

# No. 274

(昭和十八年十一月發行)

## 絶對粘度及び塑性度の測定法に就て

Über die Messmethode der Viskosität und der Plastizität,  
T. Kobayasi, K. Murakawa und T. Koyama.

所員 小林 辰男  
所員 村川 梨男  
技手 古山 辰男

### 目次

第一章 緒言	141
第二章 流體の粘性と塑性と弾性と履歴現象	142
第三章 細管中の流速の計算と各種補正の検討	146
1. 細管中の流速の計算	146
2. 層流の起る流速の範圍	148
3. 細管中に於ける試液の温度上昇	149
4. 液の運動エネルギーに對する補正	150
5. 管端の非並行流に對する補正	152
6. 管の下端に垂下する液滴の影響	153
第四章 絶對粘度計の試作(構造と使用法)	160
第五章 細管の檢定	164
第六章 試液が塑性を有する場合	167
1. 液體の塑性度を表す定數の選擇	167
2. 細管に依る塑性定數の測定	168

### 第一章 緒言

本報告は著者の一人(小林)が、日本學術振興會第7特別委員會(航空燃料及び潤滑油)の委員として、同委員會の囑命により、他の二人の共力を得て、潤滑油の絶對粘度及び塑性度の測定法を研究した結果であつて、同委員會の許諾を得て茲に發表するものである。

絶對粘度即ち粘性係數の測定に利用せられる方法(直接測定出来る他の諸量の數値から、理論的嚴密に粘性係數を算出し得る方法)は主として次の三つである。第

一は、二つの圓嚮（一つは中空）を同軸に重合せ、兩者の間隙に試液を充たし、一方を軸の周りに回轉せしめるとき、試液を通じて他方に及ぼす力を測る方法である。第二は、試液をして細管中を流過せしめ、其の際の細管の抵抗から粘性係数を算出する方法である。第三は、金屬其の他で作つた小さい球を試液中を沈下せしめ、其の終速度を測つて Stokes の式で粘性係数を算出する方法である。（粘度の比較測定に利用せられる方法は此の外にまだ色々ある）。

此等の中、第一の方法は、第二節に述べる様に、理論的考察に便利であるが、精密度の高い装置を作ることは極めて困難である。第三の方法は絶対粘度を測るには便利でない。（比較測定には屢々用ゐられる）。従つて、以下に述べんとする所も第二の細管を用ゐる方法である。此の方法の有利な點は、1. 構造が簡單で、装置の製作費が低廉であること、2. 試液が少量ですむこと、3. 温度を一定に保つことが比較的容易であること、4. 理論計算が正確で、近似を含まないこと、5. 補正項が極めて小さいこと、6. 直接觀測せられる諸量（寸法、時間、重量等）の精密測定が容易なること等である。

著者が試作せる粘度計（第四節記載）は精密度が  $1/1000$  を下らない様に種々の點を考究してある。（粘性係数は温度による變化が大きい爲め、實際には  $1/1000$  まで測定することは稀である）

## 第二章 液體の粘性と塑性と弾性と履歴現象

流體が運動して居るとき、流體内部にズレ (Shear) が生じつゝある處には、内部摩擦による内力が働いて居る。問題を簡單にする爲に、流體の運動を定常的であるとし、流體内部には單なるズレ (Simple shear) が進行して居ると考へる。即ち直角座標に於て、運動の方向を  $x$  とし、 $x$  方向の速度  $u$  が  $z$  軸の方向に變化して居るとすれば、流體のズレの進行する速度は  $du/dz$  であつて、此の爲に内部摩擦に因る内力  $X_z$  が働いて居る。  $1\text{ cm}^2$  を通じて働くズレの内力 (剪斷應力) を  $\tau$  で、ズレ進行の速度を  $\sigma$  で表すとき、 ( $X_z \equiv \tau$ ,  $du/dz \equiv \sigma$ )。

$$\tau = \eta \sigma$$

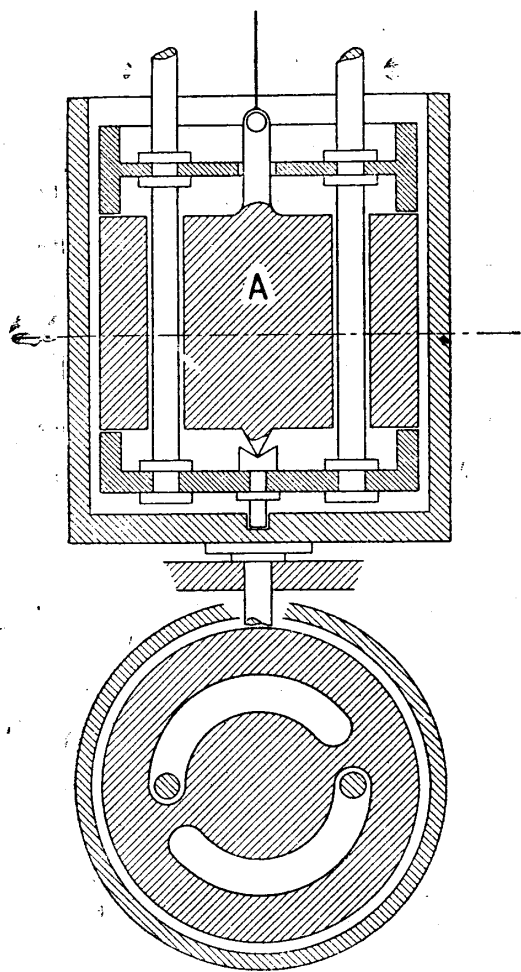
(1)

と置いて、 $\eta$  を粘性係數又は絶対粘度と稱へる。氣體及び大多數の液體では、同じ温度同じ壓力の下に於ては  $\eta$  は一定であつて、 $\sigma$  に無關係である。種々の液體に就いて此の條件が完全に満足せられて居ることは、多數の實驗によつて確められて居る。例へば Duff<sup>(1)</sup> は水及び石油に就いて速度傾度の非常に廣い範圍 (石油に就いては  $0.2 \sim 20\,000\text{ cm/秒/cm}$ ) に互つて  $\eta$  の一定なることを實測證明して居る。粘

(1) A. W. Duff: Phil. Mag. (6), 9, 685 (1905).

性係数  $\eta$  が速度傾度  $\sigma$  に無関係な液體を正常粘性流體又は Newtonian liquid と稱へる。

然るに膠質液及び凝固點より餘り高くない温度の油脂等に於ては、粘性係数は速度傾度によつて多少とも變化する。此の様な性質を吟味説明するには、Couette (1) 型即ち同軸圓嚮型の粘度計に依るのが便利である。第1圖は同軸圓嚮型粘度計の一種の略圖である。



第 1 圖

第1圖に於て、試液は内外圓嚮の間に入れる。外方の圓嚮を任意の等速度で回轉させるとき、試液の粘性に因つて内方の圓嚮 A の側面に接線方向の力が働く。内方の圓嚮は弾力性の針金で吊下してあつて、之に働く回轉力能率  $M$  に比例する角  $\theta$  だけ廻つて靜止するから、 $\theta$  を測つて  $M$  を知ることが出来る。圓嚮 A の上下には A と半径の等しい固定した圓嚮があつて、A の上下面に粘性に因る力が働かない様になつて居る。此のやうな装置では、内外圓嚮間の間隙が圓嚮の半径に比べて小さければ、液の中に起るズレ進行の速度は A の側面と外方圓嚮との間全體で近似的に一様と見て差支ないから、 $\tau$  と  $\sigma$  との間の關係が全く單純になる。圓嚮 A の長さを  $L$ , A の半径と外嚮の内半径との平均を  $R$ , 内外圓嚮間の間隙を  $d$ , 外嚮の回轉角速度を  $\omega$  とすれば、

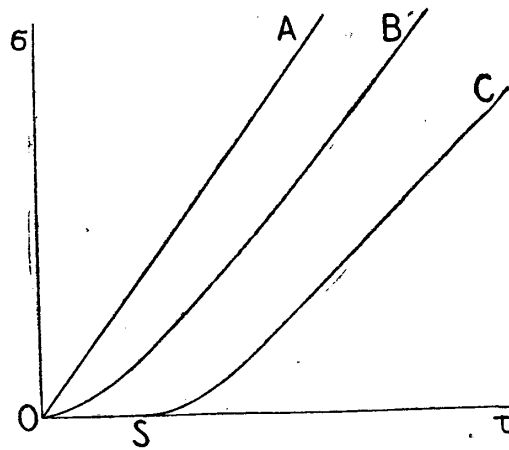
$$\tau \approx \frac{M}{2\pi R^2 L} \quad \sigma \approx \frac{R\omega}{d} \quad (2)$$

であるから、 $\omega$  と  $\theta$  とを測れば直に  $\sigma$  と  $\tau$  とを知ることが出来る。

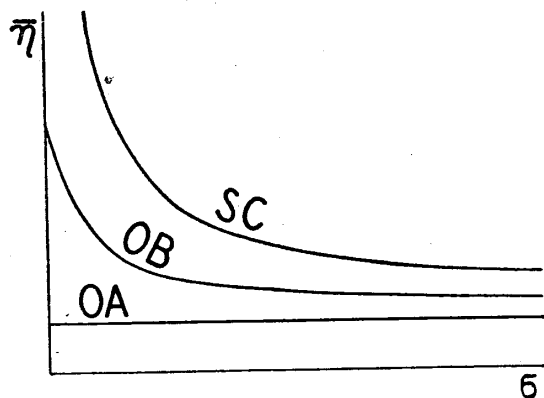
(1) M. Couette: Ann. d. chim. et phys. (6), 21, 433 (1890). Couette 以後多數の文献があるが省略する。

此の装置を用ゐて種々の液體の粘性を検べるとき、 $\omega$  従つて  $\sigma$  を色色に變へて、各の場合の  $\tau$  を測るときは、第2圖に示す様な色々の結果が出る。圖中、直線 OA は正常粘性流體の場合であつて、此の場合には粘性係數  $\eta = \tau/\sigma$  は  $\sigma$  に關せず一定である。膠質液又は凝固點に近い温度の油脂等では、OB 又は SC で示す様な曲線になる。此等の場合には曲線上の各點の見掛けの粘性係數  $\tau/\sigma$  は  $\sigma$  と共に變化する。即ち  $\eta$  と  $\sigma$  との關係を圖示すれば第3圖の様になる。SC の場合の様に、或る有限の内力  $\tau$  が働いて始めてズレの起る性質を塑性 (plasticity) と云ふ。

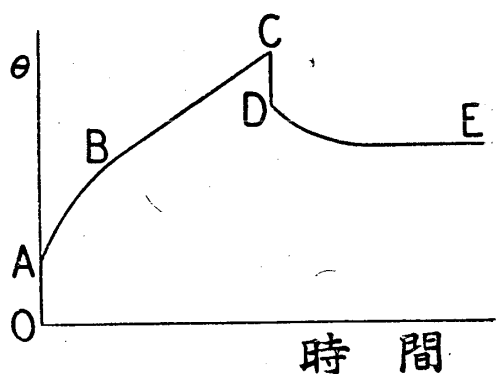
同軸圓筒型の粘度計には、主として粘度の非常に高い物質の試験をする爲め、一方の圓筒を固定し、他方の圓筒に任意の回轉力能率を働かせて、其の回轉速度を觀測するものがある。此の装置に粘度の極めて高い物質を入れ、一定の回轉力を働かせて、回轉角  $\theta$  の増加して行く狀況を觀測すると、一般に第4圖に示す様な變化をする。即ち回轉力を働かせると直に OA だけ回轉する。これは通常の弾性に因るものである。次に粘性 (塑性) 變形に屬する回轉が進行する。其の速度は初め大きく、次第に減少して B で示す邊から直線 ( $\eta$  が一定) になる。C 點で回轉力を取去ると、先づ弾性に因る回轉



第 2 圖



第 3 圖



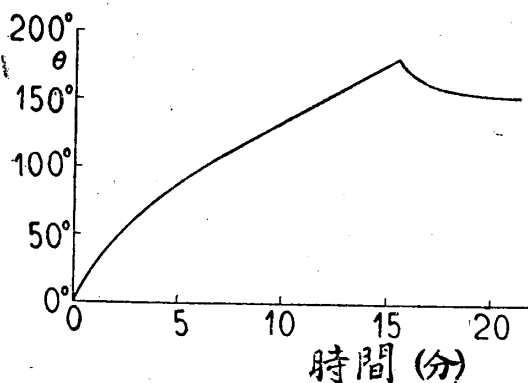
第 4 圖

角 CD だけ戻る。猶ほ観測を続けると、曲線 DE で示す様に徐々に或る角だけ元に戻つて、次第に一定の角に落附く。即ち一時的履歴現象を呈する。これは一種の弾性的變形が物質内に漸次貯へられ、B 點の邊で飽和し、歪力を取去れば復た徐々に元の状態に還るものである。此の現象の大部分は、一時的不等方に因るものと考へられる。膠質液や分子の大きい油脂の中にズレの運動が起ると、隣接分子間に働いて居た結合が切れ、ズレが進行して居る間は分子の向きや配列に一時的不等方性が生ずる場合が多い。此の事實は、高周波による媒電定数の測定等によつて観測することが出来る。

