

No. 265.

(Published August, 1943)

On the Structure of Shock Waves.

By

Seiiti HUZII.

Abstract.

Many kinds of shock waves were tested by small pitot tubes, moving continuously along the stream.

(1) Shock waves before the pitot tube.

Small pitot tubes, diameter 1 mm, were fixed in three Laval nozzles, which corresponded 1.5, 1.6, 2.1 in Mach number, and were 30×60 mm in sectional dimension.

Obtaining the Mach number from the pressure by the use of Rayleigh's formula, compared this with the result from the photographic method. We can conclude that the shock waves before the pitot tube agree exactly with the theoretical calculation.

(2) Shock waves in Laval nozzles.

In Laval nozzles appear shock waves, when the back pressure is not sufficiently low. These shock waves were tested by making small pitot tube pass through them. This results did not agree with the theory, especially in thickness and total head loss. But by investigating closely, we found that this depended on the separation of flow.

(3) Shock waves on the Aerofoils.

This type of shock waves were also accompanied with separation and differed from theoretical values, but had the same character with the second type.

No. 265.

(昭和十八年八月發行)

衝撃波に関する研究

前特別研究員 藤 井 正 一

目 次

緒 言	364
第 1 編 理論的研究	365
第一章 衝撃波の成立及傳播	365
§ 1. 平面的なる弱き波の傳播	365
§ 2. 強い波の傳播並に衝撃波の成立	368
第二章 平面衝撃波	374
§ 3. 衝撃波前後の状態變數の間の關係式——Rankine- Hugoniot の式	374
§ 4. 衝撃波内部の状況	381
§ 5. 衝撃波の幅	385
§ 6. 衝撃波の熱力學的考察	387
第三章 管中に生ずる衝撃波	392
§ 7. 管中の流れ	392
§ 8. 衝撃波の前後に於ける状態	393
§ 9. 衝撃波の幅	397
第四章 斜の衝撃波	399
§ 10. 衝撃波の前後の状態	399
§ 11. 圖に依る表示	402
§ 12. 熱力學的考察	410
§ 13. 音速以上の流れの風速の測定	413

第 2 編 実験	414
§ 14. 実験装置	414
§ 15. ビトー管の前方に生ずる衝撃波に関する実験結果 ..	416
§ 16. ラバル管内に生ずる衝撃波に関する実験結果	420
§ 17. ビトー管に依る衝撃波の變形並に各種ビトー管の 比較	431
§ 18. 翼に生ずる衝撃波	431
§ 19. 湿度と衝撃波との関係	431
結 論	432
参考文献	433
附録 第 1.	435
附録 第 2.	435
附録 第 3.	438
附録 第 4.	440

緒 言

火薬の爆發或は火花放電等に依り生ずる壓力波，飛行彈丸の先端より生ずる所謂彈頭波，又は高速氣流中の流れの不連続性等は皆相似たる性質を有するものにして，これ等を總稱して衝撃波と云ふ。彈頭波に関しては既に多くの理論的研究及び二三の實驗的研究あり。高速氣流中の衝撃波に就ては，タービンの噴出孔の研究に於て問題視せられ，又ガソリン發動機のデトネーションの現象と關聯して研究せられあり。近年に到り航空機の發達著しく，飛行速度の増加にともなひ，翼の上面に生ずる衝撃波が翼性能に重大なる障害を與ふること次第に明かとなり，これが研究は焦眉の急務となりたり。然れども實驗の數少く，理論も亦不充分なる狀況なるも，大體に於て彈頭波は實驗と理論は良く一致し，其の他の衝撃波にありては一致せざること判明するに到りたり。

本研究はこれ等種々の衝撃波に關し詳細に多くの角度より實驗し，その結果を理論的に解析せんとす。

第一編 理論的研究

第一章 衝撃波の成立及傳播

§1. 平面的なる弱き波の傳播.

爆發, 火花放電, 或は物體の急激なる運動等に依り, 氣體中に壓力, 密度等に動搖が生じたるものと假定す. この動搖は勿論その源を中心として周圍に波となり傳播す. 今この源より充分離れたる場所を考ふれば, 波は非常に弱く, 大體平面的なりと考ふるを得べし. 此の如き平面的なる弱き波の傳播に就き研究す.

坐標系は波の進行方向を x 軸とし, それに垂直に y, z を取る. 又 x, y, z 軸方向の氣體の速度を u, v, w とす.

一般の流體力學の運動方程式より

$$\rho \frac{D\mathbf{w}}{dt} = \mathfrak{R} + \mathfrak{R} \tag{1.1}$$

但 ρ 氣體密度.

\mathbf{w} 氣體の速度を示すベクトルにして $\mathbf{w} (u, v, w)$ なり.

\mathfrak{R} 重力等の如き質量力にして $\mathfrak{R} (\rho X, \rho Y, \rho Z)$ なり.

\mathfrak{R} 表面力にして壓力降下及摩擦力を示す.

然して

$$\mathfrak{R} = -grad\Pi \tag{1.2}$$

と書くことを得. 但し Π は對稱テンソルにして, その成分は

$$\Pi = \begin{Bmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{zx} \\ \pi_{xy} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{yz} & \pi_{zz} \end{Bmatrix}$$

$$\pi_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\pi_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\pi_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xy} &= -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \pi_{yz} &= -\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \pi_{zx} &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

但 μ は粘性係数をあらはす。

故に (1.1) は

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{dt} &= \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \rho X - \frac{\partial \pi_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \pi_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \pi_{zx}}{\partial z} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

次に連続の方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (1.5)$$

或は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.6)$$

以下本論文に於ては氣體は理想氣體なりと假定す。即ち

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1.7)$$

$$R = C_p - C_v \quad (1.8)$$

$$E = C_v T = \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \quad (1.9)$$

$$i = E + \frac{p}{\rho} = C_p T = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} \quad (1.10)$$

が成立するものとす。但

- T : 絶対温度
- C_p, C_v : 氣體の定壓, 定積比熱にして一定値なり.
- i : 單位質量の氣體のエンタルピー
- E : 單位質量の氣體の内部エネルギー
- $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$: 氣體に依る定數にして空氣にては 1.4 なり.

(エネルギー, 熱等はすべて仕事の單位に換算したるものを用ふ)
 さて本節に於ては非粘性流體を考ふことゝす. 即ち

$$\mu = 0$$

又外力を無視し得るものとせば

$$X = Y = Z = 0$$

平面的なりとの假定より

$$v = w = 0 \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

故に (1.4), (1.6) 兩式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{1.12}$$

となる. 今動搖に依る速度の變化 u , 密度の變化即ち $\rho = \rho_1 (1 + \epsilon)$ (ρ_1 は動搖なき氣體の密度) に於ける ϵ は, 弱き波なりとの假定より小にして然も

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{及} \quad \frac{\partial u}{\partial t} \gg u$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \quad \text{及} \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \gg \epsilon$$

なり. 又 §3 に於て後述する如く變化小なる時は, p と ρ は斷熱的變化を行ふを以て, p は ρ のみの函數なり. 故に (1.11), (1.12) は近似的に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_1} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.14}$$

となる。これより ε を消去せば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.15)$$

$$\text{但} \quad a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_1}$$

これ波動方程式にして傳播速度は

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_1}} \quad (1.16)$$

なることを示す。即ち氣體中に動搖が生じた時は、この源より充分遠方に於て、波は a なる速度にて傳播す。これを音速と云ひ、

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{一定}$$

なるを以て

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_1}} = \sqrt{\kappa \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\kappa RT_1} \quad (1.17)$$

例へば標準状態に於ける空氣に就ては

$$\kappa = 1.4$$

$$p_1 = 760 \text{ mmHg}$$

$$\rho_1 = 0.001293 \text{ gr/cm}^3$$

故に

$$a = 331 \text{ m/sec}$$

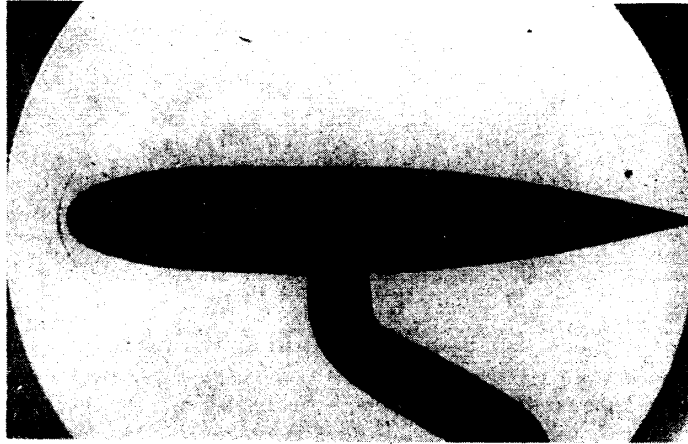
となる。

§2. 強い波の傳播並に衝撃波の成立.

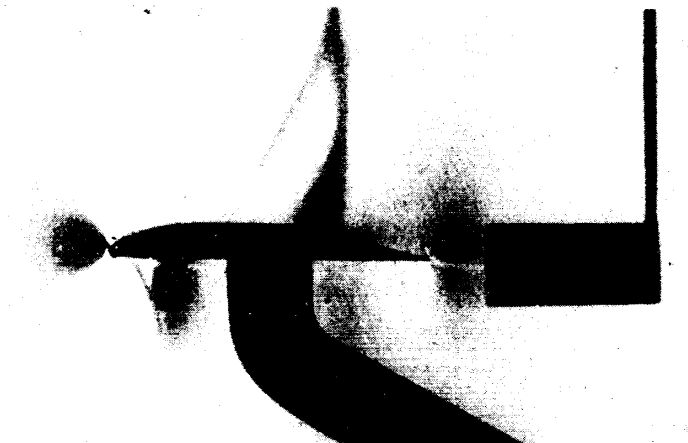
衝撃波の二三の例の寫眞を第 1, 2, 3²⁵⁾* 圖に示す。シュリーレン寫眞よりも、又測定よりも明かなる如く、衝撃波の前後に於てはすべての状態變數の間に非常に急激なる變化あり。然して壓力は波の進行方向に對し、波の後方が必ず壓力大なり。(第 4 圖参照) かくの如き波が何故に生ずるやを考究せんとす。

今次の裝置を想像す²⁾。無限に長い一樣なる太さの管にピストンが挿入せられあり、管中には一樣にして靜止せる氣體あるものとす。(第 5 圖 (1)) 今突然ピスト

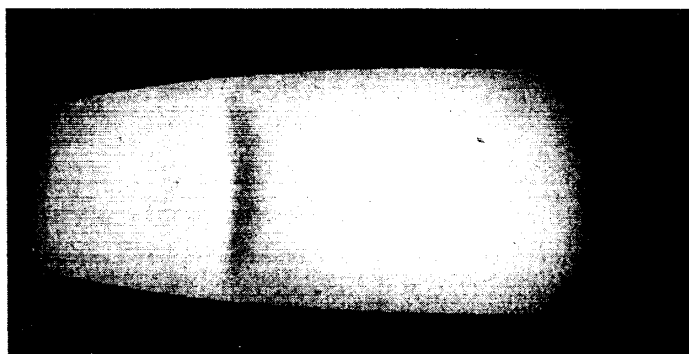
* 参考文献の番號を示す。



第 1 圖 廻轉體前方の衝撃波



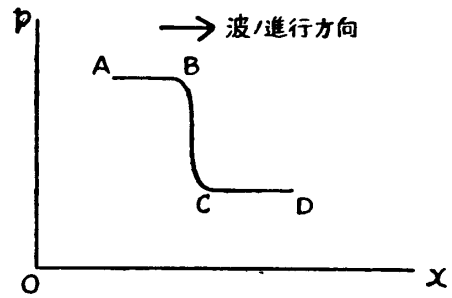
第 2 圖 翼上面の衝撃波



第 3 圖 ラバル管内の衝撃波

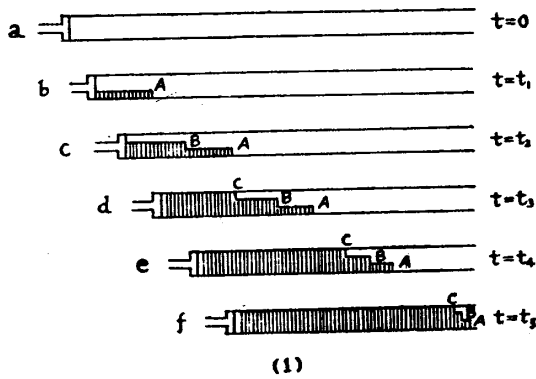
ンを左より右に小なる速度 u_1 を以て押す。然らば壓力、密度、速度等に小なる變位が生じ、これは §1 の定理に依り、波となり $a = \sqrt{\kappa RT}$ なる速度にて傳播す。或る時刻 t_1 に於ては、第 5 圖 b の如く波頭 A の右方は未だ何等影響及ばず、氣體は靜止しあるも、A とピストンの間の氣體は斷熱的に幾分壓縮せられ p_1 となり、然も右方に向ひピストンと等しい速度 u_1 にて運動

しあり。(第 5 圖 b 以下の陰の部分の厚さは壓力を示すものなり) この時更にピストンの速度を少しく増加し u_2 ならしむれば、壓力は p_2 となり、新しい波頭 B を生ず。(第 5 圖 c) ピストンが加速度を有し、終に U なる速度を得るに

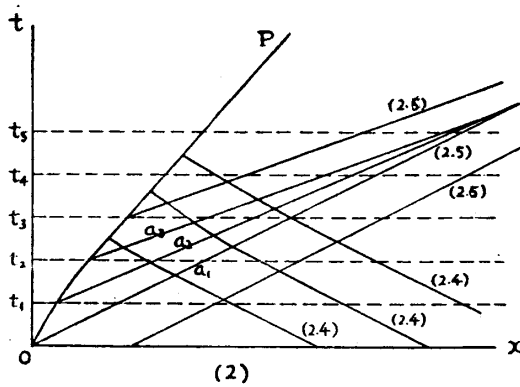


第 4 圖 衝撃波の壓力變化

到る場合を以上の如く階段的に分ちて考察せば、波頭 A, B, C ... が無限に多く存在することゝなる。(第 5 圖 d).



(1)



(2)

第 5 圖 衝撃波の傳播

さて、これ等波頭 A, B, C, の傳播速度は、場所場所の音速に等しく、(1.17) より $\sqrt{\kappa RT}$ となる。然るに氣體は壓縮せらるゝに従ひ、溫度上昇するを以て、音速は次第に大となり、波頭 B は A より、C は B より早く右方に傳はり、全體の波頭の壓力勾配は漸次急峻となり、(第 5 圖 e, f) 或る時刻には終に垂直となるに到る。即ち非常に急激な壓力變化を有する波となり、然も波の後方が壓力高きを知る。

然らば逆にピストンが左方に加速度的に移動せる場合は如何。上記と全く同様に考ふれば、各段階毎に壓力降下し、溫度低下するを以て、波

頭の傳播速度は次第に小となる。故に全體として波頭は漸次平となり、終に波としての存在を失ふ。これ衝撃波の壓縮波とも呼ばるゝ所以なり。

以上は衝撃波成立の定性的考察なるも、更に數式を用ひ定量的に研究せんとする。簡單の爲め平面的なる強い動搖生じたりとし、これの傳播を考ふ。§1と同様に粘性及外力を無視し、又 p は ρ のみの函数と假定す。(1.4), (1.6) 式より

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

今 $x-t$ 平面を考へ、(第5圖(2))この上に

$$dx = \varphi dt$$

にて表はさるゝ線を考へ、この線に沿ひ

$$u + f(\rho)$$

但 f は任意の函数

が一定なりと假定す。即ち

$$d[u + f(\rho)] = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \varphi + f' \frac{\partial \rho}{\partial x} \varphi + \frac{\partial u}{\partial t} + f' \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dt = 0$$

右邊に

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + f' u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) dt$$

を加減すれば

$$d[u + f(\rho)] = \left[\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} f' (\varphi - u) \right\} + f' \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\varphi - u}{f'} \right\} \right] dt = 0$$

この式が成立する爲めには、(2.1), (2.2) を考慮し

$$\begin{cases} f'(\varphi - u) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \\ \frac{\varphi - u}{f'} = \rho \end{cases}$$

なるを要す。この二式より

$$f' = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad \varphi = u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

或は

$$f' = -\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad \varphi = u - \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

を得。即ち

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{線上にて} \quad u + \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} d\rho = \text{一定} \quad (2.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \text{線上にて} \quad u - \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} d\rho = \text{一定} \quad (2.4)$$

一方上記の装置に就き、 $x-t$ 面上にピストンの位置を描けば第 5 圖 (2) の P 曲線となる。即ち $t=t_2$ 迄は速度増加し、それ以後は一定速度 U にて動く。さて (2.4) の

$$\frac{dx}{dt} = u - \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

にて表はさるゝ線を考ふれば

$$\frac{dx}{dt} < u$$

なるを以て、 x 軸と P 曲線間の總ての點を通るものは、皆 x 軸と交る。然るに x 軸上にては

$$t = 0, \quad u = 0, \quad \rho = \rho_1, \quad p = p_1$$

なるに依り、この全域に亙り

$$u - \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} d\rho = \text{一定}$$

ならざるべからず。一方 (2.3) の

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (2.5)$$

線上にては $u + \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} d\rho = \text{一定}$ なるを以て、結局この線上にて u 及 ρ は各獨立に一定にして

$$u = \int_{p_1}^p \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} d\rho \quad (2.6)$$

なり。

これを要するに $x-t$ 面上に於て

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

線上にて u, p, ρ 一定なるを以て、波は $u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ なる速度にて傳播することになり、然も (2.5) は直線なるを知る。(第 5 圖 (2) (2.5)) (2.5), (2.6) より $u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ を計算する際に、 p と ρ の関係式は §3 に述ぶる如く斷熱變化の式に非れども、變化小なるを以て近似的に斷熱變化の関係成立するものとせば

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}$$

但 p_1, ρ_1 は衝撃波前方の静止氣體中に於ける壓力及密度なり。

(2.6) より

$$u = \frac{2}{\kappa - 1} \left(\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} - a_1 \right)$$

$$a_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$$

故に

$$u + \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = a_1 + \frac{\kappa + 1}{2} u \quad (2.7)$$

この値を $x-t$ 面上に描けば、第 5 圖 (2) に於て a_1, a_2, a_3 となり、 $t = \text{一定}$ なる線にて切れば各時刻に於ける波の狀況が求められる。(第 5 圖 (1)).

若し (2.5) の直線が交るに到れば、この點にては状態變數が二組の値を有することとなるも、實際には此の如きことは生ぜずして、或る一定の速度にて傳播す。例へばピストンを 0.5 秒間に靜止状態より 100 米/秒の速さまで加速し、以後一定に保つとせば計算上は 1.38 秒後 $x=453$ 米の場所にてかくの如き状態が生じ始む。

第二章 平面衝擊波

以上述べたる如く、粘性を考へざる時は、動搖は傳播するに従ひ次第に波頭急峻となり終に直立す。然れども實際の場合は、或る程度迄急となれば、粘性、熱傳導等の影響があらはれ、それ以上急峻になることを妨げるに到る。故に衝擊波の内部構造を研究する際には、粘性及熱傳導を考慮すること絶對的に必要なり。(第 4 圖 BC) 然れども定常なる衝擊波存在するものとし、その充分前方及後方の狀況の間の關係のみを研究する場合には、これ等を考慮する必要なし。(第 4 圖 A, D).

本章に於ては衝擊波は平面的と考へらるゝ場合に就き、先づ衝擊波の前後の狀態間の關係を求め、次に内部に於ける狀況を粘性及熱傳導を考慮に入れて研究せんとす。

§3. 衝擊波前後の狀態變數の間の關係式——Rankine, Hugoniot の式.

衝擊波と共に運動する坐標系を考へ、運動方向に x 軸を、之に垂直に y, z 軸を取る。平面波の條件より

$$v = w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

又この坐標系より見れば、定常波なるに依り

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

外力作用せざる時は、(1.6), (1.4) は夫々次の如くなる。

連續の方程式

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

運動量保存の式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.2)$$

又エネルギー保存の式

$$\rho u \frac{\partial E}{\partial x} = - \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

E : 内部エネルギー

λ : 熱伝導係数

この三式を積分し

$$\rho u = G \quad (3.1a)$$

$$Gu + \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = J \quad (3.2a)$$

$$GE + \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) u + \frac{G}{2} u^2 - \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = GF \quad (3.3a)$$

但 G, J, GF は積分常数なり。

今衝撃波の充分前方及後方を考へ、各場所の状態變數は夫々 p_1, ρ_1, u_1, T_1 ; p_2, ρ_2, u_2, T_2 にして流れは一様なりとす。即ち $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$ 。故に上式は

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = G \quad (3.1b)$$

$$Gu_1 + p_1 = Gu_2 + p_2 = J \quad (3.2b)$$

$$E_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = E_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} = F \quad (3.3b)$$

此の三式が衝撃波の前後の状態變數の間に成立する最も根本的な關係式なり。 G は流れの強さ¹⁾ (Stromstärke), J は運動量の強さ¹⁾ (Impulsdichte) をあらはす。氣體は理想氣體なりとせば、(1.8) 乃至 (1.10) より (3.3b) は

$$\left. \begin{aligned} i_1 + \frac{u_1^2}{2} = i_2 + \frac{u_2^2}{2} = F \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} = F \end{aligned} \right\} \quad (3.3c)$$

又は

(3.1 b), (3.2 b) より

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \quad (3.4)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \quad (3.5)$$

(3.3b) にこの二式を代入し

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{\kappa - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \quad (3.6)$$

この式は Rankine,⁵⁾ Hugoniot⁶⁾ により各獨立に發見せられたるものにして、Rankine, Hugoniot の式と呼ばれる。又 (3.3c), (3.4), (3.5) より

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 \rho_2} \quad (3.7)$$

(3.6), (3.7) 式を比較し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\frac{p_1 + p_2}{2}}{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} &= \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \\ \frac{\Delta p}{\Delta \rho} &= \kappa \frac{p + \frac{\Delta p}{2}}{\rho + \frac{\Delta \rho}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

又は

これ斷熱變化の式

$$\frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho}$$

に相當するものにして、Rankine, Hugoniot の式は一名動的斷熱の式 (Dynamische Adiabate)^{9) 16)} と呼ばるゝ所以なり。故に衝撃波の前後の間には斷熱の式は成立せずして、動的斷熱の式が成立す。此の如く衝撃波の前後のみを考慮する際は、 p は ρ のみの函数と考ふることを得。

u_1 と u_2 の間に次の關係あり。(3.3c) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \\ \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0'}{\rho_0'} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

但 $p_0, \rho_0; p_0', \rho_0'$ は衝撃波前方及後方の靜止點 (坐標系に對する) の壓力及密度なり。

(3.1b), (3.2b) より

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_1}{\rho_1} \frac{u_2}{u_1} + u_2(u_1 - u_2)$$

以上の三式より $\frac{p_2}{\rho_2}, \frac{p_1}{\rho_1}$ を消去せば

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0} = u_1 u_2$$

今
$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0} = a^{*2}$$

と置けば

$$u_1 u_2 = a^{*2} \tag{3.10}$$

これを Prandtl の式と云ふ。 a^* は流速と音速の一致せる時の速度なり。何となれば (1.17) より $a_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$ なるにより, (3.9) に於て $u_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$ と置けば

$$u_1^2 = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0} = a^{*2} \text{ となる.}$$

次に衝撃波の進行速度と種々の状態変数との間の関係式を求む。波の進行速度は (3.4) より

$$u_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}}$$

なり。 (3.8) より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)}{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}} \tag{3.11}$$

又 (3.4) より

$$\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(\frac{u_1}{a_1}\right)^2 = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right) \tag{3.12}$$

$a_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$ にして衝撃波前方の局部音速と呼ばれ、又

$M_1 = \frac{u_1}{a_1}$ をマッハ数と云ふ。

(3.11) と (3.12) より $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ を消去し

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \\ \text{又は} \quad M_1^2 &= \frac{1}{2\kappa} \left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

又 $\frac{p_2}{p_1}$ を消去すれば

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1)M_1^2}{2 + (\kappa-1)M_1^2} \quad (3.14)$$

(3.13), (3.14) より

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}}{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)} \\ &= \frac{2(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2 M_1^2} (M_1^2 - 1)(\kappa M_1^2 + 1) + 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

これ等の式より $M_1 \rightarrow \infty$ の場合を考ふれば

$$\frac{p_2}{p_1} \longrightarrow \infty$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \longrightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa-1}$$

空気に於ては $\kappa=1.4$, 故に $\rho_{2 \max} = 6\rho_1$

$$\frac{T_2}{T_1} \longrightarrow \infty$$

又 $M_1 \rightarrow 1$ 即ち $u_1 \doteq a_1$ の場合は

$$\frac{p_2}{p_1} \longrightarrow 1$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \longrightarrow 1$$

$$\frac{T_2}{T_1} \longrightarrow 1$$

即ち弱い衝撃波の傳播速度は衝撃波前方の局部音速なり。(§1 参照).

