No. 314

（昭和十九年十一月發行）

摩擦吸振器に就いて
(I. 斷讀的に辷る場合)

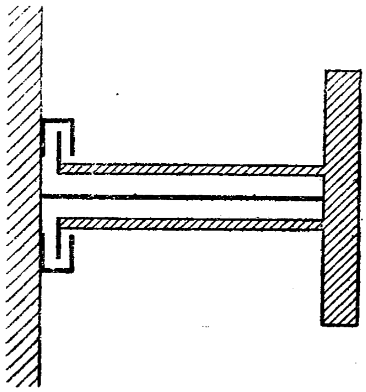
所員　中西不二夫
亘理厚
特別研究員　佐藤和郎

摘　　要

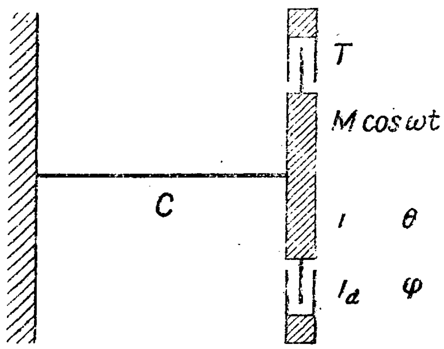
摩擦吸振器の作用狀態が未だよく分つてゐないので，その斷續的辷りの場合に就いて，外から働くモーメント，摩擦モーメント及び辷りの相互關係を理論的に調べてみたものである。

1，緒　　言

自動車の發動機には，クランク軸の振動を押へるために摩擦吸振器を持つてゐるものが多い。航空發動機でも液冷高速大馬力のものでは，摩擦吸振器を備へてゐるものがある。このやうに實際には多く使はれてゐながら，その作用は未だよく分つてゐない狀態である。



第　1　圖



第　2　圖

今までに研究が無い譯ではない。第1圖の如く，クランク質量の振動がそのまゝ吸振器の辷りになるやうな場合は簡單であつて，Den Hartog[(1)] 等が解いてゐる。然し比較的多く使はれる第2圖のやうな場合に就ては，正しい解が未だ出てゐない。Söchting[(2)] は，共鳴した場合の，連續的に辷つてゐる狀態に就ての解を出してゐるが，實際には共鳴して而も連續的に辷つてゐる場合は，吸振器としての役をしてゐないのである。又 Osmondroyd[(3)] は，吸

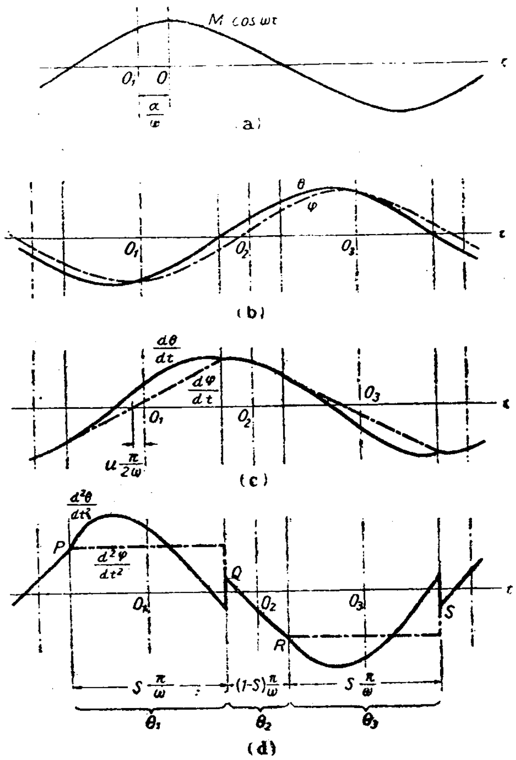
(1) Den Hartog : Mechanical Vibration (1934).

(2) Söchting : Zur Berechnung des Reibungschwingungsdämpfers, ZAMM, Bd. 15, Heft 5 (1935).

(3) Osmondroyd : Friction Dampers and their Application to Engines, 3rd Int. Congress for Applied Mech., Vol. III.

