

No. 264.

(Published July, 1943.)

---

**On the Torsional Buckling of a Cylindrical Shell  
under Internal or External Pressure.**

By

Yosimaru YOSIMURA, *Rigakusi*,

Research Associate of the Institute.

Yosiatsu MÔRI, *Kogakusi*.

---

**Abstract.**

Though many papers have already been published about the problems of elastic stability of cylindrical thin shells, it appears that the analysis for the case indicated in the title has not yet been undertaken. In this paper the authors dealt with the effect of the internal or external pressure on the torsional buckling of a cylindrical shell. Firstly the infinitely long cylinder was considered for the sake of simplicity, neglecting the second order infinitesimals with regards to the small quantities  $\alpha = \frac{h^2}{12a^2}$ ,  $\phi = \frac{M(1-\nu^2)}{2\pi a^2 E h}$ ,  $\psi = \frac{qa(1-\nu^2)}{E h}$  and  $\lambda = \frac{2\pi a}{l}$ . In this case the critical stress  $\tau_{cr}$  is given by the equation (23), expressing that the critical load as well as the circumferential wave number  $n$  after buckling, increases considerably with the internal pressure, and decreases as the external pressure increases, as will be seen in fig. 1. The approximate solution for the case of the comparatively short cylinder is given in the equation (24), (25) and (26), by considering the second order terms with respect to  $\lambda$ .

The results of the experiment carried out with the celluloid cylinders of 60 cm. length with varying radius and thickness were compared with the theoretical results for the case of the short cylinder, and it was confirmed that the buckling stress ranges between 70 and 98% of the theoretical values.

---

# 内圧又は外圧を受ける薄肉圓筒の振り挫屈

囑託 吉 村 慶 丸  
毛 利 可 淳

## 目 次

1. 序 言.....	349
2. 圓筒殼の基礎方程式.....	349
3. 解 法 .....	352
4. 比較的短い圓筒の場合への擴張.....	355
5. 實驗との比較.....	357
6. 結 語.....	359

## 1. 序 言

§1 薄肉圓筒殼が内圧（或ひは外圧）のみを受ける場合又は振りモーメントのみを受ける場合の挫屈現象に関する實驗的並びに理論的研究は既に多數發表されてゐるが、<sup>(1)</sup> 両者が同時に作用する場合は未だ取扱はれてゐない様である。

本報告に於ては内圧又は外圧を受ける薄肉圓筒殼の振りに依る彈性安定の限界を求めた。その際釣合の基礎方程式に於て省略出來ぬ項は總て之を取り、先づ事柄を簡單にする爲に圓筒殼が無限に長い場合の限界荷重と壓力との關係を求め、次にこれを擴張して、短い圓筒に迄適用し得る様な近似解を求めた。又數種類のセルロイド圓筒に就いて實驗を行つたが、その結果は上記近似解と振りのみの場合に從來得られてゐるのと同程度に可成りよく一致することを確めた。

## 2. 圓筒殼の基礎方程式

兩端に振りモーメントを受ける與壓筒形殼の挫屈の場合には振りによる剪斷合應力  $N_{xy}$ 、内(外)壓による直合應力  $N_x$ 、 $N_y$  が重要な量となり従つて殼の釣合からの微小變位の軸方向、圓週方向、及び面に直角な内向きの成分を夫々  $u$ 、 $v$ 、 $w$  とす

(1) S. Timoshenko : Theory of Elastic Stability. § 83, § 90.

妹澤博士 : The Buckling of a Cylindrical Shell under Torsion. 航空研究所報告, 第七十六號.

れば,  $N_{xy}$ ,  $N_x$ ,  $N_y$  以外の stress-resultant と変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  の微係数との積はその他の量に對して省略することが出来, 一般の釣合方程式を次の様に簡単にする事が出来る.