粘度測定に當つて之に關する重要な問題は、此の様な不等方性が、液中にズレの運動が始まると直ぐに起り、運動が止むと直ぐに元の状態に復する（繰返し測定の場合）か否かである。此の變化に或る程度の時間を要し、従つて液の履歴現象が無視出来ないときには、液の性質を表はすに更に幾つかの定数を要し、粘度の測定は非常に複雑になる。油脂類に對して履歴現象を正確に測定した結果は未だ見當らないが、液状の油では常に無視出来ると考へられて居る。

細管を使用して粘度を測定する場合に、履歴現象が少しでもあれば、管の入口附近に不等方性の完成して居ない部分が存在すること明であるから、管を長くして其の影響を小さくする外はない。

第4圖は Braunbek<sup>(1)</sup> が同軸圓筒型の特殊の粘度計を作つて Chatterton compound (一種の瀝青に gutta-percha を混ぜたもの) に就いて行つた實測結果の一つである。



第 5 圖

Trouton 及び Andrews<sup>(2)</sup> が pitch に就いて類似の方法で行つた測定結果を第5圖に示す。此の場合には固體的弾性は現れて居ない。故に液状油類に對しては弾性變形は考へなくてよいこと明である。又 pitch の場合でも  $\sigma = \tau$  曲線は OB 型である。

本報告に於ける粘度測定には、履歴現象は無視出来ると假定する。而して先づ正常粘性流體の粘度測定法に就いて詳述し、次に塑性を有する液體の粘度及び塑性の程度を測定表示する方法を考究する。

(1) W. Braunbek: Zeit. f. Phys. 57, 501 (1929).

(2) F. T. Trouton and E. S. Andrews: Proc. Phys. Soc. London, 19, 47 (1909).

### 第三章 細管中の流速の計算と各種の補正の検討

#### 1. 細管中の流速の計算

粘性係数の精密な測定をするのに、第6圖に示す様な小さい液槽の下方に細管を挿込んで、細管を通して液を流出せしめる装置を考へる。液の上方の表面には気圧をかける場合もある。

粘性流體が細管を流過する場合の細管の抵抗に關しては古くから色々の發表がある。抵抗が管の内徑の四乗に比例することを初めて實驗的に發見したのは Poiseuille<sup>(1)</sup> である。此の問題を理論的に正しく解いたのは Hagenbach<sup>(2)</sup> が初であつて、其れ以後多數の書物に記載せられて居るが、粘度計に關する計算に使用する場合に考へなくてはならない色々の補正を吟味する爲に、途中で導入せられる幾つかの假定に注意して、此處に之を記述して置く方が便利である。(字下線を引いた所は假定である)

こゝでは液體のみに就いて考へるから、流體は不縮 (incompressible) と考へる。又、管内の流は定常的層流であると假定すれば、粘性流體の運動方程式及び連続方程式は次の形になる。(慣性の項が省略してある)

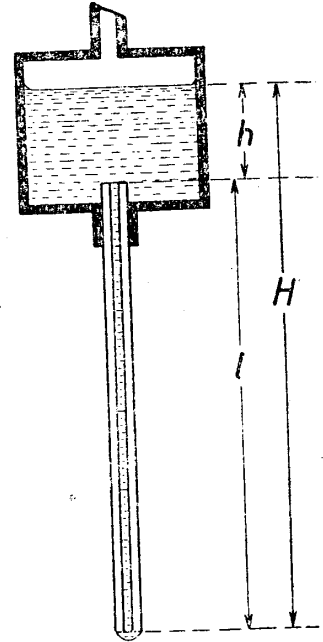
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - \rho X &= \eta \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \rho Y = \eta \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \rho Z = \eta \Delta w, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \quad \text{従つて} \quad \Delta p = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

式中、 $p$  は壓力、 $X, Y, Z$  は質量に働く外力の三成分、 $\rho$  は流體の密度である。粘性係數  $\eta$  は此處では定數と考へる。(塑性を有する流體に就いては後で別に考究する。)

細管は鉛直にして用ゐるとし、管軸と座標の  $z$  軸とを一致させる。管内の流は管軸に平行なる層流と考へるから、流速は  $w$  ばかりで、 $u=0, v=0$  である。故に

(3) の各式は

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = \eta \Delta w, \quad \frac{dw}{dz} = 0 \quad (4)$$



第 6 圖

(1) J. L. M. Poiseuille: Mém. Savants Étrangers, 9, 433 (1846).

(2) E. Hagenbach: Pogg. Ann. 109, 385 (1860).

従つて

$$\frac{d^2p}{dz^2} = 0 \quad (5)$$

となる。式中  $g$  は重力加速度である。(5) を二回積分すれば

$$\frac{dp}{dz} = k, \quad p = kz + p_0 \quad (6)$$

が得られる。但し、 $k$  と  $p_0$  とは常數である。即ち管内の壓力は直線的變化をする。(6) の第一式を (4) の第三式に入れると

$$\eta \Delta w = k + g\rho \quad (7)$$

となる。管軸からの距離を  $r$  で表せば、 $r^2 = x^2 + y^2$  であるから

$$\Delta w = \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

となる。故に (7) は次の形になる。

$$r \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{dw}{dr} = \frac{k + g\rho}{\eta} r \quad (8)$$

之を積分すれば

$$r \left( \frac{dw}{dr} \right) = \frac{k + g\rho}{2\eta} r^2 + C$$

となる。此の式が  $r=0$  で成立する爲には  $C=0$  でなくてはならない。故に

$$\frac{dw}{dr} = \frac{k + g\rho}{2\eta} r \quad (9)$$

である。之を積分して

$$w = \frac{k + g\rho}{4\eta} r^2 + w_0 \quad (10)$$

が得られる。細管の内半径を  $R$  で表す。液は管壁でとらないと假定すれば (これは液が管壁を潤滑す場合には勿論満足せられて居る。氣體の場合には重要な問題となる)  $r=R$  で  $w=0$  でなくてはならない。故に (10) は

$$w = \frac{k + g\rho}{4\eta} (r^2 - R^2) \quad (11)$$

となり、 $w_0 = -(k + g\rho)R^2/4\eta$  は管軸に於ける流速となる。

第6圖の場合、管の上端に於ける液の静壓は  $g\rho h$  である。又管の下端の液壓が外氣壓に等しいと考へ（此の際管の下端に垂下せる液滴の影響が無視してある）且つ上記の管内流速の計算が細管の両端まで適用出来ると假定すれば、(6)の第二式で  $p_0 = 0$ 、従つて管の上端の壓力は  $kl$  となる。故に  $kl = g\rho h$  即ち  $k = g\rho h/l$  である。依つて第6圖の場合、次の關係が成立つ。

$$k + g\rho = \frac{g\rho(h+l)}{l} = \frac{g\rho H}{l} \quad (12)$$

此のとき、流速  $w$  は（下向きを正に取つて）

$$w = \frac{g\rho H}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (13)$$

で與へられる。

單位時間に管を通過する液體の量  $W$  は、(13)を積分して得られる。即ち

$$W = \int_0^R 2\pi r w dr = \frac{\pi g\rho H R^4}{8\eta l} \quad (14)$$

である。従つて、此の様な實驗で粘性係數  $\eta$  を求める場合には

$$\eta = \frac{\pi g\rho H R^4}{8lW} \quad (15)$$

である。或は、液を流過せしめる様に働く力全部の作用を壓力  $P$  で代表せしむれば、 $P = g\rho H$  であるから、

$$\eta = \frac{\pi P R^4}{8lW} \quad (15')$$

である。液の上の面に氣壓をかける場合には、其の壓力も此の  $P$  に含められる。(15)の右邊の諸數値を c. g. s. 單位で入れれば、粘性係數  $\eta$  も c. g. s. 單位即ち絶対粘度が出る。粘性係數の c. g. s. 單位を poise と云ふ。

## 2. 層流の起る流速の範圍

細管内の平均流速を漸次増大して或る値以上に達せしめると、粘性係數が外見上急激に増加することは、既に Poiseuille が多數の管に就いて觀測して居た、其の後 Reynolds<sup>(1)</sup> の理論的及び實驗的研究によつて、此の現象の色々の點が明瞭になつた。此の外見的粘性の急増は、管内の流れが層流 (laminar flow) から亂流 (turbulent

(1) O. Reynolds: Phil. Trans. A, 174, 935 (1883); 177, 171 (1886).



flow)に移る爲であつて、亂流が起れば所謂渦流粘性 (eddy viscosity) が現れて、流れに對する管の抵抗は甚しく増大し、且つ壁面で液體がこると同じ勘定になる。

總べて流體の運動の様態は流體の Reynolds 數と稱する無次元の數値によつて定まる。細管中を流體が流れる場合の Reynolds 數  $R$  は

$$R = \frac{\bar{w} D \rho}{\eta} \quad (16)$$

で與へられる。但し  $D$  は管孔の直径、 $\rho$  は流體の密度、 $\bar{w}$  は管中の平均流速であつて、 $W$  を切口面積で割つたものである。多數の實測の結果によれば、 $R$  が 1400 から 2000 位に達したとき、層流が亂流に移る。此の値は、流體が管に流入する前の運動状態 (渦動の多少) によつて、上記の範圍で變化する。従つて管の入口の形状の影響が大きい。

流體の粘性係數を測定する場合には、亂流を起す様な大きな流速を與へてはならないこと勿論である。即ち  $R$  が 1400 よりも遙に小さい様な速度で止めなくてはならない。此の注意は、粘度測定法を記述した書物には皆書いてある。併し、潤滑油の様な粘い油の粘度測定の場合には、其の様な大きな速度を使用することは無い。例へば、著者の試作した粘度計では、内徑約 3 mm、長さ 20 cm の細管を用ゐ、壓力は水柱で 20~100 cm 位をかけるから、粘性係數 10 poise の油に就いて測定を行ふとき  $R$  の値は僅に 0.0075~0.037 の程度である。液面にかける壓力を増加して流速を餘り大きくすると、Reynolds 數の心配よりも次に述べる溫度上昇の方が先に問題になる。

### 3. 細管中に於ける試液の溫度上昇

粘性流體をして細管を通過させれば、流體の溫度は上昇する。細管内の一點に於ける、單位體積當り單位時間中の仕事を  $A$  とすれば、 $A$  は  $\eta \left( \frac{dw}{dr} \right)^2$  で與へられる。故に、(9) と (12) とから

$$A = \frac{P^2 r^2}{4l^2 \eta} \quad (17)$$

が得られる。此の仕事が熱に變るから、發熱は管軸で 0 で、管壁で最大になる。而して、管壁に近い程  $w$  が小さいから、熱傳導が全く無いと假定すれば、管壁附近の液は溫度が甚しく上昇することになる。實際は此の熱は大部分管壁に取去られるであらうが、假に此の熱が全部液の溫度上昇になると假定すれば (管は熱を傳へず、液は熱傳導が良いと假定すれば)、液が管を通過する間に液の溫度上昇の程度  $\Delta T$  が計算出来る。これは (17) を積分しても求められるが、それよりも簡単に、流出液の單位體積に對し全壓力  $P$  の成した仕事は  $P$  であるから、直に

$$\Delta T = \frac{P\rho}{Jc} \quad (18)$$

と書くことが出来る。但し、 $J$  は熱の仕事當量、 $c$  は液の比熱である。使用壓力を水柱 50 cm とすれば、 $\rho=0.9$ ,  $c=0.5$  の場合、 $\Delta T$  は  $2 \times 10^{-3}$  度となる。 $P$  を此の 10 倍(水銀柱約 37 cm) にしたときを想像すれば、溫度上昇は  $0.02^\circ$  (細管中の平均は  $0.01^\circ$ ) となるから、 $1^\circ$  につき粘度が 10% 變化する液では 0.1% の誤差が出る。試作粘度計で  $\eta=10$  の油を試験する場合とすれば、上記の壓力で  $R$  の方は 0.19 位にしかならない。

