No. 319

（昭和十九年十二月發行）

高速氣流の溫度測定に就いて

所員　小　林　辰　男

緒　言

此の報告は大日本航空技術協會物理專門協力委員會に提出せられた問題の回答であつて，便宜上こゝに發表するものである．問題は“高速氣流の溫度を靜止せる溫度計によつて直接測定することは可能なりや”と云ふ意味のものである．溫度計は皆接觸によつて測定を行ふものであるから，氣流の溫度を測定するには先づ氣流の一部を靜止せしめなくてはならない．溫度計を直接氣流に曝せば，氣體は溫度計の表面に境界層（氣流に對する後側も考へるから廣い意味の境界層である）を作つて自然に靜止する．然るに速度 V を有する氣體は，靜止系に對して，其の眞の溫度の外に，速度の溫度效果 $MV^2/7R$ を持つて居る．（(4)式を見よ）此の溫度效果は氣體が靜止すれば同時に眞の溫度に變化するから，高速氣流の眞の溫度を溫度計によつて直接測定することは出來ないと云ふ結論に達する．（岐點其の他に於て靜止した氣體を捕へても之に仕事をさせなくては元の溫度には戻らない）

故に高速氣流の溫度を測るには，岐點壓內の溫度を測定して之に流速の溫度效果だけの補正を加へるのが（從來行はれて居る方法であるが）最も正確な結果を與へる．此の報告は，氣流の溫度效果の意義を明にし，見掛け溫度不變の定理を導出し，岐點溫度の測定法及び其の補正の計算法を檢討したものである．猶ほ氣流の辷りによる發熱及び流れに直角の方向の熱傳導を計算し，此等が岐點溫度に及ぼす影響の程度（小さい）を吟味してある．

1. 流速の溫度效果

流速の溫度效果を導出するのに氣體分子運動論の定理を使用するので，便宜の爲め後で使用する公式をこゝに例記する．

氣體分子の熱運動速度の二乘平均値を C^2 とすれば，

$$C^2=\frac{3RT}{M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

である．但し R は氣體定數，M は氣體の分子量，T は絕對溫度である．從つて一運動自由度に於ける二乘平均速度は

$$\frac{1}{3}C^2=\frac{RT}{M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

This document is provided by JAXA.

である．単原子氣體の定容比熱 c_v を求めるには (a) に $1/2$ を乘じ T で微分すればよいから

$$c_v=\frac{3R}{2M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

である．定壓比熱 c_p は，$c_p-c_v=\dfrac{R}{M}$ なる關係と (c) とから

$$c_p=\frac{5R}{2M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{d})$$

となる．二原子分子の氣體では，運動自由度が 5 であるから，同様にして

$$c_v=\frac{5R}{2M}, \quad c_p=\frac{7R}{2M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{e})$$

となる．以上の關係を用ゐて速度の溫度效果を計算する．

さて，溫度の直接測定は，其の溫度にある物體と測定用計器との接觸によつて行はれる．故に計器に對して速度を有する物體の溫度を測定するには，先づ其れを（或は其の一部を）計器に對して靜止せしめなくてはならない．然るに運動系の溫度を變化せしめないで之を靜止せしめることは一般に不可能である．運動せる物體が固體なる場合には，之を靜止せしめるときの溫度上昇を其の一部分に止め，溫度の變化しない部分の溫度を速に測定することが大體に於て可能である．然るに流體の場合には此の様な方法は想像出來ない．流體は流線に沿ふ壓力變化によるか，又は固體表面との摩擦によつて其の一部を靜止せしめることが出來るが，この際其の部分の溫度は必ず上昇する．

靜止せる固體表面に，之に對して速度を有する氣體が接觸して居る場合を考へる．此のとき氣壓が十分低くて境界層を作らないと考へられる場合には問題は簡單であつて，固體面に衝突する氣體分子が熱運動による速度の外に流れの速度を併有して居ると考へればよい．