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_y \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + N_{yx} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y &= 0 \\ a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) \\ + N_y \left( 1 + \frac{\partial v}{a \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{a \partial \theta^2} \right) + N_{yx} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + qa &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

こゝに  $x$ : 軸方向座標  $\theta$ : 圓周方向に測つた角  
 $a$ : 圓筒の半径  $q$ : 壓力, 内向きを正とす  
 $Q_x, Q_y$ : 面に垂直なる方向の剪斷力

$-q$  なる内壓によつて

$$N_x \text{ は殆んど } -qa/2 \qquad N_y \text{ は殆んど } -qa$$

に近い値を取り,  $M$  なる振りモーメントによつて  $N_{xy}$ ,  $N_{yx}$  は  $M/2\pi a^2$  に近い値を取るから,

(1) 式に於て  $N'_x$ ,  $N'_y$ ,  $N'_{xy}$ ,  $N'_{yx}$  を挫屈に依る合應力の臨界平衡の状態からの小變化であるとして

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{-qa}{2} + N'_x \\ N_y &= -qa + N'_y \\ N_{xy} = N_{yx} &= \frac{M}{2\pi a^2} + N'_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

と置けば  $N'_x$ ,  $N'_y$ ,  $N'_{xy}$  は一次の微小量と考へられる.

更に挫屈による中央面の伸びをも考慮に入れて式(1)に於て

$$\begin{aligned} N_y \text{ の代りに } N_y(1+\epsilon_1) \\ q \text{ の代りに } q(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2) \\ N_{yx} \text{ の代りに } N_{yx}(1+\epsilon_1) \\ N_{xy} \text{ の代りに } N_{xy}(1+\epsilon_2) \\ N_x \text{ の代りに } N_x(1+\epsilon_2) \end{aligned}$$

茲に  $\epsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_2 = \frac{\partial v}{a\partial\theta} - \frac{w}{a} \dots\dots\dots(3)$

を夫々代入し、 $N'_y, N'_x, N'_{xy}$  及びその微係数と  $u, v, w$  の微係数との積を無視して整頓すれば

$$\left. \begin{aligned} a \frac{\partial N'_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial\theta} \frac{M}{2\pi a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial\theta} - \frac{a\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{qa}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial N'_y}{\partial\theta} + \frac{a\partial N'_{xy}}{\partial x} + \frac{2M}{2\pi a^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y - qa \left( \frac{a}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial\theta} \right) &= 0 \\ a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial\theta} + \frac{2M}{2\pi a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} \right) + N'_y - q \left( w + \frac{a^2 \partial^2 w}{2\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

こゝに板厚を  $h$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} N'_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} - w \right) \right] \\ N'_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} - w \right) \right] \\ N'_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial\theta} \right] \\ Q_x &= \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial M_{yx}}{\partial\theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} \right] \\ Q_y &= \frac{-1}{a} \left[ a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial\theta} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) \right] \\ M_y &= \frac{-Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) \right] \\ M_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)a} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial\theta} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

今

$$a = \frac{h^2}{12\alpha^2} \dots\dots\dots(7)$$

$$\phi = \frac{M(1-\nu^2)}{2\pi\alpha^2 Eh} \dots\dots\dots(8)$$

$$\psi = \frac{q\alpha(1-\nu^2)}{Eh} \dots\dots\dots(9)$$

と置き、(5)、(6)を用ひて(4)を書き直せば

$$\left. \begin{aligned} & \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\alpha\phi}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + \alpha\phi \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\alpha \partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \\ & \frac{1+\nu}{2} a \frac{\partial u^2}{\partial x \partial \theta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\alpha^2 \partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha\phi \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & - \alpha\phi \left( \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} \right) + a \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \alpha^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = 0 \\ & \alpha\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - w - a \left[ \alpha^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \alpha^2(2-\nu) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] + 2\phi\alpha \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right] - \psi \left( w + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

なる  $u, v, w$  についての線形微分方程式を得る.

### § 3. 解 法

式(10)を聯立微分方程式として一般に解くことは困難であるが、式(10)の第一式及び第二式は  $u, v$  について偶数次、 $w$  について奇数次、第三式は  $u, v$  について奇数次、 $w$  について偶数次の微分方程式であることから簡単に

$$\left. \begin{aligned} u &= A \cos \left( \frac{\lambda x}{a} - n\theta \right) \\ v &= B \cos \left( \frac{\lambda x}{a} - n\theta \right) \\ w &= C \sin \left( \frac{\lambda x}{a} - n\theta \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