衝撃波により生ずる總壓の損失は、前後に於て流れを斷熱的に靜止せしめたる時の壓力 p_0 及 p_0' の差を求むれば可なり。即ち (3.9) に於て $\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\kappa$ と置けば

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 \quad (3.16)$$

同様にして

$$\left(\frac{p_0'}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2 \quad (3.17)$$

但
$$M_2 = \frac{u_2}{a_2}, \quad a_2^2 = \kappa \frac{p_2}{\rho_2}$$

一方 (3.5) より

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) M_2^2 = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) \quad (3.18)$$

(3.11), (3.13), (3.18) より

$$M_2^2 = \frac{1}{2\kappa} \left[(\kappa+1) \frac{p_1}{p_2} + (\kappa-1) \right] = \frac{2 + (\kappa-1) M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \quad (3.19)$$

之を (3.17) に代入せば

$$\left(\frac{p_0'}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{1}{2} \frac{(\kappa+1)^2 M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)} \quad (3.20)$$

今 M_1 與へられたりとせば、(3.13) より $\frac{p_2}{p_1}$, (3.16) より $\frac{p_1}{p_0}$, (3.20) より

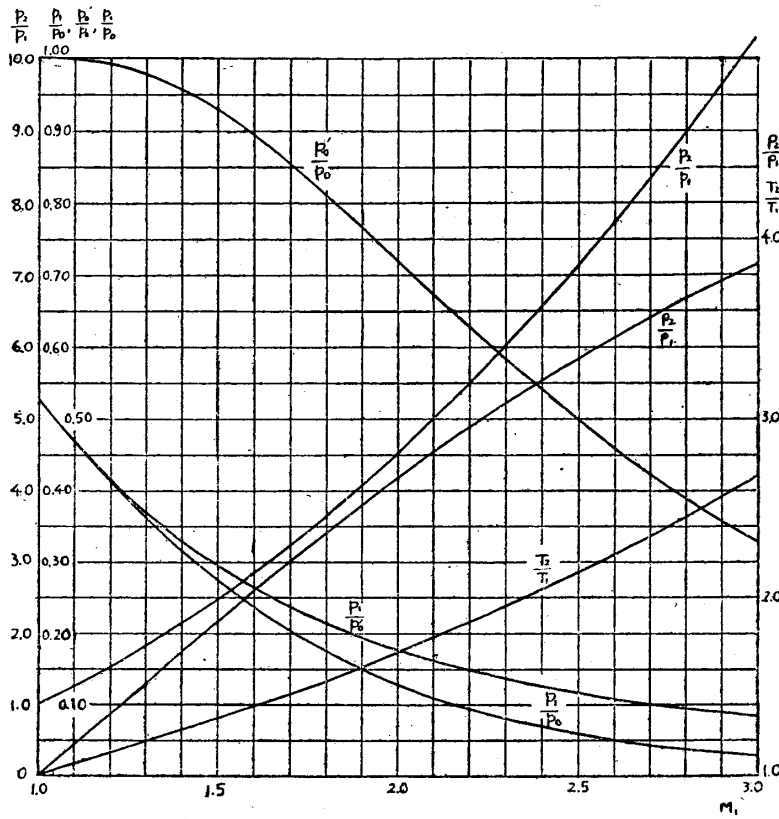
$\frac{p_0'}{p_2}$ を求め、 $\frac{p_0'}{p_0} = \frac{p_0'}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_0}$ より $\frac{p_0'}{p_0}$ を計算することを得。

第 1 表及第 6 圖は以上の諸式より求めたる値を示す。(詳細なる數値は附録第 1 参照)

第 1 表

衝撃波の前後に於ける諸變數の間の關係

M_1	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{p_0 - p_0'}{p_0}$
1.00	1.000	1.000	1.000	0.528	0.528	0.000	0.000
1.10	1.245	1.169	1.065	0.469	0.468	0.999	0.001
1.20	1.513	1.342	1.128	0.415	0.412	0.993	0.007
1.30	1.805	1.516	1.191	0.369	0.361	0.979	0.021
1.40	2.120	1.690	1.255	0.328	0.314	0.958	0.042
1.50	2.458	1.862	1.320	0.293	0.272	0.930	0.070
1.60	2.820	2.032	1.388	0.263	0.235	0.895	0.105
1.70	3.205	2.198	1.458	0.237	0.203	0.856	0.144
1.80	3.613	2.359	1.532	0.214	0.174	0.813	0.187
1.90	4.045	2.516	1.608	0.194	0.149	0.767	0.233
2.00	4.500	2.667	1.688	0.177	0.128	0.721	0.279
2.10	4.978	2.812	1.770	0.162	0.109	0.674	0.326
2.20	5.480	2.951	1.857	0.149	0.0935	0.628	0.372
2.30	6.005	3.085	1.947	0.137	0.0800	0.583	0.417
2.40	6.553	3.212	2.040	0.127	0.0684	0.540	0.460
2.50	7.125	3.333	2.138	0.117	0.0585	0.499	0.501
2.60	7.720	3.449	2.238	0.109	0.0501	0.460	0.540
2.70	8.338	3.559	2.343	0.101	0.0430	0.424	0.576
2.80	8.980	3.664	2.451	0.0946	0.0369	0.389	0.611
2.90	9.645	3.763	2.563	0.0885	0.0317	0.358	0.642
3.00	10.333	3.857	2.679	0.0829	0.0272	0.328	0.672



第 6 圖 衝撃波の前後に於ける諸變數の間の關係

§ 4. 衝撃波内部の状況.

衝撃波内部の状況を求めるには, (3.1a), (3.2a), (3.3a) を積分すれば可なり. 境界条件として, 充分前方及後方で $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial x}$ は 0 となり, 壓力, 密度, 速度は 夫々 $p_1, \rho_1, u_1; p_2, \rho_2, u_2$ なりとす. 即ちこれ等は

$$\begin{cases} \rho u - G = 0 \\ Gu + p - J = 0 \\ \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F = 0 \end{cases}$$

なる聯立方程式の二組の根ならざるべからず.

さて (3.1a), (3.2a), (3.3a) を書換ふれば

$$\rho u = G \quad (4.1)$$

$$\frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} = Gu^2 + G \frac{p}{\rho} - Ju \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{4}{3} \frac{\mu C_p}{\lambda} \frac{u^2}{2} - F \right\} \\ = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

又は

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} - F \right\} + \frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} \\ = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\} \end{aligned} \quad (4.3')$$

この式を一般に積分することは非常に困難なり. Prandtl は $\mu=0$ の場合*, Hamel は $\lambda=0^{**}$ の場合を計算し, Taylor⁸⁾, Becker⁹⁾, 及 Rayleigh⁷⁾ は λ, μ の間に或る関係ある場合につき求めたり.

- (1) $\mu=0$ の場合
(4.2), (4.3') より

$$\begin{aligned} Gu^2 + G \frac{p}{\rho} - Ju = 0 \\ \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} - F \right\} = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\} \end{aligned}$$

之より $\frac{p}{\rho}$ を消去す

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{Ju}{G} - u^2 \right) - F \right\} = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{Ju}{G} - u^2 \right) + \frac{u^2}{2} - F \right\} \\ \frac{\kappa \lambda}{C_p} \left(\frac{J}{G} - 2u \right) \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{G(\kappa+1)}{2} (u-u_1)(u-u_2) \end{aligned}$$

* L. Prandtl: Zeitschrift f. d. ges. Turbinenw, Bd. 3, 1906, S. 241.

** G. Hamel: Zeitschrift d. Ver. d. Ing. Bd. 55, 1911, S. 1895.

積分し

$$x = \frac{2\lambda}{GR} \left[\frac{2u_1 - \frac{J}{G}}{u_1 - u_2} \log_e(u - u_1) - \frac{2u_2 - \frac{J}{G}}{u_1 - u_2} \log_e(u - u_2) \right] \quad (4.4)$$

この式に前節に於て求めたる u_1, u_2 を代入せば、衝撃波の内部の u と x の関係を求むることを得。

(2) $\lambda=0$ の場合

(4.2), (4.3') より

$$\frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} = Gu^2 + G \frac{p}{\rho} - Ju$$

$$\frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\}$$

之より $\frac{p}{\rho}$ を消去し

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{G(\kappa+1)}{2} u^2 - \frac{\kappa}{\kappa-1} Ju + GF \\ &= \frac{G(\kappa+1)}{2} (u-u_1)(u-u_2) \end{aligned}$$

を得。之を積分す。

$$x = \frac{8\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{1}{u_1 - u_2} [u_1 \log_e(u - u_1) - u_2 \log_e(u - u_2)] \quad (4.5)$$

(3) $\frac{\mu C_p}{\lambda} = Pr = \frac{3}{4}$ の場合

Pr は Prandtl 数にして、空気に於てはこの条件は大體成立すと考ふるを得。例へば氣體論より自由度 n の氣體に関しては Meyer* の計算に従へば

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{n+2}{n+4.5} = \frac{4\kappa}{9\kappa-5}$$

空気の如き二原子分子の氣體にありては、 $\kappa \doteq \frac{7}{5}$ なるを以て

* O. E. Meyer: Die kinetische Theorie der Gase. 1877, S. 187. J. H. Jeans: The dynamical Theory of Gases. 1925, p. 301.

$$Pr = \frac{28}{38} = 0.737$$

實際の氣體については第 2 表の如し. 本假定は

$$Pr = \frac{3}{4} = 0.750$$

にして大體一致すると考へて差支へなし.

第 2 表

諸種の氣體の Prandtl 數

氣 體	κ	$\frac{4\kappa}{9\kappa-5}$	Pr
窒 素	1.408	0.734	0.739
水 素	1.408	0.734	0.717
CO	1.403	0.736	0.765
酸 素	1.398	0.737	0.731
NO	1.38	0.742	0.738
鹽 素	1.34	0.761	0.743

さて (4.3) 式はこの場合には

$$\frac{\lambda}{C_p} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\} = G \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F \right\}$$

となり, 積分可能な形となり

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F = C e^{\frac{C_p G x}{\lambda}}$$

今 $x=0$ の點として衝撃波の充分前方の點を取らば, $C=0$. 故に

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F = 0 \quad (4.6)$$

即ち Prandtl 數 $\frac{3}{4}$ なる氣體に於ては λ と μ の影響は消し合ひ, 衝撃波の内部に於ても, ベルヌイの式と一致した式 (4.6) が成立するを知る.

(4.6) を (4.2) に代入す.

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{G(\kappa+1)}{2\kappa} u^2 + G \frac{\kappa-1}{\kappa} F - Ju \\ &= \frac{G(\kappa+1)}{2\kappa} (u-u_1)(u-u_2) \end{aligned}$$

これを積分し

$$x = \frac{8\kappa\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{1}{u_1-u_2} [u_1 \log_e(u-u_1) - u_2 \log_e(u-u_2)] \quad (4.7)$$

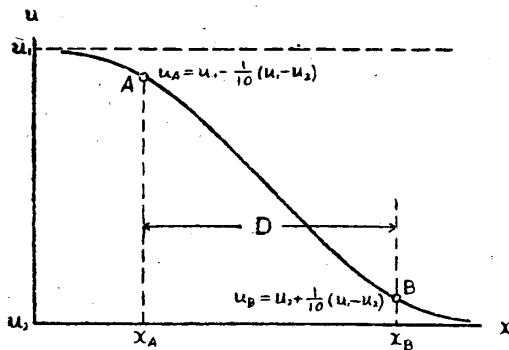
を得. (4.7) と (4.5) は κ 倍になれる点以外全く同形なり.

§5. 衝撃波の幅.

衝撃波の内部に於ける状態変数の変化の状況は, 粘性及熱伝導を考慮に入れたる場合 (4.7) を以て與へられ, §2 に於て計算したる如く, 數秒の中に壓力勾配が無限大になると云ふが如き結果は生ぜぬ. 以下實際に數値を代入し, その幅を求めんとす.

(4.7) 式を圖示せば第 7 圖の如し.

(4.7) に依れば衝撃波の幅は正確には無限大なる筈なれども, 變化の急激なる範圍は比較的小なるを以て, 衝撃波の幅として變化の 80% の行はるゝ厚さを以て定義す⁸⁾. 即ち圖中 A, B 點に於て



第 7 圖 衝撃波内部の速度分布

$$\left. \begin{aligned} u_A &= u_1 - \frac{1}{10}(u_1 - u_2) \\ u_B &= u_2 + \frac{1}{10}(u_1 - u_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

を取り, その間の長さ D を衝撃波の幅とす. (5.1) を (4.7) に代入し

$$x_A = \frac{8\kappa\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{1}{u_1-u_2} \log_e \left[\frac{\left\{ \frac{1}{10}(u_2-u_1) \right\}^{u_1}}{\left\{ \frac{9}{10}(u_1-u_2) \right\}^{u_2}} \right]$$

$$x_B = \frac{8\kappa\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{1}{u_1 - u_2} \log_e \left. \begin{array}{l} \left\{ \frac{9}{10} (u_2 - u_1) \right\}^{u_1} \\ \left\{ \frac{1}{10} (u_1 - u_2) \right\}^{u_2} \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

$$D = x_B - x_A = \frac{8\kappa\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{u_1 + u_2}{u_1 - u_2} \log_e 9$$

$$= \frac{8\mu\alpha_1}{3(\kappa+1)p_1} \frac{1 + \frac{u_2}{u_1}}{M_1 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)} \log_e 9 \quad (5.3)$$

(3.1b), (3.11), (3.14) より

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}}{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)} = \frac{2 + (\kappa-1) M_1^2}{(\kappa+1) M_1^2} \quad (5.4)$$

(5.3), (5.4) より M_1 が與へられれば, D を計算することを得.

例へば 0°C , 760mm Hg の空氣に於ける値を計算したる結果を第3表に示し, 又この空氣を吸込みつゝあるラバル管内に生じたる衝撃波の幅の計算結果を第4表に示す.

第 3 表

衝撃波の幅

$$p_1 = 1.013 \cdot 10^6 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2} \quad \alpha_1 = 331 \text{ m/sec}$$

$$\mu = 0.1709 \cdot 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}} \quad \kappa = 1.4$$

M_1	p_2/p_1	u_2/u_1	D 10^{-7}cm.
1.01	1.023	0.9836	16580
1.05	1.120	0.9225	3270
1.10	1.245	0.856	1623
1.50	2.623	0.515	288.2
2.00	4.500	0.375	152.4
3.00	10.33	0.259	78.4
5.00	29.00	0.200	41.4
10.00	116.50	0.175	19.7

第 4 表

ラバル管内に生ずる衝撃波の幅

$$p_{\infty} = 1.013 \cdot 10^6 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2} \quad a_{\infty} = 331 \text{ m/sec}$$

$$\mu = 0.1709 \cdot 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}} \quad \kappa = 1.4$$

(p_{∞} , a_{∞} はラバル管の上流の静止點に於ける値なり).

M_1	p_1/p_{∞}	T_1/T_{∞}	a_1/a_{∞}	u_2/u_1	D
1.1	0.4684	0.8052	0.8973	0.856	$3109 \cdot 10^{-7}$
1.5	0.2724	0.6897	0.8305	0.515	879
2.0	0.1278	0.5556	0.7454	0.375	889
3.0	0.0272	0.3571	0.5976	0.259	1720
5.0	0.00189	0.1667	0.4082	0.200	8940
10.0	0.0000236	0.0476	0.2182	0.175	18200

若し衝撃波の幅を變化の 90% の行はるゝ厚さと定義すれば、以上の値の

$$\frac{\log_e 19}{\log_e 9} = \frac{1.27875}{0.95424} = 1.34$$

倍となる。

以上の結果より見るに、衝撃波の幅は $\frac{1}{100}$ mm 乃至 $\frac{1}{1000}$ mm 程度となる。然るに第 1 圖の如き衝撃波を除き、第 2 圖、第 3 圖に示す如きものにありては、幅は理論より遙に大なり。この原因として種々のこと考へらるゝも、衝撃波の後方に於て剝離を生じ、一次元的理論は全面的に成立せざる爲めと考へらる。(第二編参照)

§ 6. 衝撃波の熱力學的考察.

衝撃波の前後に於ける状況をエントロピー s 及エンタルピー i を獨立變數として表はす。(Mollierdiagramm) 衝撃波の前後のみを考ふる時は、粘性、熱傳導を考慮するを要せず。(3.3c) より

$$\left. \begin{aligned} i_1 + \frac{u_1^2}{2} = i_2 + \frac{u_2^2}{2} = F = i_0 \\ \text{一般的には} \quad \frac{u^2}{2} = i_0 - i \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

故に u は i - s 面にては

$$u = \sqrt{2(i_0 - i)} \quad (6.2)$$

となり, i 軸上に自乗の目盛を以て表はさる. (第 8 圖) 今この面上に (3.1b) (3.2b) を描く.

(3.1b) は流れの強さ G 一定の曲線にして, これを Fanno 曲線¹⁾と云ふ. 即ち衝撃波の前後は必ず一本の Fanno 曲線の上にあるを要す. 熱力学の法則より

$$Tds = di - \frac{dp}{\rho} \quad (6.3)$$

(流れてゐる氣體のエントロピー s もこの式にて定義す)

(1.10) より

$$i = C_p T, \quad di = C_p dT \quad (6.4)$$

(3.1a) より

$$\rho u = G = \text{一定}$$

故に

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0 \quad (6.5)$$

(6.1) より

$$u du = -di \quad (6.6)$$

(1.7) より

$$p = \rho RT$$

又は

$$\frac{dp}{\rho} = R \left(dT + T \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (6.7)$$

(6.3) 乃至 (6.7) より

$$ds = \frac{C_v}{i} \left[1 - (\kappa - 1) \frac{i}{u^2} \right] di \quad (6.8)$$

これを積分せば Fanno 曲線を得べし.

$\frac{ds}{di} = 0$ を求むれば

$$u^2 = (\kappa - 1)i = \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa + 1} i_0 = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{p_0}{\rho_0} = a^{*2} \quad (6.9)$$

((3.10) 参照)

即ち $u < a^*$ (音速以下の流れ) $\left(\frac{di}{ds}\right)_{\text{Fanno}} < 0$

$u > a^*$ (音速以上の流れ) $\left(\frac{di}{ds}\right)_{\text{Fanno}} > 0$

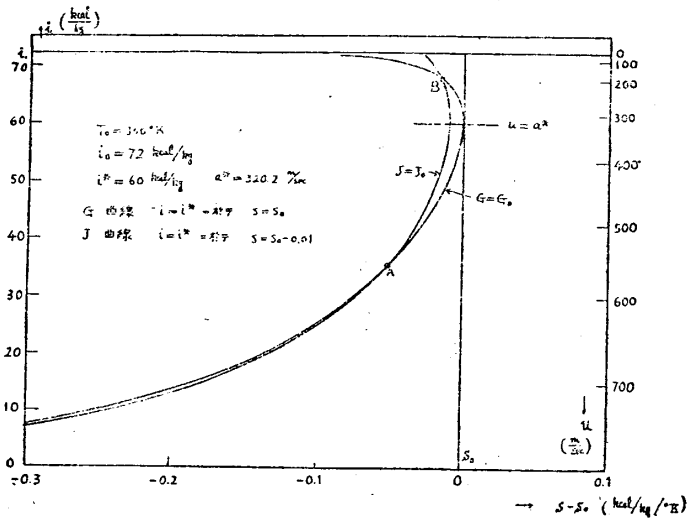
$u = a^*$ $\left(\frac{di}{ds}\right)_{\text{Fanno}} = \infty$

故に第 8 圖の如く $u = a^*$ にてエントロピー最大の曲線となる。(Fanno 曲線の詳細なる形に就ては附録第 2 参照).

此處に注意を要するは、(6.6) は粘性、熱傳導等を考慮せる時は成立せざる式なれば、Fanno 曲線は衝撃波の前後が一本の曲線上にあることを示すのみにして、衝撃波の内部に於ては、現象がこの曲線に沿ひて進行するを意味するものに非ず。

次に運動量の強さ J 一定なる曲線を描く。(J 曲線) (3.2b) に示

す如く衝撃波の前後の状況、又この曲線上にあらざるべからず。



第 8 圖 G 曲線 (Fanno 曲線) 及 J 曲線

$$Tds = di - \frac{dp}{\rho} \quad (6.3)$$

$$C_p T = i \quad C_p dT = di \quad (6.4)$$

$$u du = -di \quad (6.6)$$

$$\frac{dp}{\rho} = R \left(dT + T \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (6.7)$$

$$p + \rho u^2 = J = \text{一定}$$

故に
$$dp + 2\rho u du + u^2 d\rho = 0 \quad (6.10)$$

以上の五式より

$$ds = \frac{C_p}{i} \frac{u^2 - (\kappa - 1)i}{(\kappa - 1)i + \kappa u^2} di \quad (6.11)$$

又は
$$\frac{di}{ds} = \left(\frac{di}{ds} \right)_{\text{Fanno}} + \frac{(\kappa - 1)i^2}{\{u^2 - (\kappa - 1)i\} C_p} \quad (6.12)$$

(6.11) を積分せば求むる曲線を得べし。(附録第 2 参照) 又 (6.11) より $\left(\frac{ds}{di} \right) = 0$ を求むれば

$$u^2 = (\kappa - 1)i = a^{*2} \quad (6.13)$$

即ちこの曲線も同様に $u = a^*$ に於てエントロピー最大となる。

$$u < a^* \quad \frac{di}{ds} < \left(\frac{di}{ds} \right)_{\text{Fanno}} < 0$$

$$u > a^* \quad \frac{di}{ds} > \left(\frac{di}{ds} \right)_{\text{Fanno}} > 0$$

$$u = a^* \quad \frac{di}{ds} = \infty$$

Fanno 曲線との傾きの関係第 8 圖の如し。衝撃波の内部に於ては (6.6), (6.10) 成立せず, この曲線も單に衝撃波の前後の状態がこの上に存在すべきを表はすのみなり。

一方熱力学の第二法則より常にエントロピーは増加すべきを以て, 衝撃波の前方に於ける流れの強さ G 及運動量の強さ J が A 點にて表はさるゝ如き場合は, 衝撃波の後方は A 點を通る兩曲線の交點 B を以て表はさるゝ状態ならざるべからず。即ち衝撃波は常に音速以上の状態より音速以下の状態に起るものにして, 常に壓縮が行はる。(§2 参照)。

之を一層明瞭ならしむる目的を以て, $i-s$ 面の代りに $p-u$ 面を用ひ, 斷熱曲線 ($s = \text{一定}$) を描く。

$$Tds = di - \frac{dp}{\rho} \quad (6.3)$$

$$C_p T = i \quad C_p dT = di \quad (6.4)$$

$$u du = -di \quad (6.6)$$

$$p = \rho RT \quad (6.7)$$

$$ds = 0 \quad (6.14)$$

これ等より

$$\frac{u du}{\frac{u^2}{2} - i_0} = \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \frac{dp}{p} \quad (6.15)$$

これを積分せば $p-u$ 面に於ける断熱曲線を得べし。(附録第 2)

又
$$\left(\frac{dp}{du}\right)_s = -\rho u = -G \quad (6.16)$$

即ちこの曲線の切線の方法は流れの強さ G をあらはす。又この切線と p 軸との交点を求めれば、その値は

$$p + \rho u^2 = J \quad (6.17)$$

即ち運動量の強さをあらはす。以上の結果より $p-u$ 面に多くの断熱曲線を作らば、(第 9 圖) 衝撃波の前後にて (6.16), (6.17) は一定ならざるべからざるを以て、第 8 圖の A, B 點に相當する狀況は第 9 圖に於ても A, B を以て表はさる。

又この曲線の彎曲點を求めれば

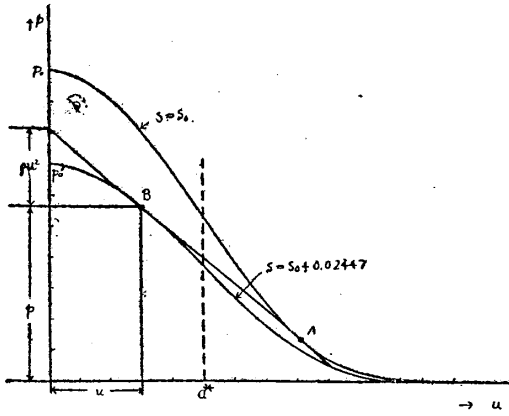
$$\left(\frac{d^2p}{du^2}\right)_s = \rho \left(\frac{u^2}{a^{*2}} - 1\right) \quad (6.18)$$

なるにより

$$u > a^* \quad \text{下方に凸}$$

$$u < a^* \quad \text{上方に凸}$$

$u = a^*$ は彎曲點にして、衝撃波はエントロピー増加の方向に起る故、常に音速以上の所より音速以下の所に生じ、壓縮が行はるゝこと明かなり。又非常に弱い衝撃波は $u = a^*$ 附近に於て起り、断熱線に沿ふことも明かなり。



第 9 圖 断熱曲線

るを以て、衝撃波の内部の状況は Fanno 曲線上にあるを要し、(衝撃波の内部では J は一定ではないが、 G は一定なり) $u > a^*$ なる時エントロピー増加し、 $u < a^*$ なる時エントロピー減少す。

以上屢々注意せし如く、Fanno 曲線も、運動量の保存を示す J 曲線も衝撃波の前後の状況を示すのみにして、衝撃波の内部はこの曲線にては表はすことを得ず。然れども §4 に於て述べたる如く

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

が衝撃波の内部に於ても正當なりとせば、(6.6) は又其の内部に於て成立す

第三章 管中に生ずる衝撃波

§7. 管中の流れ.

太さが場所場所に於て異なる如き管中の流れを一般的に解くことは、問題が三次元となるを以て非常に困難なり。以下は太さの變化の割合が小にして、流れは近似的に軸方向 (x 方向とす) のみを有する場合を取扱ふ。又速度 u 、密度 ρ 等の状態變數は、或る断面全體に就き一定ならざるも、その平均値を取り、 \bar{u} 、 $\bar{\rho}$ 、… とす。(第 10 圖).

定常状態に於て連續方程式

$$\bar{\rho} \bar{u} S = G = \text{一定} \quad (7.1)$$

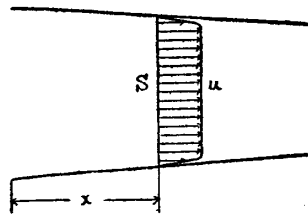
但 S は斷面積

エネルギー保存の式は (3.3) と同様に

$$G \bar{E} + \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \bar{u} S + \frac{G}{2} \bar{u}^2 - \lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} S = GF \quad (7.2a)$$

又は

$$G \left(\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{u}^2}{2} - F \right) = \frac{\lambda}{C_p} S \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\bar{\rho}} + \frac{4}{3} \frac{\mu C_p}{\lambda} \frac{\bar{u}^2}{2} - F \right\} \quad (7.2b)$$



第 10 圖

運動量保存の式は第 11 圖に於て、壁の壓力及粘性抵抗を考慮に入れ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) S \right] + G \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \frac{\partial S}{\partial x} + \text{壁の粘性抵抗の項} = 0 \quad (7.3a)$$

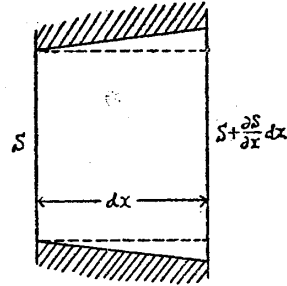
書換へて

$$S \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + G \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \text{壁の粘性抵抗の項} = 0 \quad (7.3b)$$

今太さの次第に變化する一本の流管を考ふる時は、(7.3b) に於て壁に依る粘性抵抗の項は省略せらるゝ故

$$S \frac{\partial}{\partial x} \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + G \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (7.3c)$$

以下本章に於ては \bar{u} , $\bar{\rho}$ 等の上の棒を便宜上省略す。



第 11 圖

§ 8. 衝撃波の前後に於ける状態.

太さの變化する管中に衝撃波の生じたる場合に就き研究せんとす。衝撃波の前後の二點を考へ、こゝには衝撃波の影響は殆ど及ばぬものとす。又斷面積の變化に伴ふ速度、溫度等の變化は衝撃波の内部のものに比し無視し得る程度に小なりとす。即ち

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

然らば (7.1), (7.2a) より

$$\rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 = G \quad (8.1)$$

$$G E_1 + p_1 u_1 S_1 + \frac{G}{2} u_1^2 = G E_2 + p_2 u_2 S_2 + \frac{G}{2} u_2^2 = G F \quad (8.2a)$$

理想氣體に於ては (8.2a) は (8.1) を用ひて

$$\left. \begin{aligned} i_1 + \frac{u_1^2}{2} &= i_2 + \frac{u_2^2}{2} = F \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} &= \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} = F \end{aligned} \right\} \quad (8.2b)$$

(7.3c) を積分する際, S は x の函数なるも, S の變化を小なりとし, 近似的に一定とし, $\frac{S_1+S_2}{2}$ に等しとす. 然らば

$$\frac{S_1+S_2}{2} p_1 + G u_1 = \frac{S_1+S_2}{2} p_2 + G u_2 = J \quad (8.3)$$

(8.1), (8.2b), (8.3) より §3 に於けると同様に, 種々の關係式を導くことを得べし.

$$\frac{S_2}{S_1} = \sigma \quad (8.4)$$

と置かば (8.1), (8.3) より

$$u_1^2 = \frac{\rho_2 \sigma}{2\rho_1(\rho_2 \sigma - \rho_1)} (1 + \sigma) (p_2 - p_1) \quad (8.5)$$

$$u_2^2 = \frac{\rho_1}{2\rho_2 \sigma (\rho_2 \sigma - \rho_1)} (1 + \sigma) (p_2 - p_1) \quad (8.6)$$

(8.2b), (8.5), (8.6) より

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{4} \frac{\rho_2 \sigma + \rho_1}{\rho_1 \rho_2 \sigma} (1 + \sigma) (p_2 - p_1) \quad (8.7)$$

これ Rankine, Hugoniot の式に相當するものなり. ($\sigma=1$ とせば直に (3.7) となる).