上記の計算は、熱を管に取りられないと假定したのであるから、實際の溫度上昇は之よりも遙に小さいこと明である。然かし、壓力を更に大きくし、一つの熱電對の一接點を細管の入口附近に置き、他の接點を管端に垂下する液滴の中に入れれば、實際に溫度が上昇して居ることを知ることが出来る。

#### 4. 液の運動エネルギーに対する補正

細管中の流速を計算する際、細管内には初から層流が出来て居ると考へて、(3) の運動方程式には加速度の項が省略してある。然るに管の入口附近で液體は加速せられるから、此の爲にエネルギーが消費せられる。之による補正は已に Hagenbach が算出して居たもので (Hagenbach の補正とも稱へられる)、此の補正項を (15') 式に附加して、次の形のものが用ゐられて居る。

$$\eta = \frac{\pi PR^4}{8lW} - \frac{mW\rho}{8\pi l} \quad (19)$$

式中  $m$  は常數の係數であつて、初め Hagenbach は  $m=0.79$  と出したが、後 Couette<sup>(1)</sup> Finkener<sup>(2)</sup> 及び Wilberforce<sup>(3)</sup> は  $m=1$  となし、Boussinesq<sup>(4)</sup> は  $m=1.12$  と出した。

細管の一つの切口の上で、管軸から  $r$  なる距離に在る微小面積を  $dS$  とすれば、之を單位時間に通過する液の質量は  $\rho wdS$  である。これを加速するに費されたエネルギーは  $\frac{1}{2} w^3 \rho dS$  である。此の  $w$  に (13) の値を入れて、切口全面積に積分すれば、液を加速する爲に 1 秒間に費される仕事の量  $A$  を與へる式が得られる。

$$A = \int_0^R \pi r w^3 \rho dr = \int_0^R \frac{\pi \rho P^3}{4^3 \eta^3 l^3} (R^2 - r^2)^3 r dr = \frac{\pi \rho P^3 R^8}{512 \eta^3 l^3}$$

(1) Couette 前出。

(2) Finkener u. R. Gartenmeister: Zeit. phys. Chem. 6. 524 (1890).

(3) L. R. Wilberforce: Phil. Mag. (5), 31, 407 (1891).

(4) Boussinesq: Compt. Rend. 110, 1160 (1890); 113, 9 (1891).

これに (14) の関係を入れると

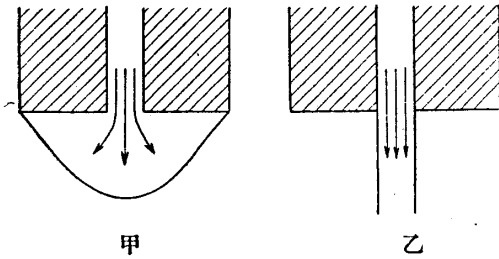
$$A = \frac{\rho W^2 P}{8\pi\eta l} \quad (20)$$

となる。此の仕事に消費せられる圧力を  $p$  と置けば、 $A = pW$  であるから

$$p = \frac{\rho WP}{8\pi\eta l} \quad (21)$$

となる。

液の粘性に打勝つて液を運動させる圧力は、全圧力  $P$  から此の  $p$  を引いたものであるから、(15') の  $P$  の代りに  $P - p$  を入れると、(19) 式が得られる。而して  $m = 1$  である。



第 7 圖

管の上端部に於て液が加速せられる所では、上記の計算は極めて實際に近いものと想像せられる。併かし、管の下端から液は管内に於けると同じ速度分布で放れるのではない。第 7 圖甲の様に管の下端に液滴が吊下して居る場合には、液流は滴内に入ると同時に流線が發散するから、

Bernoulli の定理の示す通り、液の運動エネルギーの或る部分は管の下端に負圧として働き（粘性に對する仕事になる部分もある）、管の上端附近で消費せられた壓力  $p$  の或る部分は此點で返還せられることになる。従つて  $m$  は 1 よりも餘程小さいわけである。

液に働く壓力が比較的大きいときは、第 7 圖乙の様に液は管の下端から棒状になつて連続流出する。此の液棒の中では、細管中に於ける様な層流は勿論出來て居ない。液が管端を放れて少し進む間に、液の速度は殆んど一樣になると考へなくてはならない。（表面張力が働いて居るから極めて小さい層流は殘存し得る）故に、管を出るとき液の平均速度を採つて、液が持つて逃げる運動エネルギーを計算して見ると、1 秒間に流出する液量は  $W$  で、其の平均速度は  $W/\pi R^2$  であるから

$$A = \frac{\rho W^3}{2\pi^2 R^4} \quad (22)$$

となる。之に (14) の関係を入れると、此の  $A$  は (20) の  $A$  の  $1/2$  になる。故に此の場合には  $m = 0.5$  である。併かし、管を出た所で液の粘性によつて流出液の

軸部が減速せられ外部の層が加速せられる際、液棒の太さは管孔の太さとは違つたものになるから、上記の計算も近似に過ぎない。第 18 圖乙の寫眞で見ると、液流は管孔を出てから約 2 mm 位管孔と同じ太さで降下し、それより下では拋物線的に次第に細くなつて居る。此の細くなるのは重力によつて加速せられる爲であることは云ふまでもない。而して、上部の約 2 mm の間で層流が消失するものと考へてよからう。

上述の様に、運動エネルギーに関する補正項の係数は正確に定め難い。Ostwald 型及び其の改造型、即ち細管の出口も亦液槽に通じて居る粘度計による測定結果に對し、Landolt Börnstein の表の第四版には補正は不要であるとして居るが、第五版には Erk が必要であると書いて居る。これは管を出た後の液の流線の形狀によつて何れともなるので、それを確めないで一概には云はれない。要するに係數  $m$  はよく分らない。故に粘度測定に當つては、出來得る限り此の補正項を無視出来る様な小さい流速を選ぶべきである。前述の試作粘度計で  $\eta=10$  の油を試験するのに、 $P$  を水柱 50 cm として、(19) の補正項  $W\rho/8\pi l$  の數値を求めて見ると  $0.0017$  にしかならない。潤滑油の様な粘い液の粘度を測る場合には、此の補正が無視出来る範圍で測定を行つて少しも不便は無い。(水の様に粘度の低いものゝ粘度を測る場合には (19) の第一項と第二項とが同程度になることがある)

##### 5. 管端の非並行流に對する補正

細管内の流速を計算するとき、(12) に於て細管内の流れの状態が管の兩端まで同様であると假定した。これは勿論十分には満足せられて居ない。靜止して居た液が管内に流入した際、管の上端部では (13) の示す流速分布に達する前に之と異なる分布をして居て、従つて流れが管軸に平行でない部分が存在すること明である。此の事は早く Couette が指摘して之に對する補正を加ふべきことを述べて居る。此の補正項の理論的計算は極めて困難であるから、實驗によつて其の大きさを見出さなくてはならない。此の補正は、管端附近で (14) が示すよりも管の抵抗が少し多いのであるから、管の有効長を實際の長さよりも少し大きいと思へばよい。即ち、(14) 又は (15) の管長  $l$  の代りに  $l+\lambda$  と置いて、此の  $\lambda$  の値を見出せばよい。實驗によつて  $\lambda$  を求めるには、徑の全く相等しい細管の長さの異なるもの二本を取り、同じ液を同じ壓力で流過せしめると、同一時間中の流出量の比  $W_1/W_2$  は  $(l_2+\lambda)/(l_1+\lambda)$  に等しいから、 $\lambda$  を算出することが出来る。

斯く理窟は簡單であるが、實際に多數の人々の實測結果に適用して見ると殆んど一定の結論は得られない。例へば、Grüneisen<sup>(1)</sup> は極めて多數の實測結果を検討し

(1) E. Grüneisen: Wiss. Abh. Phys. Tech. Reichsanstalt, 4, 151 (1905).

て、運動エネルギー補正も管端補正も之を施せば却つて結果がまちまちになると云つて居る。又、Thorpe 及び Rodger<sup>(1)</sup> は運動エネルギーの補正は必要であるが、管端の補正は不要と云つた。Bingham<sup>(2)</sup> は両方共必要と主張した。Dorsey<sup>(3)</sup> は両方を一緒にまとめて、Reynolds 数が 10 より小さい場合には  $\lambda=1.146R$  と置けばよいと云つた。但し  $R$  は管の半径である。

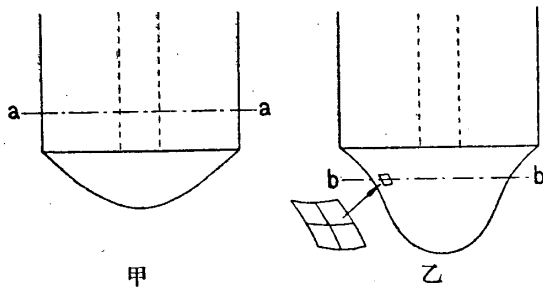
Schiller<sup>(4)</sup> は液が管に入つたときから (13) の速度分布になるまでの管の抵抗を理論的に計算して、管端の補正として

$$\lambda=0.8R \quad (23)$$

と出した。然し著者の考では、液は管端を入るとき已に大體 (13) の速度分布になつて居るもので、管外に於て管口に収斂する流れに速度傾度があり、従つて粘性による仕事も消費せられると考へる方が正しい。(オルガン管の開端の補正、水銀電氣抵抗の管外の抵抗等は外見上類似の問題である) 従つて Schiller の計算に其の儘同意し得ないのであるが、今のところ是れ以上に據所が無い。此の補正は流速を如何に小さくしても利いて来るから最も重要なのであるが仕方がない。著者は實驗的に此の補正を検討する準備中である。今の所、(23) を使用し、此の係数 0.8 が多少違つて居ても正確度に影響しない様な長い管を選ぶ外はない。

### 6. 管の下部に吊下する液滴の影響

前にも述べた様に、液の平均流速を或る程度より大きくすると(前述の試作粘度計では  $\eta=10$  の油に對し水柱 40 cm 以上の全壓力  $P$  が働くとき) 液は細管の下端から棒状になつて連続流下する。平均流速が此の臨界値よりも小さいときは、細管の下端には常に液滴が垂下して居て、滴は次第に大きくなり、或る一定の大きさになると其の一部が切れて落ち、あとには或る一定の大きさの滴が残る。



第 8 圖

滴の形は、管の外徑によつて異なるけれども、大體第 8 圖に示す様な變化をする。同圖甲は滴の一部が切れて落ちた直後の形、乙は滴が大分伸びたときの形である。此の様な場合に、液の中の壓力と外氣の壓力とが相等しくなつて居る所は、勿論管

- (1) T. E. Thorpe and J. W. Rodger: Phil. Trans. A, 185, 397 (1894).
- (2) E. C. Bingham and G. F. White: Zeit. phys. Chem. 80, 684 (1912).
- (3) N. E. Dorsey: Phys. Rev. (2), 28, 833 (1926).
- (4) L. Schiller: Zeit. f. angew. Math. u. Mech. 2, 96 (1922).