振器質量は非常に小さいものとして，クラシク質量は正弦運動をするものと假定してゐるが，これではやはり吸振器としては役に立たない。

吸振器に相當の質量があり，有效に働いてゐるときには，クラシク質量の運動は正弦運動にはならないで，第3圖のやうになるのである。今このやうな場合の作用狀態を調べてみようと思ふ。



第　3　圖

2. 摩擦モーメントと辷りとの關係

今最も簡單な場合として，第2圖のやうな振動系を考へる。そして

- I 　はクランク質量の慣性モーメント，
- I_d 　は吸振器の慣性モーメント，
- c 　は軸の剛さ，
- T 　は吸振器の摩擦モーメント，
- $M\cos\omega t$ 　はクランク質量に外から働くモーメント，
- θ 　はクランク質量の角變位，
- φ 　は吸振器の角變位であるとする。

第3圖は，クランク質量と吸振器の間が，ある期間辷り，ある期間一緒に動くといふやうに，斷續的に辷つてゐるときの運動狀態を示したものであつて，(a) は外から働くモーメント，(b) はクランク質量及び吸振器の角變位，(c) は角速度，(d) は角加速度である。振動の週期は外からのモーメントの週期と當然同じであつて，$2\pi/\omega$ である。s を辷り率とすれば，第3圖 (d) に見るやうに，PQ の間，時間にして $s\pi/\omega$ の間は吸振器がある方向に辷り，次の QR の間，時間にして $(1-s)\pi/\omega$ の間は吸振器とクランク質量は一緒に動き，次の RS の $s\pi/\omega$ の間は前と逆方向に辷り，次の $(1-s)\pi/\omega$ の間は又一緒に動き，これを繰返して行く。

今辷つてゐる PQ の期間を考へ，その中央に原點 0_1 を採る。第3圖 (a) に示すやうに，外からのモーメントの 0_1 に點する位相角を α とし，この期間のクランク質量の變位を θ_1 で表せば，

$$I\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+c\theta_1+T=M\cos(\omega t-\alpha). \cdots\cdots(1)$$

これを書き直せば

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}+p^2\theta_1+a=m\cos(\omega t-\alpha), \cdots\cdots(1')$$

但し

$$p^2=\frac{c}{I},$$

$$a=\frac{T}{I},$$

$$m=\frac{M}{I}$$

である。この解は

$$\theta_1=A\cos pt+B\sin pt+\frac{m}{p^2-\omega^2}\cos(\omega t-\alpha)-\frac{a}{p^2}. \quad\cdots\cdots(2)$$

次の QR の間，即ちクランク質量と吸振器と一緒に動いてゐる部分に就ては，第3圖(d)に示すやうに，やはりその中央に原點 0_2 を採り，クランク質量の變位を θ_2 で表すものとする。0_2 に對しては，外からのモーメントは $-M\sin(\omega t-\alpha)$ となるから

$$(I+I_d)\frac{d^2\theta_2}{dt^2}+c\theta_2=-M\sin(\omega t-\alpha). \quad\cdots\cdots(3)$$

今

$$R=\frac{I_d}{I},$$

$$q^2=\frac{c}{I+I_d}=\frac{p^2}{1+R},$$

$$n=\frac{M}{I+I_d}=\frac{m}{1+R},$$

と置けば

$$\theta_2=C\cos qt+D\sin qt-\frac{n}{q^2-w^2}\sin(\omega t-\alpha). \quad\cdots\cdots(4)$$

次の RS の期間では，第3圖 (d) のやうに原點を 0_3 に採り，變位を θ_3 とすれば，最初の辷つてゐる期間 PQ とは對稱的の變位であるから

$$I\frac{d^2\theta_3}{dt^2}+c\theta_3-T=-M\cos(\omega t-\alpha), \quad\cdots\cdots(5)$$

$$\theta_3=-A\cos pt-B\sin pt-\frac{m}{p^2-\omega^2}\cos(\omega t-\alpha)+\frac{a}{p^2}. \quad\cdots\cdots(6)$$

又吸振器に就ては，PQ 間に於ては働くモーメントは一定の摩擦モーメント T であるから，變位を φ_1 とすれば

$$I_d\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}=T. \quad\cdots\cdots(7)$$

第3圖 (c) に示すやうに，$\frac{d\varphi_1}{dt}=0$ の點と原點 0_1 との間を $\frac{u\pi}{2\omega}$ と置けば

$$\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{a}{R}\left(u\frac{\pi}{2\omega}+t\right). \quad\cdots\cdots(8)$$

同様に RS の間の變位を φ_3 とすれば

$$I_d\frac{d^2\varphi_3}{dt^2}=-T, \quad\cdots\cdots(9)$$

$$\frac{d\varphi_3}{dt}=-\frac{a}{R}\left(u\frac{\pi}{2\omega}+t\right). \quad\cdots\cdots(10)$$