次に衝撃波の進行速度と状態變數の間の關係式を求む. $\frac{p_2}{p_1} = \Pi$ と置かば, (8.3) は

$$\rho_1 u_1 S_1 (u_2 - u_1) = \frac{S_1 + S_2}{2} (p_1 - p_2)$$

或は

$$\frac{u_1 (u_2 - u_1)}{\frac{\kappa p_1}{\rho_1}} = \frac{1 + \sigma}{2\kappa} (1 - \Pi)$$

$$M_1(M_2' - M_1) = \frac{1 + \sigma}{2\kappa}(1 - \Pi)$$

但
$$M_2' = \frac{u_2}{\sqrt{\kappa \frac{p_1}{\rho_1}}}$$

故に
$$M_2' = M_1 - \frac{1 + \sigma}{2\kappa M_1}(\Pi - 1) \tag{8.8}$$

(8.2b) より

$$\frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{M_2'^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{M_2'^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} \Pi \sigma \frac{M_2'}{M_1} \tag{8.9}$$

(8.8) と (8.9) より M_2' を消去す

$$\frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{M_1^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1 + \sigma}{2\kappa M_1^2} (\Pi - 1) \right\}^2 + \frac{\Pi \sigma}{\kappa - 1} \left\{ 1 - \frac{1 + \sigma}{2\kappa M_1^2} (\Pi - 1) \right\} \tag{8.10}$$

これ (3.13) に相当する式にして、管の太さの變化 σ 與へられたる時の $\Pi = \frac{p_2}{p_1}$ と M_1 の關係を示すものなり。

(8.10) は Π に関し二次式なるを以て、 σ 及 M_1 を與へたる時 Π の値を二個得べし。この内一方は斷熱變化に相當するものにして、他は衝撃波に相當するものなることは、總壓の損失を検せば明かなり。(第 12 圖乃至第 15 圖参照)。

衝撃波の前後に於ける總壓の損失は、§ 3 に於けると同様に

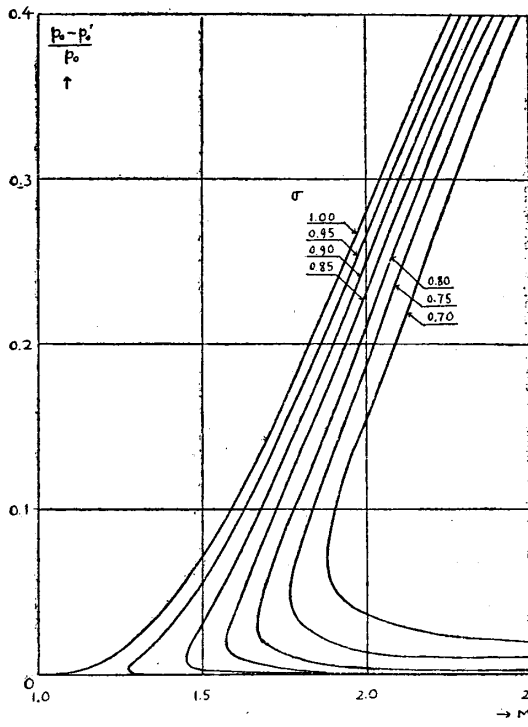
$$\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \tag{8.11}$$

$$\left(\frac{p_0'}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2'^2 = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2'^2 \frac{p_1}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2' \frac{M_1}{\Pi \sigma}$$

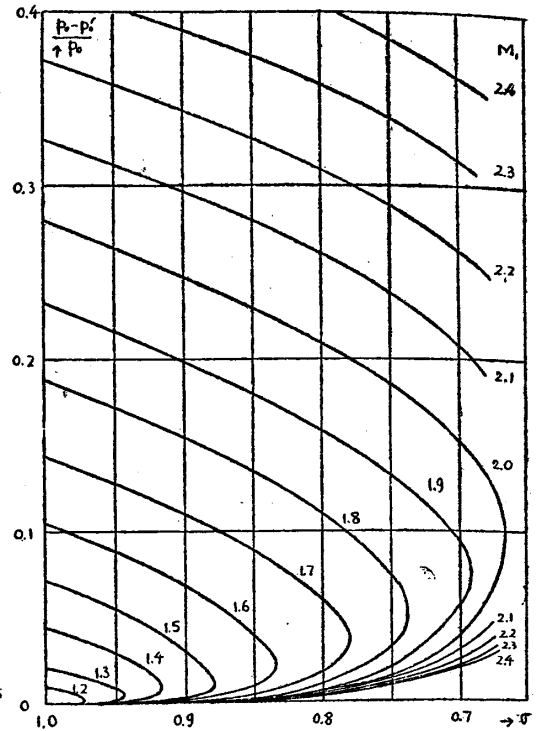
(8.8) より

$$\left(\frac{p_0'}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \frac{M_1^2}{\Pi \sigma} \left\{ 1 - \frac{1 + \sigma}{2\kappa M_1^2} (\Pi - 1) \right\} \tag{8.12}$$

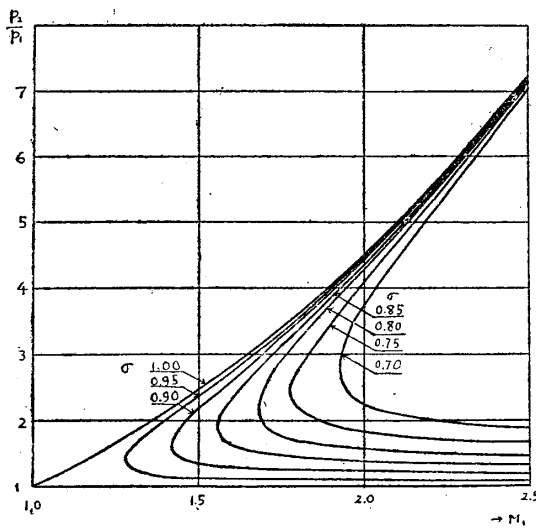
故に σ, M_1 與へられれば (8.10), (8.11), (8.12) より夫々 $\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_0}{p_1}, \frac{p_0'}{p_2}$ を求むるを得。更に $\frac{p_0 - p_0'}{p_0}$ を計算するを得べし。



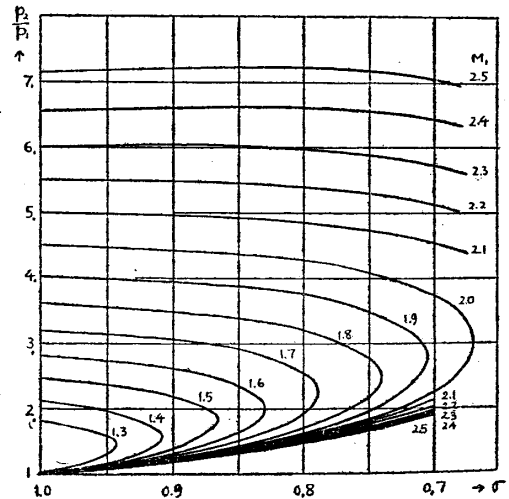
第 12 圖



第 13 圖



第 14 圖



第 15 圖

斷面積變化する際の衝撃波の前後の壓力比

空気に就き計算せる結果を第 12 圖乃至第 15 圖に示す。この圖より明かなる如く、 σ の値が或る値以下の時 II は虚となる。又 σ 0.8 以下にては断熱變化に相當する場合に於ても、總壓の損失生ず。これ等は (8.3) を求むる際に S を一定とし、 $\frac{S_1+S_2}{2}$ と置きたる假定の成立せざるに到る證なり。

§9. 衝撃波の幅.

§5 に於けると同様に $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{3}{4}$ の場合につき計算す。(7.2b) より衝撃波の内部に於ても

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} - F = 0 \quad (9.1)$$

が成立せざるべからず。

又 (7.3b) に於て壁の粘性抵抗の項を無視し、§8 に於けると同様に S の平均値を考へ積分せば

$$\frac{S_1+S_2}{2} \left(p - \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Gu = J$$

或は

$$\frac{S_1+S_2}{2} \frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{S_1+S_2}{2} \frac{G}{S} \frac{p}{\rho} + Gu^2 - Ju \quad (9.2)$$

(9.1), (9.2) より p/ρ を消去し

$$\begin{aligned} \frac{S_1+S_2}{2} \frac{4}{3} \mu u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{G(\kappa+1)}{2\kappa} u^2 - Ju + \frac{\kappa-1}{\kappa} GF \\ &= \frac{G(\kappa+1)}{2\kappa} (u-u_1)(u-u_2) \end{aligned}$$

これを積分せば

$$x = \frac{8\kappa\mu}{3G(\kappa+1)} \frac{S_1+S_2}{2} \frac{1}{u_1-u_2} [u_1 \log_e (u-u_1) - u_2 \log_e (u-u_2)] \quad (9.3)$$

變化の 80% の行はるゝ厚さを衝撃波の幅と定義せば

$$D = \frac{8\kappa\mu}{3(\kappa+1)} \frac{1+\sigma}{2} \frac{a_1}{p_1} \frac{1 + \frac{M_2'}{M_1}}{M_1 \left(1 - \frac{M_2'}{M_1} \right)} \log_e 9 \quad (9.4)$$

この式より σ 及 M_1 の與へられたる場合の幅を計算するを得。空氣に於ける例を第 5 表 に示す。

この結果を見るに、やはり衝撃波の幅は $\frac{1}{1000}$ mm の程度なり。若しこれが眞なりとせば、かくの如き狭き間に流管の斷面積の變化を考ふることは、意味なきが如くなれども、實驗の結果に依れば衝撃波は相當の幅を有するものなれば、本章の計算は強ち無意味にはあらざるべし。

第 5 表

管中の衝撃波の幅

$$p_1 = 1.013 \cdot 10^6 \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}^2} \quad a_1 = 331 \text{ m/sec}$$

$$\mu = 0.1709 \cdot 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm sec}}$$

(I) $\sigma = 0.9$

M_1	$\Pi = \frac{p_2}{p_1}$	M_2'	$\frac{M_2'}{M_1}$	D
1.5	2.183	0.994	0.663	$432.0 \cdot 10^{-7} \text{cm}$
2.0	4.447	0.831	0.415	159.0
2.5	7.203	0.816	0.326	103.7
3.0	10.549	0.840	0.280	78.0
10.0	103.351	3.055	0.306	24.0

(II) $\sigma = 0.8$

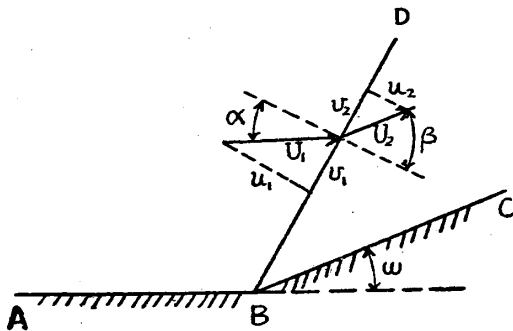
M_1	$\Pi = \frac{p_2}{p_1}$	M_2'	$\frac{M_2'}{M_1}$	D
1.5	—	—	—	$— \cdot 10^{-7} \text{cm}$
2.0	4.274	0.946	0.473	174.2
2.5	7.202	0.905	0.362	106.5
3.0	10.677	0.926	0.309	78.8
10.0	107.001	3.186	0.319	24.1

第四章 斜の衝撃波

§ 10. 衝撃波の前後の状態.

弾丸等の物体が音速以上にて運動する際に生ずる衝撃波は、以上取扱ひし如き進行方向に對し垂直なる衝撃波にあらずして、斜の衝撃波なり。以下此の如き衝撃波に就き研究せんとす。

今簡單の爲めに二次元の場合に就き考ふ。第 16 圖に於て、 A, B に沿ふ音速以上



第 16 圖 斜の衝撃波

上の平行流を、 B 點に於て急に BC 方向に屈折せしむ。然らば BD 方向に斜の衝撃波が生じ、其の前後に於て一樣なる平行流 U_1, U_2 となる。(實驗的事實より)

衝撃波の内部構造に立入ることなく、前後の一樣流中の壓力、密度、速度、溫度等の間の關係を求む。即ち粘性、熱傳導は考慮する必要なし。

U_1 及 U_2 を衝撃波に平行及垂直

なる成分 $u_1, v_1; u_2, v_2$ に分ち、§ 3 に於けると同様に
連続の式

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 = G \tag{10.1}$$

運動量の保存式

$$p_1 + Gu_1 = p_2 + Gu_2 = J \quad (\text{法線方向}) \tag{10.2}$$

$$Gv_1 = Gv_2 \quad (\text{切線方向}) \tag{10.3}$$

エネルギーの保存式

$$i_1 + \frac{U_1^2}{2} = i_2 + \frac{U_2^2}{2} = F \tag{10.4}$$

理想氣體に於ては (10.4) は

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2 + v_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \tag{10.5}$$

p_0, ρ_0 は衝撃波前方の静止點の壓力及密度

(10.3) より

$$v_1 = v_2 \equiv v \quad (10.6)$$

故に (10.5) は

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad (10.7)$$

(10.1), (10.2), (10.7) は直衝撃波の場合の式と全く同形にして, u, p, ρ の間には §3 に述べたる式は總て成立す. 即ち (3.6) より Rankine, Hugoniot の式

$$\frac{1}{\kappa-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{p_1 + p_2}{2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} \quad (10.8)$$

(3.11) より

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)}{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}} \quad (10.9)$$

(3.13) より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} \left(\frac{u_1}{a_1} \right)^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad (10.10)$$

$$a_1^2 = \kappa \frac{p_1}{\rho_1}$$

等が成立す. 又 u_1, u_2, v の間には次の関係あり. (10.5) より

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{u_1^2 + v^2}{2}$$

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{u_2^2 + v^2}{2}$$

(10.1), (10.2) より

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1} \frac{p_1}{\rho_1} + u_2(u_1 - u_2)$$

以上の三式より $\frac{p_2}{\rho_2}, \frac{p_1}{\rho_1}$ を消去し

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v^2 + u_1 u_2$$

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_0}{\rho_0} = a^{*2} \quad \text{なるにより}$$

$$u_1 u_2 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} v^2 = a^{*2} \quad (10.11)$$

これ (3.10) に相当する式にして, $v=0$ と置けば $u_1 u_2 = a^{*2}$ となる.

次に衝撃波と流れの方向の関係式を求め. 第 16 圖より

$$u_1 = U_1 \cos \alpha \quad (10.12)$$

$$\text{一方} \quad \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{U_1}{a_1}\right)^2 \quad (10.13)$$

(10.10) 式と上の二式より

$$\cos^2 \alpha = \frac{\left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1) \right] (\kappa-1)}{4\kappa \left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} = \frac{\left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_1}{p_0} \right] (\kappa-1)}{4\kappa \left[\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \frac{p_1}{p_0}} \quad (10.14)$$

(3.14) (10.9) より

$$\begin{aligned} \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} &= \frac{v/u_2}{v/u_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)}{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}} \\ &= \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_1}{p_0}}{(\kappa+1) \frac{p_1}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_0}} \end{aligned} \quad (10.15)$$

又第 16 圖より

$$\omega = \beta - \alpha \quad (10.16)$$

$$u_2 = U_2 \cos \beta \quad (10.17)$$

衝撃波前方の p_1/p_0 , 即ち (10.13) より U_1/a_1 與へられたる時は, ω を知らば (10.14), (10.15), (10.16) より $\alpha, \beta, p_2/p_0$ を求むる事を得. α, β より (10.15) を用ひ u_1/u_2 を求め, (10.12), (10.17) に依り U_1/U_2 を計算するを得べし.

次に衝撃波に依る總壓の損失を求む. 衝撃波の後方の静止點の壓力, 密度を p_0', ρ_0' とせば

$$\left(\frac{p_0'}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{U_2}{a_2}\right)^2 \quad (10.18)$$

又 (3.19) より

$$\left(\frac{u_2}{a_2}\right)^2 = \frac{1}{2\kappa} \left[(\kappa+1) \frac{p_1}{p_2} + (\kappa-1) \right] \quad (10.19)$$

(10.16), (10.18), (10.19) より

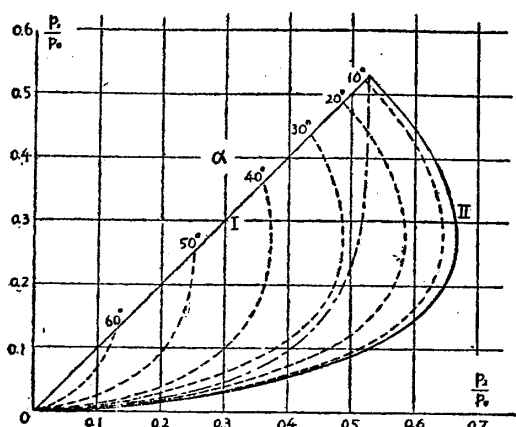
$$\cos^2 \beta = \frac{\left[(\kappa+1) \frac{p_1}{p_2} + (\kappa-1) \right] (\kappa-1)}{4\kappa \left[\left(\frac{p_0'}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]} = \frac{\left[(\kappa+1) \frac{p_1}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_0} \right] (\kappa-1)}{4\kappa \left[\left(\frac{p_0'}{p_0} \frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \frac{p_2}{p_0}} \quad (10.20)$$

この式より $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \beta$ を知らば $\frac{p_0'}{p_0}$ を求むるを得. 依て (10.18) より $\frac{U_2}{a_2}$ を求むる事を得べし. $\alpha = \beta = 0$ の時は直衝撃波に相當し, (10.20) は (3.20) に等しくなる.

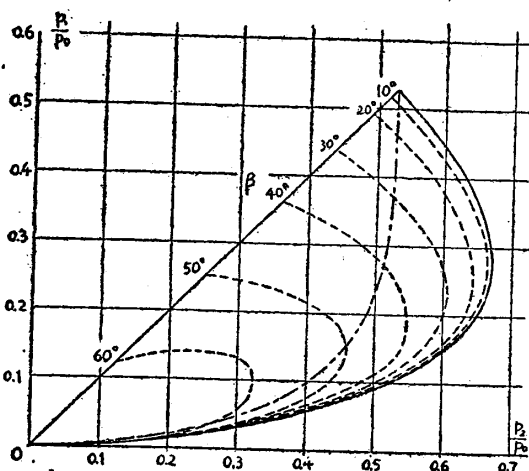
以上を要するに, 衝撃波の前方の $\frac{p_1}{p_0}$ (従て $\frac{U_1}{a_1}$) 及 ω 與へられたる時, 後方の $\frac{p_2}{p_0}, \frac{p_0'}{p_0}$ (従て $\frac{U_2}{a_2}$), $\frac{U_1}{U_2}$ 及衝撃波の流れに對する方向 α, β を求むることを得. 若し前方の ρ_1 も分りたる時は (10.8) より ρ_2 も分り, 後方の總ての狀況を知ることを得.

§ 11. 圖に依る表示.

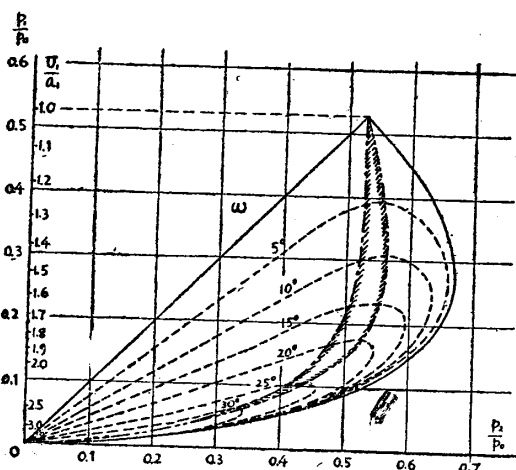
(10.14) より α をパラメーターとして $p_1/p_0, p_2/p_0$ の關係を描かば, 第 17 圖の如し. (10.14) と (10.15) より α を消去し, β をパラメーターとして同じ關係は第 18 圖, (10.14), (10.15), (10.16) より α, β を消去し, ω をパラメーターとせる場合は第 19 圖にて示さる. これ等に於て I の直線は $p_1 = p_2$ に相當し, $\alpha = \beta$ にしてマツハ角を示す. II の曲線は直衝撃波に相當するものにして, $\alpha = \beta = 0$ なり. 即ち (10.14) より



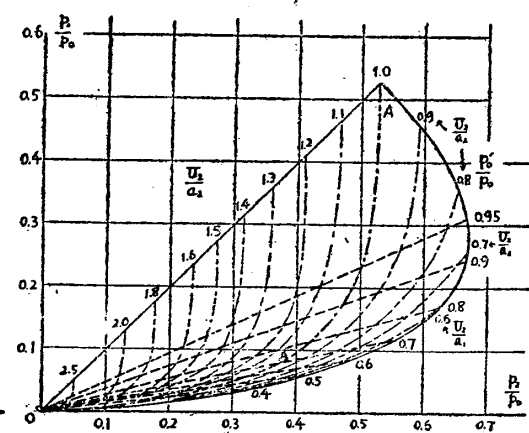
第 17 圖



第 18 圖



第 19 圖



第 20 圖

斜衝撃波の前後の状態變數の間の關係

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{1}{\kappa^2 - 1} \frac{p_1}{p_0} \left[4\kappa \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} - (\kappa + 1)^2 \right] \quad (11.1)$$

なる曲線なり。然して斜の衝撃波はこの I, II にて圍まれたる領域の點にて示す事を得。

これ等の圖より $\frac{p_1}{p_0}$ 及 ω の與へられたる際の $\alpha, \beta, \frac{p_2}{p_0}$ を求むるには

- (1) 19 圖より p_2/p_0 を求む.
- (2) 18 圖より β を求む.
- (3) 17 圖より α を求む.

總壓の損失を示す圖は第 20 圖の如し. 即ち (10.14), (10.15), (10.20) より α, β を消去し, $\frac{p_0'}{p_0}$ をパラメーターとして表はせるものにして, $p_1/p_0, p_2/p_0$ を知れる故 p_0'/p_0 を求むるを得べし. (10.18) に於て

$$\left(\frac{p_0'/p_2}{p_0/p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{U_2}{a_2}\right)^2 \quad (11.2)$$

と書き換へ, $\frac{U_2}{a_2}$ に種々の値を代入し, これを満足する如き點を第 20 圖上に結び鎖線の如くなる. 例へば $\frac{U_2}{a_2}=1$ と置かば

$$\left(\frac{p_0'/p_2}{p_0/p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\kappa+1}{2}$$

に相當し $A-A$ となる. この右方の領域に於ては

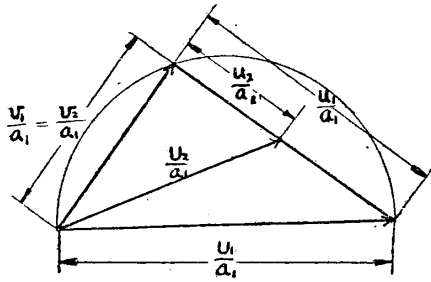
$$\frac{U_2}{a_2} < 1 \quad (\text{衝撃波後方が音速以下})$$

左方にては

$$\frac{U_2}{a_2} > 1 \quad (\text{衝撃波後方が音速以上})$$

なり. 第 17 乃至第 19 圖の鎖線も $\frac{U_2}{a_2}=1$ をあらはす. (第 17 乃至第 20 圖に關しては更に附録第 3 参照).

次に $\frac{U_1}{a_1}, \omega, \alpha$ を知れる時のホドグラフ面を考ふ. $v_1=v_2$ の條件より第 21 圖の如くなり, 幾何學的に U_2/a_1 を求むる事を得べし. 今一定の p_1/p_0 即ち U_1/a_1 に對し, ω を種々變化し第 17 圖より α を求め, ホドグラフ面に U_2/a_1 を描かば, 其の先端は一本の曲線を描く. これを衝撃波曲線¹⁾ (Stosspolare) と云ふ. 各 U_1/a_1 に對し一本づゝ存在し, ω を與へたる時 α を求むる點に於ては第 19, 17 圖二枚と同様なるも, この圖に於ては U_2, u_2, β 等も一見して直に知れることを得. (第 22 圖に於ては a_1, U_1 を別個に與へたるが如くなるも, 實は U_1/a_1 のみ問題にして, a_1 の値に依りては單に圖は相似的に大小するのみなり.) 第 22 圖に於て



第 21 圖 斜衝撃波のホドグラフ面

A 點は直衝撃波にして、第 17 圖の II 曲線上の點に相當し、B 點は $U_1=U_2$ にして I 曲線上の點をあらはす。然してその切線と OB は $\frac{U_1}{a_1}$ に對するマツハ角 α_m の餘角をなす。第 22 圖に於て圓 ODB 上に $BF=a_1$ なる如く F を取り、 F より OB に垂線を下し、 BD との交點を E とす。然らば

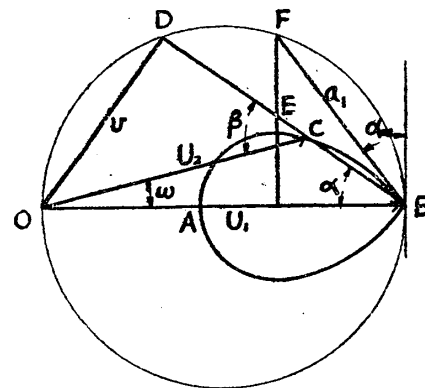
$$\angle EFB = \angle FDB$$

なるにより $\triangle FDB$ と $\triangle FEB$ は相似形にして

$$a_1^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BD} \quad (11.3)$$

又 (10.1), (10.2), (10.7) より

$$a_1^2 = u_1^2 - \frac{\kappa+1}{2} u_1(u_1-u_2) \quad (11.4)$$



第 22 圖 衝撃波曲線

(11.3), (11.4) より

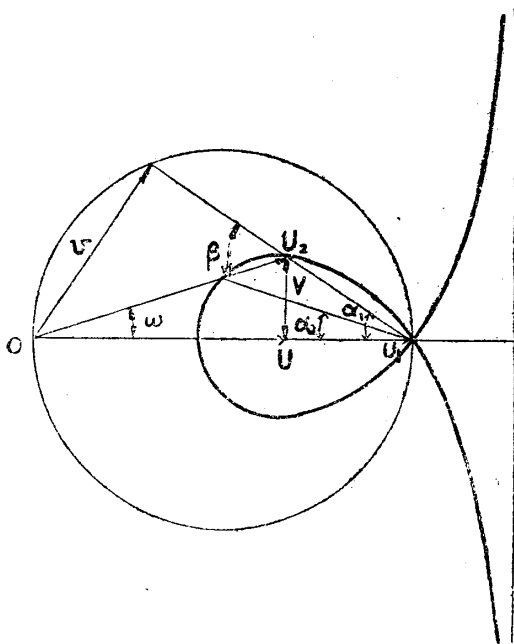
$$\overline{BE} = u_1 - \frac{\kappa+1}{2} (u_1 - u_2)$$

$$u_1 - u_2 = \frac{2}{\kappa+1} \overline{DE} = \overline{BC}$$

$$(11.5)$$

即ち此の如き條件を満足する C 點の軌跡は圓型三次曲線¹³⁾* なり。

解析的に求むるには (11.4) を計算せば可なり。第 23 圖に於て、 U_2 を U_1 と平行及垂直な成分に



第 23 圖 圓型三次曲線

* Busemann はこれを allgemeine Strophoid と稱す。

分ち夫々 U, V とす. 然らば

$$\left. \begin{aligned} U_1 \cos \alpha &= u_1 \\ U \cos \alpha - V \sin \alpha &= u_2 \\ v &= U_1 \sin \alpha \\ \tan \alpha &= \frac{V}{U_1 - U} \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

これ等より

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{(U_1 - U)^2}{(U_1 - U)^2 + V^2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{V^2}{(U_1 - U)^2 + V^2} \\ \frac{u_2}{u_1} &= \frac{U(U_1 - U) - V^2}{U_1(U_1 - U)} \\ \frac{v}{u_1} &= \frac{V}{U_1 - U} \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

(11.4), (11.7) より

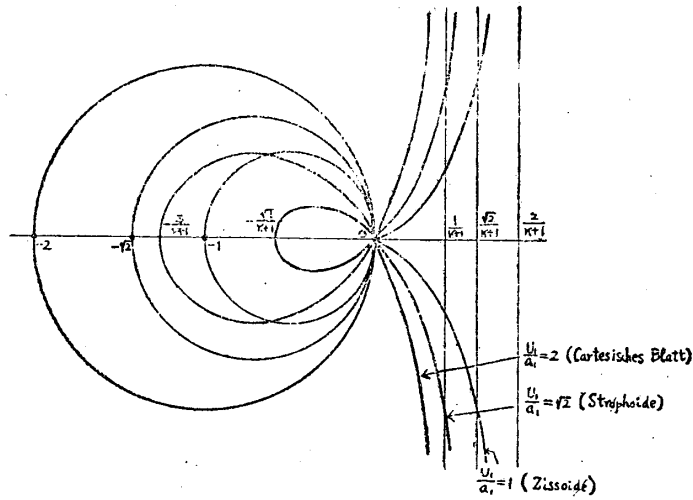
$$\left(\frac{V}{a_1} \right)^2 = \left(\frac{U}{a_1} - \frac{U_1}{a_1} \right)^2 \frac{\frac{U}{a_1} - \frac{2}{\kappa+1} \frac{U_1}{a_1} \left[\left(\frac{a_1}{U_1} \right)^2 + \frac{\kappa-1}{2} \right]}{-\frac{U}{a_1} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{U_1}{a_1} \left[\left(\frac{a_1}{U_1} \right)^2 + \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right]} \quad (11.8)$$

即ち $\frac{U}{a_1} = \frac{U_1}{a_1}$ 及 $\frac{U}{a_1} = \frac{2}{\kappa+1} \frac{U_1}{a_1} \left[\left(\frac{a_1}{U_1} \right)^2 + \frac{\kappa-1}{2} \right]$ に於て $V/a_1 = 0$

にして, 然も前者は二重点なり. 又

$$\frac{U}{a_1} = \frac{2}{\kappa+1} \frac{U_1}{a_1} \left[\left(\frac{a_1}{U_1} \right)^2 + \frac{\kappa-1}{2} + 1 \right]$$

に V 方向に平行なる漸近線を有す¹⁾. (第 23 圖参照).