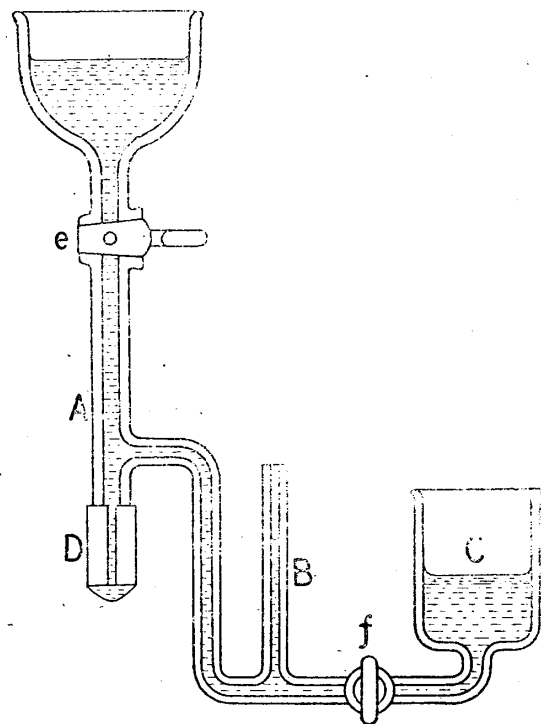
の下端ではなく、aa 及び bb で示す様な高さに在る。即ち表面張力の爲、滴の最下部の壓力は外側の氣壓よりも液柱で 2~5 mm 位高く、甲では、管孔の上部を塞いで液の流下を止めたとき、aa の様な所が大氣壓と等しくなり、乙では bb の高さの所で、滴の表面の平均曲率が 0 になり、従つて内外の壓力が等しくなつて居る。(縦の方向の外向きの曲率と水平方向の内向きの曲率とが等しくなつて居る)

下に示す實測結果で見れば、此の様な水準 (aa 又は bb) の高さは、管の下端から上方約 2 mm, 下方約 1 mm に及ぶものであるから、之を液頭 P (試作粘度計では平均液頭約 250 mm, Saybolt 粘度計では 82 mm) に較べて無視することは出来ない。此の故に、著者は以下に述べる様な研究を行つて、此の補正の處分法を考究した。

水平(下向き)な固體表面から垂下する液滴の形狀に對する理論的研究は古くから色々行はれて居るが、今の場合液壓が大氣壓に等しくなつて居る水準の高さを計算で出すのは極めて困難であつて、實驗に依つて求める方が遙に容易である。著者の行つた實驗方法に二つある。第一は第 9 圖に示す装置によつて直接に測定する方法である。

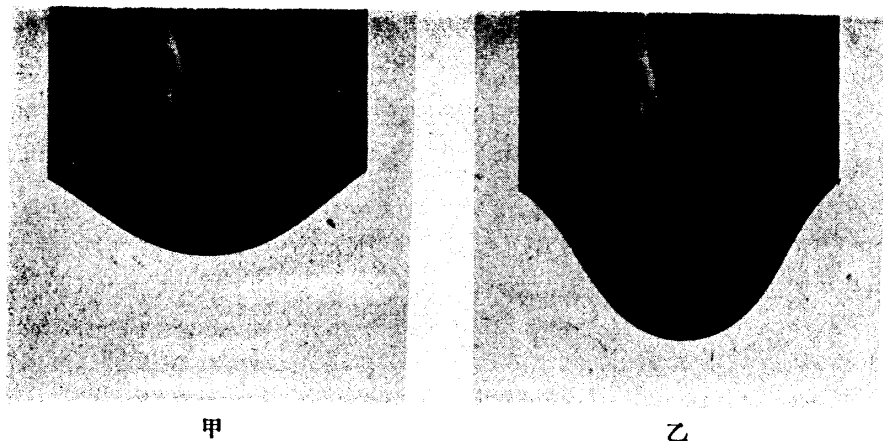
第 9 圖の装置は全部硝子製で、A 管の下端に、粘度計の細管として使用する様な色々の外徑を持つ短い硝子管 D を貼附けて測定を行ふ。滴の形は、液の流下速度を十分小さくすれば、滴成長の全週期を通じて、液の比重と表面張力と D 管の外徑とで定まる。(管孔の徑には無關係であるが、管孔が或る程度以上に大き

くなると滴が不安定になることは古くから知られて居る) コツク f は閉ぢて置く。コツク e を開いて、D の下端の滴が求むる大きさに成長したとき e を閉ぢ、液内の壓力が外氣壓と等しい高さ (第 8 圖の aa 又は bb) を水準儀を用ゐて管 B の液面で測定する。B 管を餘り太くすると、B 管内の液面が少し下つて滴は成長し落下するから、B 管は適宜に細いものを用ゐる。従つて B 内の液面は液の表面張力に



第 9 圖

よる吊上りがあるから、此の補正を加へなくてはならない。此の補正値を測定に依つて求めるには、D の下端を軽く塞ぎ、コック f を開き、B と C との液面を比較すればよい。C は表面張力による吊上りの利かない程度の太い管である。B 管を十分細くし、且つ其の内径を精密に測つて置けば、上記の測定によつて液の表面張力の値をも算出することが出来る。斯くして、D の下端に或る長さの滴が垂下して居るとき液内の壓力が外氣壓に等しい水準の高さを、D の下端から測つた値を求め、これを滴の長さに対して記録する。



第 10 圖

第二の方法は、第 10 圖に示す様な液滴の廓大寫眞を取り、其の形を精密に測つて外氣壓に等しい水準の位置を求めるのである。それには、寫眞上で滴の最下端の曲率を測るのが最も便利である。

例へば第 10 圖甲の寫眞に就いて、顯微鏡の着いた縦横座標讀取機を用ひて、滴の最下端から 0.5 mm, 1 mm, 2 mm, 3 mm 等の高さの所の横幅を測り、其等の高さ以下の部分を圓周と假定して半径を計算すると、21.18 mm, 21.34 mm, 21.76 mm, 22.38 mm 等と出る。此等の値を高さに對して圖示して見ると直線に近い曲線の上に乗る。故に圖上外挿法により、高さ 0 即ち下端の曲率を求めると 21.04 mm と出る。又、管の幅と滴の長さとを寫眞上で測ると 51.64 mm 及び 12.94 mm である。(原寫眞は第10圖よりも大きい) 然るに管の實際の外直径は 8.25 mm であるから、寫眞の廓大率は 6.26 である。故に之で割つて、滴の實際の長さ 2.07 mm, 下端の曲率半径 3.36 mm が得られる。

此の液の比重と表面張力とは別に測定する。滴の下端の曲率半径を  $r$ , 液の表面張力を  $T$  で表せば、滴の下端の内部の壓力は外氣壓よりも高きこと 
$$p = \frac{2T}{r}$$

であるから、液の密度を  $\rho$  とすれば、滴の下端より上方

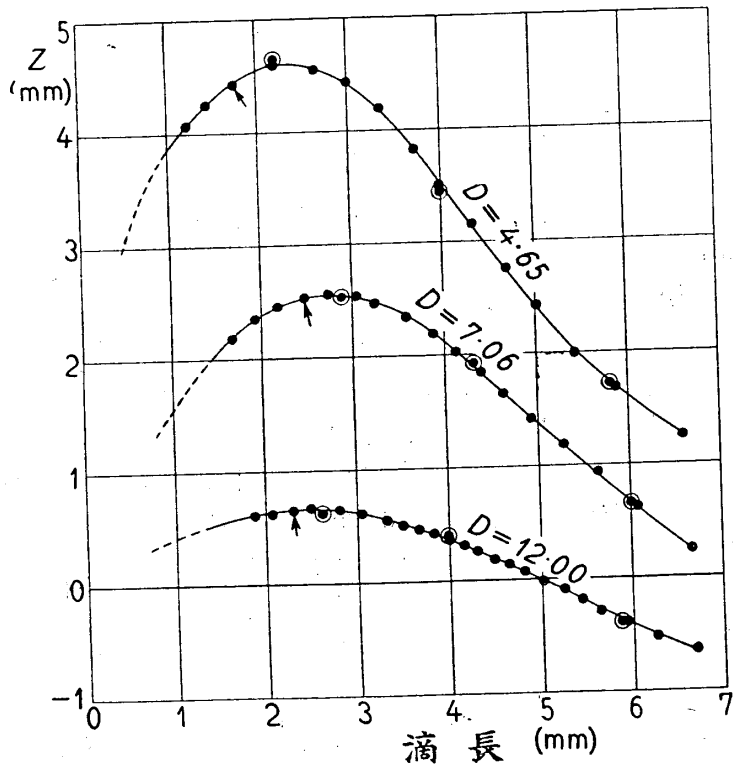
$$z = \frac{2T}{rg\rho} \tag{24}$$

の所が外気圧と等しい圧力になつて居る筈である。甲圖の場合には、 $T=31.6$  ダイ  
ン/cm,  $\rho=0.872$  であるから、 $z=2.20$  mm となり、従つて、管端より上方 0.13 mm  
の所に aa が在る。aa の様に此の位置が管端より上方に在れば、液の流下を止め  
て粘性の働きを無くしなくては、實際に此の位置が外気圧と等しい圧力にならない  
こと勿論である。

乙圖に就いて同じことを行へば、滴長 4.03 mm, 下端の曲率半径 2.125 mm と出  
るから、 $z=3.48$  mm, 従つて管端の下方 0.55 mm が bb の位置になる。

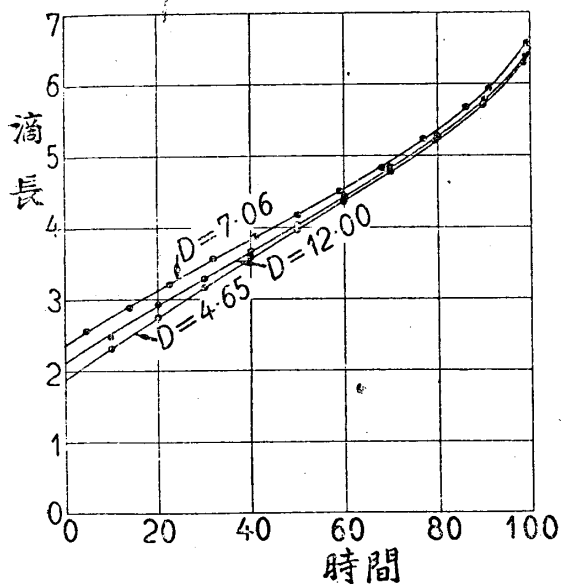
以上に述べた二種の方法で、同じ条件の下に於ける測定を行へば、補正值として  
必要な程度の精密度に於ては勿論完全に一致する。

細管の下端から、上述の外気圧と液圧との等しい水準までの鉛直距離を  $Z$  で表す  
ことにする。(  $Z$  は管端から上方を正とする)  $Z$  は粘度測定の際液頭の高さから引か

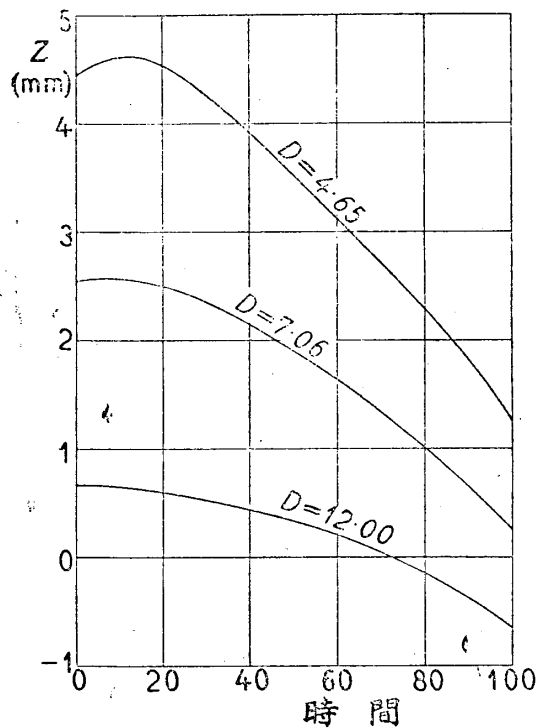


第 11 圖





第 12 圖



第 13 圖

なくてはならない補正值である。然るに  $Z$  は滴の長さと共に變化するから、第 9 圖の装置の  $D$  の所に外徑 4.65, 7.06, 12.00 mm の硝子管 (下端の面は細かい紙鏝で磨いてある) を附けて、水の滴を垂下せしめ、滴の長さを色々に變へて、 $Z$  の値を觀測した結果を圖示すれば第 11 圖の様になる。水の溫度は室温と殆んど等しくしたので、 $18^{\circ}\sim 19^{\circ}$  であつた。圖に二重丸で示した點は、同時に滴の寫眞を取つて第二の方法で計算した値である。滴は曲線の右端の長さで切れて落ちる。又、短い矢で示した點は、滴が切れて落ちた直後の長さである。

次に、同じ管の上端から、水を徐々に一定速度で流下せしめ、滴長が時と共に變化する状態を觀測した結果を圖示すれば第 12 圖の様になる。横軸の時間は、滴が一つ落ちてから次の滴が落ちるまでの時間を 100 として表はしてある。滴が落ちた後の残つた滴の長さは常に一定になる。此の圖によつて、滴長は全週期を通じて、管徑による差異が餘り大きくないことが分る。

此等二組の測定結果から、 $Z$  の値が時と共に如何に變化するかを圖示すれば (第 11 圖の横軸を時間に變へれば) 第 13 圖の様になる。

此の圖を方眼紙に正確に畫いて、方眼紙の目數を勘定して、 $Z$  の時間的平均値 ( $\bar{Z}$  で表す) を求めると、これが粘度測定の際液頭から差引くべき補正である。 $\bar{Z}$  の値は、管の外徑と液の表面張力と密度とで定まる。

第 13 圖の三曲線から求めた値は次の通りである。(18°~19° の水)