同じ運動を繰返してゐる狀態を考へれば，境界條件として次の七つの關係がある。即ち第3圖 (b) に於て

$$\left(\theta_1\right)_{t=s\frac{\pi}{2\omega}}=\left(\theta_2\right)_{t=-(1-s)\frac{\pi}{2\omega}}, \quad\cdots\cdots(11)$$

$$\left(\theta_2\right)_{t=(1-s)\frac{\pi}{2\omega}}=\left(\theta_3\right)_{t=-s\frac{\pi}{2\omega}}. \quad\cdots\cdots(12)$$

第3圖（c）に於て

$$\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)_{t=-s\frac{\pi}{2\omega}}=\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)_{t=-s\frac{\pi}{2\omega}}, \quad\cdots\cdots(13)$$

$$\left(\frac{d\theta_1}{dt}\right)_{t=s\frac{\pi}{2\omega}}=\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)_{t=s\frac{\pi}{2\omega}}, \quad\cdots\cdots(14)$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)_{t=-(1-s)\frac{}{2\omega}}=\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)_{t=s\frac{\pi}{2\omega}}, \quad\cdots\cdots(15)$$

$$\left(\frac{d\theta_2}{dt}\right)_{t=(1-s)\frac{\pi}{2\omega}}=\left(\frac{d\varphi_3}{dt}\right)_{t=-s\frac{\pi}{2\omega}}, \quad\cdots\cdots(16)$$

第3圖（d）に於て

$$\left(\frac{d^2\theta_1}{dt}\right)_{t=-s\frac{\pi}{2\omega}}=\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}. \quad\cdots\cdots(17)$$

（13），（14）の條件を（2）と（8）とに入れ，（15），（16）を（4），（8），（10）に入れて A，B，C，D を求めれば

$$\left.\begin{aligned} A&=-\frac{1}{p\sin\frac{sp\pi}{2\omega}}\left(\frac{s\pi}{2\omega}\frac{a}{R}+\frac{m\omega}{p^2-\omega^2}\sin\frac{s\pi}{2}\cos\alpha\right),\\ B&=\frac{1}{p\cos\frac{sp\pi}{2\omega}}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\frac{a}{R}-\frac{m\omega}{p^2-\omega^2}\cos\frac{s\pi}{2}\sin\alpha\right), \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(18)$$

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{q\sin\frac{(1-s)q\pi}{2\omega}}\left(\frac{u\pi}{2\omega}\frac{a}{R}-\frac{n\omega}{q^2-\omega^2}\cos\frac{s\pi}{2}\sin\alpha\right),\\ D&=\frac{1}{q\cos\frac{(1-s)q\pi}{2\omega}}\left(\frac{s\pi}{2\omega}\frac{a}{R}+\frac{m\omega}{p^2-\omega^2}\sin\frac{s\pi}{2}\cos\alpha\right). \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(19)$$

これ等の値を（2），（4），（6）に入れて θ_1，θ_2，θ_3 を出し，（11），（12），（17）の條件に入れゝば，u，s，a，T/M の間の關係を表す三つの式が得られる。この三つの式から u を消去して整理すれば，次の二式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} \frac{T}{M}&=\frac{U_1}{W_1}\cos\alpha, \quad\cdots\cdots(20)\\ \frac{T}{M}&=\frac{U_2}{W_2}\cos\alpha+\frac{V_2}{W_2}\sin\alpha. \quad\cdots\cdots(21) \end{aligned}\right.$$

但し U_1，W_1，U_2，V_2，W_2 は s と ω との函數であつて，

$$\lambda=\frac{\omega}{p},$$

$$\mu=\frac{p}{q}=\sqrt{1+R},$$

と置けば

$$\left.\begin{aligned}U_1&=-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{1}{1-\lambda^2}\cos\frac{s\pi}{2}\\&\quad+\frac{\lambda\mu}{1-\mu^2\lambda^2}\tan\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}-\frac{1}{1-\mu^2\lambda^2}\cos\frac{s\pi}{2},\\W_1&=\frac{s\pi}{2\lambda}\frac{1}{R}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}+1-\frac{s\pi}{2\lambda}\frac{\mu}{R}\tan\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda},\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(20')$$