第 24 圖 種々の圓型三次曲線

然れども $\frac{U}{a_1} > \frac{U_1}{a_1}$ なる部分は無意味なり.

$$\text{今 } \left. \begin{aligned} \frac{U}{a_1} &\rightarrow \frac{U}{a_1} + \frac{U_1}{a_1} \\ \frac{V}{a_1} &\rightarrow \sqrt{3} \frac{V}{a_1} \end{aligned} \right\}$$

なる坐標轉換を行はゞ (11.8) は

$$3\left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{U}{a_1}\right)^2 \frac{\frac{U}{a_1} - \frac{2}{\kappa+1} \left[\left(\frac{a_1}{U_1}\right)^2 - 1 \right] \frac{U_1}{a_1}}{-\frac{U}{a_1} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{a_1}{U_1}} \quad (11.9)$$

此の式に於て特別なる場合を考ふ.

(1) $\frac{U_1}{a_1} = 1$ ならば

$$3\left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{U}{a_1}\right)^2 \frac{1}{-\frac{U}{a_1} + \frac{2}{\kappa+1}} \quad (\text{Zissoide})$$

$\frac{U}{a_1} = 0$ (三重點) に於て $\frac{V}{a_1} = 0$ にして

$\frac{U}{a_1} = \frac{2}{\kappa+1}$ に漸近線を有す.

(2) $\frac{U_1}{a_1} = \sqrt{2}$ ならば

$$3\left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{U}{a_1}\right)^2 \frac{\frac{U}{a_1} + \frac{\sqrt{2}}{\kappa+1}}{-\frac{U}{a_1} + \frac{\sqrt{2}}{\kappa+1}} \quad (\text{Strophoid})$$

$\frac{U}{a_1} = 0$ (二重点), $\frac{U}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{\kappa+1}$ に於て $\frac{V}{a_1} = 0$ にして

$\frac{U}{a_1} = \frac{\sqrt{2}}{\kappa+1}$ に漸近線を有す.

(3) $\frac{U_1}{a_1} = 2$

$$3\left(\frac{V}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{U}{a_1}\right)^2 \frac{\frac{U}{a_1} + \frac{3}{\kappa+1}}{-\frac{U}{a_1} + \frac{1}{\kappa+1}}$$

$\frac{U}{a_1} = 0$ (二重点), $\frac{U}{a_1} = -\frac{3}{\kappa+1}$ に於て $\frac{V}{a_1} = 0$ にして

$\frac{U}{a_1} = \frac{1}{\kappa+1}$ に漸近線有り.

之は更に

$$\frac{U}{a_1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (X+Y)$$

$$\frac{V}{a_1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (X-Y)$$

なる坐標轉換を行はゞ, 次の如くなり正葉線 (Cartesisches Blatt) なることを知る.

$$X^3 + Y^3 = -\frac{3\sqrt{2}}{\kappa+1} XY$$

(4) $\frac{U_1}{a_1} = \infty$

$$\left(\frac{U}{a_1}\right)^2 = 0 \quad \text{即ち原点を通る二本の直線となる.}$$

以上を第 24 圖に示す.

一般には p_0, ρ_0 が與へられある場合多きを以て, a^* を知れるものとして曲線を描くを便とす. (11.7), (10.11) より

$$\left(\frac{V}{a^*}\right)^2 = \left(\frac{U}{a^*} - \frac{U_1}{a^*}\right)^2 \frac{\frac{U_1}{a^*} \frac{U}{a^*} - 1}{\left[1 + \frac{2}{\kappa+1} \left(\frac{U_1}{a^*}\right)^2\right] - \frac{U}{a^*} \frac{U_1}{a^*}} \quad (11.10)$$

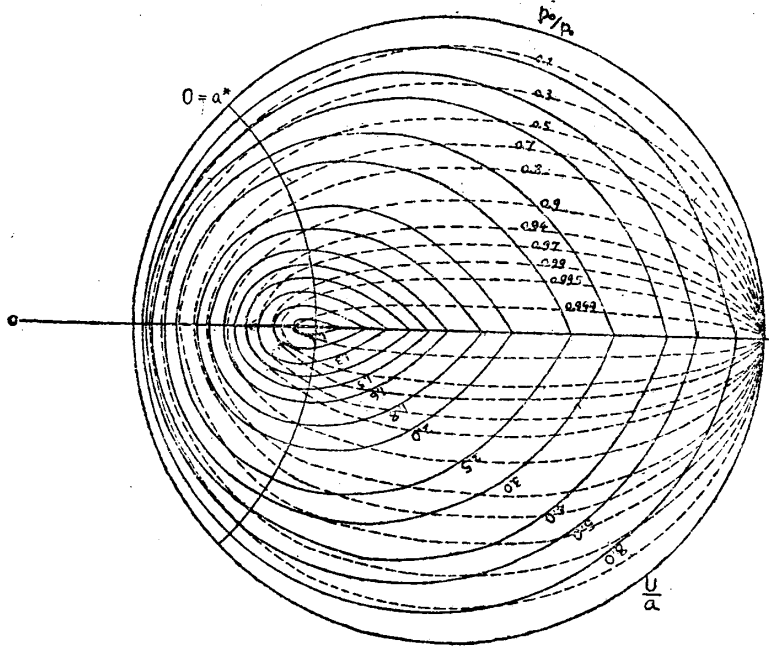
即ち $\frac{U}{a^*} = \frac{a^*}{U_1}, \frac{U}{a^*} = \frac{U_1}{a^*}$ (二重点) に於て $\frac{V}{a^*} = 0$ にして

$$\frac{U}{a^*} = \frac{a^*}{U_1} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{U_1}{a^*} \text{ に漸近線あり.}$$

一方 (10.5) より

$$\left(\frac{U}{a^*}\right)_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} = 2.449 \quad (11.11)$$

にして $\frac{U}{a_1}$ の如く ∞ となることなし. この結果を第 25 圖に示す. 圖中點線は $p_0'/p_0 = \text{一定}$ の曲線にして, (10.13), (10.14), (10.15), (10.20) より計算することを得べし. (詳細は附録第 4 参照).



第 25 圖 衝撃波曲線及總壓損失曲線

ここに注意すべきは第19圖及第23圖のいづれよりも明なる如く、或る一定の $\frac{U_1}{a_1}$ 或は p_1/p_0 に對し、 ω を與へたる時二組の場合を得。(第19圖に於ては例へば $p_1/p_0=0.2$ の時 $\omega=10^\circ$ ならば p_2/p_0 として、 -0.34 及 0.63 を得。隨てこれに相當する二組の α, β 其他を得べし。又23圖に於ては例へば α_1, α_2 の如し。) これは即ち第16圖の如き流れに二組の衝撃波の生ずることとなり、一見奇妙に思はる。然れども實際にはかくの如き流れには α の大なる方のみ存在し、 α の小なる方は生ぜず。但し α の小なる方の解に相當する如き流れも存在し得るものにして、例へば先端鈍なる物體の前方に生じたる曲りたる衝撃波は、(第1圖参照) α の小なる解に相當せる値を有す。第16圖に示す如き流れにては、第19圖に於て、 ω 一定曲線の極大値より左方のみ存在し右方は存在せず。故に隈を附せる部分にては、第16圖の如き流れにて $\frac{U_2}{a_2} < 1$ なる場合を表はす。これ以外にては、常に衝撃波の前後共音速以上の流れなり。

§12. 熱力學的考察.

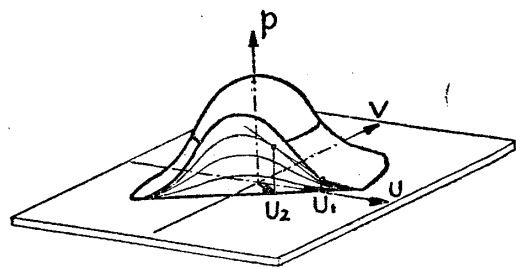
§6 に述べたる如く直衝撃波に於ては、 $p, \frac{U}{a^*}$ 面にエントロピー一定の曲線を描かば、第9圖の如くなる。今ホドグラフ面に垂直に壓力軸を取り、この空間にエントロピー一定の點を取らば一つの曲面となり、第9圖を p 軸を軸とし廻轉せしめて生ずる廻轉面となる。以下これを p -曲面* と稱す。

種々のエントロピーに相當する p 曲面を作らば、§6 に述べたる如く、 $\frac{U}{a^*}=0$ の時の壓力、即ち曲面と p 軸との交點は、その p -曲面上の狀況の靜止點の壓力 p_0' を示し、 s と p_0' の間には次の關係あり。(附録第2)

$$\log_e \frac{p_0'}{p_0} = -\frac{s-s_0}{R}$$

p_0 は s_0 なる p -曲面の靜止點の壓力

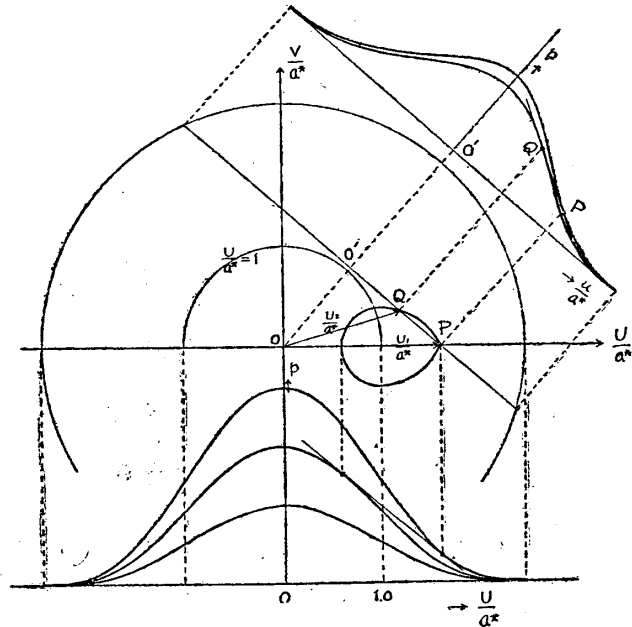
一般に斜の衝撃波はエントロピー s_1 なる p -曲面上の一點 $P(p_1, \frac{U_1}{a_1^*})$ より、内方のエントロピー更に大なる (s_2) 曲面上の一點 $Q(p_2, \frac{U_2}{a_2^*})$ の間に生ず。(第27圖) 然らば (10.1), (10.2), (10.7) より u_1, u_2 の間には §6 と同様の關係存在するを以て、(6.16), (6.17) の條件成立す



第26圖 p 曲面

* p -Berge.

す。今第27圖の p 曲面を PQ を含む垂直面にて切らば、第9圖と同様な断熱曲線を得べし。(第26圖及第27圖) 然して上記の条件より s_1 なる断熱曲線の P に於ける切線が他の断熱曲線と切する點を求むる事に依り Q 及 s_2 を決定するを得。



第27圖 p 曲面と断熱曲線の関係

かくの如く P に於てエントロピー s_1 なる p -曲面に切平面を作り、この切平面上に P 點を通り種々の方向に直線を引き、これの他の p -曲面との切點を求め、之を結ばし即ち衝撃波曲線を得。故に此の曲線は平面曲線にして、第25圖は之を $\frac{U}{a^*}$ 平面へ投影せるものなり。

衝撃波曲線に P 點に於て切する如き直線は、エントロピーの増加なき場合に於て、此の切線を含む垂直面にて p -曲面を切りて生ずる断熱曲線は、 P 點が彎曲點なり。

P 點を或る p -曲面 (エントロピー s_1) 上を $\frac{U}{a^*}$ 軸に沿ひ移動せしむれば、夫々の場所に相當する衝撃波曲線を得。之を結ばし一つの曲面となる。之を衝撃波曲面と云ふ。

(1) 衝撃波曲面を $P\left(\frac{U_1}{a^*}, 0, p_1\right)$ を通り p 曲面に切する平面にて切らば衝撃波曲線となる。

(2) 衝撃波曲面を $\frac{U}{a^*}$ 平面に平行なる平面にて切りたる断面は、衝撃波の後方の壓力一定なる點の軌跡なり。(第 28 圖)

之を求むるには

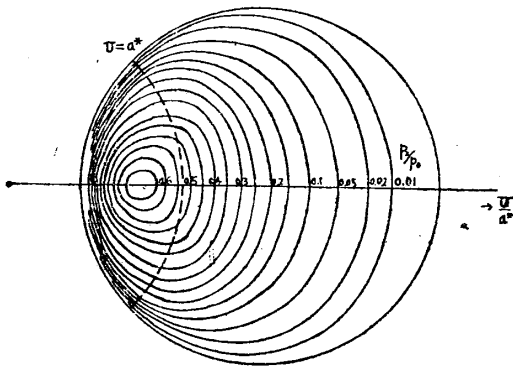
$$\left. \begin{aligned} \frac{U_1}{a^*} &= \frac{U_1}{a_1} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{U_1}{a_1} \right)^2 &= \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

より $\frac{p_1}{p_0}$ を與ふれば $\frac{U_1}{a^*}$ を求むるを得。今或る p_2/p_0 に對し、第 19 圖より種々の p_1/p_0 の場合の ω を求め、第 25 圖中に此の角を取り、 $\frac{U_1}{a^*}$ に相當する衝撃波曲線との交點を求め、此の如き點の軌跡を取らば、即ちこの $\frac{p_2}{p_0}$ に相當する曲線を得。

(3) p -曲面にて切りたる断面は p_0'/p_0 一定の曲線なり。(第 25 圖)

(11.2) より

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_0'}{p_0} / \frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} &= 1 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{U_2}{a^*} \right)^2 \frac{\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1}{\kappa}}}{\frac{p_2}{p_0}} \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_1}{p_0}}{(\kappa+1) \frac{p_1}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_0}} \end{aligned} \quad (12.2)$$



第 28 圖 衝撃波の後方の壓力一定なる曲線

今 $\frac{p_1}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_0}$ を與ふれば、之に相當する衝撃波曲線及第 28 圖の曲線よりその交點として $\frac{U_2}{a^*}$ を得るを以て、これ等を (12.2) に代入せば $\frac{p_0'}{p_0}$ の値を得。かくして等しい p_0'/p_0 を與ふる曲線を求むれば可なり。(附録第 4 参照)

§ 13. 音速以上の流れの風速の測定.

音速以上の流れの風速をピトー管を用ひて測定するに際しては、ピトー管前方に衝撃波生ずるを以て、その示す壓力は一般にはピトー管なき場合のその點の壓力には非ず。故に音速以下の場合の如く簡單なる式にて風速を計算するを得ず。

(1) 靜壓管.

靜壓管として充分細く先端の鋭きものを用ふれば、大略

$$\omega=0 \quad \text{即ち} \quad \alpha=\beta$$

故に
$$p_1=p_2 \quad (13.1)$$

即ち測定せられたる壓力を p_s とせば、これは測定すべき點の靜壓 p_1 なり。

(2) 總壓管.

總壓管は前方鈍なるを以て、衝撃波はその先端を離れ、管の直前にては直衝撃波と考ふる事を得。依て第 22 圖の A 點に相當し

$$\alpha=\beta=0$$

(10.20) より

$$\left(\frac{p'_0}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{(\kappa+1)^2}{4\kappa} + \frac{\kappa^2-1}{4\kappa} \frac{p_1}{p_2} \quad (13.2)$$

一方 (10.10) より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad (13.3)$$

この兩式より p'_0/p_1 と M_1 の關係を求むれば

$$\frac{p'_0}{p_1} = \frac{\kappa+1}{2} M_1^2 \left(\frac{4\kappa-2(\kappa-1)\frac{1}{M_1^2}}{(\kappa+1)^2} \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad (13.4)$$

然るに總壓管により測定せらるゝ壓力 p_t は p'_0 に等しきを以て

$$\frac{p_t}{p_s} = \frac{\kappa+1}{2} M_1^2 \left(\frac{4\kappa-2(\kappa-1)\frac{1}{M_1^2}}{(\kappa+1)^2} \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} \quad (13.5)$$

これを Rayleigh の式と云ふ。この計算値は第 1 表及第 6 圖に示す。(詳細は附録第 1 参照)

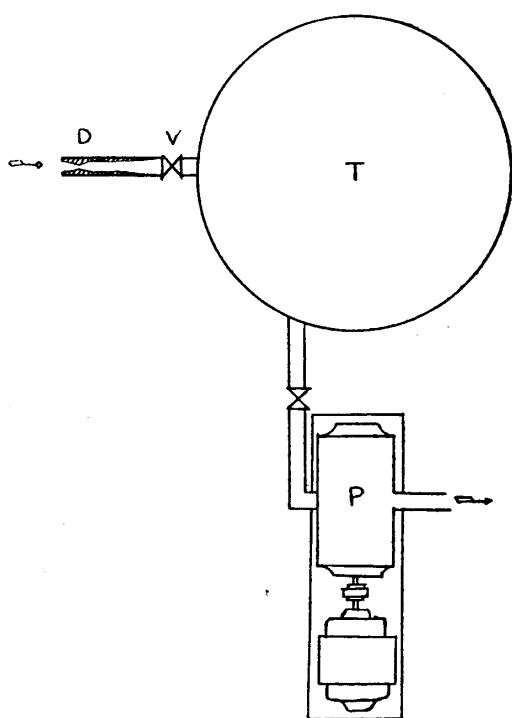
第二編 實 験

、 實驗は種々の衝撃波に就き、壓力の變化を測定し、理論と比較せり。傍 Töpler のシュリーレン法によりその結果を確めたり。

§ 14. 實驗裝置.

(1) 風洞.

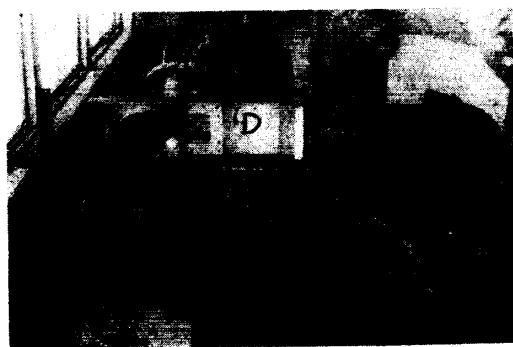
吸込式風洞にして第 29 圖に示す如き構造なり。又第 30 圖, 31 圖にその寫眞を示す。



第 29 圖 實驗裝置略圖



第 30 圖 空氣槽と真空ポンプ



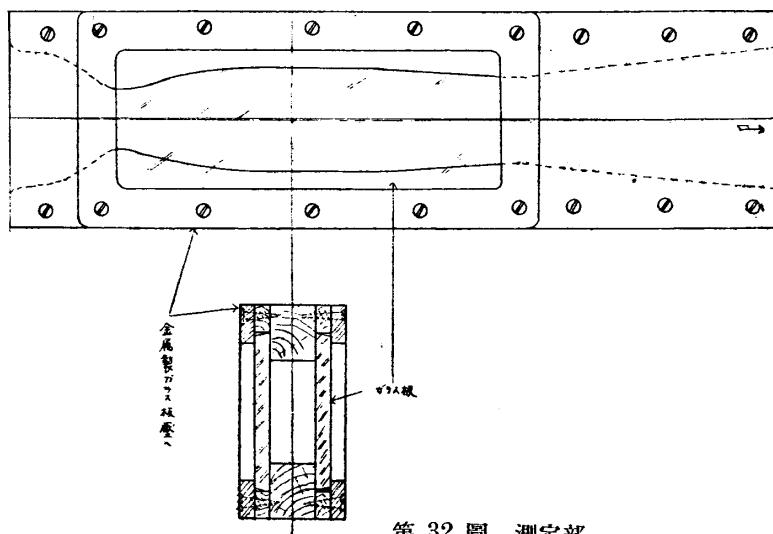
第 31 圖 測定部

P 80 馬力真空ポンプ.

D 測定部にして *V* なる弁を開くことにより氣流を生ず.

T 空氣槽にして流れを定常ならしむ.

測定部 *D* は所謂ラバル管にしてマツハ數 1.5, 1.6, 2.1 の三個を用ひたり。これ等を夫々 No. 1, No. 2, No. 3 と稱す。



第 32 圖 測定部

その構造は第 32 圖に示す如く二次元にして、断面は 30 耗×60 耗の矩形なり。上下は木製の壁にして適當なる曲線形をなし（誤差 $\frac{1}{10}$ 耗程度）、左右はガラス板の平行壁にして、シュリーレン法にて寫眞を撮るに便ならしむ。第 33 圖は之の寫眞を示す。

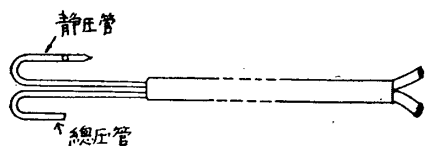


第 33 圖 測定部

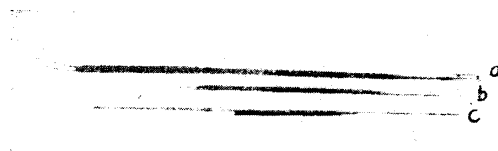
(2) ピトー管.

内部の静壓及總壓を測定する爲め、第 34 圖、第 35 圖に示す如きピトー管を用ふ。外徑 1 耗の管にして静壓管はその先端を充分鋭くし、先端より 5 耗の所に 0.2 耗の孔二個を有す。

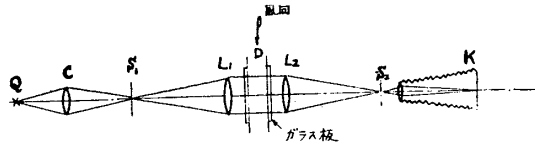
ピトー管は移動装置に依り、ラバル管の吸込口（上流側）より挿入す。壓力は水銀マンノメーターにて測定す。



第 34 圖 ピトー管



第 35 圖 ピトー管



第 36 圖 シュリーレン装置

(3) シュリーレン装置.

光學的研究装置として Töpler のシュリーレン装置*を用ふ。(第 36, 37 圖)

- Q 光源, 1000 W の電球, 又は超高圧水銀燈.
 C 集光レンズ.
 S₁, S₂ スリット.
 L₁, L₂ レンズ. 直径 150 耗, 焦點距離 1250 耗.
 D 風洞.
 K 寫真機.



第 37 圖 シュリーレン装置

シュリーレン寫眞のマツハ角より風速を求むるには, 第 38 圖に於て θ を測定し

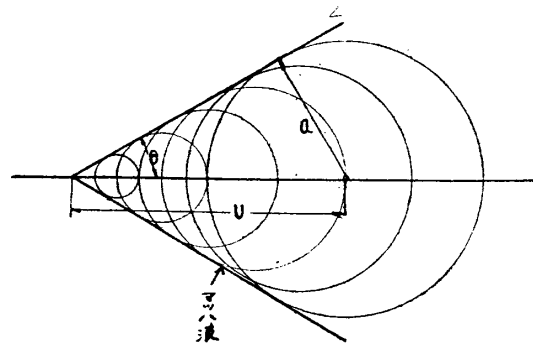
$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{U}{a} \quad (14.1)$$

を計算す.

§ 15. ピトー管の前方に生ずる衝撃波に関する實驗結果.

音速以上の流れの中にピトー管を置き, 静壓管及總壓管の指示を読み, 理論と比較す. 先づ次の如く假定す.

ピトー管の前方には理論と一致する衝撃波生じ, Rayleigh の式 (13.5) は正しきものとす. 即ち静壓管の指



第 38 圖 マツハ波の成立

* H. Schardin: Das Töplersche Schlierenverfahren. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, V. D. I. Bd. 5, 1934.