管の外直徑 (mm)	4.65	7.06	12.00
$\bar{Z}$ (mm)	3.32	1.75	0.225

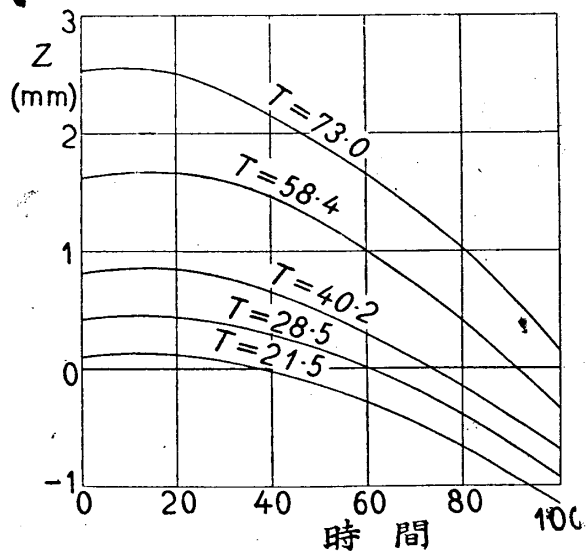
次に  $\bar{Z}$  の表面張力の大小に因る變化を見る爲め、水にアルコールを混和した液に就き、外徑 7.06 mm の管に對する  $\bar{Z}$  を測定した。其の結果は次の表の通りである。溫度は前と略々同じである。

アルコール %	0	4	20	50	100
表面張力 $T$	73.0	58.4	40.2	28.5	21.5
密度 $\rho$	0.9985	0.991	0.970	0.916	0.792
$\bar{Z}$	1.75	1.25	0.35	0.03	-0.26

此の場合の  $Z$  の變化は第 14 圖の通りである。粘度の高い液體に對しては第一の方法を用ゐることは困難である。此の場合には、滴の落ちる時間々隔を等分して數枚の寫眞を取り、第二の方法によつて  $Z$  を計算し、圖上に此等の點を取つて曲線で結び、前と同様に圖上積分に依つて  $\bar{Z}$  を求めることが出来る。

次に、粘い Veedol 油を用ゐて測定を行つた結果に就いて述べる。細管を通じて試油を極めて徐徐に流下せしめ、滴の落ちる間隔を十分長くし (3 分以上) 此の間に十枚前後の滴の廓大寫眞を取り、計算によつて  $Z$  を求めた。觀測結果の一例を次に示す。(滴長、曲率半徑及び  $Z$  の單位 mm)

溫度 29°, 表面張力 31.6, 密度 0.8718, 時刻は滴の落ちる間隔を 100 としたものである。



第 14 圖 D=7.06 mm.

管の外直径 8.25 mm.

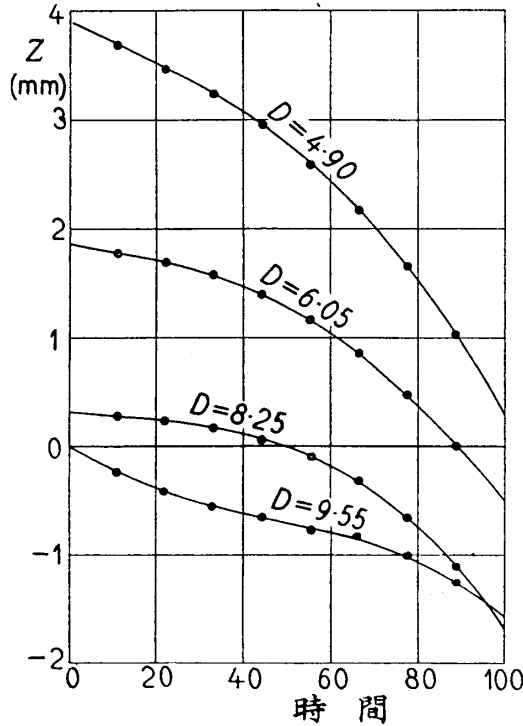
時刻	11.1	22.2	33.3	44.4	55.6	66.7	77.8	88.9
滴長	2.07	2.31	2.56	2.80	3.06	3.33	3.66	4.03
曲率半径	3.36	3.05	2.81	2.61	2.46	2.33	2.23	2.13
Z	0.13	0.115	0.08	0.03	-0.05	-0.15	-0.33	-0.55

此の様な Z の變化を、外直径 4.90, 6.05, 8.25 及び 9.55 mm の四つの管に就いて測定した結果を第 15 圖に示す。此等の曲線に依つて、前述の様に Z の時間的平均値  $\bar{Z}$  を求めると次の様になる。

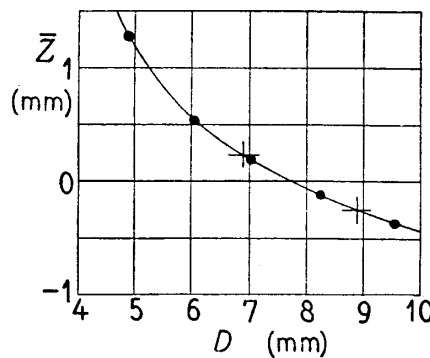
管の外径 (mm)	4.90	6.05	8.25	9.55
$\bar{Z}$ (mm)	+1.27	+0.54	-0.115	-0.365

第 16 圖は此の結果を圖示したものである。著者の試作粘度計の平均液頭は 250 mm であるから、細管の外直径を 6.9 mm~8.9 mm の範圍にすれば、 $\bar{Z}$  即ち液頭から差引くべき補正は、液頭の  $1/1000$  以下となり無視してもよいことが、此の圖に依つて分る。此の圖は、比重が 0.872, 表面張力 31.6 の液に對するものであるが、多くの油は常温附近で大概これに近い密度と表面張力とを持つて居り、密度と表面張力とは温度に依る變化が比較的小さいものであるから、上記の標準は油類に使用する粘度計に適用して一般に差支ない。

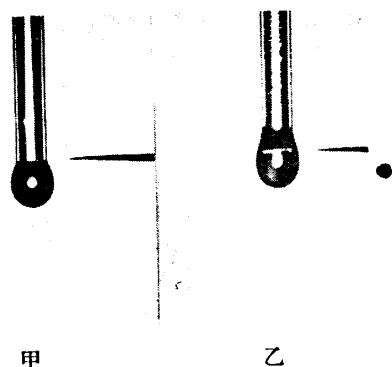
管の外径を餘り小さくすると、滴は管の下端に垂下せず、燐寸の頭の火藥の様な形になり、Z が非常に大



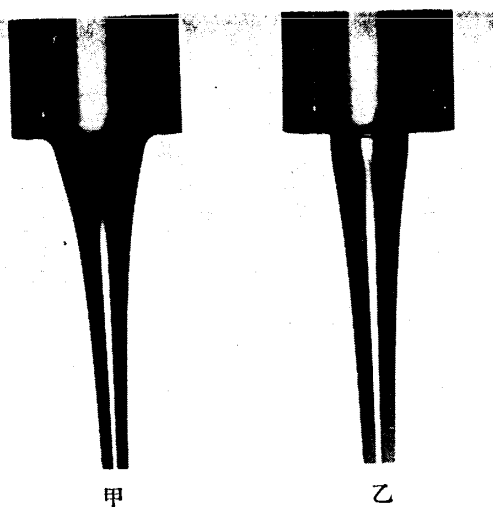
第 15 圖 Veedol 油



第 16 圖



第 17 圖



第 18 圖

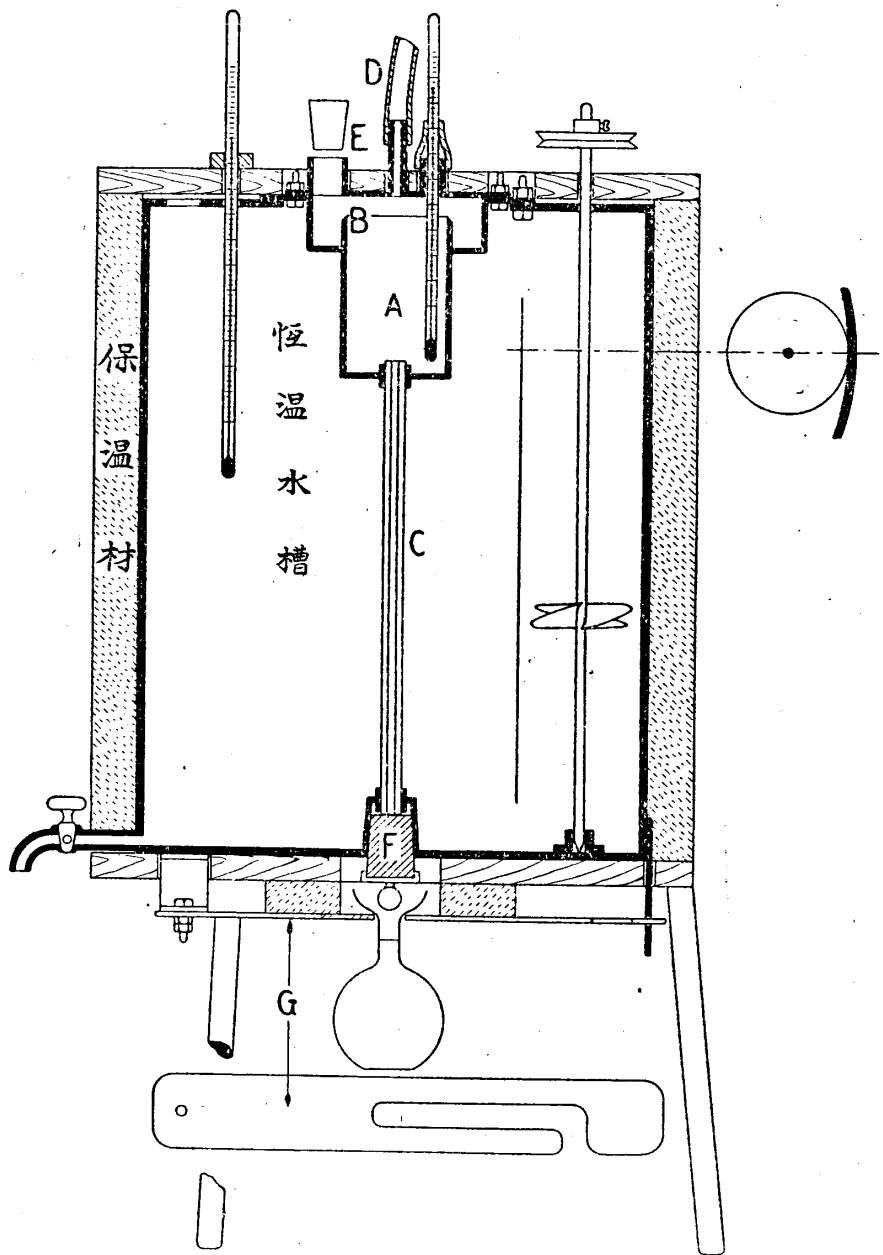
きくなる，第 17 圖は其の寫眞であつて，管の外側を十分に拭つて置けば同圖甲の様になり，外側に液が着けば乙の様になる．針は管の下端の位置を示す．

前にも述べた様に，管内の平均流速を或る程度より大きくすると，液は滴とならず，棒状になつて連続流下する．第 18 圖は其の寫眞であつて，甲は連続流下に移つたばかりの所，乙は更に流速を増した所である．此の様な場合の  $Z$  は，5. の管端補正と關聯して居て，其の値は求め難い．

#### 第四章 絶対粘度計の試作（構造と使用法）

著者は第 19 圖に示す様な絶対粘度計を試作して使用して居る．精密度は  $1/1000$  を目標にしてある．

A は圓壺形油壺（内直徑約 40 mm）であつて，B は測定開始の際の油面調整縁である．C は硝子の細管であつて，粘度 10 poise 以上の油に使用する爲め，内直徑約 3 mm，長さ約 200 mm のものを選んだ．又，細管の外直徑は，垂下する液滴の影響を打消す爲め，約 7.5 mm のものを使用してある．此の細管は在來の粘度計の細管よりも太くて長い．これは精密度を高める爲に必要なのであつて，細くて短かいもの（流れに對する抵抗が等しくて）では，寸法測定の精密度が不十分になる．細管の材料は，硝子以外のものでは，管孔の寸法等の測定が不可能であるから，外のものには用ゐられない．油壺は眞鍮の様な金屬で作るから，兩者の接續部を氣密にする爲め，特殊の締め金を要する．それでも温度を餘り上げると漏る虞があるのは止むを得ない．故に高温度に於ける測定は，油壺も硝子で出來て，細管と熔接して



第 19 圖

ある比較粘度計で行ひ、之を校正する爲に常温附近で此の絶対温度計を使用する方がよい。

細管の下端はコルク栓 F を押付けて油の流出を止める。油壺及び細管の周囲は

恒温水槽になつて居て、水槽の中には電氣による加熱抵抗線（圖には書いてない）及びプロペラ型攪拌器二つが備へてある。

油壺の上方には氣密になる蓋があつて、Dの口から任意の氣壓をかけられる様になつて居る。これは試液の粘度が高いとき、測定時間を短くする爲にも便利であるが、後に述べる塑性度の測定の際、二つの異なる  $P$  で測定を行ふとき必要なのである。氣壓をかける場合には、壓力を一定に保つ爲め、大きな貯壓槽（大きな硝子瓶がよい）を聯結して使用する。壓力をかけるには、通常ゴム製の手鞭で十分である。外に正確な氣壓計（U字管に水を入れたもの）を結合すること勿論である。