なる形に假定することが出来る。

(11) を (10) に入れて

$$\left. \begin{aligned} & -A\left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2 - \lambda n\phi\right) + B\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda n + \lambda^2\phi + \frac{n\lambda}{2}\psi\right) - C\left(\nu\lambda + \frac{\phi}{2}\lambda\right) = 0 \\ & A\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda n - \lambda n\phi\right) - B\left[n^2(1+a) + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2(1+2a) - 2\phi\lambda n - \frac{\lambda^2\psi}{2}\right] \\ & + C[n + an(n^2 + \lambda^2) - 2\phi\lambda] = 0 \\ & A\lambda\nu - B[n + an^3 + (2-\nu)an\lambda^2 - 2\phi\lambda] + C[1 + a(n^2 + \lambda^2)^2 - 2\phi\lambda n \\ & \qquad \qquad \qquad + \psi(1 - \lambda^2 - n^2)] = 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

上式は  $A, B, C$  について零以外の解を有することが要求されるから

$$\left| \begin{array}{ccc} -\left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2 - \lambda n\phi\right), & \left(\frac{1+\nu}{2}\lambda n + \lambda^2\phi + \frac{n\lambda}{2}\psi\right), & -\left(\nu\lambda + \frac{\phi}{2}\lambda\right) \\ \frac{1+\nu}{2}\lambda n - \lambda n\phi, & -\left[n^2(1+a) + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2(1+2a) - 2\phi\lambda n - \frac{\lambda^2\psi}{2}\right], & \\ & (n + an(n^2 + \lambda^2) - 2\phi\lambda) & \\ \lambda\nu, & -[n + an^3 + (2-\nu)an\lambda^2 - 2\phi\lambda], & 1 + a(n^2 + \lambda^2)^2 - 2\phi\lambda n + \psi(1 - \lambda^2 - n^2) \end{array} \right| = 0 \quad (13)$$

後述の如く  $a, \phi, \psi$  は極めて小さく, (13) の展開式中の  $\phi^3, \phi^2, a^2, a\phi, a\psi, \phi\psi, \psi^2$  等は高次の微小量と考へられるから之等を見捨てれば

$$\text{こゝに} \qquad \qquad \qquad \phi = \frac{R}{S} \qquad \dots\dots\dots(14)$$

$$\left. \begin{aligned} R &= \lambda^4(1-\nu^2) + a[2\lambda^4(1-\nu^2) + (\lambda^2 + n^2)^2 + (3+\nu)\lambda^2n^2 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4n^2 \\ & - (7+\nu)\lambda^2n^4 - 2n^6 + n^4] - \phi[\lambda^6 + 1.5\nu\lambda^4 + 3\lambda^4n^2 - 2.5\lambda^2n^2 + 3\lambda^2n - n^4 + n^6] \end{aligned} \right\} (15)$$

$$S = 2\lambda n^5 - 2\lambda n^3 + 4\lambda^3 n^3 - 2\lambda^3 n + 2\lambda^5 n$$

限界荷重は (14) 式によつて與へられるものであるが, 次に之を  $n$  の種々の値に分けて考察する。

$n=1$ : このときは断面はその圓形を變へずに同一面内で移動するだけである。

$$\phi = \frac{\lambda^4(1-\nu^2) + a\lambda^4[\lambda^4 + 4\lambda^2 + (2+\nu)(1-\nu)] - \phi\lambda^2[\lambda^4 - 4.5\lambda^2\nu + 5.5]}{2\lambda^3(\lambda^2 + 1)}$$

$1/\lambda$  は挫屈による軸方向の波長であるから,  $\lambda$  は極めて小さいと考へられ,

$$a\lambda^4, \phi\lambda^4, \lambda^5$$

以上を見捨てれば

$$\phi = \frac{\lambda(1-\nu^2)}{2} - \frac{5.5\phi}{\lambda} \dots\dots\dots(16)$$

$$M = \frac{2\pi^2 a^3 E h}{l} - \frac{5.5}{2} q a^2 l \dots\dots\dots(17)$$

$l$ : 圓筒の長さ

即ち  $l$  が  $a$  に比して極めて大なる場合には式 (16) (17) が成立するものと考へられる。

$n=2$  以上の場合:  $\lambda^2$  以上の高次のもののみを省略して式を簡略にすれば

$$\phi = \frac{\lambda^2(1-\nu^2) + n^4(n^2-1)^2 a - n^4(n^2-1)\phi}{2\lambda n^3(n^2-1)} \dots\dots\dots(18)$$