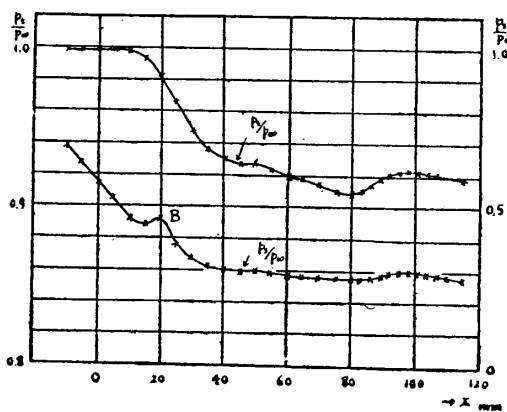
示 p_s は p_1 を與へ、總壓管の前方には $\alpha=\beta=0$ に相當する直衝撃波が生じ、 p_t はこの衝撃波の p_0' を與ふ。 p_s, p_t より (13.5) を用ひ M_1 を計算し、又 (3.16) より p_1/p_0 を求むれば、 p_0 を計算する事を得。

實驗は No. 1, 2, 3 の測定胴に就き、その中心線上(これを x 軸とす)にピトー管を移動して、各點の p_t, p_s を測定せり。今測定胴の前方の靜止點の壓力を p_∞ とす。(本實驗に於ては大氣壓なり) $\frac{p_t}{p_\infty}, \frac{p_s}{p_\infty}$ と x との關係の一例を No. 1. の測定胴に就き示せば、第 39 圖の如し。下方の寫眞はこれに相當するシュリーレン寫眞なり。

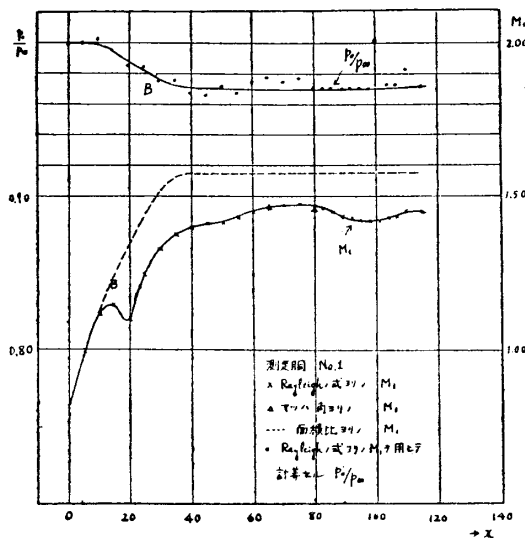
次に Rayleigh の式より M_1 を計算せる結果の例を第 40 圖乃至第 43 圖に示す。同圖には又シュリーレン寫眞のマツハ角 (第 45 圖) 及びラバル管設計上の理論より求めたる風速 M_1 を示す。又 Rayleigh の式より求めたる M_1 より p_0 を計算したる結果も、第 40 圖乃至第 43 圖の上方に併記す。第 44 圖は M_1 と $\frac{p_0 - p_t}{p_0}$ の關係を示す。

之より次の結論を得べし。

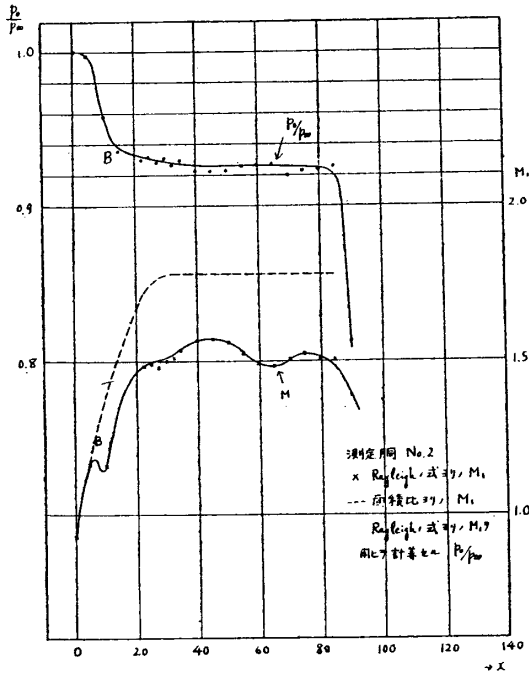
- (1) シュリーレン寫眞及 Rayleigh の式より求めたる風速はよく一致す。
- (2) 理論よりの風速より稍小なる値を得る理由は、喉部に生ずる衝撃波及氣體の粘性に依る。



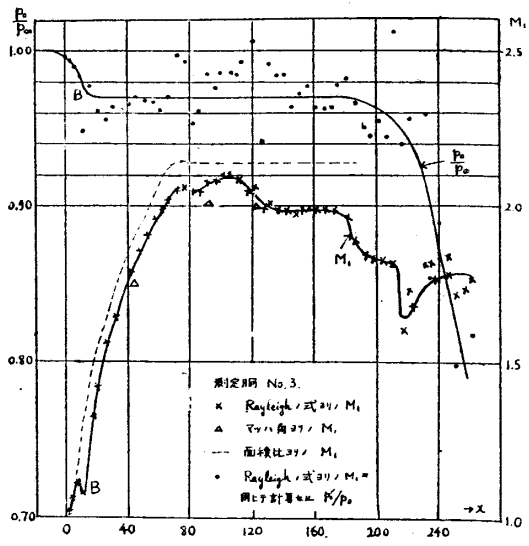
第 39 圖 測定部の靜壓及總壓分布



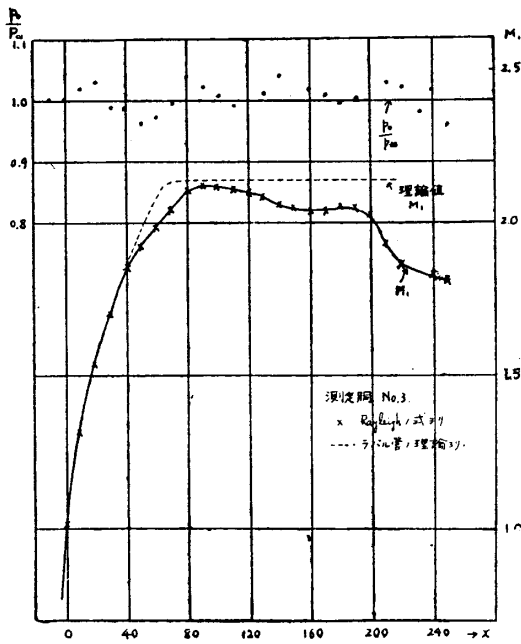
第 40 圖 風速及靜止點壓分布 (測定胴 No. 1)



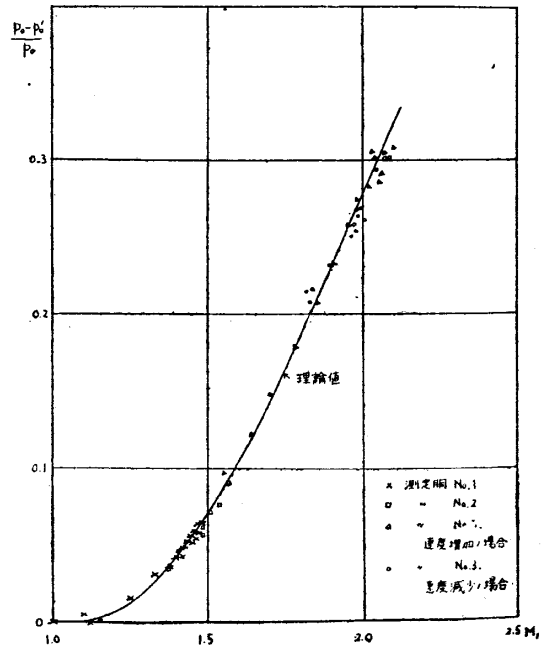
第 41 圖 同上 (測定 No. 2)



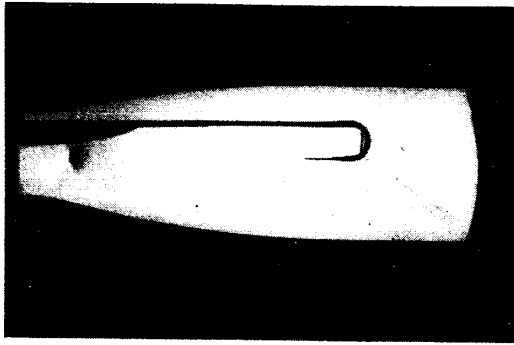
第 42 圖 同上 (測定 No. 3)



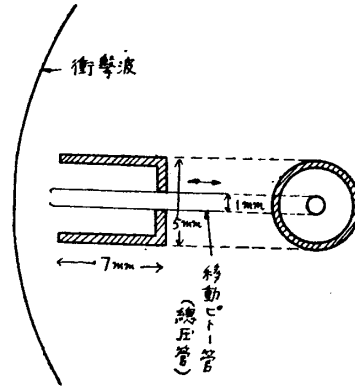
第 43 圖 同上 (測定 No. 3)



第 44 圖 風速とピトー管に依る總壓損失との關係



第 45 圖 マッハ波



第 46 圖 管前方の衝撃波の実験装置

- (3) 喉部に生ずる衝撃波に依る總壓の損失あり。(B 點)
- (4) 喉部の衝撃波以後の p_0 の値は略一定なり。即ち粘性に依る總壓の損失は極めて小なり。
- (5) 第 42 圖及第 43 圖は同様に No. 3 測定胴に関するものなるも、實驗を行ひたる時の湿度に依り喉部の衝撃波を生ぜざることあるを示す。

以上の結論を更に確め、又一方にては次に述ぶる管の中の衝撃波と比較する目的を以て、次の實驗を行ひたり。

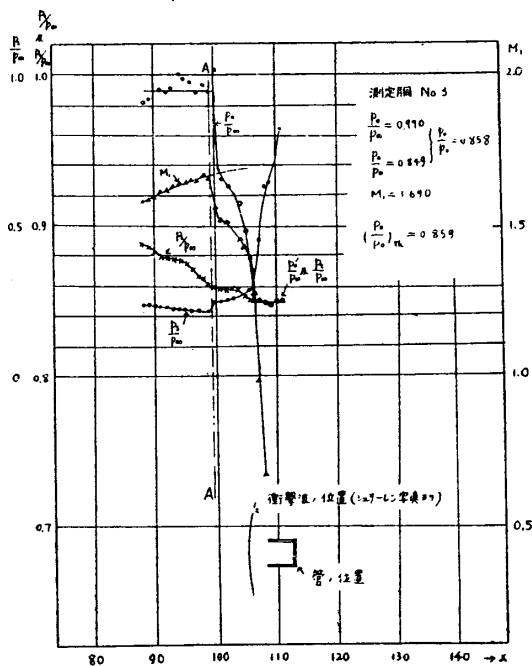
第 46 圖の如き底のある短き管を作り、其の中を更に小ピトー管を移動し得る如くす。之を氣流中に置かば、その前方に總壓管の前方に生ずる衝撃波と等しきものを生ず。この衝撃波の構造を移動小ピトー管にて研究す。氣流の方向を x 軸とせば、 $\frac{p_1}{p_\infty}$, $\frac{p_2}{p_\infty}$ と x の關係は第 47 圖の如し。又 p_0/p_∞ も併記す。

此の圖よりかくの如き衝撃波の後方にては、次節に述ぶるが如き總壓の損失の回復の現象は現はれず、良く理論と一致す。靜壓の曲線にては衝撃波の幅は明瞭ならざるを以て、 p_2/p_1 の値を求むることを得ず。又衝撃波の前方に段階現はるゝも (A.A), 之は移動ピトー管に依り衝撃波が幾分變形せらるゝ爲めなりと考へらる。(§ 17 参照)。

以上を要するに、

(1) ピトー管前方に生ずる衝撃波は理論と良く一致す。故に Rayleigh の式に依り風速を求むることを得。この理論は Tayler, Maccoll の實驗が良く理論に一致する事よりも想像し得べし¹¹⁾。

(2) 音速以上の流れに於ても、粘性に依る總壓の損失極めて小なり。



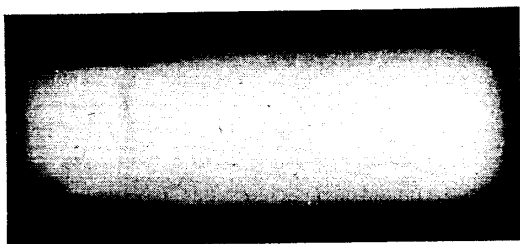
第 47 圖 管前方の衝撃波の壓力分布

§ 16. ラバル管内に生ずる衝撃波に関する實驗結果.

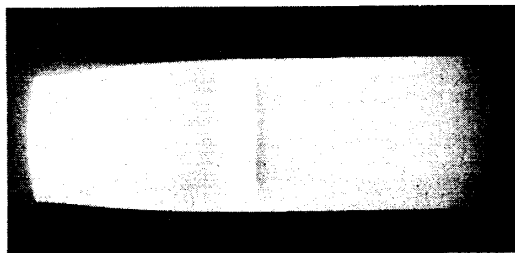
(I) 衝撃波内の壓力變化.

測定筒の後方の弁 V (第 29 圖) に依り後部の壓力を次第に大ならしむれば、終にラバル管内に衝撃波生ずるに到る。これをシュリーレン装置にて撮らば、第 48 圖乃至第 54 圖に示す如くなり、大體直衝撃波と考へて可なる如く思はる。此の如き衝撃波の構造は、寫眞に依りても明なる如く、ピトー管前方或は彈頭に生ずるものとは少々趣を異にす。先づ寫眞より分る事項次の如し。

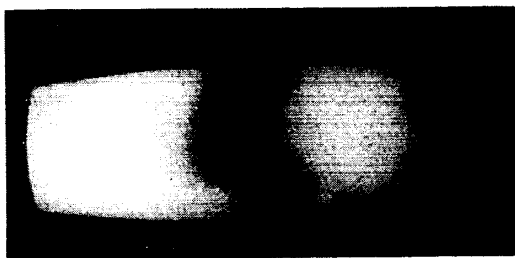
(1) 第 51 圖, 第 53 圖に示す如く衝撃波は二重又は三重に生ずる場合あり。



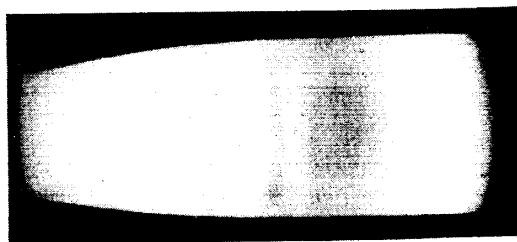
第 48 圖 衝撃波のシュリーレン寫眞



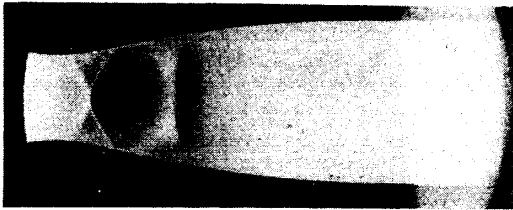
第 49 圖 同上



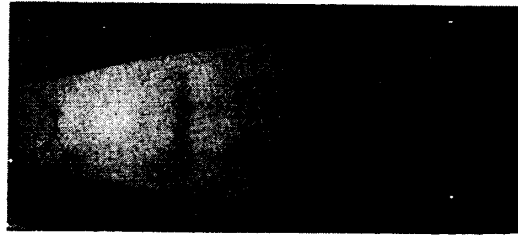
第 50 圖 同上



第 51 圖 同上

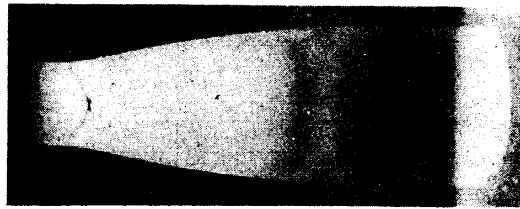


第 52 圖 同上



第 53 圖 同上

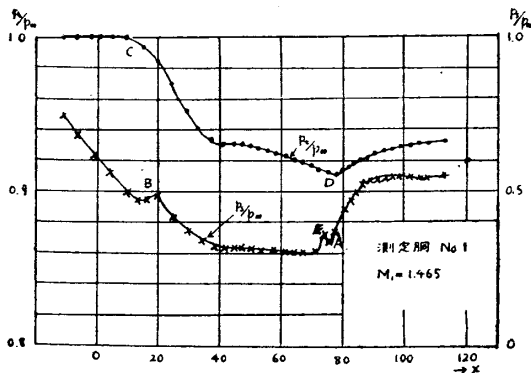
(2) 第 48 圖, 第 50 圖及第 52 圖等より分る如く, 衝撃波は剝離と相関聯して生ず. 第 48 圖, 第 50 圖にては剝離は衝撃波の位置に生じ, 第 52 圖は剝離せる氣流中に衝撃波生じあり.



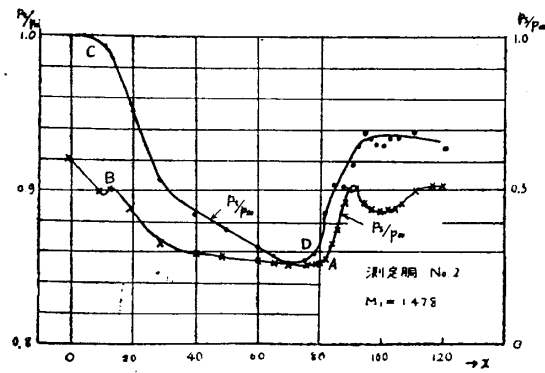
第 54 圖 同上

次に前節に於けると同様に移動ピトー管を用ひて研究す. 第 39 圖と同様に x と p_t/p_∞ , p_s/p_∞ の關係の例を圖示せば第 55 圖乃至第 57 圖の如し. M_1 とは衝撃波直前のマッハ数を示す. これ等の圖より次の事を知る.

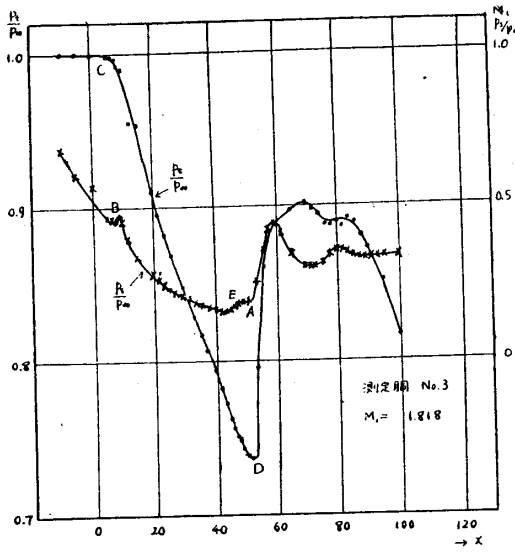
- (1) 静壓の急激に増加する點 (A) は即ち衝撃波の存在を示すものにして, B は喉部の衝撃波を示す.
- (2) 總壓は CD 間に於て次第に減少す. 之ピトー管前方に生じたる衝撃波に依るものにして, 第 39 圖のもの一致す.
- (3) D 點に於て總壓増加す. 即ち總壓の損失回復す.
- (4) 衝撃波の幅は理論より遙に廣し. 之はシュリーレン寫真よりも明かなり.



第 55 圖 衝撃波中の静壓及總壓分布



第 56 圖 同上



第 57 圖 同上

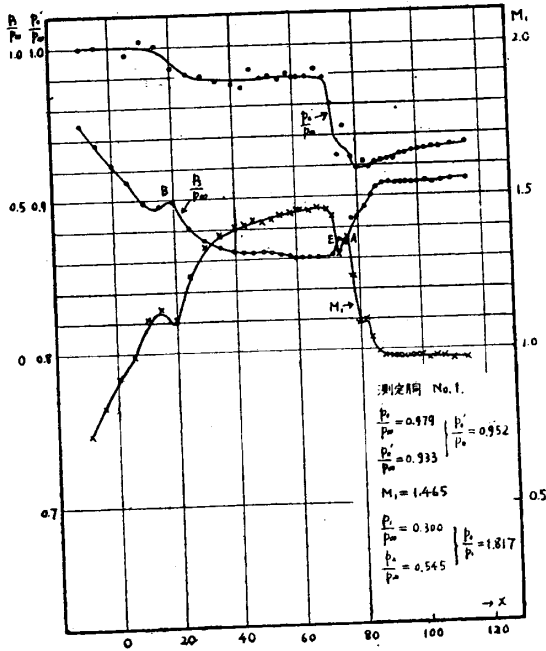
(5) 静圧に急激なる變化の生ずる點は、總壓に於るものとは少々 x 軸上の位置に前後あり。即ち静壓及總壓は同時には變化し始めず。

(6) 静壓の減少し始むる附近に於て段のつくこと多し。(第 55, 57 圖の E 點)

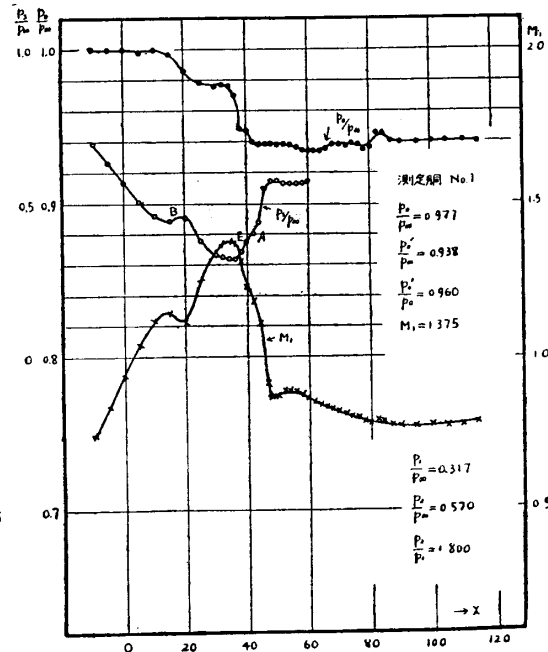
(7) 静壓及總壓の衝撃波前後に於ける壓力比 p_2/p_1 及 p'_0/p_0 は理論と一致せず。

然れども實際に於ては後述する如く、ピトー管を衝撃波内に挿入せば、その影響に依り、衝撃波變形するを以て、本實驗より衝撃波の内部構造を論ずることは不可なり。然れども

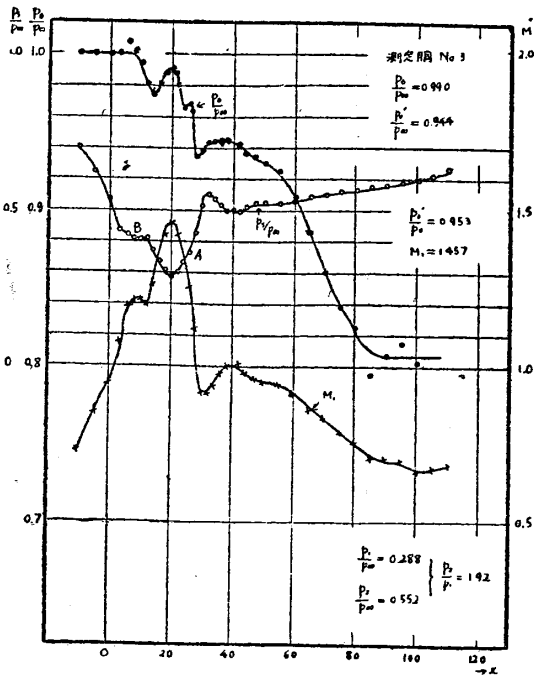
(7) は衝撃波の前後に於ける一様流中の状態の間の關係なれば、ピトー管による變形には無關係にして、(3) と共に直衝撃波の理論にては説明することを得ず。上記の如くして求めたる結果より p_0/p_∞ と x の關係を求めれば第 58 圖乃至第 63 圖



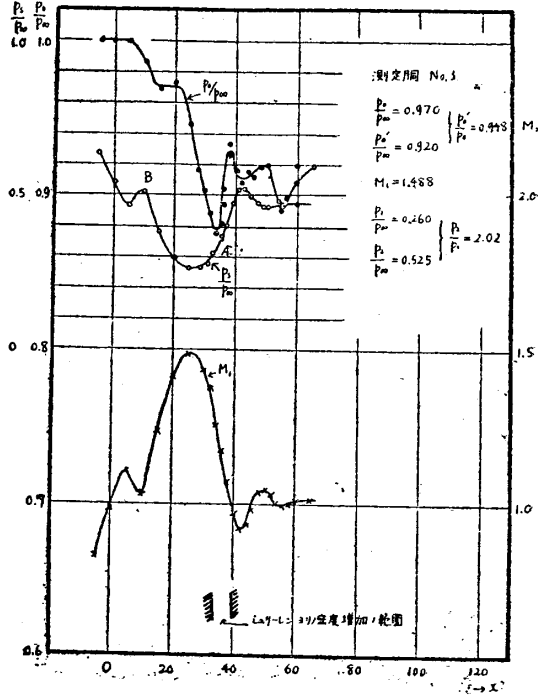
第 58 圖 衝撃波中の風速及静止點壓分布



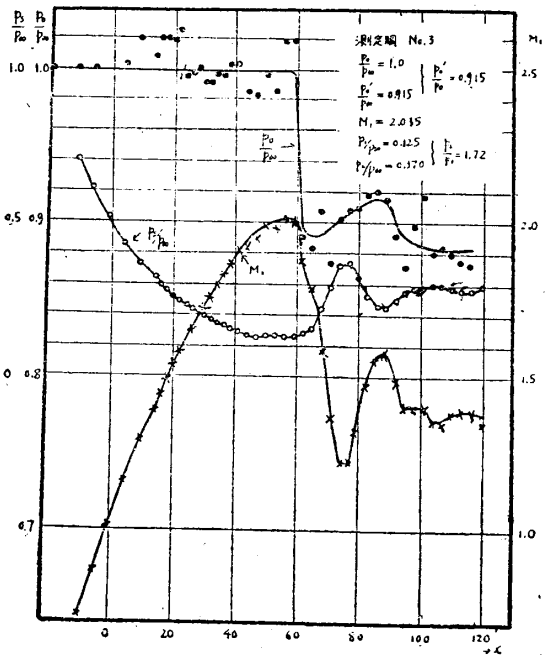
第 59 圖 同上



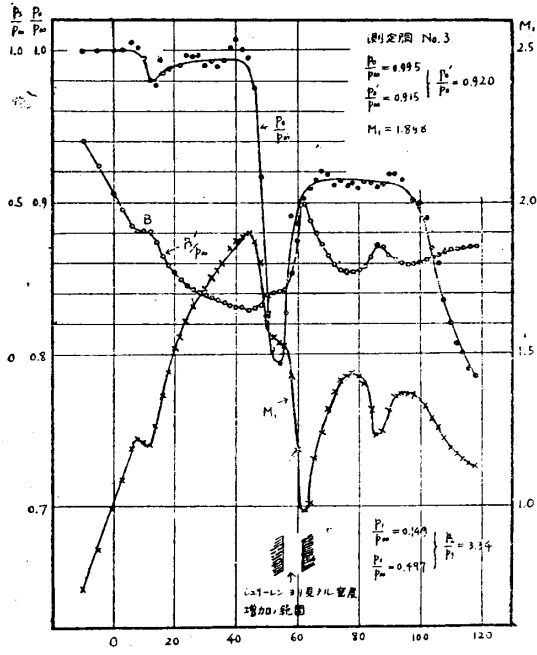
第60圖 同上



第61圖 同上



第62圖 同上



第63圖 同上

に例示するが如し、これ等の圖より次の事項を知る。

(1) p_0 は衝撃波の直後にて非常に降下し、次第に回復する場合多し。(第 58, 63 圖) 又振動する場合もあり。(第 61, 62 圖)

此の原因に就きては明かならざるも、後述する如く剝離に依る一次元性の喪失、及びエネルギーの側方よりの流入等に依るものゝ如し。

(2) 然れども衝撃波の内部構造を論ぜず、その前後のみを問題とする場合は、一定となりたる所の壓力を取れば可なり。

かくして求めたる $\frac{p_0 - p'_0}{p_0}$, $\frac{p_2}{p_1}$ と M_1 との關係を第 64 圖, 第 65 圖に示す。圖中實線は直衝撃波の場合の理論値なり。

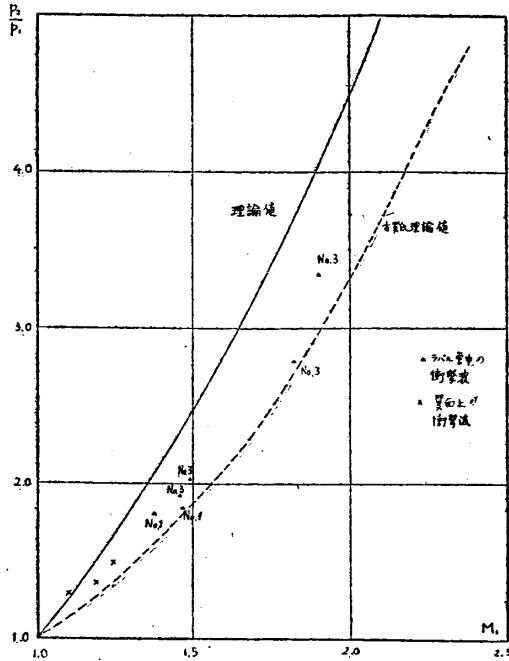
以上の實驗結果よりラバル管内に生ずる衝撃波は、一次元的直衝撃波に非ること明かとなりたり。