Eは試液を注入及び抽出する口である。油を一旦Bの上まで入れ、B縁の外側の油を抽出すれば、油面がB縁と同じになる。これはSaybolt型の眞似であるが、油面を見ずして之を調整するに便利である。流出液の量を測るには、約50ccの測容瓶を用ゐる。

細管の寸法（種々の補正を加へた値）（細管の檢定法は次節に詳しく述べる）、油壺の内徑、細管の下端からB縁までの差高及び測容瓶の容量は十分精密に測つて置かなくてはならない。

此の絶対粘度計を使用するには次の方法による。恒温水槽の溫度を十分調整した後、試液を殆んど之と同じ溫度にしてから油壺に入れる。恒温水槽の溫度を一定に保つて、成るべく長時間放置し、試液の溫度が恒温水槽の溫度と完全に一致するを待つ。

粘度は溫度によつて著しく變化するものであつて、水でも常溫附近で溫度 $1^{\circ}$ につき2.5%も變化する。（これに對し表面張力の變化は $1^{\circ}$ につき0.2%に過ぎない）油類では粘度の變化は一般に之よりも大きい。假に $1^{\circ}$ につき5%とすれば、粘度を $1/1000$ まで測定するには溫度を $0.02^{\circ}$ まで正確に測り且つ一定に保たなくてはならない。粘い油には少し位溫度の不均一があつても對流は殆んど起らない。溫度が逆轉（上方の溫度が低い）して居ることさへも屢々である。故に油壺内の油の溫度を調整するには傳導に待つより外はない。掻き廻はすと多數の小さい氣泡がはいつて、取返しが附かなくなる。

溫度の調整が出来たらコルク栓Fを抜いて、油が數滴落下するのを待つて再び栓をする。次にEの口からピペットを挿入して、B縁の外側の油を抽出する。此の時、油はB縁より上へ山盛りになるから、これが縁外へ流下して油面がBと同高になるのを待つ。若し液面がBより1mm高ければ、液頭に $1/250$ の誤差が出る（室溫に近い溫度で測定する場合には、油壺の蓋を取除けて油面の調整を行つてもよい）次に、油面に氣壓をかける場合には、蓋を密閉して氣壓をかけ、之を一定に保つ。

斯くして準備が整つたら、コルク栓 F を抜き、油滴が一つか二つ落ちたら、落ちた瞬間にストップ・ウオッチを押し、次の滴が落ちる前に測容瓶を受ける。試作粘度計では、測容瓶は G で示す棚に懸けてあつて、滴を受ける位置に持つて行つたり外したりが容易に出来る様にしてある。測容瓶に油が充ちるには二三十分以上或は一時間以上かかるから、此の間温度を一定に保たなくてはならない。攪拌器は極静に廻はして置く。氣壓をかける場合には、常に多少の漏洩もあり、貯壓器の温度の影響もあるから、之も常に注意して一定に保たなくてはならない。

油が測容瓶に充ち、瓶の首の標線に届いたら、最後の滴が落ちた瞬間にストップ・ウオッチを止める。液量と時間との関係は、注意してやれば  $1/1000$  の精密度を得ることはむづかしくない。然かし、液量を天秤で秤量すれば一層精確な結果が得られる。

以上の観測結果から粘性係数を算出する方法は次の通りである。(此の計算は一般の書物にあるのと同じであるが、便宜の爲め記述する) 試液の液頭を  $H$  で表はし、観測開始の際の  $H$  を  $H_1$ 、終了の際のを  $H_2$  とする。又、流出した液の量を  $v$  で表はし、測容瓶の容量を  $V$ 、油壺の断面積を  $A$  とする。然るときは

$$H = H_1 - \frac{v}{A}, \quad \frac{dv}{dt} = W \quad (25)$$

であるから ( $W$  は 1 秒間の流出量)

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{A} \frac{dv}{dt} = -\frac{W}{A} \quad (26)$$

而して

$$A(H_1 - H_2) = V \quad (27)$$

であるから、試液の密度を  $\rho_a$ 、水(室温)の密度を  $\rho_m$  とし、油面にかけた氣壓を水柱で  $K$  cm とすれば、(14) により

$$W = \frac{\pi R^4 g (\rho_a H + \rho_m K)}{8 \eta l} \quad (28)$$

となる。之を (26) に入れて  $H_1$  から  $H_2$  まで積分し ( $H$  が變數,  $K$  は常數) (27) の関係を入れて書直せば、

$$\eta = \frac{\pi R^4 g t}{8 l V} \left\{ \frac{(H_1 - H_2) \rho_a}{\ln \frac{\rho_a H_1 + \rho_m K}{\rho_a H_2 + \rho_m K}} \right\} \quad (29)$$

が得られる。 $H_1$  は細管の下端から液面調整線 B までの鉛直距離、 $H_2$  は  $V$  と  $A$

とから算出する。  $l$  は細管の長さ、  $R$  は管孔の半径（何れも補正を加へた値）、又  $t$  は  $V$  だけ流出するに要した時間（秒）である。猶ほ液の運動エネルギーに関する補正が無視出来るか否かを調べて見なくてはならない。

著者が試作した粘度計の各部の寸法を (29) 式に入れて見る。(此處では正確な値は必要がないから、寸法の端数を切捨て、簡単な数値にして計算する)  $H_1$  は 27 cm、油壺の内直径は 4 cm として、挿入してある寒暖計の直径 0.6 cm を差引いて、  $A=11.535$ ；  $V$  は 45 cc であるから、  $H_1-H_2=V/A=3.935$ 、従つて  $H_2=23.065$  となる。気圧をかけない場合には  $K=0$  で、  $\ln(H_1/H_2)=0.15750$  である。故に  $R=0.15$ 、  $l=20$ 、  $g=980$  とすれば

$$\eta=0.005408\rho_a t$$

又、  $K=25$  cm とした場合、  $\rho_a=0.9$ 、  $\rho_m=1$  とすれば

$$\eta=0.010285 t$$

となる。

## 第五章 細管の検定

細管は良質のものを選び、廓大鏡で検査して気泡又は異物の熔け込んで居るものは避ける。又、管の外径を處々で測つて見て、餘り不同のあるものは使用しない方がよい。

管の両端面は細かい紙鑢で磨いて滑かにする。且つ特種の装置を用ゐて管軸に垂直に仕上げる。長さは適宜の方法で精密に（四桁）測定する。管孔の径を測定するには、水銀の標準抵抗を作るときと同じ方法に依る。即ち、気泡が管壁に着くのを避ける爲め、真空中で水銀（純粹な）を填める。而して、両端面を平たい面に押付けて、水銀の面と管の端面と一致させた後、水銀を取出して秤量する。此の操作の際の水銀の温度を測つて置く。（1°位までの正確さでよい）水銀の密度は表から求めて、管孔の平均直径を算出する。

次に、管孔の不均一に對する補正を求めなくてはならない。管孔に長さ約 1 cm 位水銀を入れ、之を管の端から端まで移動せしめ、各の位置で其の長さを測る。（顕微鏡の附いた物尺を用ゐる）管孔には常に多少の不均一があるから、水銀の長さは一々違つて居る。此の結果を用ゐて次の計算を行ふ。

(15') を書變へて

$$P=8\pi\eta W \frac{l}{\pi^2 R^4} \quad (30)$$



とする。今、粘度計の細管を  $n$  等分したと考へ、第  $i$  番目の部分 (長さは  $l/n$ ) だけ考へれば、其の部分にかゝる壓力  $p_i$  は

$$p_i = 8\pi\eta W \frac{l_i}{\pi^2 R_i^4} = \frac{8\pi\eta W l}{n} \frac{1}{q_i^2} \quad (31)$$

である。但し  $q_i$  は其の部分の管孔の斷面積である。前記の方法で求めた管孔の平均半径を  $R_0$ 、平均斷面積を  $Q$ 、管孔の全容積を  $V$  とすれば

$$Q = \pi R_0^2 = V/l \quad (32)$$

である。今

$$s_i = \frac{q_i}{Q} \quad (33)$$

と置く。然るときは

$$\frac{1}{q_i^2} = \frac{1}{Q^2 s_i^2} = \frac{1}{\pi^2 R_0^4} \frac{1}{s_i^2} \quad (34)$$

である。故に

$$P = \sum p_i = \frac{8\eta W l}{\pi R_0^4 n} \sum \frac{1}{s_i^2} \quad (35)$$

と書くことが出来る。又

$$Q = \frac{V}{l} = \frac{l_i \sum q_i}{l} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{Q \sum s_i}{n}$$

従つて

$$\sum s_i = n \quad (36)$$



第 20 圖

である。水銀の一定量  $v$  を管中に入れたとき、第  $i$  番目の部分で其の長さが  $\lambda_i$  であるとする。然るときは

$$v = \lambda_i q_i = \lambda_i Q s_i \quad (37)$$

であるから

$$Q \sum s_i = v \sum \frac{1}{\lambda_i} \quad (38)$$

である。  $\frac{1}{\lambda_i}$  の平均値  $\frac{1}{n} \sum \frac{1}{\lambda_i}$  を  $\left(\frac{1}{\lambda}\right)_m$  で表せば (36) により

$$\frac{Q}{v} = \left( \frac{1}{\lambda} \right)_m \quad (39)$$

となる。又、(37) と (39) とから

$$\frac{1}{s_i} = \frac{Q}{v} \lambda_i = \lambda_i \left( \frac{1}{\lambda} \right)_m$$

であるから、

$$\frac{1}{n} \sum \frac{1}{s_i^2} = \left( \frac{1}{\lambda} \right)_m^2 \frac{1}{n} \sum \lambda_i^2 \quad (40)$$

となる。  $\lambda_i^2$  の平均値を  $(\lambda^2)_m$  で表せば、(40) は

$$\frac{1}{n} \sum \frac{1}{s_i^2} = \left( \frac{1}{\lambda} \right)_m^2 (\lambda^2)_m \quad (41)$$

となる。此の値を  $C$  で表し、(35) に入れれば、

$$P = \frac{8\eta W l}{\pi R_0^4} C$$

従つて、 
$$\eta = \frac{\pi R_0^4 P}{8\eta W l C} \quad (42)$$

但し 
$$C = \left( \frac{1}{\lambda} \right)_m^2 (\lambda^2)_m \quad (43)$$

であつて、  $R_0$  は本節の初めに述べた方法で測つた管孔の平均半径であるから、此の  $C$  が管径の不同に對する補正係數である。故に、細管に就いては、之を取附ける前に  $l$  と  $R_0$  と  $C$  とを測定して置かなくてはならない。或は  $R_0$  を  $\sqrt[4]{C}$  で割つて、之を補正を加へた細管の半径と云つてもよい。

次に管孔が正しく圓形の切口を持つて居るか否かゞ問題である。橢圓形の切口の管を粘性流體が流れるときの解式は、Lamb の Hydrodynamics にも出て居る通り、切口の長短兩半径を  $a, b$  とすれば、流量  $W$  は (14) の代りに

$$W = \frac{\pi P}{4\eta l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (44)$$

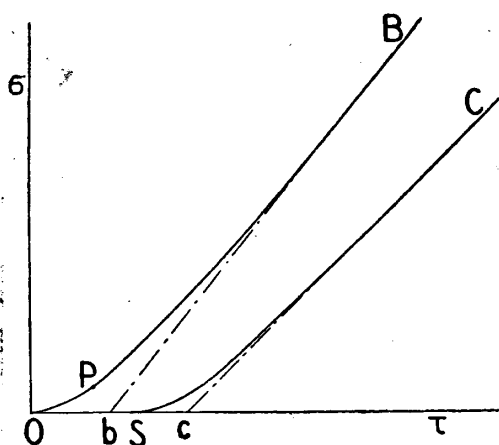
で與へられる。故に、之と切口面積の等しい圓形切口の管 ( $R^2 = ab$ ) に比べて、流量が  $2ab/(a^2 + b^2)$  になる。従つて、細管の切口が橢圓なることを知らずして使用すれば、 $\eta$  の値は眞の値を此の比で割つたものとなる。然るに、細管の切口の橢圓