氣體分子の熱運動速度の二乘平均値を C^2 とし，流速を V とすれば，靜止系から見た氣體分子の二乘平均速度は C^2+V^2 である．先づ氣體が單原子分子であるとすれば，靜止系から見た此の氣體の見掛け溫度 T' は，(a) により

$$C^2+V^2=\frac{3RT'}{M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

で與へられる．

此の様な場合には氣體分子の熱運動が V の方向に偏つて居ると考へて差支ない．而して此の偏つた速度成分を除いて，C だけによる溫度を測定する方法はあり得ない．（V は別に測定出來るから，これの影響を差引いて C のみによる溫度を計算することは出來る）

空氣の場合には二原子氣體であるから，自由度が 5 である．故に (b) により

$$\frac{5}{3}C^2+V^2=\frac{5RT'}{M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

としなくてはならない．

以上は氣體分子の運動エネルギーだけの計算であるから，氣體の定容比熱だけが考へてあるわけである．故に一般の場合には，溫度による容積變化に要するエネルギーをも考へて，定壓比熱 c_p を取らなくてはならない．即ち (e) により

$$\frac{7}{3}C^2+V^2=\frac{7RT'}{M} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

This document is provided by JAXA.

と置かなくてはならない．故に速度 V を有する空氣は靜止系に對して“眞の溫度”の外に

$$\tau_V=\frac{M}{7R}V^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

だけの“溫度効果”を持つて居ると考へなくてはならない．（流速 V の溫度効果を τ_V で表はす）

猶ほ此の式を二原子分子以外の氣體にも使用するには

$$\tau_V=\frac{M}{(f+2)R}V^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4')$$

とすればよい．但し f は氣體分子の熱運動自由度であつて，單原子分子では 3，二原子分子では 5，三原子分子では約 6 である．

氣流が固體表面に接觸して居る場合に固體表面に對する氣流の溫度効果を考へるには，氣體分子全部の速度分布でなく，固體表面に衝突する分子のみの速度の二乘平均値を取らなくてはならない．然るに，此の樣な場合には氣流は固體表面に平行であると考へられるから，(1) 乃至 (4′) の關係はやはり成立つ．

氣流の溫度を測定するには先づ氣流の一部を靜止せしめなくてはならない．氣流は岐點又は境界層を作つて靜止する．そのとき氣體の溫度は必ず上昇する．これは氣流の速度の溫度効果が當然眞の溫度として現出するのである．故に高速氣流の溫度を測定するには，氣體の一部を靜止に持來す爲の溫度上昇を正確に計算出來る方法，即ち (4) 式の示す溫度効果が全部（傳導によつて散逸しないで）眞の溫度として現出する方法を選ばなくてはならない．それは岐點壓を作らせることであつて，これが熱力學的可逆な唯一の方法である．

此の外，固體表面に境界層を作らせて，その最下層の溫度と釣合つた固體の溫度を測る方法も行はれて居る．境界層の溫度に關しては Pohlhausen の理論があり，Nusselt, Eckert 共の他によつて實驗的に確められて居るが，此の場合には熱傳導が重要な役目をするので，理論の精密度が低く，實測によれば測定器の定數が流速によつて少し變化するから，精密な目的には適しない．

高速氣流の溫度を測るに，接觸による溫度計を用ゐないで，動いて居る空氣中に起る物理現象を觀測して其の結果から溫度（多くの場合に密度）を計算することも可能である．此の目的に利用出來ると考へられる現象に，光の屈折率の變化，音の傳播，火花放電々壓，光波（2000Å 以下）の吸收等がある．併し精密度を高くすることは中々むつかしいであらう．

2. 見掛け溫度不變の定理

前章の (4) は氣體分子運動論から求めたものであるが，岐點に於ける溫度上昇は流體力學の方法で嚴密に求めることが出來る．

空氣の壓縮性を考に入れた岐點壓の式は

$$\frac{1}{2}\rho_0V_0^2=\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(p_0^{\frac{1}{\gamma}}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-p_0\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