第 48 圖, 第 50 圖に示す如く、衝撃波の後方にては剝離をともし、又衝撃波の幅は相當に厚き故、一次元的なる流れとは考ふるを得ず。よつて衝撃波の内部にて流管收縮せるものと考へ、§ 8 の理論結果と比較す。流管の收縮率 $\sigma = \frac{S_2}{S_1}$ は實驗上は不明なるも、 $\Pi = \frac{p_2}{p_1}$ は容易に測定し得る故、第 14 圖を用ひて、實驗結果の Π に相當する σ を求め、更に第 12 圖より $\frac{p_0 - p'_0}{p_0}$ を求め、實驗結果と比較す。その結果を第 6 表及第 65 圖に示す。

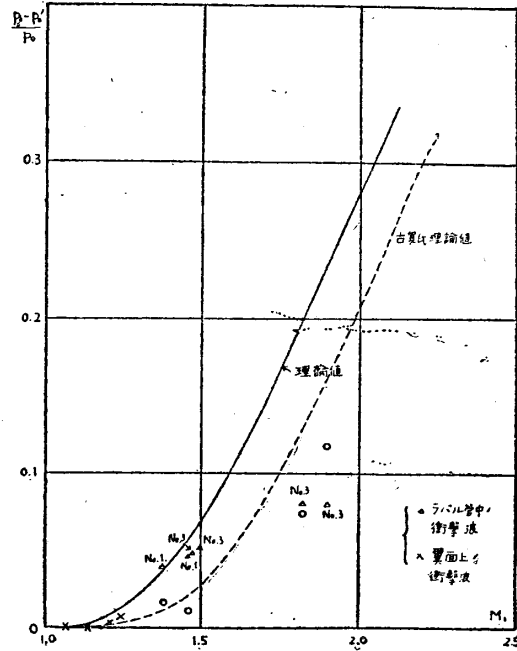
第 6 表

衝撃波前後の壓力變化より求めた斷面積收縮

M_1	$\Pi = \frac{p_2}{p_1}$	$\sigma = \frac{S_2}{S_1}$	$\left(\frac{p_0 - p'_0}{p_0}\right)_{\text{cal.}}$	$\left(\frac{p_0 - p'_0}{p_0}\right)_{\text{mes.}}$
1.375	1.80	0.940	0.017	0.040
1.457	1.92	0.895	0.010	0.047
1.465	1.82	0.890	—	0.048
1.488	2.02	0.880	—	0.052
1.818	2.78	0.740	0.075	0.080
1.898	3.34	0.735	0.118	0.080
2.015	1.72	—	—	0.047



第 64 圖 衝撃波前後の静圧の比と風速の関係

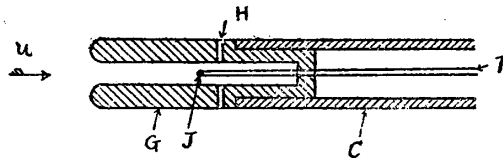


第 65 圖 衝撃波に依る総圧損失と風速の関係

この結果は傾向は一致するも、得られた収縮率 σ はすべて餘りに大にして、§ 8 の理論の適用範圍外に出で、充分ならず。又古賀氏の理論*は静圧はよく一致するも総圧は一致せざることを知る。(第 64, 65 圖)。

(II) 衝撃波内の全エネルギーの測定。

第 66 圖に示す如き溫度計を作る。Franz** の擴散筒の方法に依る溫度計にして、 C は直径 2 耗の金屬管、 G は熱の傳導を防ぎ且電氣の絶縁體なる樹脂ガラスを以て作りたる擴散筒なり。 T は銅-コンスタントンの熱電對にして、 J は其の接點なり。之に依り擴散筒にて減速せられたる流れの溫度を求む。側面の小孔 H より氣體が僅か宛流出することに依り、 G 内に氣體



第 66 圖 溫度計

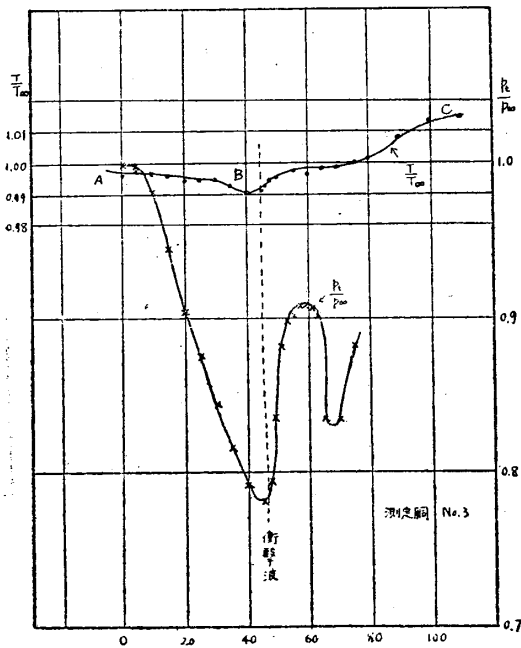
* 古賀豊城：壓縮衝撃波を伴ふ流れに就て。日本航空學會誌 Vol. 8, 昭和十六年, pp. 171-185.

** A. Franz: Jb. Deutch. Luft.-Forschung, 1938, S. 215-218.

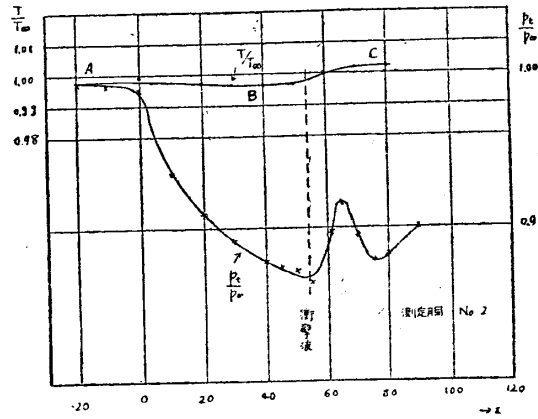
が激む爲めに生ずる誤差を除く。Eckert* に依れば、音速以下に於ては、マッハ数 1 附近までこの温度計は良く激点温度を示す。此の温度計を用ひ、音速以上の流れに就き測定を行はゞ、果して何を示すやを考究せん。

音速以上の場合は、この温度計の前方に衝撃波を生ず。これは全く總壓管の前方に出来るものと同じなれば、§ 13 より良く理論に一致すること明かなり。エネルギーの式は

$$i_1 + \frac{u_1^2}{2} = i_2 + \frac{u_2^2}{2} = i_3 = C_p T_3 \quad (16.1)$$



第 67 圖 温度分布



第 68 圖 同上

但 1, 2 は温度計前方の衝撃波直前及直後の状態を示し、3 は温度計内部の激点の状態なり。但し衝撃波直後より激点までは音速以下なれば、損失なしに断熱的變化が行はるゝと考へて可なり。

依て上記の温度計より求められる T_3 はその氣流の有する全エネルギーを示し居るものと考へらる。

さて、此の温度計を用ひて測定せる結果を第 67 圖、第 68 圖に示す。横軸に x 軸を取り、縦軸に T_3/T_∞ (T_∞ は上流の温度) を取る。同圖には總壓損失の曲線も併記し、衝撃波の位置を示す。この圖より次の事を知る。

* E. Eckert: Temperaturmessung in schnell strömenden Gasen. V. D. I. Bd. 84, 1940.

- (1) 風速の變化に對する T_3/T_∞ の變化は極めて小なり。(AB) 即ち上記(16.1)式は正し。
- (2) 衝撃波内部に於ける T_3/T_∞ の變化は比較的小にして、大略ベルヌイの定理成立す。即ち(4.6), (9.1)は相當正確なり。
- (3) 衝撃波後方に於て全エネルギー増加の傾向あり(圖中 C)。

(III) 衝撃波後方の壓力及全エネルギーの分布。

衝撃波に依る剝離の狀況其他を研究する目的を以て、衝撃波後方に於ける壓力及全エネルギーの分布を測定せり。

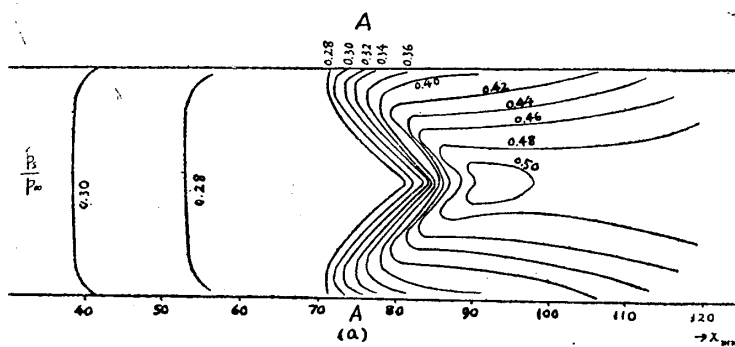
第 69 圖 (a), (b), (c) は測定洞 No. 2 に就き、靜壓、總壓及全エネルギーの分布を示すものにして、夫々 AA 點に於て衝撃波を生じあり。第 70 圖 (a), (b), (c) は同じ衝撃波に關し、第 69 圖とは垂直なる方向に於ける中心面上の分布にして、ガラスの平行壁の方向より見たる圖なり。又第 71 圖は測定洞 No. 1 に關するものなり。以上より次の事項を認む。

(1) 第 70 圖に示す方向にては、衝撃波の後方に弱き剝離を生ずるも、衝撃波は大體直衝撃波なり。

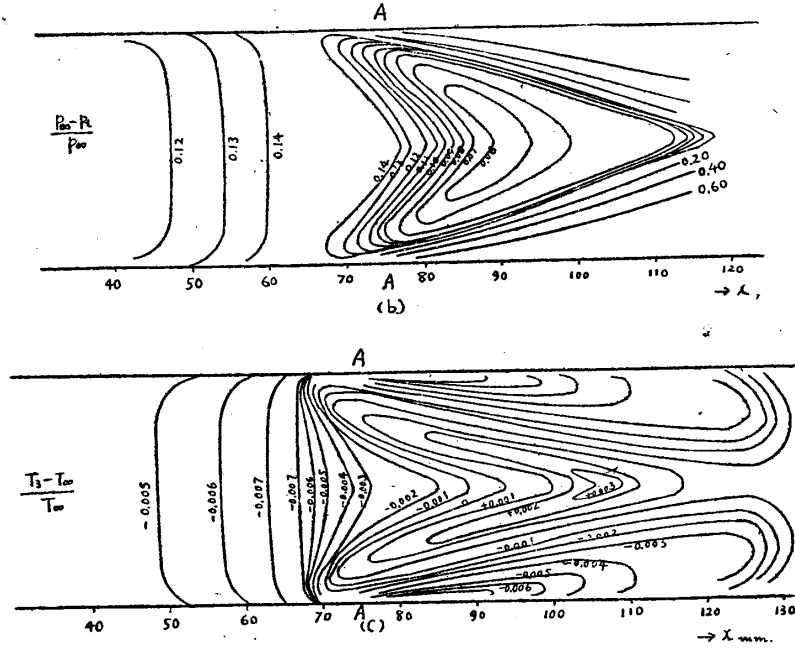
(2) 第 69 圖, 第 71 圖に示す方向の衝撃波後方に於ける剝離は非常に大にして、一次元的直衝撃波と考ふる能はず。

(3) 第 69 圖 (c) よりエネルギーは中央部に向ひ流入するを知る。之は又衝撃波の後方に於て、ガラス板が非常に冷却することよりも想像せらる。

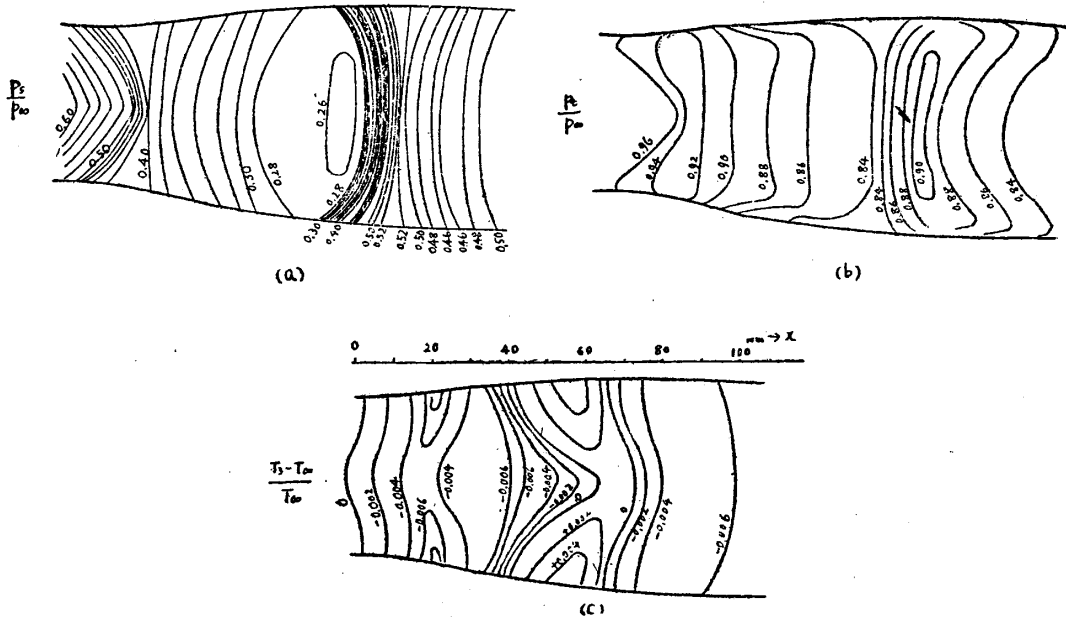
結論として次の事を得。即ちラバル管内に生ずる衝撃波は一次元的のものに非ず。特に平行壁の方向の剝離大にして、然も側方より中央部に向ひ急激なるエネルギーの流入あり。故にかくの如き衝撃波は非常に複雑にして、エネルギーの式は(7.2a)により與ふること能はず、理論的に之を取扱ふは不可能に近し。



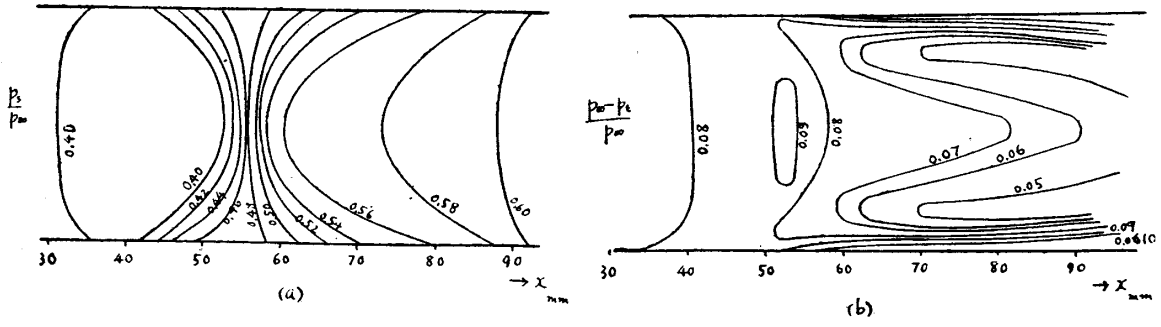
第 39 圖 測定洞 No. 2



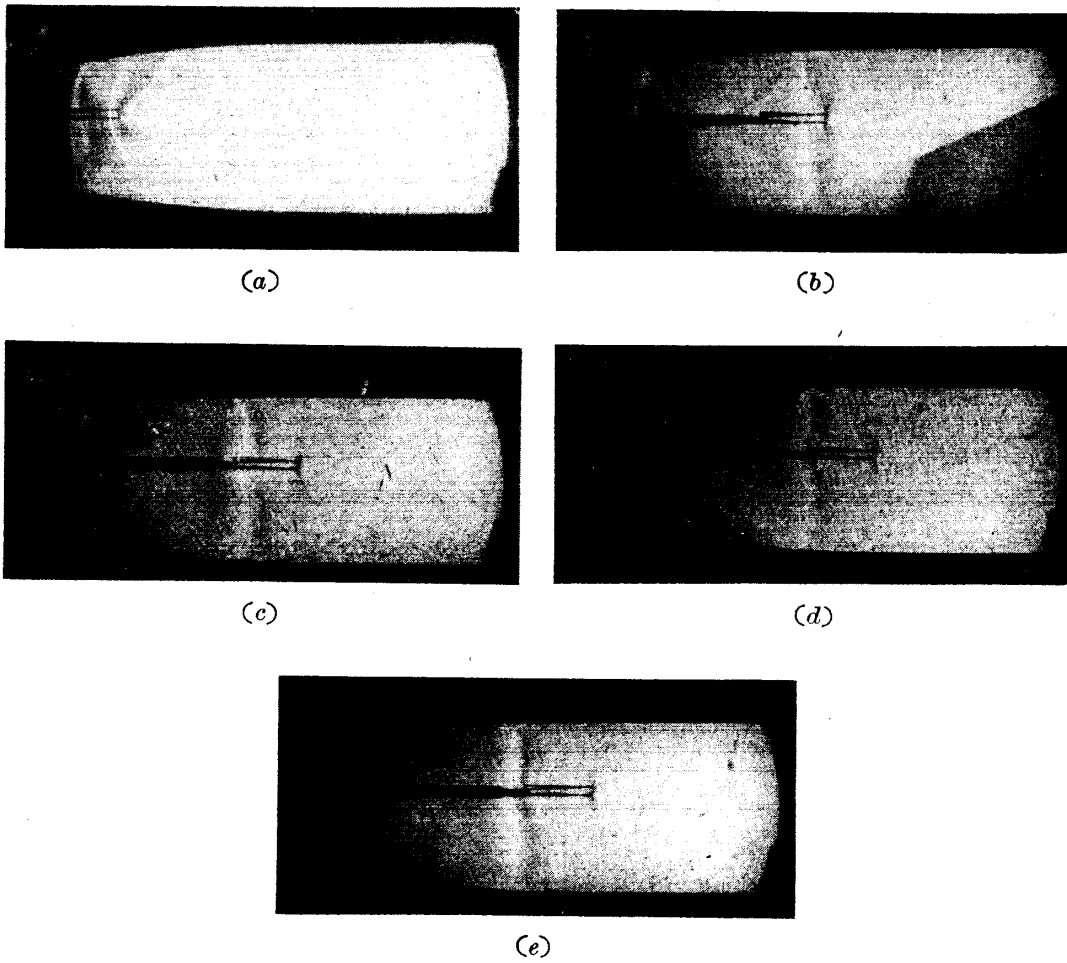
第 69 圖 靜壓，總壓，溫度分布 (測定胴 No. 2)



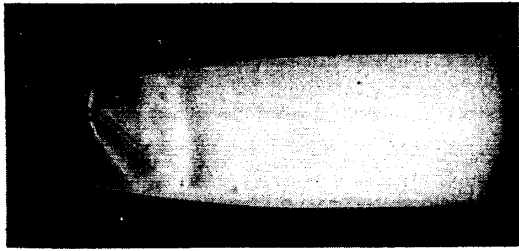
第 70 圖 靜壓，總壓，溫度分布 (測定胴 No. 2)



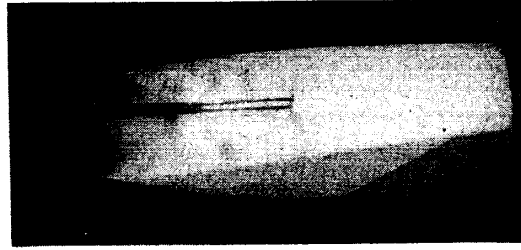
第 71 圖 静壓, 總壓分布 (測定 No. 1)



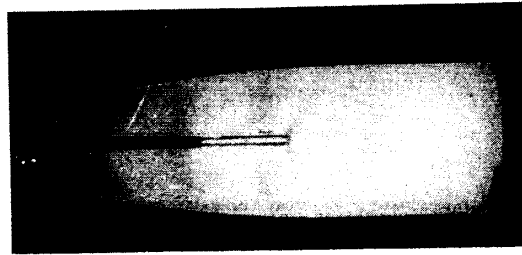
第 72 圖 ピトー管に依る衝撃波の變形



(a)

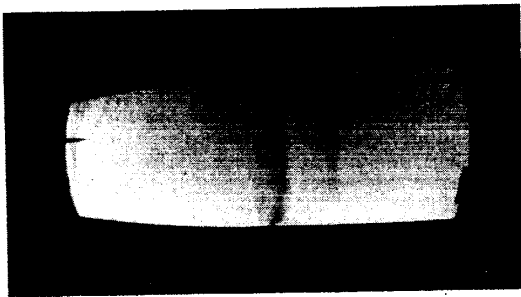


(b)

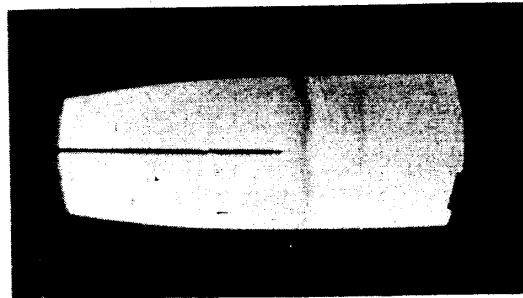


(c)

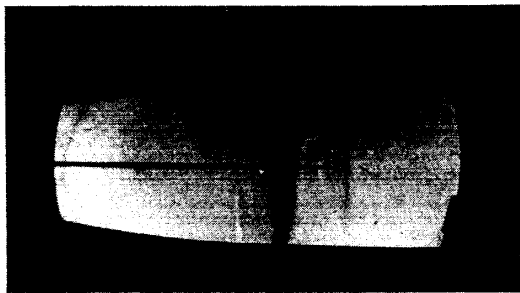
第 73 圖 同上.



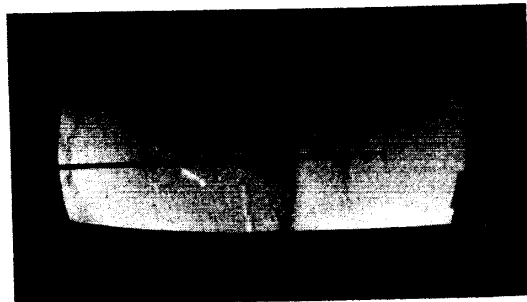
(a)



(b)



(c)



(d)

第 74 圖 同上.

§ 17. ピトー管に依る衝撃波の変形並に各種ピトー管の比較.

ピトー管に依る衝撃波変形の状況を第 72 圖, 第 73 圖に示す. 第 72 圖は測定胴 No. 2 に相当し, 第 73 圖は測定胴 No. 3 に関するものなり. 之より測定胴 No. 3 に関して変形大なるを見るべし.

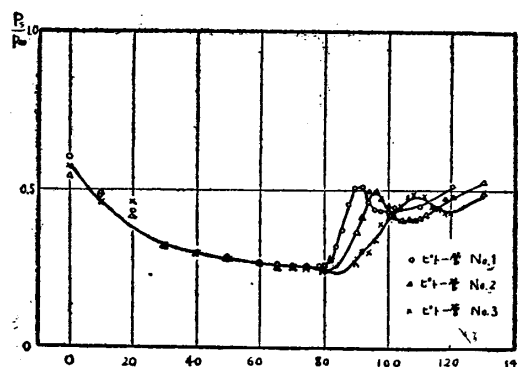
次に各種ピトー管による結果の相異の状況を調べる目的を以て, 三本のピトー管に依り実験を行ひたり.

ピトー管 No. 1. 第 34 圖に示すもの. 第 35 圖 a.

ピトー管 No. 2. No. 1 のものより總壓管のみを取去りたるもの.
第 35 圖 b.

ピトー管 No. 3. 第 35 圖 c に示す靜壓管にして第 74 圖に示す如く上流より挿入す.

これ等により同一の衝撃波を測定せる結果を第 75 圖に示す. 即ち何れのピトー管に依るも衝撃波前方に於ける値は一致す. 然れども衝撃波内部の壓力分布は各々異なる. これピトー管に依る衝撃波の変形異なる爲めなり. 又衝撃波後方に於ける p_2/p_{∞} の値は各ピトー管共等し. 故に衝撃波の前後の状況間の関係のみを論ずるにはいづれのピトー管を用ふるも大なる誤差なかるべし.



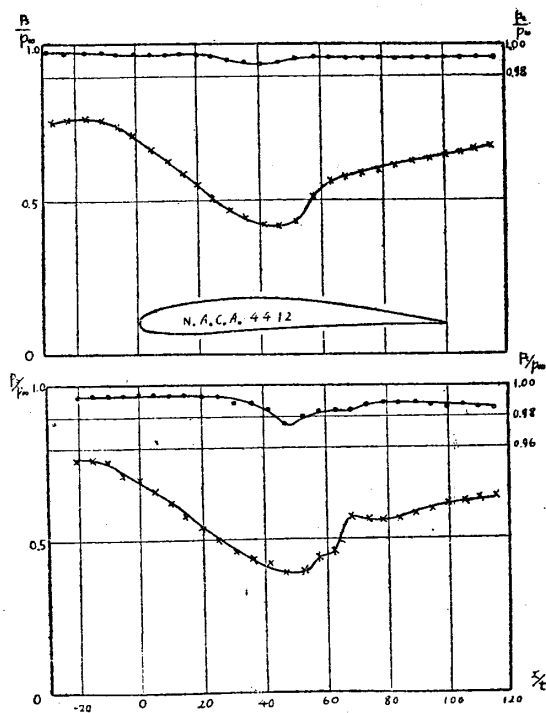
第 75 圖 各種ピトー管に依る変形の相違

§ 18. 翼に生ずる衝撃波.

翼に生ずる衝撃波のシュリーレン寫眞の一例第 2 圖の如し. 此の衝撃波の壓力分布を, N. A. C. A. 4412 に就き, 36 種高速風洞を用ひて研究せる結果の一例を第 76 圖²⁴⁾に示す. 之より明かなる如く, 總壓損失の回復を認め得. 又第 2 圖よりその幅の廣き點, 又剝離をともしふ點等より, この衝撃波も又ラバル管内のものと相似たる性質を有する如く考へらる. 之に就き M_1 と $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_0 - p'_0}{p_0}$ の関係を求め第 64 圖, 第 65 圖に記入す. この結果もラバル管内の衝撃波と同じ傾向を有す.

§ 19. 濕度と衝撃波の関係.

濕度と衝撃波間に關係を有すること, 既に伊國の實驗に報告せられあるも, 本實



第 76 圖 翼上面の衝撃波の壓力分布

験に於ても之を認めたり。即ち測定洞 No. 3 に於て、乾燥せる日は喉部に衝撃波生ぜざるも、(第 43 圖及第 62 圖) 湿度高き日には衝撃波を生ず。(第 42 圖, 第 63 圖等) 又測定洞 No. 2 に於て、乾燥せる日は喉部以外に衝撃波生ぜざるも、湿度高き時季にありては喉部以外の平行部に衝撃波を生じ、背壓を如何に降下せしむるも消す能はず。

測定洞の入口に乾燥劑(鹽化カルシウム)を入れたる箱を取付け、流入空気を乾燥せしめたるに、喉部の衝撃波の弱くなるを認めたり。

結 論

以上の實驗より衝撃波に關しては、機構複雑にして、容易に決定的なる結論下し難きを知る²⁰⁾。然れ

ども次の事項は大體正しきものと考ふるを得べし。

- (1) ピトー管前方に生ずる衝撃波は理論と良く一致す。故に音速以上の風速を測定するにはピトー管を用ひ Rayleigh の式を用ひて可なり。
- (2) ラバル管内に生ずる衝撃波は剝離をともし、又流體間に外部より中心部に向ひエネルギーの流入あり。此の如く現象複雑にして、これを理論的に取扱ふは非常に困難なり。
- (3) 翼上面に生ずる衝撃波はラバル管内のものと似たる性質を有す。
- (4) 衝撃波と湿度は密接なる關係を有す。

本研究は筆者が航空研究所特別研究員として、主として河田所員御指導の下に行ひたるものなり。近時航空機速度増加にともなひ、衝撃波の研究に一般の關心の向けられつゝある現状に鑑み、之に關する在來の理論的研究をも併せ収録せり。此處に終始御懇切なる御指導を賜りたる河田所員、今井所員、並に種々御配慮を辱くせる寺澤所長始め其他の方々に厚く感謝する次第なり。

参 考 文 献

1. 一般

- (1) A. Busemann: Gasdynamik. Handbuch der Experimentalphysik, Bd. IV, Teil 1, SS. 341-460.
- (2) J. Ackeret: Gasdynamik. Handbuch der Physik, Bd. VII, SS. 239-342.
- (3) G. I. Taylor & J. W. Maccoll: The Mechanics of Compressible Fluids. W. F. Durand, Aerodynamic Theory, Section H, Book III, pp. 209-250.