度を測定することは不可能である。けれども、 $2ab/(a^2+b^2)$  の値は極めて 1 に近く、 $a:b$  が 100:87 なるとき誤差は 1% となり、1000:956 なるとき誤差は  $1/1000$  となる。故に、 $1/1000$  の精密度を要するとき、切口の形が真圓より外れること 4.5% までのものを使用して差支ないことになる。これによつて、細管は内側を検べることは出来ないから、外側が 4.5% よりも遙に真圓に近いものを選んで使用すれば間違ひはあるまい。

## 第六章 試液が塑性を有する場合

### 1. 液體の塑性度を表す定數の選擇

第二節に述べた様に、膠質液及び凝固點に近い温度の油脂等は皆多少の塑性を有し、見掛けの粘性係數は一定ではなく、ズレの速度  $\sigma \equiv du/dz$  によつて第 3 圖に示した様な變化をする。又、 $z$  に垂直な單位面積を通じて作用するズレの内力  $\tau$  と  $\sigma$  との関係は第 21 圖 (第 2 圖に同じ) の OB 又は SC 曲線の様な變化をする。SC の場合には、OS 以下の  $\tau$  では觀測し得る程度のズレは起らない。故に此の



第 21 圖

OS を降伏値 (yield value) と云ふ。然し曲線は S 點で  $\tau$  軸に殆んど接して居て降伏點は不明瞭なのが常である。

Bingham<sup>(1)</sup> は曲線 SC を直線と見做し、 $\sigma$  と  $\tau$  との關係を

$$\sigma = \varphi(\tau - \tau_0) \quad (45)$$

なる式で表した。式中、 $\tau_0$  は降伏値、又  $\varphi$  は  $\eta$  の逆數で、fluidity と呼ばれる。而して、(45)式で表される様な性質を持つ物質を理想的塑性物質と呼んだ。

De Waele<sup>(2)</sup> は OB 型のものに對し、

$$\sigma = \varphi\tau^n \quad (46)$$

なる實驗式を使用し、又 Herschel<sup>(3)</sup> 及び Bulkley は SC 型のものに對し

$$\sigma = \varphi(\tau - \tau_0)^n \quad (47)$$

(1) E. C. Bingham: Fluidity and Plasticity (New York, 1922).

(2) De Waele: Koll. Zeit. 38, 27 (1926).

(3) W. Herschel u. R. Bulkley: Koll. Zeit. 39, 291 (1926).

なる式を使用した。これに對し Williamson<sup>(1)</sup> は次の様な實驗式を使用した。

$$\tau = \eta\sigma + \frac{f\sigma}{a + \sigma} \quad (48)$$

此の式は、 $\sigma = 0$  で  $\tau = 0$  となり、降伏値を持つて居ないが、 $\sigma$  が大きくなれば  $\tau \approx \eta\sigma + f$  になるから、 $f$  が或る意味の降伏値になる。

上記の各式、特に (47) は最も一般的に實驗結果を表すが、 $\tau_0$  の値は常に不明瞭なものであるし、又指數の  $n$  には意味が全く無い。故に著者は次の様な別の形の式を用ゐることにしたい。

OB 型でも SC 型でも、 $\sigma$  が或る程度以上大きくなれば、 $\sigma$ - $\tau$  曲線は全く直線になつて仕舞ふ。此の直線部分を  $\tau$  軸と交はるまで引伸ばせば、第 21 圖の Bb 及び Cc の様になる。此の場合 Ob 又は Oc は、 $\sigma$  の大きい所からの推定降伏値である。又、此等の直線の傾角を  $\theta$  とすれば、 $\sigma$  の大きい所の粘性係數  $\eta$  は  $\cot \theta$  で與へられる。推定降伏値 Ob 又は Oc を  $a$  で表すことにする。

OB 型は O 點で  $\tau$  軸と有限の角度で交るから、此の型の曲線を表すには次の式による。

$$\eta\sigma = \tau - a + ae^{-c\sigma} \quad (49)$$

即ち OB 曲線が直線 bB に近づく速さを指數函數で代表させるのである。同軸圓嚮回轉型で測る場合には、 $\eta$  及び  $a$  は、前述の通り、速度、從つて  $\sigma$  の相當に大きい所の任意二點で定める。指數  $c$  は OB 曲線上の適宜の一點（例へば P 點）の  $\tau$  と  $\sigma$  との値を (49) に入れて求めることが出来る。

SC 型は、S 點で  $\tau$  軸に接して居ると考へるから、次の式で表す。

$$\eta\sigma = \tau - a + (a - b)e^{-\frac{\tau - b}{a - b}} \quad (50)$$

此の式の  $b$  の値は、 $\tau = a$  の所の  $\sigma$  の値を (50) に入れて求めるのが便利である。而して、此の場合には  $b$  が眞の降伏値を與へる。

上述の如く、塑性を有する液體のスレの運動に對する抵抗を表すに、 $\eta$  と  $a$  と  $c$  又は  $\eta$  と  $a$  と  $b$  との三つの定數を以てすることゝする。逆に、(49) 式が適用出来れば OB 型であり、(50) が適用出来れば SC 型である。OB 型の測定結果に (50) を用ゐれば  $b$  が負になる。SC 型に (49) を用ゐれば式の表す曲線は  $\tau$  軸の下側へもぐる。

## 2. 細管による塑性定數の測定

細管中を流れて居る粘性液體の中に、半徑  $r$  なる圓嚮を考へる。液に働く壓力

(1) R. V. Williamson: Journ. Indust. and Engin. Chem. 21, 1108 (1929).

$P$  が此の圓錐に及ぼす力は  $\pi r^2 P$  である。又、此の圓錐と其の外側の液との間に働くズレの内力  $\tau$  は、圓錐の側面全體で  $2\pi r l \tau$  になる。此等二つの力は釣合つて居るから、次の關係が成立つ。

$$\pi r^2 P = 2\pi r l \tau \quad \text{即ち} \quad \tau = \frac{Pr}{2l} \quad (51)$$

(此の關係は第二節の (9) と (12) とからも求められる) 又、 $\sigma \equiv \frac{dw}{dr}$  であるから、此等の  $\tau$  と  $\sigma$  とを (49) に代入すれば

$$\eta \frac{dw}{dr} = \frac{Pr}{2l} - a + ae^{-\frac{cPr}{2l}}$$

となる。之を積分し、 $r=R$  で  $w=0$  の條件を入れれば

$$\eta w = \frac{Pr^2}{4l} - ar - \frac{2la}{cP} e^{-\frac{cPr}{2l}} - \frac{PR^2}{4l} + aR + \frac{2la}{cP} e^{-\frac{cPR}{2l}}$$

が得られる。 $w$  に  $2\pi r dr$  を掛けて、0 から  $R$  まで積分すれば、正常粘性の場合の (14) の代りに、OB 型に對し次の式が得られる。

$$W = \frac{2\pi}{\eta} \left\{ -\frac{PR^4}{16l} + \frac{aR^3}{6} - \frac{8l^3 a}{c^3 P^3} \right. \\ \left. + a \left( \frac{lR^2}{cP} + \frac{4l^2 R}{c^2 P^2} + \frac{8l^3}{c^3 P^3} \right) e^{-\frac{cPR}{2l}} \right\} \quad (52)$$

SC 型の場合には、 $\tau < b$  の部分ではズレは起らない。 $\tau = b$  になる所の  $r$  を  $r$  で表せば、(51) により、

$$r = \frac{2lb}{P} \quad (53)$$

である。即ち  $r < r$  の部分では流速  $w$  は一様である。 $r > r$  の部分に對しては、OB 型のとときと同様にして、

$$\eta w = \frac{Pr^2}{4l} - ar - \frac{2l(a-b)^2}{P} e^{-\frac{Pr-2lb}{2l(a-b)}} \\ - \frac{PR^2}{4l} + aR + \frac{2l(a-b)^2}{P} e^{-\frac{PR-2lb}{2l(a-b)}} \quad (54)$$

及び  $2\pi r w dr$  を  $r$  から  $R$  まで積分して

$$W = \frac{2\pi}{\eta} \left\{ -\frac{PR^4}{16l} + \dots \right.$$

が得られる。又、 $r < r$  の部分の流速は (54) の  $r$  に (53) の  $r$  の値を入れて得られるから、それに  $\pi r^2$  を掛けて、上の式に加へ、管全體の單位時間の流量  $W$  を求めることが出来る。即ち次の通りになる。

$$W = \frac{2\pi}{\eta} \left[ -\frac{PR^4}{16l} + \frac{aR^3}{6} - \frac{l^3 ab^3}{3P^3} - \frac{l^3}{P^3} \{ (a-b)b^3 + 4(a-b)^2 b^2 + 8a(a-b)^3 \} + \left\{ \frac{l(a-b)^2 R^2}{P} + \frac{4l^2(a-b)^3 R}{P^2} + \frac{8l(a-b)^4}{P^3} \right\} e^{-\frac{PR-2lb}{2l(a-b)}} \right] \quad (55)$$

斯くして OB 型 (52) 及び SC 型 (55) の流量  $W$  と  $\eta$  及び二つの塑性定數との關係が求められた。更に測定中液頭の變化することを考へて、測定時間中の積分を行ひ、正常粘性の場合の (29) に相當する式を求めるのは大變なことになる。此の場合には、液頭の變化が液頭に對して小さければ、測定之初と終との液頭の平均を取つて、液頭不變として扱つても誤は極めて小さいから、粘度計の油壺の面積を大きくし、流出液は少量に止めて之を秤量し、時間で割つて  $W$  を求める方法に依るのが良い。

粘性係數と塑性定數と ( $\eta, a, c$  或は  $\eta, a, b$ ) を求めるのに、觀測を三回行つて、其の結果を (52) 又は (55) に入れて、聯立方程式としても解けない。故に前に述べた様に、流速の相當に大きい所の二點から  $\eta$  と  $a$  とを求め、次に流速の小さい所で  $W$  を測定して、(52) 又は (55) に入れて、 $c$  又は  $b$  を求める方法による。故に流速の餘り小さくない所で、 $P$  を變へて二回の測定を行つた結果から、 $\eta$  と  $a$  とを求める方法を考究しなくてはならない。

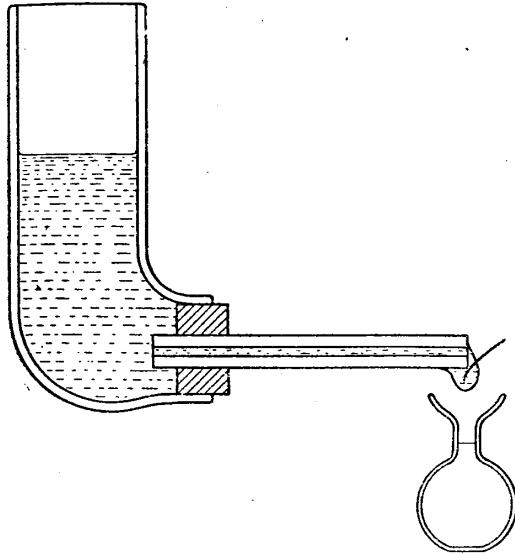
此の場合には、前にも述べた通り、 $\sigma-\tau$  の關係は直線と見てよいのであるから、(55) に於て、 $b=a$  と置けば、第21圖の cC で表される場合の  $W$  の式が得られる。即ち

$$W = \frac{\pi}{\eta} \left\{ \frac{R^4 P}{8l} - \frac{R^3 a}{3} + \frac{2l^3 a^4}{3P^3} \right\} \quad (56)$$

である。此の式は Buckingham<sup>(1)</sup> が Bingham の理想的塑性の假定 (45) を積分して已に求めた式である、上述の様に、 $P$  の平均値を用ひ得る場合には、未知數  $\eta$  と  $a$

(1) E. Buckingham: Proc. Amer. Soc. Test. Materials, 21, 1154 (1921).

