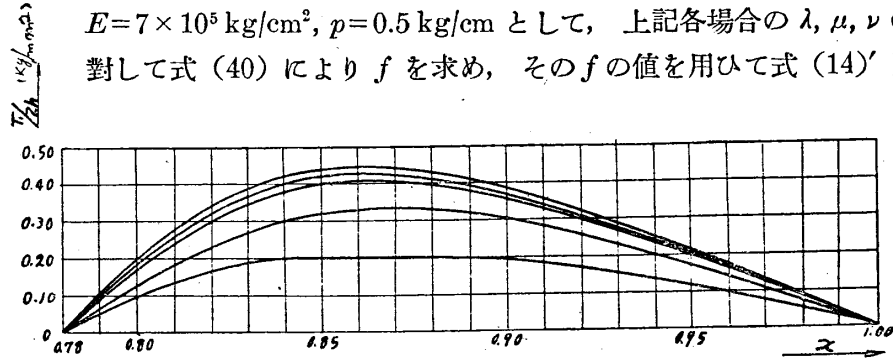
§ 2 及び § 3 に於て得た結果を本實驗の場合に應用するために、 $\sigma=1/3$ ,  $r_a=18$  cm.,  $r_i=14$  cm. 即ち  $\xi=0.78$  として  $\lambda, \mu, \nu$  を計算すれば第1表の如くなる。

第 1 表

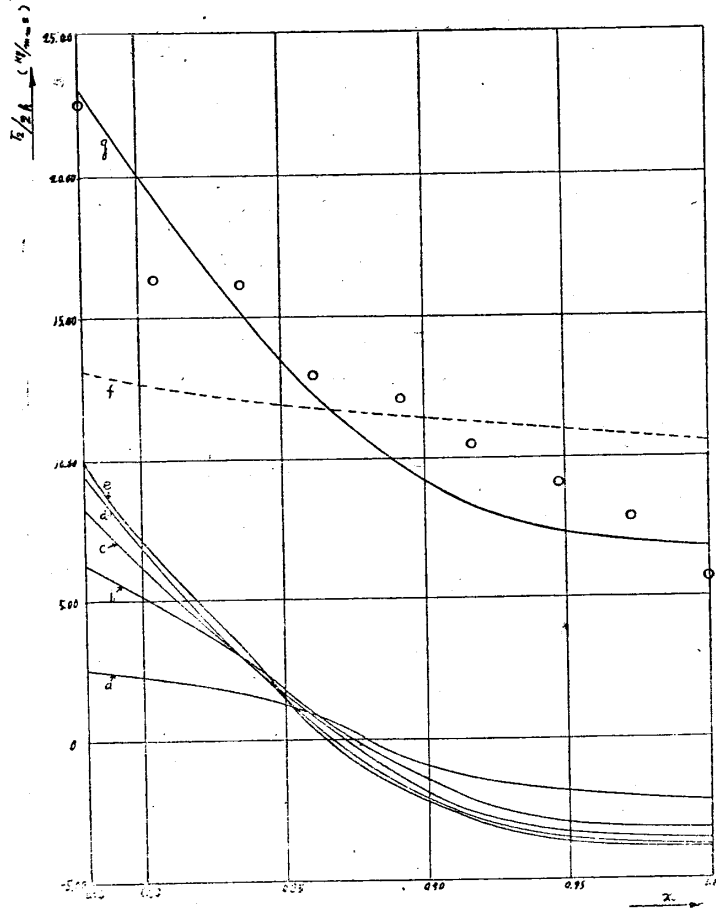
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$\lambda$	-1.45110	-1.50	-1.55	-1.60	-1.63616
$\mu$	1.09780	1.0	0.90	0.80	0.727686
$\nu$	0.451100	0.50	0.55	0.60	0.636157

茲に (a) は (45), 即ち  $r=r_i$  で  $dw/dr=0$  なる境界條件に相當する場合である。

(e) は (46) 即ち  $r=r_i$  で  $G_1=0$  なる境界条件に相当する場合であり、而して (b), (c), (d) は其の間の場合で  $\nu$  を適当な値に定めた。次に  $t=0.1\text{ cm.}$ ,  $E=7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ,  $p=0.5 \text{ kg/cm}$  として、上記各場合の  $\lambda, \mu, \nu$  の値に對して式 (40) により  $f$  を求め、その  $f$  の値を用ひて式 (14)' 及び式



第 5 圖



第 6 圖

(41) によつて撓み  $w$  及び應力  $T_1/t$ ,  $T_2/t$  を計算したものが第2表及び第5, 6圖である。圖によれば何れの場合も  $T_2$  は  $x=0.87\sim 0.88$  を境としてそれより内側では引張應力, それより外側では壓縮應力となる。之は  $r=r_a$  に於て  $T_1=0$  なる假定によるものと思はれる。又 (e) の場合が  $r=r_i$  に於ても  $r=r_a$  に於ても應力の絶對値が最も大きく, (a) の場合は應力の絶對値が最小である。  $T_2$  に比べて半径方向の應力  $T_1$  は小さく, 何れの場合も兩端  $r=r_i$  及び  $r=r_a$  に於て0となり最初の假定を満足する。且つ  $dT_1/dr$  の値も小さく,  $(dT_1/dr)(dw/dr)$  の項を省略したことも無理ではない。