である．但し p_0 は氣流中の壓力，p は岐點に於ける壓力である．これと斷熱變化の式

This document is provided by JAXA.

$$\frac{p^{\gamma-1}}{T^{\gamma}}=\frac{p_0^{\gamma-1}}{T_0^{\gamma}} \qquad \cdots\cdots(6)$$

とを組合はせると，岐點に於ける溫度上昇を與へる式が得られる．即ち

$$T-T_0=\frac{T_0\rho_0(\gamma-1)}{2p_0\gamma}V^2 \qquad \cdots\cdots(7)$$

である．而して $pv=\frac{RT}{M}$ の關係を入れると

$$T-T_0=\frac{(\gamma-1)M}{2\gamma R}V^2 \qquad \cdots\cdots(8)$$

となる．但し γ は c_p/c_v の比である．故に岐點に於ける溫度上昇は氣壓及び溫度に無關係である．

此の式を(4)と比べると全く同形であつて，二原子氣體では $\gamma=1.400$ であるから $\frac{\gamma-1}{2\gamma}=\frac{1}{7}$ となつて數係數も全く相等しい．(4)は氣體分子運動論から直ぐ出る式であり，(8)は流體力學と熱力學とから嚴密に求めた式であるから，此等が完全に一致するのは面白い．(4)の考へ方は境界層にも適用出來るから，熱傳導を無視出來ると假定すれば，境界層の最下層の溫度も(8)式で與へられる筈である．

Pohlhausen の理論及び之を確める實驗によれば，境界層の最下層の溫度上昇は，層外の流れを堰止めたときの溫度上昇の約 84％ である．此の 16％ の相違は傳熱導によることは Pohlhausen の解式からも明である．

以上によつて，流速と壓力とに關する Bernoulli の定理と同樣に，氣體の定常流（仕事の授受をしない）の流速と溫度とに關し，輻射及び傳導による熱の出入が無い場合には，各〻の流線に沿うて常に

$$T+\frac{(\gamma-1)M}{2\gamma R}V^2=\text{不變} \qquad \cdots\cdots(9)$$

なる式が成立つ．これは“見掛け溫度不變の定理”とでも稱すべきものである．此の式は，熱力學的可逆な場合に限らず，熱傳導が無視出來ると假定すれば境界層にも用ひられること上述の通りである．又，孔から氣體が低壓の空間へ吹出す場合等にも成立する．（Joule の法則）

(8)式に，$R=8.314\times10^7$，$M=28.98$（空氣），$\gamma=1.400$ を入れると，（$T-T_0=\tau$ と置く）（V の單位は cm/秒）

$$\tau=4.980\times10^{-8}\times V^2 \qquad \cdots\cdots(10)$$

となる．乾燥せる空氣に就ての γ の實測値は $\gamma=1.402$ であるから，γ に此の値を入れると(10)の數係數は 4.998 となる．空氣は常に少量の水蒸氣を含んで居る爲め，$\gamma=1.400$ とする方が色々の實驗結果に良く合ふと云ふことであるから，一般に(10)の値を用ふべきである．即ち空氣の乾濕により（γ の取り方で）約 0.4％ ほど變るが，岐點に於ける溫度上昇は壓力及び溫度に無關係である．

流線に沿うて速度と壓力とが變つても，壓力變化による眞の溫度の變化 τ_{ad} と速度の溫度效果 τ_V との和は(9)により一定である．唯〻境界層に於ては溫度傾度が大きく，從つて

This document is provided by JAXA.