とを求める爲め、 $P$ の異なる二回の観測結果を(56)に入れ、二つの聯立方程式を解けばよい。二つの式から $\eta$ を消去すれば $a$ の四次方程式が得られる。之を正式に解いてもよいが、右邊第三項は他の二項に比べて小さいから先づ之を省略して $a$ の一次方程式として $a$ の近似値を求め、次に第三項を入れて $a$ の値を少しづつ直して行けば、三四回で正しい値が得られる。



第 22 圖

然し $P$ の餘り大きい所で測定を行つた結果では、(56)の右邊の値は第一項のみに支配せられるので、 $a$ を求める精密度が低くなる。故にOB又はSC曲線がbB又はcCから餘り離れない程度で、成るべく小さい平均流速の所で測定を行ふ必要がある。

液頭 $H$ が小さい場合には(56)式を正式に積分したもので計算を行はなくてはならない、(装置としては第22圖に示す様に細管を水平に向けなくては $P$ が小さくならない)油壺の斷面積を $A$ とすれば、

$$W = -A \frac{dH}{dt}, \quad P = g\rho H$$

であるから、(56)は

$$-\eta A \frac{dH}{dt} = \frac{\pi R^4 g \rho H}{8l} - \frac{\pi R^3 a}{3} + \frac{2\pi l^3 a^4}{3g^3 \rho^3 H^3}$$

となる。そこで

$$\frac{Rg\rho H}{la} = x, \quad \frac{Al}{\pi R^4 g \rho} = S \tag{57}$$

と置けば( $x$ の $H$ ,  $S$ は常數)  $dx = \frac{Rg\rho}{la} dH$  であるから、上の式は

$$-S\eta \frac{dx}{dt} = \frac{x}{8} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3x^3} \tag{58}$$

となる。これを積分すれば、

$$\frac{t}{S\eta} = \frac{8}{x-2} - \frac{20}{3} \ln(x-2) - \frac{2}{3} \ln(3x^2+4x+4) - \frac{\sqrt{8}}{3} \arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{8}}(3x+2) \right\} + C \quad (59)$$

となる。但し  $C$  は  $C$  を除いた右邊の符號を反對にし、 $t=0$  に於ける  $H$  の値を入れたものである。

今、 $t=0$  に於ける  $H$  の値を  $H_0$  とし、 $t=t_1$  及び  $t=t_2$  に於ける  $H$  の値を  $H_1$  及び  $H_2$  とする。此の様な連続二回の觀測結果を (57) により (59) に入れた二つの聯立方程式から、 $\eta$  と  $a$  とが決定せられる。然し此の方程式を解くことは出来ない。故に此れから  $x$  を求める方法を考へなくてはならない。

(59) の右邊から  $C$  を除いたものゝ符號を反對にしたものを  $\varphi(x)$  で表すことにする。即ち

$$\varphi(x) = -\frac{8}{x-2} + \frac{20}{3} \ln(x-2) + \frac{2}{3} \ln(3x^2+4x+4) + \frac{\sqrt{8}}{3} \arctan \left\{ \frac{1}{\sqrt{8}}(3x+2) \right\} \quad (60)$$

と置く。然るときは (59) は

$$-\frac{t}{S\eta} = \varphi(x_0) - \varphi(x) \quad (61)$$

と書くことが出来る。此の  $\varphi(x)$  を種々の  $x$  の値に對して計算して作つた表を次に掲げる。

$\varphi(x)$  は  $x=2$  で  $-\infty$  になる。これは (57) の  $\tau$  が  $a$  になれば液は全く流れなくなるからである。即ち  $\tau=a$  とすれば  $H=2al/Rg\rho$  になる。之を (57) に入れば  $x=2$  になる。

前記の様に、 $H_0$  から  $H_1, H_2$  になるまでの時間  $t_1, t_2$  を測定したとすれば、( $H$  は流出量から計算した方が精密に出る)

$$\frac{t_1}{S\eta} = \varphi(x_0) - \varphi(x_1)$$

$$\frac{t_2}{S\eta} = \varphi(x_0) - \varphi(x_2)$$

なる二つの方程式が得られる。此等から  $\eta$  を消去すれば

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_1)}{\varphi(x_0) - \varphi(x_2)} \quad (62)$$



$\varphi(x)$  の表

$x$	$\varphi(x)$	$x$	$\varphi(x)$	$x$	$\varphi(x)$	$x$	$\varphi(x)$
3.0	-4.2487	8.0	15.6101	13.0	20.8969	18.0	24.0537
1	-2.8464	1	15.7584	1	20.9739	1	24.1057
2	-1.6216	2	15.9040	2	21.0502	2	24.1574
3	-0.5376	3	16.0470	3	21.1258	3	24.2087
4	+0.4327	4	16.1875	4	21.2007	4	24.2597
5	1.3094	5	16.3256	5	21.2749	5	24.3104
6	2.1079	6	16.4614	6	21.3484	6	24.3608
7	2.8402	7	16.5949	7	21.4212	7	24.4109
8	3.5160	8	16.7263	8	21.4933	8	24.4606
9	4.1428	9	16.8556	9	21.5648	9	24.5100
4.0	4.7270	9.0	16.9828	14.0	21.6356	19.0	24.5591
1	5.2738	1	17.1080	1	21.7059	1	24.6080
2	5.7874	2	17.2312	2	21.7756	2	24.6566
3	6.2715	3	17.3526	3	21.8447	3	24.7049
4	6.7293	4	17.4722	4	21.9131	4	24.7528
5	7.1633	5	17.5901	5	21.9810	5	24.8004
6	7.5757	6	17.7052	6	22.0484	6	24.8477
7	7.9686	7	17.8206	7	22.1152	7	24.8948
8	8.3438	8	17.9335	8	22.1814	8	24.9416
9	8.7026	9	18.0448	9	22.2470	9	24.9882
5.0	9.0463	10.0	18.1546	15.0	22.3120	20.0	25.0345
1	9.3762	1	18.2629	1	22.3766		
2	9.6934	2	18.3698	2	22.4407		
3	9.9989	3	18.4752	3	22.5042		
4	10.2934	4	18.5792	4	22.5673		
5	10.5774	5	18.6819	5	22.6299		
6	10.8518	6	18.7834	6	22.6921		
7	11.1173	7	18.8836	7	22.7537		
8	11.3744	8	18.9824	8	22.8148		
9	11.6237	9	19.0800	9	22.8755		
6.0	11.8655	11.0	19.1765	16.0	22.9358		
1	12.1003	1	19.2719	1	22.9955		
2	12.3285	2	19.3662	2	23.0548		
3	12.5504	3	19.4594	3	23.1137		
4	12.7663	4	19.5515	4	23.1721		
5	12.9767	5	19.6425	5	23.2301		
6	13.1818	6	19.7325	6	23.2877		
7	13.3817	7	19.8216	7	23.3450		
8	13.5768	8	19.9097	8	23.4018		
9	13.7674	9	19.9968	9	23.4582		
7.0	13.9536	12.0	20.0829	17.0	23.5142		
1	14.1355	1	20.1681	1	23.5698		
2	14.3133	2	20.2525	2	23.6250		
3	14.4872	3	20.3359	3	23.6799		
4	14.6575	4	20.4184	4	23.7344		
5	14.8243	5	20.5001	5	23.7885		
6	14.9877	6	20.5810	6	23.8422		
7	15.1479	7	20.6611	7	23.8956		
8	15.3050	8	20.7405	8	23.9487		
9	15.4590	9	20.8191	9	24.0014		

となる。今  $x_0$  を勝手に選べば、 $x_1/x_0 = H_1/H_0$ ,  $x_2/x_0 = H_2/H_0$  であるから、 $x_1$  と  $x_2$  とが定まる。此等の  $x_0, x_1, x_2$  に對する  $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \varphi(x_2)$  を前記の表から求める。それに依つて (62) の右邊の値を計算して左邊の値と比べて見る。斯くして二三回試みれば、 $x_0$  の大體の見當がつく。故に其の見當の附近で二三の  $x_0$  を取り、(62) の右邊の値を計算し、之を方眼紙上に  $x_0$  に對して點示して見れば、此等を結ぶ線が  $t_1/t_2$  の線を切る點が正しい  $x_0$  の値を與へる。

斯くして  $x_0$  が分れば、(57) の第一式に  $x_0$  と  $H_0$  とを入れて  $a$  を求めることが出来る。  $a$  が分れば (67) によつて  $\eta$  を求めることが出来る。

實測の場合を假想し、 $\varphi(x)$  の表を用ゐて  $a$  を算出する方法を例示する方が分り易い。第22圖の様な装置で、 $R=2$  mm,  $l=10$  cm, 油壺の内徑 4 cm 従つて  $A=4\pi$  のものを用ゐて、 $\eta=40$  poise,  $a=10$  dyne/cm<sup>2</sup>,  $\rho=0.9$  の油を試験したと想像する。此の場合には

$$x=1.764H, \quad S\eta=1133.8$$

である。先づ色々の  $H$  に對する此の場合の  $\varphi(x)$  を計算し、之に  $S\eta$  を乗じたものを作つて見れば、(61) により、其等の差が時間を與へる。其の値は次の表の通りである。時間  $t$  は  $H=10$  cm の時から測つた値である。

$H$ (cm)	$x$	$S\eta\varphi(x)$	$t$ (秒)
10	17.640	27057	0
9	15.876	25920	1137
8	14.112	24620	2437
7	12.348	23102	3955
6	10.584	21276	5781
5	8.820	18994	8063
4	7.056	15936	11121
3	5.292	11320	15737
2	3.528	1746	25311
1.134	2.000	$-\infty$	$\infty$

此の場合、逆に  $\eta$  と  $a$  とを知らないで、上記の装置で測定を行ひ、 $H$  が10 cm の時から初めて 7 cm 及び 4 cm になるまでの時間を求めたとすれば、上表にある通り、3955 秒及び 11121 秒を得る筈である。即ち

$$H_0=10, \quad H_1=7, \quad H_2=4, \quad t_1=3955, \quad t_2=11121$$

から  $\eta$  と  $a$  とを求めて見る。

先づ  $x_0$  を 10 及び 20 として見れば、 $x_0$  は 17~18 の邊であることは直に分る。故に次には  $x_0$  を 17 にして見る。然るときは  $x_1=11.9$ ,  $x_2=6.8$  になる。表から

$x=17, 11.9, 6.8$  の  $\varphi(x)$  を求めて、(62) の右邊の計算をすれば、0.35396 となる。然るに  $t_1/t_2=0.35563$  である。  $x_0=17.5$  及び18で同様の計算をすれば0.35530 及び 0.35653 となる。方眼紙上に、此等の値を  $x_0$  に對して取り、此等三點を結ぶ曲線（殆んど直線）を引けば 0.35563 の横線を  $x=17.64$  の所で切る。故に此の値と  $H=10$  とを (57) の第一式に入れれば  $a=10$  が得られる。次に (61) によつて  $\eta$  を求める。

$H$  のもつと大きい所で測定を行つた場合、 $x$  の値も大きくなるから、 $\varphi(x)$  の表に含まれて居ない様なときには、對數表を用ゐて十分正確な  $a$  の値を求めることが出来る。

(56) 式の第一項は正常粘性流體に對する式と同じで、第二項が塑性の影響を與へる主なる項である。而して、 $x$  が小さいときの外、第三項は他の二項に比べて極めて小さい。即ち  $x=20$  では第三項は第一項の  $3 \times 10^{-5}$  に過ぎない。それが  $x=5$  では  $8 \times 10^{-3}$  となり、 $x$  が 2 に近づくと此の比は  $1/3$  に近づくと。故に  $x$  が 10 位より大きければ (56) の第三項を省略して、

$$-\beta\eta \frac{dH}{dt} = H - \alpha \quad (63)$$

と書くことが出来る。但し、

$$\alpha = \frac{8la}{3Rg\rho}, \quad \beta = \frac{8LA}{\pi R^4 g\rho} \quad (64)$$

である。(63) を積分して、

$$\frac{t}{\beta\eta} = \ln \frac{H_0 - \alpha}{H - \alpha} \quad (65)$$

が得られる。

$\varphi(x)$  のときと同様に、(65) に  $H_0, H_1, H_2, t_1, t_2$  を入れて、 $\beta\eta$  を消去すれば

$$(t_2 - t_1) \log(H_0 - \alpha) - t_2 \log(H_1 - \alpha) + t_1 \log(H_2 - \alpha) = 0 \quad (66)$$

となる。此の式の  $\alpha$  を、 $\varphi(x)$  のときの  $x_0$  と同様にして、對數表を用ゐて求めることが出来る。即ち、 $\alpha$  の値を任意に取つて (66) の左邊を計算し、これが 0 になる様な  $\alpha$  の値を捜せばよい。

$\alpha$  が求められたら、(64) の第一式で  $a$  を求め、更に (65) で  $\eta$  を計算することが出来る。

平均流速の餘り小さくない（餘り大きくもない）邊の測定で上述の様に  $\eta$  と  $a$  とを求めた後、更に流速の小さい所の觀測から  $b$  又は  $c$  を求めるべきである。流速の小さい所の測定は、(52) 又は (55) が液頭の變化に對して積分してないか

ら、 $P$  の平均値を用ゐて差支の無い様に注意しなくてはならない。然し  $b$  又は  $c$  は  $\eta$  や  $a$  ほど精密に求める必要はなく、大體の値が分れば良い場合が多いから、此の測定は餘りむづかしくは無い。

上述の方法に依つて塑性を有する液體の粘性及び塑性に関する三つの定數を決定することが出来る。