$$\left.\begin{aligned}U_2&=-\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{1}{1-\lambda^2}\cos\frac{s\pi}{2}\\&\quad+\frac{\mu\lambda}{1-\lambda^2}\cot^2\frac{s\pi}{2\lambda}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}\\&\quad-\frac{\mu\lambda^2}{1-\lambda^2}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\cos\frac{s\pi}{2},\\V_2&=\sin\frac{s\pi}{2}+\frac{\mu\lambda^2}{1-\lambda^2}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\sin\frac{s\pi}{2}\\&\quad-\frac{\mu\lambda}{1-\lambda^2}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\cos\frac{s\pi}{2}+\frac{\mu\lambda}{1-\mu^2\lambda^2}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\cos\frac{s\pi}{2}\\&\quad-\frac{1}{1-\mu^2\lambda^2}\sin\frac{s\pi}{2},\\W_2&=\frac{s\pi}{2\lambda}\frac{1}{R}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}-\frac{1}{R}-\frac{s\pi}{2\lambda}\frac{\mu}{R}\cot^2\frac{s\pi}{2\lambda}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}\\&\quad+\frac{\mu}{R}\cot\frac{s\pi}{2\lambda}\cot\frac{(1-s)\pi}{2\mu\lambda}.\end{aligned}\right\}\cdots(21')$$

(20), (21) より

$$\tan\alpha=\frac{W_2}{V_2}\left(\frac{U_1}{W_1}-\frac{U_2}{W_2}\right),\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\frac{T}{M}=\frac{U_1}{W_1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{W_2}{V_2}\right)^2\left(\frac{U_1}{W_1}-\frac{U_2}{W_2}\right)^2}}.\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

摩擦モーメント T をある値に調整したときに，辷り等がどうなるかを知りたいのである。上式からは T を與へて s を出すことは困難であるが，s を與へれば T も α も求めることが出來るから，T と s，α と s の關係を示す曲線を畫いて置けばよい譯である。

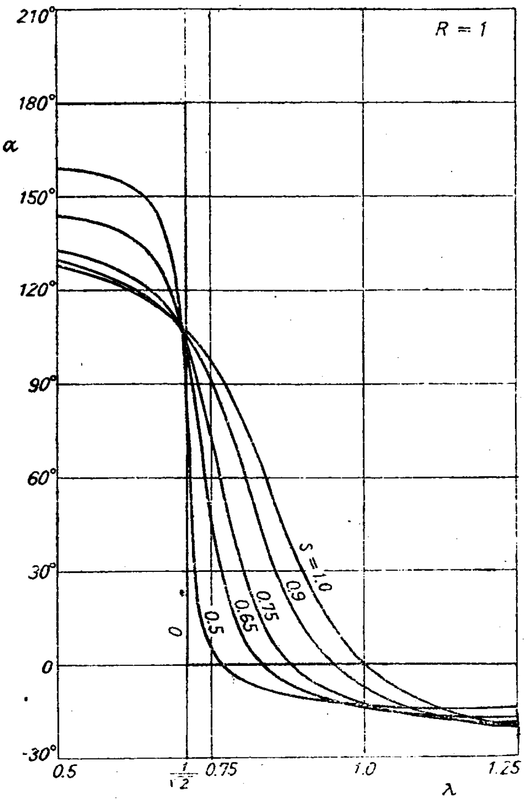
s, T, α の關係が分れば，これを (2), (4), (6) に入れゝば，振動の狀態，從つて吸振器の作用狀態が直に分る筈である。

3. 計算例：R=1 の場合

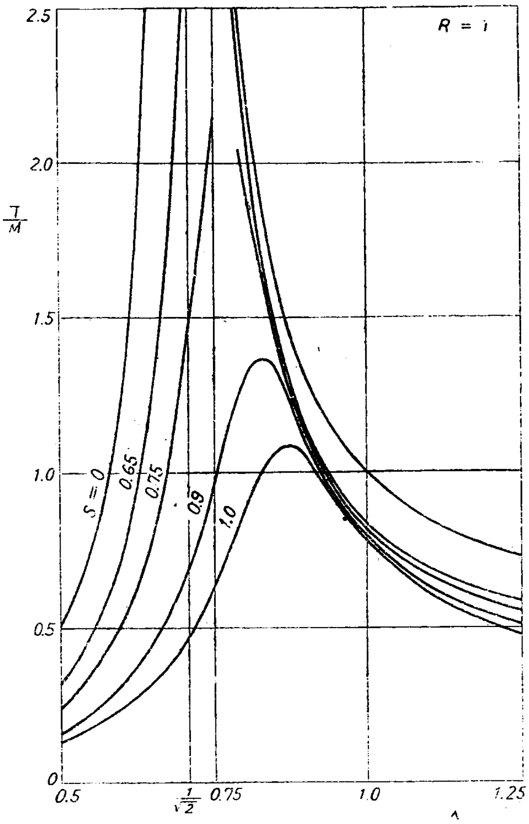
$I_a=I$, 即ち $R=1$ の場合に就て，α と s 及び T と s の關係を出してみると第4圖及び第5圖のやうになる。