2. 直衝撃波

- (4) B. Riemann: Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abb. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math-Phys. kl. 8 (1860), S. 43.
Riemann-Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der mathematische Physik. 6. Aufl. Bd. 2, S. 503.
- (5) Rankine: Phil. Trans. Roy. Soc. Vol. 160, 1870.
- (6) H. Hugoniot: Journal de l'Ecole Polytechnique, Paris, Cahiers 57-59, 1887-1889.
- (7) Lord Rayleigh: Aerial Plane Waves of Finite Amplitude. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 84, 1910. pp. 573-610.
- (8) G. I. Taylor: The Condition necessary for discontinuous Motion in Gases. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 84, 1910. pp. 371-377.
- (9) R. Becker: Stosswelle und Detonation. Zeitschrift f. Phys. Bd. 8, 1922. SS. 321-362.

3. 斜衝撃波

- (10) Th. Meyer: Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit überschallgeschwindigkeit strömt. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, V. D. I., Heft 62, 1908.
- (11) G. I. Taylor & J. W. Maccoll: The Air Pressure on a Cone moving at high Speed. Proc. Roy. Soc. London A, Vol. 139, 1933. pp. 278-311.
- (12) L. Prandtl: Allgemeine Betrachtungen über die Strömungs Zusammendrückbarer Flüssigkeit. Z. a. M. M. Bd. 16, 1936. SS. 129-142.
- (13) M. F. Bourquard: Théorie des Ondes Balistiques Planes. Mémorial de l'Artillerie Française, Tome 11, 1932. pp. 135-217.
- (14) A. Busemann: Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit überschallgeschwindigkeit. Z. a. M. M. Bd. 9, 1929. SS. 496-498.

- (15) A. Busemann & O. Walchner: Profileigenschaften bei überschallgeschwindigkeit. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, V.D.I., Bd. 4, 1933. SS. 87-92.
- (16) Th. Kármán: The Problem of Resistance in Compressible Fluids. Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 1936. pp. 222-277.
航空學術外國文獻 No. 135.

4. 實 験

- (17) A. Stodola: Dampf und Gasturbinen. 6 Auflage, Springer. 1924.
- (18) L. Santon: Contribution Expérimentale a l'Etude des Souffleries Supersoniques. Pub. Sci. et Tech. Minis. de l'air, No. 68, 1935.
- (19) T. E. Stanton: A High Speed Wind Channel for Tests on Aerofoils. R. & M. 1130. 1928.
- (20) G. I. Taylor: Applications to Aeronautics of Ackeret's Theory of Aerofoils moving at Speeds greater than that of Sound. R. & M. No. 1467, 1932.
- (21) N. Jacobs: Methods employed in America for the experimental Investigation of Aerodynamic Phenomena at high Speeds. Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. 1936. pp. 369-393.
- (22) C. N. H. Lock: Problems of high Speed Flight as affected by Compressibility. J. of the Roy. Aeron. Soc. Vol. 42, 1938. pp. 193-228.
- (23) J. Stack: The Compressibility Burble and the Effect of Compressibility on Pressures and Forces on an Airfoil. N.A.C.A. Tech. Report, No. 646, 1939.
航空學術外國文獻 No. 78.
- (24) 河田三治, 藤井正一: 高速流中に於ける翼型の抵抗.
航空研究所報告, 第 214 號, 1941.
- (25) 河田三治: 衝撃波の生成に關する實驗. 航空研究所報告, 第 237 號, 1942.

5. 其 他

- (26) E. Preiswerk: Anwendung gasdynamischen Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche. Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik Zürich, No. 7, 1938.
- (27) D. Riabonchinsky: Recherches sur l'Amélioration des Qualités aérodynamiques des Profils d'ailes aux grandes Vitesses. Pub. Sci. et Tech. Minis. du l'air, No. 108, 1937.

附 録 第 1

(3.13) より

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

(3.16) より

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2$$

(3.20) より

$$\left(\frac{p'_0}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{1}{2} \frac{(\kappa+1)^2 M_1^2}{2\kappa M_1^2 - (\kappa-1)}$$

以上の三式より M_1 を與へ p_2/p_1 , p_1/p_0 , p'_0/p_2 を求め, 更に p_1/p'_0 , p'_0/p_0 , p_2/p_0 を計算す. その結果附録第 1 表の如し.

附 録 第 2

(I) Fanno 曲線.

(6.8) を積分し

$$s = C_v \log_e i + \frac{C_p - C_v}{2} \log_e (i_0 - i) + C_1 \quad (1)$$

C_1 は積分定数にして, 或る i に對する s の値を知らば決定するものなり. 然れども或る i に對する s の値は $\rho u = G$ の値に依り變化す. 故にこれを決定する爲め i の一定値を選び, G と s の關係を求む.

$$\rho u = G$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = \frac{dG}{G} \quad (2)$$

(6.3), (6.4), (6.6), (6.7) 及上式より $di=0$ と置き

$$ds = (C_p - C_v) \frac{dG}{G} \quad (3)$$

を得. これを積分し

$$s = (C_p - C_v) \log_e G + C_2$$

C_2 は積分常数なり.

$$i = \frac{2}{\kappa + 1} i_0 \quad ((6.9) \text{ より } u = a^*)$$

に於て $G = G_0$ の時 $s = s_0$ なりとす. 然らば

$$s - s_0 = (C_p - C_v) \log_e \frac{G}{G_0} \quad (4)$$

この式より各 G に対する s を求め, (附録第 2 表) i の値と共に (1) に代入せば, 夫々の G の場合の C_1 を得べし. 例へば $G = G_0$ の時 $i = \frac{2}{\kappa + 1} i_0$ に於て $s = s_0$ なるを以て

$$s - s_0 = C_v \log_e \frac{\kappa + 1}{2} \frac{i}{i_0} + \frac{C_p - C_v}{2} \log_e \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{i_0 - i}{i_0} \quad (5)$$

なり. これより計算せる結果を附録第 3 表に示す.

$\frac{G}{G_0} = 0.9, 0.8, \dots, 0.1$ の場合に於ては, i_0 一定ならば (5) の左邊の s_0 の代りに附録第 2 表の値を取り, 右邊は同形なるを以て, Fanno 曲線は附録第 1 圖の如く, 同形の曲線を s 方向にずらしたるのみなり. 本圖は

$$i_0 = C_p T_0$$

$$\begin{cases} C_p = 0.2400 \text{ kcal/kg/}^\circ\text{K} \\ C_v = 0.1714 \text{ kcal/kg/}^\circ\text{K} \end{cases}$$

なるを以て, 上流静止點溫度 $T_0 = 300^\circ\text{K}$ と與ふれば

$$i_0 = 72 \text{ kcal/kg}$$

$$i^* = \frac{2}{\kappa + 1} i_0 = 60 \text{ kcal/kg}$$

$$a^* = 320.2 \text{ m/sec}$$

となる.

(II) J 曲線.

(6.11) を積分し

$$s = C_v \log_e i + (C_p - C_v) \log_e [2C_p i_0 - (C_p + C_v)i] + C_1 \quad (6)$$

積分常数 C_1 を定むるには, (I) の場合と同様に J の値を與へざるべからず.

$$p + \rho u^2 = J$$

$$dp + u^2 d\rho + 2\rho u du = dJ$$

或る一定の i に對し, J と s の關係を求むれば

$$s = (C_p - C_v) \log_e J + C_2 \quad (7)$$

$i = \frac{2}{\kappa+1} i_0$ に於て $J = J_0$ の時 $s = s'_0$ とす. 即ち

$$s - s'_0 = (C_p - C_v) \log_e \frac{J}{J_0} \quad (8)$$

これ (4) と全く同形にして, $\frac{J}{J_0}$ と $s - s'_0$ の關係は附録第 2 表を以て示さる. かくして (6) の C_1 を決定するを得. 例へば $J = J_0$ の時は

$$s - s'_0 = C_v \log_e \frac{\kappa+1}{2} \frac{i}{i_0} + (C_p - C_v) \log_e \frac{2\kappa i_0 - (\kappa+1)i}{2(\kappa-1)i_0} \quad (9)$$

これより計算せる結果を附録第 4 表に示す.

J の種々の場合に於ては (I) の Fanno 曲線と同様に i_0 一定ならば, 同形の曲線を s 方向にずらしたるものなり. 然も J/J_0 と G/G_0 等しき曲線の $J = J_0$, $G = G_0$ のものよりずらせる量は相等し. 附録第 1 圖の點線は即ち J 曲線なり. 但同圖は $s'_0 = s_0 + 0.01$ と置きたり.

(III) $p-u$ 面の斷熱曲線.

(6.15) を積分すれば可なり. 今 (6.9) より

$$\frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} i_0 = a^{*2}$$

と置き (6.15) を書換ふれば

$$\frac{\frac{u}{a^*} d\left(\frac{u}{a^*}\right)}{\frac{(u/a^*)^2}{2} - \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{dp}{p}$$

故に $\log_e \left[\frac{(u/a^*)^2}{2} - \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} \right] = \frac{\kappa-1}{\kappa} \log_e p + C_1$ (10)

C_1 を決定するには $\frac{u}{a^*} = 0$ に於ける p'_0 を與ふれば可なり。

$$\left[1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{u}{a^*} \right)^2 \right] = \left(\frac{p}{p'_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (11)$$

然るに $u=0$ に於て, s と p'_0 には次の關係あり. (6.3), (6.6) より

$$ds = -(C_p - C_v) \frac{dp}{p}$$

$p'_0 = p_0$ に於て $s = s_0$ なりとせば

$$s - s_0 = -(C_p - C_v) \log_e \frac{p'_0}{p_0} \quad (12)$$

又 $\frac{p'_0}{p_0}$ と $-(s-s_0)$ の關係は附録第 2 表に示す如くなる. (11) の計算値を附録第 5 表及附録第 2 圖に示す.

附 録 第 3

(10.14) より α をパラメーターとし, p_1/p_0 を與へ p_2/p_0 を計算せば第 17 圖を得. (10.14), (10.15) より α を消去し, β をパラメーターとし p_1/p_0 , p_2/p_0 の關係を求むれば第 18 圖, 又 (10.14), (10.15), (10.16) より α , β を消去し, ω をパラメーターとせば第 19 圖を得べし.

以下計算の都合上 (10.14), (10.15) より p_2/p_0 を消去し, α , β を適當に與へ p_1/p_0 を得, (10.14) よりこれに對する p_2/p_0 を計算す. (10.14) は

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{p_1}{p_0} \left[\frac{2\kappa}{\kappa+1} - \frac{2}{\kappa-1} \left\{ \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right\} \cos^2 \alpha - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right] \quad (1)$$

これと (10.15) より p_2/p_0 を消去せば

$$\frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = \frac{2 \tan \beta}{\cos^2 \alpha (\kappa-1) \left[\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \tan \alpha - \tan \beta \right]} \quad (2)$$

これを計算するに當り附録第 1 表を用ふ。

この結果を附録第 6 表に示す。これを用ひ圖示すれば第 17, 18, 19 圖を得べし。

次に第 20 圖を描くには (10.14), (10.15), (10.20) より α, β を消去せば

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_1} + (\kappa-1)}{(\kappa+1) + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_1}} = \left(\frac{p'_0}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (3)$$

この式より見るに $\frac{p'_0}{p_0}$ 一定ならば $\frac{p_2}{p_1}$ は一定なり。即ち第 20 圖に於て $\frac{p'_0}{p_0}$ 一定の線は直線となる。種々の p_2/p_1 に對する p'_0/p_0 の値は附録第 7 表の如し。

次に $\frac{U_2}{a_2}$ 一定の線を描く。(10.18) より

$$\left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2 = \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p'_0}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad (4)$$

この式より $\frac{U_2}{a_2}$ に相當する p_2/p'_0 を求め、(附録第 1 表) (3) より計算せる p_2/p_1 と p'_0/p_0 の關係を用ふれば、

$$\frac{p'_0}{p_2} = \frac{\frac{p'_0}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0} \frac{p_2}{p_1}} \quad (5)$$

より p_1/p_0 を計算することを得。以上の結果を附録第 7 表に示す。

附 録 第 4

(12.1) より

$$\begin{aligned}
 \frac{U_1}{a^*} &= \frac{U_1}{a_1} \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}} \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{又は} \quad \left(\frac{U_1}{a^*} \right)^2 &= \frac{(\kappa+1) \left(\frac{U_1}{a_1} \right)^2}{2 + (\kappa-1) \left(\frac{U_1}{a_1} \right)^2} \\
 \left(\frac{U_1}{a_1} \right)^2 &= \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

同様に (3.9) を考慮して

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{U_2}{a^*} \right)^2 &= \frac{(\kappa+1) \left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2}{2 + (\kappa-1) \left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2} \\
 \left(\frac{U_2}{a_2} \right)^2 &= \frac{2}{\kappa-1} \left[\left(\frac{p_0'}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

(10.14) より

$$\cos^2 \alpha = \frac{\left[(\kappa+1) \frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_1}{p_0} \right]}{2\kappa \left(\frac{U_1}{a_1} \right)^2 \frac{p_1}{p_0}} \tag{3}$$

(10.15) より

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{(\kappa+1) \frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_1}{p_0}}{(\kappa+1) \frac{p_1}{p_0} + (\kappa-1) \frac{p_2}{p_0}} \tag{4}$$

(10.16)

$$\omega = \beta - \alpha \tag{5}$$

又附録第 3 の (3) より

$$\left(\frac{p'_0}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{(\kappa+1)\frac{p_2}{p_0} + (\kappa-1)\frac{p_1}{p_0}}{(\kappa+1)\frac{p_1}{p_0} + (\kappa-1)\frac{p_2}{p_0}} \left(\frac{p_2/p_0}{p_1/p_0}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (6)$$

これ等の式より p_1/p_0 , U_1/a^* , U_1/a_1 , p'_0/p_0 , U_2/a_2 ; α , β を消去せば p_2/p_0 , U_2/a^* , ω の関係を得。これ衝撃波曲面なり。

実際には p_1/p_0 を與へ (1) より U_1/a_1 を求め、又 U_1/a^* を計算す。次に p_2/p_0 を與ふれば (6) より p'_0/p_0 を求め得るを以て、(2) より U_2/a_2 , 従つて U_2/a^* を得。又 (3) より α を計算するを得べし。依て

(I) 衝撃波曲線

p_1/p_0 従つて U_1/a^* を一定にし、 p_2/p_0 を種々に變化し、 α と U_2/a^* を求めこれを結ぶ。(第 25 圖) 勿論圓型三次曲線の描き方によりても求めらる。

(II) 衝撃波後方の壓力 p_2 の一定なる曲線

p_2/p_0 一定の點を結ばし可なり。(第 28 圖)

(III) 總壓損失一定曲線

$\frac{p'_0}{p_0}$ 一定の點を結ばし可なり。(第 25 圖)

數値計算の結果を附録第 8 表に示す。

附 錄 第 1 表 $\kappa=1.40$

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
1.00	0.52828		1.00000		0.52828		1.00000		0.52828	
		615		2345		615		1		610
1.01	0.52213		1.02345		0.52213		0.99999		0.53438	
		611		2368		612		1		597
1.02	0.51602		1.04713		0.51601		0.99998		0.54035	
		607		2392		608		2		582
1.03	0.50995		1.07105		0.50993		0.99996		0.54617	
		602		2415		605		4		659
1.04	0.50393		1.09520		0.50388		0.99992		0.55186	
		598		2438		601		7		555
1.05	0.49795		1.11958		0.49787		0.99985		0.55741	
		593		2462		598		11		541
1.06	0.49202		1.14420		0.49189		0.99974		0.56282	
		588		2485		594		14		528
1.07	0.48614		1.16905		0.48595		0.99960		0.56810	
		582		2508		590		18		514
1.08	0.48032		1.19413		0.48005		0.99942		0.57324	
		576		2532		587		22		500
1.09	0.47456		1.21945		0.47418		0.99920		0.57824	
		570		2555		583		27		486
1.10	0.46886		1.24500		0.46835		0.99893		0.58310	
		564		2578		579		33		472
1.11	0.46322		1.27078		0.46256		0.99860		0.58782	
		558		2602		575		38		459
1.12	0.45764		1.29680		0.45681		0.99822		0.59241	
		552		2625		570		44		444
1.13	0.45212		1.32305		0.45111		0.99778		0.59685	
		545		2648		566		51		431
1.14	0.44667		1.34953		0.44545		0.99727		0.60116	
		538		2672		562		58		416
1.15	0.44129		1.37625		0.43983		0.99669		0.60532	
		532		2695		558		64		403
1.16	0.43597		1.40320		0.43425		0.99605		0.60935	
		525		2718		553		70		388
1.17	0.43072		1.43038		0.42872		0.99535		0.61323	
		518		2742		549		78		374
1.18	0.42554		1.45780		0.42323		0.99457		0.61697	
		512		2765		545		85		361
1.19	0.42042		1.48545		0.41778		0.99372		0.62058	

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
1.20	0.41537	505	1.51333	2788	0.41238	540	0.99280	92	0.62406	348
1.21	0.41039	498	1.54145	2812	0.40702	536	0.99180	100	0.62740	334
1.22	0.40547	492	1.56980	2835	0.40171	531	0.99073	107	0.63060	320
1.23	0.40062	485	1.59838	2858	0.39645	526	0.98959	114	0.63367	307
1.24	0.39584	478	1.62720	2882	0.39123	522	0.98836	123	0.63661	294
1.25	0.39112	472	1.65625	2905	0.38606	517	0.98706	130	0.63941	280
1.26	0.38647	465	1.68553	2928	0.38093	513	0.98568	138	0.64207	266
1.27	0.38188	459	1.71505	2952	0.37585	508	0.98422	146	0.64460	253
1.28	0.37736	452	1.74480	2975	0.37082	503	0.98269	153	0.64701	241
1.29	0.37291	445	1.77478	2998	0.36584	498	0.98107	162	0.64929	228
1.30	0.36852	439	1.80500	3022	0.36091	493	0.97937	170	0.65145	216
1.31	0.36419	433	1.83545	3045	0.35602	488	0.97759	178	0.65347	202
1.32	0.35992	427	1.86613	3068	0.35118	484	0.97573	186	0.65536	189
1.33	0.35571	421	1.89705	3092	0.34639	479	0.97380	193	0.65713	177
1.34	0.35157	414	1.92820	3115	0.34165	474	0.97179	201	0.65877	164
1.35	0.34749	408	1.95958	3138	0.33696	469	0.96971	208	0.66030	153
1.36	0.34346	403	1.99120	3162	0.33232	464	0.96756	215	0.66171	141
1.37	0.33950	396	2.02305	3185	0.32773	459	0.96533	223	0.66301	130
1.38	0.33559	391	2.05513	3208	0.32319	454	0.96303	230	0.66419	118
1.39	0.33174	384	2.08745	3232	0.31869	450	0.96065	238	0.66525	106

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
1-40	0-32795	379	2-12000	3255	0-31424	445	0-95819	246	0-66619	94
1-41	0-32422	373	2-15278	3278	0-30984	440	0-95565	254	0-66702	83
1-42	0-32054	368	2-18580	3302	0-30549	435	0-95305	260	0-66773	71
1-43	0-31691	363	2-21905	3325	0-30119	430	0-95038	267	0-66834	61
1-44	0-31333	358	2-25253	3348	0-29693	426	0-94764	274	0-66884	50
1-45	0-30981	352	2-28625	3372	0-29272	421	0-94483	281	0-66924	40
1-46	0-30634	347	2-32020	3395	0-28856	416	0-94196	287	0-66952	29
1-47	0-30293	341	2-35438	3418	0-28445	411	0-93902	294	0-66970	18
1-48	0-29956	337	2-38880	3442	0-28039	406	0-93601	301	0-66978	8
1-49	0-29624	332	2-42645	3465	0-27637	402	0-93293	308	0-66977	-1
1-50	0-29297	327	2-45833	3488	0-27240	397	0-92979	314	0-66966	-11
1-51	0-28975	322	2-49345	3512	0-26848	392	0-92659	320	0-66945	21
1-52	0-28658	317	2-52880	3535	0-26460	388	0-92333	326	0-66914	31
1-53	0-28345	313	2-56438	3558	0-26077	383	0-91991	332	0-66874	40
1-54	0-28037	308	2-60020	3582	0-25699	378	0-91664	337	0-66823	49
1-55	0-27733	304	2-63625	3605	0-25326	373	0-91321	343	0-66766	57
1-56	0-27435	298	2-67253	3628	0-24957	369	0-90971	350	0-66700	66
1-57	0-27140	295	2-70905	3652	0-24593	364	0-90616	355	0-66625	75
1-58	0-26850	290	2-74580	3675	0-24233	360	0-90255	361	0-66540	85
1-59	0-26563	287	2-78278	3698	0-23878	355	0-89890	365	0-66447	93

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
1.60	0.26281	282	2.82000	3722	0.23527	351	0.89520	370	0.66346	101
1.61	0.26003	278	2.85745	3745	0.23181	346	0.89146	374	0.66237	109
1.62	0.25730	273	2.89513	3768	0.22839	342	0.88766	380	0.66121	116
1.63	0.25460	270	2.93305	3792	0.22502	337	0.88381	385	0.65998	123
1.64	0.25194	266	2.97120	3815	0.22169	333	0.87992	389	0.65867	131
1.65	0.24931	263	3.00958	3838	0.21840	329	0.87599	393	0.65728	139
1.66	0.24673	258	3.04820	3862	0.21515	325	0.87201	398	0.65582	146
1.67	0.24418	255	3.08705	3885	0.21195	320	0.86800	401	0.65430	152
1.68	0.24167	251	3.12613	3908	0.20879	316	0.86495	405	0.65270	160
1.69	0.23919	248	3.16545	3932	0.20567	312	0.85986	409	0.65104	166
1.70	0.23675	244	3.20500	3955	0.20259	308	0.85572	414	0.64931	173
1.71	0.23435	240	3.24478	3978	0.19955	304	0.85155	417	0.64752	179
1.72	0.23197	238	3.28480	4002	0.19655	300	0.84735	420	0.64567	185
1.73	0.22964	233	3.32505	4025	0.19360	295	0.84312	423	0.64376	191
1.74	0.22733	231	3.36553	4048	0.19069	291	0.83886	426	0.64180	196
1.75	0.22506	227	3.40625	4072	0.18782	287	0.83457	429	0.63978	202
1.76	0.22281	225	3.44720	4095	0.18499	283	0.83025	432	0.63771	207
1.77	0.22060	221	3.48838	4118	0.18220	279	0.82590	435	0.63558	213
1.78	0.21842	218	3.52980	4142	0.17944	276	0.82152	438	0.63339	219
1.79	0.21628	214	3.57145	4165	0.17672	272	0.81711	441	0.63115	224

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
1-80	0-21416	212	3-61333	4188	0-17404	268	0-81268	443	0-62886	229
		209		4212		264		445		233
1-81	0-21207	207	3-65545	4235	0-17140	260	0-80823	447	0-62653	238
		204		4258		257		449		242
1-82	0-21000	204	3-68780	4258	0-16880	257	0-80376	449	0-62415	242
		200		4282		253		451		246
1-83	0-20796	200	3-74038	4282	0-16623	253	0-79927	451	0-62173	246
		198		4305		250		453		250
1-84	0-20596	198	3-78320	4305	0-16370	250	0-79476	453	0-61927	250
		195		4328		246		455		255
1-85	0-20398	195	3-82625	4328	0-16120	246	0-79023	455	0-61677	255
		192		4352		243		457		259
1-86	0-20203	192	3-86953	4352	0-15874	243	0-78568	457	0-61422	259
		190		4375		239		458		262
1-87	0-20011	190	3-91305	4375	0-15631	239	0-78111	458	0-61163	262
		187		4398		236		459		265
1-88	0-19821	187	3-95680	4398	0-15392	236	0-77653	459	0-60901	265
		185		4422		232		459		269
1-89	0-19634	185	4-00078	4422	0-15156	232	0-77194	459	0-60636	269
		183		4445		229		461		272
1-90	0-19449	183	4-04500	4445	0-14924	229	0-76735	461	0-60367	272
		180		4468		225		462		275
1-91	0-19266	180	4-08945	4468	0-14695	225	0-76274	462	0-60095	275
		177		4492		222		463		279
1-92	0-19086	177	4-13413	4492	0-14470	222	0-75812	463	0-59820	279
		176		4515		219		464		282
1-93	0-18909	176	4-17905	4515	0-14248	219	0-75349	464	0-59541	282
		173		4538		216		465		285
1-94	0-18733	173	4-22420	4538	0-14029	216	0-74885	465	0-59259	285
		170		4562		213		465		288
1-95	0-18560	170	4-26958	4562	0-13813	213	0-74420	465	0-58974	288
		169		4585		210		466		290
1-96	0-18390	169	4-31520	4585	0-13600	210	0-73955	466	0-58686	290
		166		4608		207		467		292
1-97	0-18221	166	4-36105	4608	0-13390	207	0-73489	467	0-58396	292
		164		4632		203		467		295
1-98	0-18055	164	4-40713	4632	0-13183	203	0-73022	467	0-58104	295
		164		4632		203		467		295
1-99	0-17891		4-45345		0-12980		0-72555		0-57809	

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
2-00	0-17729	162	4-50000	4655	0-12780	200	0-72087	468	0-57512	297
		160		4678		197		467		299
2-01	0-17569	157	4-54678	4702	0-12583	194	0-71620	468	0-57213	302
2-02	0-17412	156	4-59380	4725	0-12389	191	0-71152	467	0-56911	303
2-03	0-17256	154	4-64105	4748	0-12198	189	0-70685	467	0-56608	305
2-04	0-17102		4-68853		0-12009		0-70218		0-56303	
		152		4772		186		467		307
2-05	0-16950	150	4-73625	4795	0-11823	183	0-69751	467	0-55996	308
2-06	0-16800	148	4-78420	4818	0-11640	180	0-69284	466	0-55688	310
2-07	0-16652	146	4-83238	4842	0-11460	178	0-68818	466	0-55378	311
2-08	0-16506	144	4-88080	4865	0-11282	175	0-68352	466	0-55067	313
2-09	0-16362		4-92945		0-11107		0-67886		0-54754	
		142		4888		172		466		314
2-10	0-16220	141	4-97833	4912	0-10935	170	0-67420	465	0-54440	315
2-11	0-16079	139	5-02745	4935	0-10765	167	0-66955	464	0-54125	316
2-12	0-15940	137	5-07680	4958	0-10598	164	0-66491	463	0-53809	317
2-13	0-15803	136	5-12638	4982	0-10434	162	0-66028	462	0-53492	318
2-14	0-15667		5-17620		0-10272		0-65566		0-53174	
		133		5005		159		461		320
2-15	0-15534	132	5-22625	5028	0-10113	157	0-65105	461	0-52854	320
2-16	0-15402	131	5-27653	5052	0-09956	154	0-64644	459	0-52534	321
2-17	0-15271	129	5-32705	5075	0-09802	152	0-64185	458	0-52213	321
2-18	0-15142	127	5-37780	5098	0-09650	150	0-63727	457	0-51892	321
2-19	0-15015		5-42878		0-09500		0-63270		0-51571	