一般に最小の  $\phi$  を求めると云ふ條件から (18) をについて微分した式を零と置き  $\lambda$  を求めると。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{3\lambda^2(1-\nu^2)}{2n^3(n^2-1)} - \frac{n(n^2-1)\left(a - \frac{\phi}{n^2-1}\right)}{\lambda^2 \cdot 2} \dots\dots\dots(19)$$

$$\lambda = n^4 \sqrt{\frac{(n^2-1)^2}{3(1-\nu^2)} \left(a - \frac{\phi}{n^2-1}\right)} \dots\dots\dots(20)$$

この値を式 (18) に入れて  $\lambda$  を消去すれば

$$\phi = \frac{2}{3} \sqrt{n^2-1} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \left(a - \frac{\phi}{n^2-1}\right)^{\frac{3}{4}} \dots\dots\dots(21)$$

(7), (8) 及び (9) により

$$M_{cr} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}(n^2-1)} \frac{\pi E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \sqrt{a h^5} \left[1 - \frac{12}{n^2-1} \frac{q a^3(1-\nu^2)}{E h^3}\right]^{\frac{3}{4}} \dots\dots(22)$$

或ひは  $M_{cr}$  に相當する剪斷應力を  $\tau_{cr}$  とすれば (22) は

$$\tau_{cr} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}(n^2-1)} \frac{E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 - \frac{12}{n^2-1} \frac{q a^3(1-\nu^2)}{E h^3}\right]^{\frac{3}{4}} \quad (23)$$

となる。

式 (23) に於て  $q=0$  と置けば Timoshenko<sup>(1)</sup> が薄肉圓筒の振りモーメントによる挫屈荷重として誘導した式と一致し,  $M=0$  と置けば Flügge<sup>(2)</sup> が外壓を受ける薄

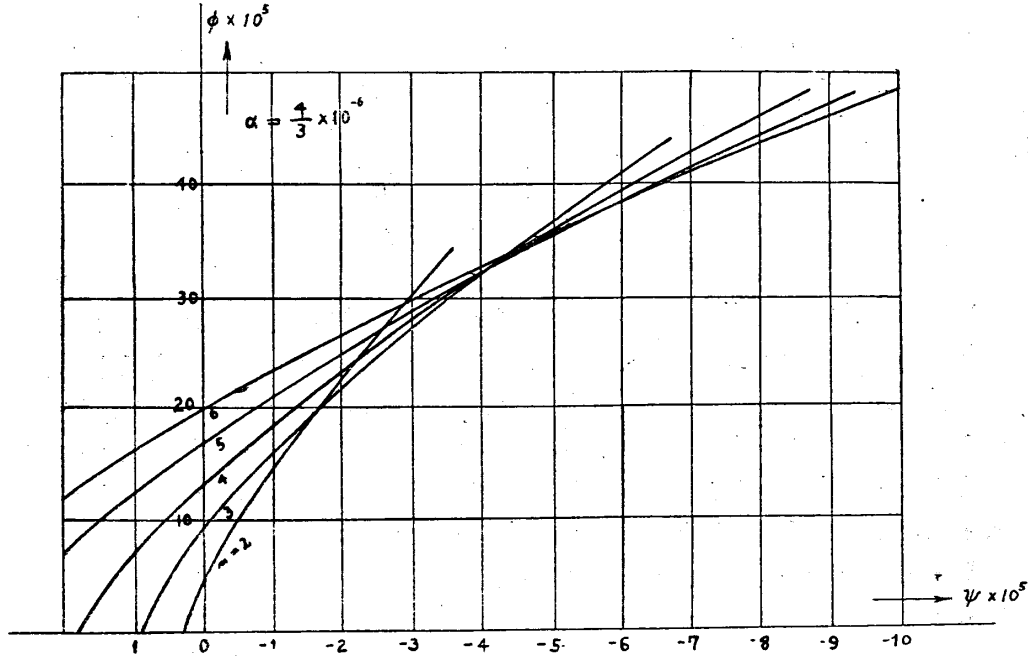
(2) 脚註(1)参照.

(3) W. Flügge; "Die Stabilität der Kreiszyinderschale," Ingenieur-Archiv, vol. 3, 1932.