以上の  $T_2/t$  の計算値とその實驗値とを比較して見れば, 兩者の曲線の傾向は極めて酷似してゐるが, 計算値の方が遙かに小さい。之は §2 の (20) の第一の假定

第 2 表

		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$F(1, \nu) - F(\xi, \nu)$		0.001058	0.001856	0.002671	0.003486	0.004075
$[\theta(1, \nu) - \theta(\xi, \nu)] \times 10^8$		0.47	6.1	33.7	110	220
$2 \frac{\theta(1, \nu) - \theta(\xi, \nu)}{F(1, \nu) - F(\xi, \nu)} \times 10^5$		0.888	6.58	25.2	63.2	108
$\frac{16}{3} \frac{\gamma}{1-\sigma^2}$		2.707	3.0	3.30	3.60	3.817
$f$		23.50	16.00	11.40	8.81	7.50
$w$ (cm)	$x=0.78$	0.267	0.384	0.421	0.440	0.443
	0.85	0.202	0.234	0.238	0.239	0.237
	0.90	0.112	0.122	0.119	0.117	0.115
	0.95	0.035	0.035	0.033	0.033	0.032
	1.00	0	0	0	0	0
$T_2/t$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$x=0.78$	251	632	830	953	1002
	0.85	137	178	161	150	146
	0.90	-54	-135	-185	-212	-219
	0.95	-197	-303	-347	-370	-371
	1.00	-224	-324	-361	-380	-381
$T_1/t$ (kg/cm <sup>2</sup> )	$x=0.78$	0	0	0	0	0
	0.85	18	33	41	42	43
	0.90	18	30	37	39	38
	0.95	6	21	21	18	20
	1.00	0	0	0	0	0

が本実験に於ては満足されて居らず、試験片全體としての撓みによる應力のために  $r=r_a$  に於て  $T_1$  がある 0 でない値を取ることに由るものと思はれる。現在の場合  $r=r_a$  に於ける  $T_1$  の値を決める根拠がないから、 $T_2$  の値が  $r=r_a$  に於て實驗値と等しくなる様に  $T_1$  を作用せしめたと考へ 2次元問題としての應力

$$\sigma_2 = \frac{T_2}{t} = (\sigma_1)_{r=r_a} \frac{x^2 + \xi^2}{x^2(1-\xi^2)} \dots\dots\dots(47)$$

を重ね合せる。之は極めて亂暴であるが、結果に大した誤りは生じないものと考へられる。今  $(\sigma_1)_{r=r_a} = 2.17 \text{ kg/mm}^2$  と假定すれば、 $\sigma_2$  は第5圖の曲線  $f$  の如くなり、之と曲線  $e$  とを重ね合せたものが曲線  $g$  であり、實驗値と可成りよく一致する。茲で有機硝子と窓枠との結合条件及び兩者の曲げ剛性によつてパラメーター  $\nu$  を決定し、その  $\nu$  の値に應ずる曲線を用ひるべきであるが、兩者の結合条件が計算の假定と可成りかけ離れて居り、實驗の場合の方が應力に對しては苦しい状態ではあるが、曲げ剛性は硝子の方が遙に大きいので、之等を考へ合せて假に第6圖の曲線  $e$  を用ひた。

本実験は最初から具體的な目的のために行つたので、以上の計算をそのまま適用するには可成り無理な點が多く、もつと簡単な場合から系統的に實驗を行ふと共に、更に窓枠の設計に對する方針を確立するためには尙實際に即した計算に擴張する必要があるであらう。

## § 6. 壓力を受ける開口部の補強について

加壓胴體の窓、扉等の如く、内壓を受ける圓形開口部周邊には以上の如く一般に應力の集中が認められ、その大きさは  $r_a$ ,  $r_i$  及び板厚  $t$  に據ることは式 (40) 及び (41) によつて明かである。尙之等の關係を導くに際して用ひた假定は、計算上の便宜から、内周  $r=r_i$  に於ては條件 (9)、外周  $r=r_a$  に於ては條件 (20)、垂直變位  $w$  としては (14) であり、且つ内側の圓板と外側の圓板との結合条件としては (9) 以外に、パラメーター  $\nu$  によつて任意に變化せしめ得る條件 (43), (44) 或ひは更に一般的 (45) 等が用ひられる。

設計に當つては  $r_a$ ,  $p$ ,  $E$  が與へられた場合に應力  $(\sigma_2)_{x=\xi}$  をある與へられた値  $\sigma_{20}$  より小ならしめる如く板厚  $t$  及び  $r_i$  を定めることが必要である場合が多い。このためには式 (40) 及び (41) の第二式から  $f/t$  を消去して得られる  $\frac{r_a^4 p}{t^2 E}$  と  $\frac{r_a^2 (\sigma_2)_{x=\xi}}{t^2 E}$  との關係に於て  $\frac{p}{E}$ ,  $\frac{(\sigma_2)_{x=\xi}}{E}$  が與へられた値  $\frac{p_0}{E}$ ,  $\frac{\sigma_{20}}{E}$  になる様な  $r_a/t$  の値を求めれば、 $r_i$  (従つて  $\xi$ ) を與へた場合の板厚  $t$  が定まる。この計算を種々の  $r_i(\xi)$  の



値に對して行ふことによつて  $r_i$  と  $t$  との關係が得られ、從つて梓幅と板厚の何れか一方を與へれば他方が決定出来る。

終りに臨み、いつも變らぬ小川先生の御指導と御鞭達に對して衷心より謝意を表する。