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
2-20	0-14889	126	5-48000	5122	0-09352	148	0-62814	456	0-51250	321
2-21	0-14765	124	5-53145	5145	0-09207	145	0-62359	455	0-50928	322
2-22	0-14642	123	5-58313	5168	0-09064	143	0-61906	453	0-50606	322
2-23	0-14520	122	5-63505	5192	0-08923	141	0-61454	452	0-50283	323
2-24	0-14400	120	5-68720	5215	0-08784	139	0-61003	451	0-49960	323
2-25	0-14282	118	5-73958	5238	0-08648	136	0-60553	450	0-49637	323
2-26	0-14165	117	5-79220	5262	0-08514	134	0-60105	448	0-49314	323
2-27	0-14049	116	5-84505	5285	0-08382	132	0-59659	446	0-48991	323
2-28	0-13935	114	5-89813	5308	0-08252	130	0-59214	445	0-48668	323
2-29	0-13822	113	5-95145	5332	0-08124	128	0-58771	443	0-48346	322
2-30	0-13710	112	6-00500	5355	0-07997	127	0-58330	441	0-48024	322
2-31	0-13600	110	6-05878	5378	0-07873	124	0-57890	440	0-47702	322
2-32	0-13491	109	6-11280	5402	0-07751	122	0-57452	438	0-47380	322
2-33	0-13383	108	6-16705	5425	0-07631	120	0-56916	436	0-47059	321
2-34	0-13277	106	6-22153	5448	0-07502	119	0-56581	435	0-46738	321
2-35	0-13172	105	6-27625	5472	0-07396	116	0-56148	433	0-46417	321
2-36	0-13068	104	6-33120	5495	0-07281	115	0-55718	430	0-46097	320
2-37	0-12965	103	6-38638	5518	0-07168	113	0-55289	429	0-45778	319
2-38	0-12863	102	6-44180	5542	0-07057	111	0-54862	427	0-45459	319
2-39	0-12763	100	6-49745	5565	0-06948	109	0-54437	425	0-45141	318

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
2.40	0.12663	100	6.55333	5588	0.06840	108	0.54014	423	0.44824	317
2.41	0.12565	98	6.60945	5612	0.06734	106	0.53593	421	0.44507	317
2.42	0.12468	97	6.66580	5635	0.06630	104	0.53174	419	0.44191	316
2.43	0.12372	96	6.72238	5658	0.06527	103	0.52757	417	0.43876	315
2.44	0.12277	95	6.77920	5682	0.06426	101	0.52342	415	0.43563	313
2.45	0.12183	94	6.83625	5705	0.06327	99	0.51930	412	0.43251	312
2.46	0.12090	93	6.89353	5728	0.06229	98	0.51520	410	0.42939	312
2.47	0.11998	92	6.95105	5752	0.06133	96	0.51112	408	0.42628	311
2.48	0.11907	91	7.00880	5775	0.06038	95	0.50706	406	0.42318	310
2.49	0.11817	90	7.06678	5798	0.05945	93	0.50303	403	0.42009	309
2.50	0.11729	88	7.12500	5822	0.05853	92	0.49902	401	0.41701	308
2.51	0.11641	88	7.18345	5845	0.05763	90	0.49503	399	0.41394	307
2.52	0.11554	87	7.24213	5868	0.05674	89	0.49106	397	0.41088	306
2.53	0.11468	86	7.30105	5892	0.05586	88	0.48711	395	0.40784	304
2.54	0.11383	85	7.36020	5915	0.05500	86	0.48318	393	0.40481	303
2.55	0.11299	84	7.41958	5938	0.05415	85	0.47928	390	0.40179	302
2.56	0.11216	83	7.47920	5962	0.05332	83	0.47540	388	0.39878	301
2.57	0.11133	83	7.53905	5985	0.05250	82	0.47154	386	0.39579	299
2.58	0.11052	81	7.59913	6008	0.05169	81	0.46771	383	0.39281	298
2.59	0.10971	81	7.65945	6032	0.05090	79	0.46390	381	0.38984	297

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
2-60	0-10892	79	7-72000	6055	0-05012	78	0-46012	378	0-38689	295
		79		6078		77		376		294
2-61	0-10813	78	7-78078	6102	0-04935	76	0-45636	374	0-38395	293
2-62	0-10735	77	7-84180	6125	0-04859	75	0-45262	371	0-38102	291
6-63	0-10658	77	7-90305	6148	0-04784	73	0-44891	369	0-37811	290
6-64	0-10581		7-96453		0-04711		0-44522		0-37521	
		75		6172		72		366		288
2-65	0-10506	75	8-02625	6195	0-04639	71	0-44156	365	0-37233	287
6-66	0-10431	74	8-08820	6218	0-04568	70	0-43791	362	0-36956	285
2-67	0-10357	73	8-15038	6242	0-04498	69	0-43429	659	0-36671	284
2-68	0-10284	73	8-21280	6265	0-04429	68	0-43070	357	0-36387	283
2-69	0-10211		8-27545		0-04361		0-42713		0-36094	
		71		6288		66		355		281
2-70	0-10140	71	8-33833	6312	0-04295	66	0-42358	352	0-35813	280
2-71	0-10069	71	8-40145	6335	0-04229	64	0-42006	350	0-35533	278
2-72	0-09998	69	8-46480	6358	0-04165	63	0-41656	347	0-35255	276
2-73	0-09929	69	8-52838	6382	0-04102	62	0-41309	344	0-34979	274
2-74	0-09860		8-59220		0-04040		0-40965		0-34705	
		68		6405		62		342		273
2-75	0-09792	68	8-65625	6428	0-03978	61	0-40623	340	0-34432	272
2-76	0-09724	66	8-72053	6452	0-03917	60	0-40283	338	0-34160	270
2-77	0-09658	66	8-78505	6475	0-03857	59	0-39945	335	0-33890	268
2-78	0-09592	66	8-84980	6498	0-03798	57	0-39510	333	0-33622	267
2-79	0-09526		8-91478		0-03741		0-39277		0-33355	

$\frac{u_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0'}$	差	$\frac{p_2}{p_1}$	差	$\frac{p_1}{p_0}$	差	$\frac{p_0'}{p_0}$	差	$\frac{p_2}{p_0}$	差
2.80	0.09461	65	8.98000	6522	0.03685	56	0.38946	331	0.33090	266
2.81	0.09397	64	9.04545	6545	0.03629	56	0.38618	328	0.32817	263
2.82	0.09334	63	9.11113	6568	0.03574	55	0.38292	326	0.32557	260
2.83	0.09271	63	9.17705	6592	0.03520	54	0.37969	323	0.32299	258
2.84	0.09208	63	9.24320	6615	0.03467	53	0.37649	320	0.32043	256
2.85	0.09147	61	9.30958	6638	0.03415	52	0.37331	318	0.31788	255
2.86	0.09086	61	9.37620	6662	0.03363	52	0.37015	316	0.31532	256
2.87	0.09026	60	9.44305	6685	0.03312	51	0.36701	314	0.31278	254
2.88	0.08966	60	9.51013	6708	0.03262	50	0.36389	312	0.31026	252
2.89	0.08907	59	9.57745	6732	0.03213	49	0.36080	309	0.30776	250
2.90	0.08848	59	9.64500	6755	0.03165	48	0.35773	307	0.30527	249
2.91	0.08790	58	9.71278	6778	0.03118	47	0.35468	305	0.30280	247
2.92	0.08732	58	9.78080	6802	0.03071	47	0.35166	302	0.30035	245
2.93	0.08675	57	9.84905	6825	0.03025	46	0.34866	300	0.29791	244
2.94	0.08619	56	9.91753	6848	0.02980	45	0.34569	297	0.29549	242
2.95	0.08563	56	9.98625	6872	0.02935	45	0.34275	294	0.29309	240
2.96	0.08508	55	10.05520	6895	0.02891	44	0.33983	292	0.29071	238
2.97	0.08453	55	10.12438	6918	0.02847	44	0.33693	290	0.28834	237
2.98	0.08398	55	10.19380	6942	0.02805	42	0.33405	288	0.28598	236
2.99	0.08344	54	10.26345	6965	0.02763	42	0.33119	286	0.28364	234
3.00	0.08291	53	10.33333	6988	0.02722	41	0.32835	284	0.28132	232

附錄 第 2 表 $\kappa=1.400$

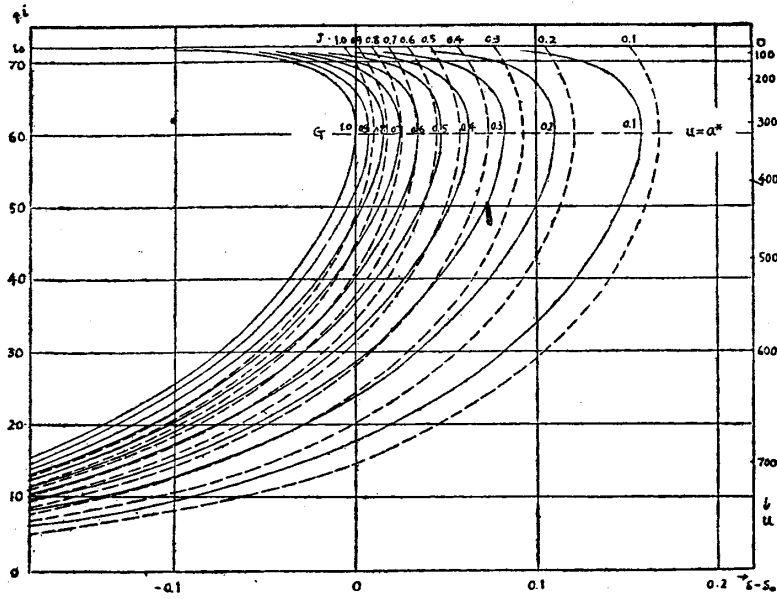
$\frac{G}{G_0}$ $\frac{J}{J_0}$ $\frac{p_0'}{p_0}$	} $s-s_0$ s_0-s
1.0	0
0.9	-0.00723
0.8	-0.01531
0.7	-0.02447
0.6	-0.04755
0.5	-0.03504
0.4	-0.06286
0.3	-0.08259
0.2	-0.11041
0.1	-0.15796

附錄 第 3 表, 第 4 表 $\kappa=1.400$

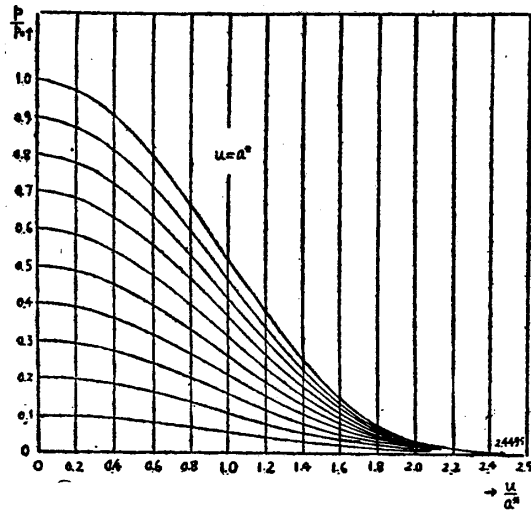
i	i_0-i	$\frac{s-s_0}{\text{Fanno}}$	$\frac{s-s_0}{\text{J 曲線}}$
72	0	$-\infty$	-0.01630
71	1	-0.05635	
70	2	-0.03509	
69	3	-0.02360	-0.00829
66	6	-0.00744	-0.00339
63	9	-0.00151	-0.00080
60	12	0	0
54	18	-0.00415	-0.00375
48	24	-0.01447	-0.01049
42	30	-0.02970	-0.02274
36	36	-0.04988	-0.04001
30	42	-0.07584	-0.06318
24	48	-0.10950	-0.09420
18	54	-0.15477	-0.13697
12	60	-0.22066	-0.20050
6	66	-0.33619	-0.31381
0	72	$-\infty$	$-\infty$

附 錄 第 5 表 $\kappa=1.400$

$\frac{p}{p_0}$	$\frac{u}{a^*}$	$\frac{p}{p_0}$	$\frac{u}{a^*}$
1.0	0	0.4	1.1754
0.95	9.2950	0.3	1.3213
0.9	0.4221	0.2	1.4871
0.8	0.6089	0.1	1.7005
0.7	0.7625	0.05	1.8575
0.6	0.9027	0	2.4495
0.5	1.0383		



附録 第 1 圖



附録 第 2 圖

附 錄 第 6 表 $\kappa=1.400$

α	β	ω	$\frac{U_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
60	60	0	2.000	0.1278	0.1278
"	65	5	2.280	0.0822	0.1110
"	70	10	2.681	0.0443	0.0854
55	55	0	1.743	0.1898	0.1898
"	50	5	1.962	0.1356	0.1778
"	65	10	2.252	0.0862	0.1534
"	70	15	2.678	0.0444	0.1149
50	50	0	1.556	0.2512	0.2512
"	55	5	1.738	0.1913	0.2466
"	60	10	1.967	0.1345	0.2285
"	65	15	2.277	0.0830	0.1936
"	70	20	2.748	0.0400	0.1388
45	45	0	1.414	0.3080	0.3080
"	50	5	1.574	0.2444	0.3126
"	55	10	1.767	0.1829	0.3029
"	60	15	2.015	0.1250	0.2751
"	65	20	2.358	0.0730	0.2247
"	70	25	2.906	0.0314	0.1493
40	40	0	1.305	0.3583	0.3583
"	45	5	1.453	0.2907	0.3718
"	50	10	1.626	0.2263	0.3716
"	55	15	1.863	0.1581	0.3492
"	60	20	2.114	0.1070	0.3095
"	65	25	2.514	0.0572	0.2382
"	70	30	3.199	0.0203	0.2385

α	β	ω	$\frac{U_1}{a_1}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
35	35	0	1.221	0.4013	0.4013
"	40	5	1.364	0.3303	0.4258
"	45	10	1.526	0.2622	0.4341
"	50	15	1.718	0.1972	0.4227
"	55	20	1.959	0.1362	0.3865
"	60	25	2.286	0.0817	0.3208
"	65	30	2.787	0.0376	0.2222
"	70	35	3.752	0.0092	0.1497
30	30	0	1.155	0.4372	0.4372
"	35	5	1.300	0.3606	0.4727
"	40	10	1.460	0.2883	0.4896
"	45	15	1.645	0.2200	0.4842
"	50	20	1.870	0.1564	0.4523
"	55	25	2.163	0.0992	0.3892
"	60	30	2.582	0.0515	0.2920
25	25	0	1.103	0.4664	0.4664
"	30	5	1.258	0.3810	0.5143
"	35	10	1.426	0.3026	0.5387
"	40	15	1.615	0.2301	0.5366
"	45	20	1.840	0.1637	0.5037
"	50	25	2.125	0.1051	0.4374
"	55	30	2.519	0.0568	0.3360
"	60	35	3.145	0.0219	0.3014
20	20	0	1.064	0.4889	0.4889
"	25	5	1.240	0.3906	0.5535
"	30	10	1.427	0.3024	0.5834
"	35	15	1.635	0.2226	0.5757
"	40	20	1.880	0.1540	0.5349
"	45	25	2.187	0.0954	0.4543
"	50	30	2.608	0.0495	0.3385
"	55	35	3.271	0.0182	0.2244
"	60	40	4.659	0.0028	0.0715

α	β	ω	$\frac{U_1}{\alpha_1}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
15	15	0	1.035	0.5067	0.5067
"	20	5	1.252	0.3844	0.5922
"	25	10	1.480	0.2803	0.6212
"	30	15	1.733	0.1928	0.5980
"	35	20	2.033	0.1213	0.5258
"	40	25	2.419	0.0664	0.4118
"	45	30	2.970	0.0285	0.2688
"	50	35	3.919	0.0074	0.1304
"	55	40	6.529	0.0004	0.0169
10	10	0	1.015	0.5187	0.5187
"	15	5	1.322	0.3500	0.6341
"	20	10	1.644	0.2201	0.6367
"	25	15	2.016	0.1247	0.5526
"	30	20	2.489	0.0596	0.4076
"	35	25	3.177	0.0209	0.2428
"	40	30	4.446	0.0037	0.0847
"	45	35	9.431	0.0000	0.0031
5	5	0	1.004	0.5259	0.5259
"	10	5	1.600	0.2347	0.6561
"	15	10	2.292	0.0810	0.4790
"	20	15	3.375	0.0157	0.2387
0	0	0	1.000	0.5283	0.5283
0			1.046	0.5	0.5554
"			1.223	0.4	0.6316
"			1.433	0.3	0.6685
"			1.709	0.2	0.6478
"			2.157	0.1	0.5262
"			2.602	0.05	0.3865
"			3.057	5.025	0.2684

附 録 第 7 表 $\kappa=1.400$

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{U_2}{a_2}$	$\frac{p_2}{p_0'}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
1.0	1.0000	1.0	0.5283	0.5283	0.5283
"	"	1.1	0.4684	0.4684	0.4684
"	"	1.2	0.4124	0.4124	0.4124
"	"	1.3	0.3609	0.3609	0.3609
"	"	1.4	0.3143	0.3143	0.3143
"	"	1.5	0.2724	0.2724	0.2724
"	"	1.6	0.2353	0.2353	0.2353
"	"	1.8	0.1740	0.1740	0.1740
"	"	2.0	0.1278	0.1278	0.1278
"	"	2.5	0.0585	0.0585	0.0585
1.2	0.9987	1.0	0.5283	0.4396	0.5275
"	"	1.1	0.4684	0.3892	0.4678
"	"	1.2	0.4124	0.3432	0.4119
"	"	1.3	0.3609	0.3004	0.3604
"	"	1.4	0.3143	0.2616	0.3139
"	"	1.5	0.2724	0.2267	0.2720
"	"	1.6	0.2353	0.1958	0.2350
"	"	1.8	0.1740	0.1448	0.1738
"	"	2.0	0.1278	0.1064	0.1276
"	"	2.5	0.0585	0.0487	0.0584
1.5	0.9925	0.9	0.5912	0.3912	0.5868
"	"	1.0	0.5283	0.3495	0.5242
"	"	1.1	0.4684	0.3099	0.4649
"	"	1.2	0.4124	0.2729	0.4093
"	"	1.3	0.3609	0.2388	0.3582
"	"	1.4	0.3143	0.2080	0.3119
"	"	1.5	0.2724	0.1802	0.2704
"	"	1.6	0.2353	0.1557	0.2335
"	"	1.8	0.1740	0.1151	0.1727
"	"	2.0	0.1278	0.0846	0.1269
"	"	2.5	0.0585	0.0387	0.0581

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{U_2}{a_2}$	$\frac{p_2}{p_0'}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
2.0	0.9663	0.8	0.6560	0.3170	0.6339
"	"	0.9	0.5912	0.2856	0.5713
"	"	1.0	0.5283	0.2552	0.5104
"	"	1.1	0.4684	0.2263	0.4526
"	"	1.2	0.4124	0.1993	0.3985
"	"	1.3	0.3609	0.1744	0.3487
"	"	1.4	0.3143	0.1519	0.3037
"	"	1.5	0.2724	0.1316	0.2632
"	"	1.6	0.2353	0.1137	0.2734
"	"	1.8	0.1740	0.0841	0.1681
"	"	2.0	0.1278	0.0618	0.1235
"	"	2.5	0.0585	0.0283	0.0565
3.0	0.8763	0.7	0.7209	0.2106	0.6317
"	"	0.8	0.6560	0.1916	0.5748
"	"	0.9	0.5912	0.1727	0.5180
"	"	1.0	0.5283	0.1543	0.4628
"	"	1.1	0.4684	0.1368	0.4104
"	"	1.2	0.4124	0.1205	0.3614
"	"	1.3	0.3609	0.1054	0.3162
"	"	1.4	0.3143	0.0918	0.2754
"	"	1.5	0.2724	0.0796	0.2387
"	"	1.6	0.2353	0.0687	0.2062
"	"	1.8	0.1740	0.0508	0.1525
"	"	2.0	0.1278	0.0373	0.1120
"	"	2.5	0.0585	0.0171	0.0513
4.0	0.7721	0.6	0.7840	0.1513	0.6053
"	"	0.7	0.7209	0.1392	0.5566
"	"	0.8	0.6560	0.1266	0.5065
"	"	0.9	0.5912	0.1141	0.4565
"	"	1.0	0.5282	0.1020	0.4078
"	"	1.1	0.4684	0.0904	0.3616
"	"	1.2	0.4124	0.0796	0.3184
"	"	1.3	0.3609	0.0697	0.2786
"	"	1.4	0.3143	0.0607	0.2427

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{U_2}{a_2}$	$\frac{p_2}{p_0'}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$
4.0	0.7721	1.5	0.2724	0.0526	0.2103
"	"	1.6	0.2353	0.0456	0.1817
"	"	1.8	0.1740	0.0336	0.1344
"	"	2.0	0.1278	0.0247	0.0987
"	"	2.5	0.0585	0.0113	0.0452
5.0	0.6721	0.6	0.7840	0.1054	0.5270
"	"	0.7	0.7209	0.0969	0.4845
"	"	0.8	0.6560	0.0882	0.4409
"	"	0.9	0.5912	0.0795	0.3974
"	"	1.0	0.5283	0.0710	0.3550
"	"	1.1	0.4684	0.0630	0.3148
"	"	1.2	0.4124	0.0554	0.2772
"	"	1.3	0.3609	0.0485	0.2426
"	"	1.4	0.3143	0.0423	0.2113
"	"	1.5	0.2724	0.0366	0.1831
"	"	1.6	0.2353	0.0316	0.1582
"	"	1.8	0.1740	0.0234	0.1170
"	"	2.0	0.1278	0.0172	0.0859
"	"	2.5	0.0585	0.0079	0.0393
6.0	0.5845	0.6	0.7840	0.0764	0.4584
"	"	0.7	0.7209	0.0702	0.4214
"	"	0.8	0.6560	0.0639	0.3835
"	"	0.9	0.5912	0.0576	0.3456
"	"	1.0	0.5282	0.0515	0.3088
"	"	1.1	0.4684	0.0456	0.2738
"	"	1.2	0.4124	0.0402	0.2411
"	"	1.3	0.3609	0.0352	0.2110
"	"	1.4	0.4143	0.0306	0.1837
"	"	1.5	0.2724	0.0265	0.1592
"	"	1.6	0.2353	0.0229	0.1376
"	"	1.8	0.1740	0.0170	0.1017
"	"	2.0	0.1278	0.0125	0.0747
"	"	2.5	0.0585	0.0057	0.0342

附 録 第 8 表 $\kappa=1.400$

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{U_1}{a_1}$	$\frac{U_1}{a^*}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$	$\frac{U_2}{a_2}$	$\frac{U_2}{a^*}$	α
1.2	1.1	1.0812	0.9987	0.4684	0.5621	0.9447	0.9533	10°17'
"	1.2	1.1583	"	0.4124	0.4949	1.0557	1.0458	25 35
"	1.3	1.2311	"	0.3609	0.4331	1.1629	1.1302	33 38
"	1.4	1.2999	"	0.3143	0.3772	1.2684	1.2086	39 22
"	1.5	1.3646	"	0.2724	0.3269	1.3708	1.2802	43 49
"	1.6	1.4254	"	0.2353	0.2824	1.4742	1.3483	47 26
"	1.8	1.5360	"	0.1740	0.2088	1.6790	1.4708	53 02
"	2.0	1.6330	"	0.1278	0.1534	1.8815	1.5771	57 14
"	2.5	1.8257	"	0.0585	0.0702	2.3825	1.7861	64 21
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.0326	2.8786	1.9344	68 51
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0079	3.8634	2.1200	74 18
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0023	4.8443	2.2240	77 30
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0007	5.8227	2.2867	79 37
1.5	1.2	1.1583	0.9925	0.4124	0.6186	0.8504	0.8707	5 07
"	1.3	1.2311	"	0.3609	0.5414	0.9725	0.9769	23 09
"	1.4	1.2999	"	0.3143	0.4715	1.0886	1.0722	31 23
"	1.5	1.3646	"	0.2724	0.4086	1.2013	1.1593	37 10
"	1.6	1.4254	"	0.2353	0.3522	1.3108	1.2388	41 40
"	1.8	1.5360	"	0.1740	0.2610	1.5242	1.3796	48 24
"	2.0	1.6330	"	0.1278	0.1917	1.7318	1.4999	53 18
"	2.5	1.8257	"	0.0585	0.0878	2.2360	1.7320	61 27
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.0408	2.7297	1.8949	66 31
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0099	3.6963	2.0968	72 37
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0029	4.6542	2.2079	76 10
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0009	5.6068	2.2762	78 30
2.0	1.4	1.2999	0.9663	0.3143	0.6286	0.8084	0.8328	13 00
"	1.5	1.3646	"	0.2724	0.5448	0.9481	0.9519	24 42
"	1.6	1.4254	"	0.2353	0.4706	1.0682	1.0559	31 36
"	1.8	1.5360	"	0.1740	0.3480	1.3017	1.2323	40 48
"	2.0	1.6330	"	0.1278	0.2556	1.5203	1.3772	47 03

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{U_1}{a_1}$	$\frac{U_1}{a^*}$	$\frac{p_0'}{p_0}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{p_2}{p_0}$	$\frac{U_2}{a_2}$	$\frac{U_2}{a^*}$	α
2.0	2.5	1.8257	0.9663	0.0585	0.1170	2.0346	1.6485	56°58'
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.0544	2.5250	1.8338	62 59
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0132	3.4726	2.0595	70 05
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0038	4.4012	2.1838	74 11
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0012	5.3203	2.2582	76 52
3.0	1.8	1.5360	0.8763	0.1740	0.5220	0.8931	0.9086	23 46
"	2.0	1.6330	"	0.1278	0.3834	1.1542	1.1235	34 32
"	2.5	1.8257	"	0.0585	0.1755	1.7075	1.4866	48 46
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.0816	2.2028	1.7190	56 41
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0198	3.1264	1.9923	65 41
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0057	4.0133	2.1398	70 45
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0018	4.8832	2.2271	74 04
4.0	2.0	1.6330	0.7721	0.1278	0.5112	0.7906	0.8165	19 06
"	2.5	1.8257	"	0.0585	0.2340	1.4256	1.3168	40 54
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.1088	1.9371	1.6039	50 57
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0264	2.8480	1.9266	61 48
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0076	3.7082	2.0976	67 48
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0024	4.5415	2.1998	71 39
5.0	2.5	1.8257	0.6721	0.0585	0.2925	1.1582	1.1266	32 40
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.1360	1.7006	1.4828	45 27
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0330	2.6132	1.8611	58 15
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0095	3.4509	2.0657	65 06
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0030	4.2554	2.1684	69 28
6.0	2.5	1.8257	0.5832	0.0585	0.3510	0.8835	0.9001	23 07
"	3.0	1.9640	"	0.0272	0.1632	1.4815	1.3529	39 58
"	4.0	2.1381	"	0.0066	0.0396	2.4047	1.7938	54 55
"	5.0	2.2361	"	0.0019	0.0114	3.2268	2.0133	62 37
"	6.0	2.2953	"	0.0006	0.0036	4.0080	2.1391	67 23