肉圓筒の挫屈荷重として誘導した式と一致する。

上式を  $n$  の種々の値について圖示すれば第 1 圖の如くなり壓力が増大するにつれて挫屈による波の数が多くなることが解る。



第 1 圖

§ 4. 比較的短い圓筒の場合

第 1 節より第 3 節に於ては圓筒は可成り長く、従つて  $\lambda$  の値は可成り小さく、その 2 次以上の項が省略出来る様な場合に就いて取扱つたのであるが、比較的短い圓筒の場合には  $\lambda^2$  の項まで考慮に入れる必要がある。嚴密には、短い圓筒の場合には兩端の境界條件から誘導される  $\lambda$  に就いての 8 次式を解くことに依つて  $\lambda$  の固有値を求めるのが至當であらうが、計算が極めて複雑になるので茲では兩端の條件は考へないことにした。Donnell の行つた計算に於ても兩端の條件が固定であるか支持であるかに依る挫屈荷重の相違は極めて僅少であるからである。(14) 式に於て  $\lambda^2$  の項まで取れば

$$\phi = \frac{\lambda^2(1-\nu) + \alpha[(n^2-1)^2 n^4 + (n^2-1)\lambda^2 n^2(4n^2-3-\nu)] - \phi_1[n^4(n^2-1) + \lambda^2 n^2(3n^2-2.5)]}{2\lambda n^3(n^2-1)} \dots\dots\dots(24)$$

$\lambda$  は挫屈荷重  $\phi$  が極小となる様な値を取るから

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 3(1-\nu^2)\lambda^4 + \{a(4n^2-3-\nu)n^2(n^2-1) - \phi(3n^2-2.5)m^2\}\lambda^2 - n^4(n^2-1)^2 \left( a - \frac{\phi}{n^2-1} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

従つて

$$\lambda^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6(1-\nu^2)} \left[ -(4n^2-3-\nu) \left\{ a - \frac{(3n^2-2.5)\phi}{(4n^2-3-\nu)(n^2-1)} \right\} \pm \sqrt{(4n^2-3-\nu)^2 \left\{ a - \frac{(3n^2-2.5)\phi}{(4n^2-3-\nu)(n^2-1)} \right\}^2 + 12(1-\nu^2) \left( a - \frac{\phi}{n^2-1} \right)} \right] \quad \dots\dots\dots(26)$$

之等の式に於て  $\lambda$  の値は  $2\pi a/l$  より小さくはなり得ず、且つ (26) 式より、 $\lambda$  は  $n$  と共に増加するから、(26) 式に於て  $\lambda$  が其の最小値  $2\pi a/l$  に最も近くなる様な  $n$  の値が最小の挫屈荷重を考へる圓周方向の波數と考へることが出来る。従つて與へられた  $a, \phi$  に對して (26) 式に依り挫屈を起す場合の  $n$  の値が定まり、それに應じて  $\lambda$  の値も決定される。斯くの如くして決定される  $n, \lambda$  を (24) 式に入れることに依つて挫屈荷重が求められる。

尙簡単に實驗公式を求めようとするには、(22) 式の形がその儘短い圓筒の場合にも成立するものと考へて

$$\left( \frac{M_{cr}}{M_{cro}} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{q_{cr}}{q_{cro}} = 1 \quad \dots\dots\dots(27)$$

と置く。茲に  $M_{cro}, q_{cro}$  は夫々考ふる圓筒の  $q=0$  及び  $M=0$  の場合の限界振りモーメント及び限界壓力を表はすもので、短い圓筒の場合には既に解かれてゐる。特に圓筒が極めて長い場合には

$$\left. \begin{aligned} M_{cro} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}(n^2-1)} \frac{\pi E}{(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}} \sqrt{2ah^5} \\ q_{cro} &= \frac{n^2-1}{12} \frac{Eh^3}{a^3(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(28)$$