$s=0$ といふのは辷らない狀態，即ち $I_a=I$ であるから慣性能率が吸振器の無いときの 2 倍になつた狀態であつて，第4圖に見るやうに，外からのモーメントとの位相が $\lambda=1/\sqrt{2}$ のところで π だけ急に變るのは當然のことである。α は第3圖に示したやうな位相角であつて，この場合 $\alpha=\pi$ といふのは，クランク質量の運動と外からのモーメントと位相が合つてゐるといふことである。又 $\lambda=1/\sqrt{2}$ では共鳴するのであるから，振幅は大きく，然も

$s=0$ に保つには T は非常に大きくなる筈であつて，この關係が第5圖に出てゐる。只第5圖の $s=0$ の曲線は辷りの限界を與へるもので，T がこれより大きければ辷らないのは勿論である。



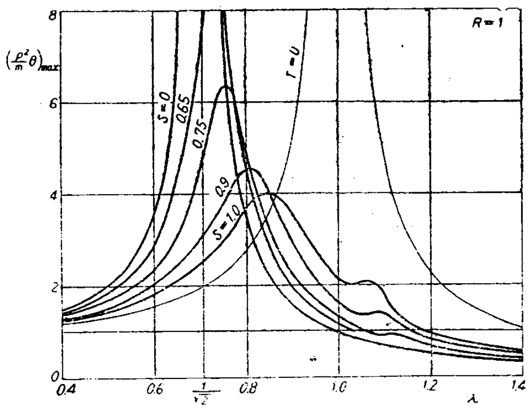
第 4 圖



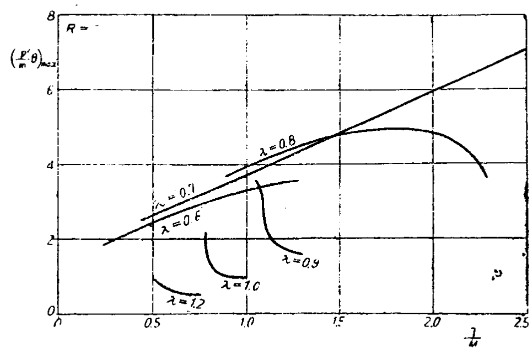
第 5 圖

同様に $s=1$ といふのも，限界を與へる曲線であつて，T がこれより小さければ，常に辷つてゐる狀態になるのである。

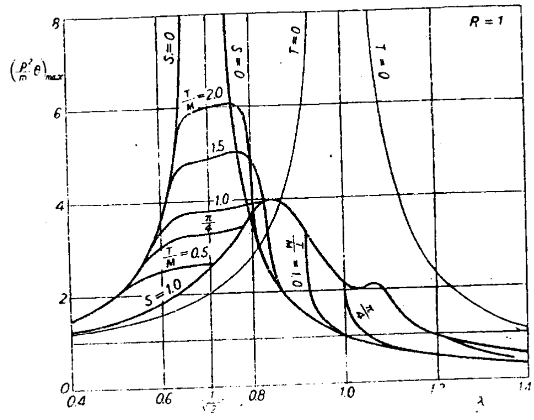
第4圖，第5圖の結果を（2）式に入れて，クランク質量の運動狀態を調べ，その振幅最大の値を探つて曲線に畫くと第6圖，第7圖のやうになる。



第 6 圖



第 7 圖



第 8 圖

第8圖は第7圖のもう少し詳しいものから更に引きなほしたものであつて，Tをある値に調整したときに，λ によつて振幅がどう變るかを表したものである。

$\omega=p$，或は $\lambda=1$ は，吸振器が無ければ共鳴して振幅が大きくなるべきところであるが，吸振器がある場合には T と振幅との關係は第7圖の $\lambda=1$ の曲線の示すやうになる。即ち T/M が1より大きければ辷りは起さない。1 と $\pi/4$ の間ならば斷續的の辷りを起して，その振幅は第7圖のやうである。$\pi/4$ より小さいときには絶えず辷ることになるが，そのときには振幅は非常に大きくなつて吸振器としての役に立たなくなる。

4. 結　　　言

吸振器の斷續的に辷つてゐる場合の作動狀態がこれで漸く分つてきた。然し吸振器全體の性能を知るには，これに連續的に辷つてゐる場合を附加しなければならない。連續的に辷るときには，第3圖の θ_2 の部分がなくなつて，θ_1 から直ちに θ_3 に移るのであつて，斷續的の場合より餘程簡單である。引續き調べてみる豫定である。