である。

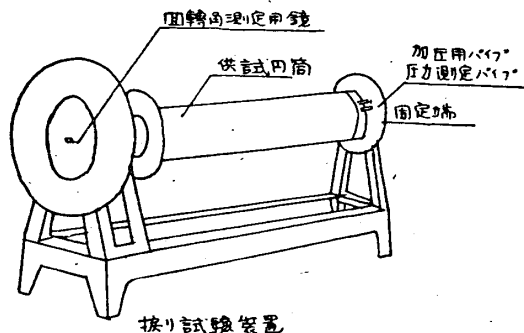
挫屈荷重の値は  $q_{cr}$  (外壓) が減少するに従つて次々に  $n$  の値の大きな曲線に移る譯で、従つて  $M_{cro}, q_{cro}$  の値としては夫々の  $n$  の値に對應するものを採用するのが、一應至當の様には思はれるが、短い圓筒では  $n$  の値は別に境界條件によつて決定

(4) 例へば Timoshenko; Theory of Elastic Stability.

せらるべき性質のもので、夫々の  $n$  の値に對する  $M_{cro}$ ,  $q_{cro}$  を求めることは困難である。従つて茲では短い圓筒の場合にも、極めて長い圓筒の場合の最小曲線（第1圖）と同様の關係が成立つと考へて、 $q_{cro}$ ,  $M_{cro}$  の値としては理論的に既に求められてゐる値、又は實驗値を使用すればよい。

### § 5, 實 驗

以上の計算結果が實際にどの程度適用し得るものかを確認するために數種類のセルロイド製圓筒に就いて實驗を行つた。實驗に用ひたセルロイド圓筒は長さ 600mm, 板厚 0.3 mm, 0.5 mm 及び 0.8 mm で、直径は 60 mm 乃至 160 mm の數種類のものである。氣密保持の爲めに兩端に厚さ 4 mm の圓板を接着し、一つの端から長さ 20 mm の間隔を厚さ 2 mm の板にて補強して、加壓用及び壓力測定用の管を裝置した。試験機は第2圖の如く、供試圓筒の兩端の二枚の圓板の一方を軸方向に動

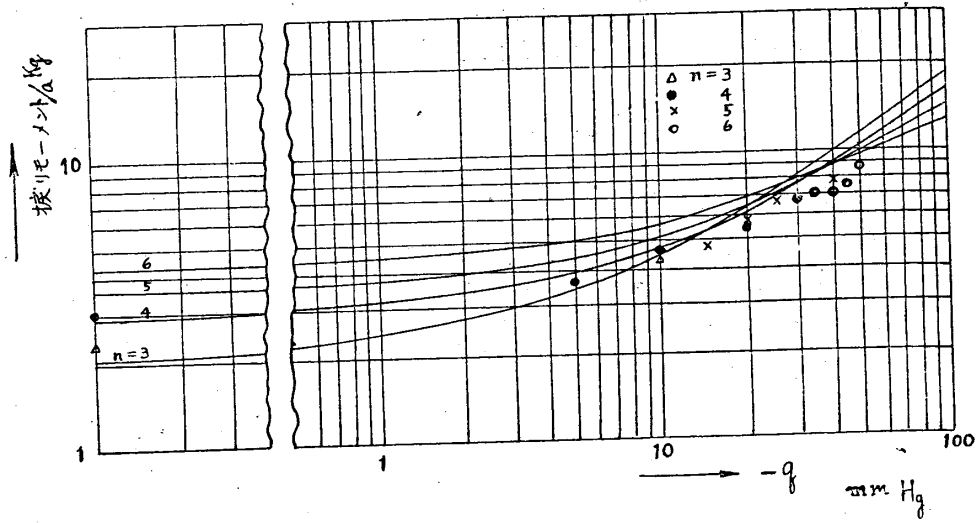


第 2 圖

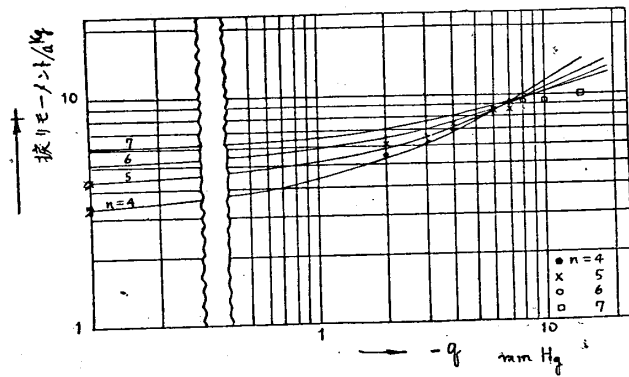
き得る様に固定し、他方に垂直荷重に依り捩りモーメントを加へた。挫屈荷重を決定するに當つては、回轉板の中心に取付けた反射鏡に依り、荷重による回轉角を測定し、廻轉角が一定値を示さず、無限に増大する時の荷重を以て挫屈荷重とした。

實驗に用ひた圓筒に就いては  $2\pi a/l$  の値は 0.4 乃至 0.8 程度であるから何れも比較的短い圓筒と考へられ、従つて第4節の結果を適用し得る。與へられた  $a$ ,  $\psi$  に對して(26)式に依つて  $n$  の最小値を求め、それに対する  $\lambda$  を用ひて(24)式により挫屈曲線を求めることが出来る。斯くの如くして定めた曲線と實驗値とを比較したものの一例を第3圖 (a), (b) に示してある。圖に示した薄い圓筒では、内壓の小さな範圍では實驗値は計算値と略々一致し、挫屈形の波の數も兩者は可成り一致してゐるが、壓力が稍大きくなると實驗値は計算値の平均 85% 程度となり實驗に於ける  $n$  の値は挫屈曲線に相當する  $n$  の値よりも稍大きな値を取る傾向にある。

板厚の厚いものは挫屈の際に横断面が  $n$  個の完全な波形を示さず、一個所に凹みが集中し、挫屈荷重は計算値より可成り小さい。之等の事柄は試験圓筒の製作が不完



第3圖(a)  $n=10$   $h=0.3$  の場合

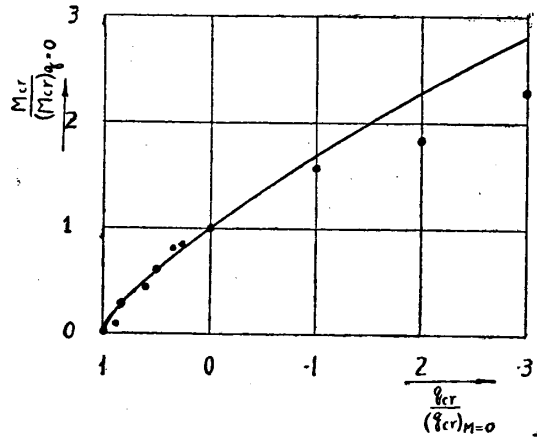


第3圖(b)  $a=15$   $h=0.3$  の場合

全なことにもよるが、一方第4節の計算に於て、 $a, \phi, \psi$ に関する二次以上の項を省略したこと、挫屈後の特性を考慮してゐないこと、及び境界条件から正確な  $\lambda$  の値を求めなかつたこと等に其の原因を有するものと思はれる。之等の不明確な點に關しては近い將來に於て、別の立場から考究する積りである。

次に第4節の(27)式が有限の長さの圓筒の場合にどの程度適用出来るかを確認して置くことは、上記の近似計算を用ひるよりも寧ろ實用上大切なことと思はれるので、其の結果を第4圖に示して置いた。 $M_{cr0}, q_{cr0}$ としては夫々の場合の實驗値を

採用した<sup>(1)</sup>。圖に於て明かな如く、 $q_{cr}$  の絶対値が小さな間は實驗値は計算値と極めてよく一致するが、特に大きな内圧の場合には實驗値が可成り小さい。



第 4 圖

### § 6. 結 語

本論文に於ては  $a, \psi, \phi$  が何れも同程度の微小量である場合に、薄肉圓筒の捩り挫屈強度の内（外）圧による變化を圓筒の長さが極めて長い場合及び比較的短い場合に就いて考察し、内圧（外圧）の増加と共に挫屈荷重が著しく増加（減少）すること及び挫屈波形の圓周方向の波数がそれに應じて増加（減少）することを確めた。尙上記計算結果とセルロイド製圓筒に就いての實驗結果とを比較した。

終りに臨み終始懇切な御指導を賜つた小川先生並びに有益なる助言を頂いた池田教授に衷心より御禮申上げる。尙實驗並びに計算に際して助力を惜まれなかつた平井美次君に感謝する。

(1) 有限の長さの圓筒の場合には  $M_{cro}, q_{cro}$  に對應する  $n$  の値は異なるのが一般である。