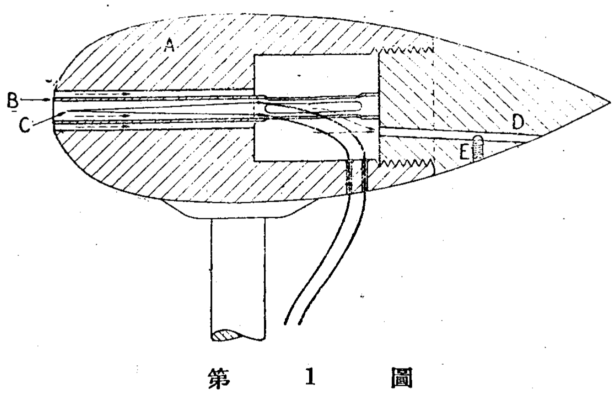
熱傳導の爲め τ_V の 16% が消失する．球が 100 m/秒 の氣流中にあるとき，球表面の溫度上昇を，空氣の粘性を無視して計算したものと，境界層を作つて眞の溫度となつたもの（傳導によつて 16% 低下した場合）との値を表にして見れば次の様になる．

位置	氣流	岐點	30°	60°	90° 即ち側面
速度 (m/秒)	100	0	75	129.9	150
τ_{ad}	0	4.980°	2.179°	−3.423°	−6.225°
τ_V	4.980°	0	2.801°	8.403°	11.205°
$\tau_{ad}+\tau_V$	4.98°	4.98°	4.98°	4.98°	4.98°
$\tau_{ad}+0.84\tau_V$	—	—	4.53°	3.64°	3.19°

3. 岐點溫度の測定

岐點壓内の溫度を測定し，斷熱壓縮による溫度上昇を計算して之を差引くことは最も正確且つ便利であつて，以前から行はれて居る．此の際斷熱壓縮の外に，岐點の溫度に影響を及ぼす可能性のある現象が二つある．一つは岐點の前方で流れに直角な方向に大きな溫度傾度（直徑 1 cm の球で 100 m/秒 の流れを遮つたとき，大きい所では 12°/cm，流速 300 m/秒 では 100°/cm に達する）が出來るので，此の方向の熱傳導が相當に大きいことゝ，も一つは流體中に大きな辷りが起るから内部摩擦によつて溫度が上昇することゝである．此等二つは，境界層に於ては大きな働きをなすものであるが，岐點に對しては影響が大きくないことは想像に難くない．併かし其の程度を確める爲め後章に其の計算がしてある．(後者は極めて小さく，前者も通常の目的には全く無視してよい程度である)

岐點の溫度を測るには，Pitot 管型の動壓管内に溫度計を入れゝばよいが，管の溫度は管外の氣流の影響を受けて岐點溫度とは相當に異なるから，管から溫度計に對する輻射と熱傳導とを防がなくてはならない．其の爲には第1圖に示す様な構造にするのを適當と考へる．



第 1 圖

第1圖に於て，外管 A は外形を流線形とし，材料はエボナイトの様な熱の不良導體がよいが金屬でも差支ない．内管 B は金屬，セルロイド其の他適宜の（熱線に對し不透明な）材料で出來た薄い管であつて，之によつて外管からの輻射と傳導とが溫度計に達するのを防ぐ(外管の方が溫度が低いから輻射も傳導も負である) 内管 B の中に熱電對接點 C 又は抵抗溫度計を入れる．D は空氣の拔孔であつて，空氣をして常に B 管の内外を流れさせる．其の速度は動壓に影響しない程度で大きい方がよい(1 m/秒 位にしたい) E は其の流れを調節する螺子である．B 管及び熱電對を支持する装置は示してない．

This document is provided by JAXA.

更に極めて精密な測定を行ふ場合に，B 管の溫度が外管の影響を受け，其の結果 B 管からの輻射及び傳導が溫度計に達する心配があれば，B 管を二重にして之を防ぐことが出來る.

斯くして岐點壓内の溫度を測定した後，(10)式による補正を行へば氣流の眞の溫度が得られる.

4. 流體の内部摩擦による溫度上昇

岐點前方に起る體流の辷りによる溫度上昇を計算して見る. 流體中の一點で辷りの速度が σ であれば，其の點での流體の溫度上昇は毎秒

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\eta\sigma^2}{\rho c_p J} \qquad \cdots\cdots(11)$$

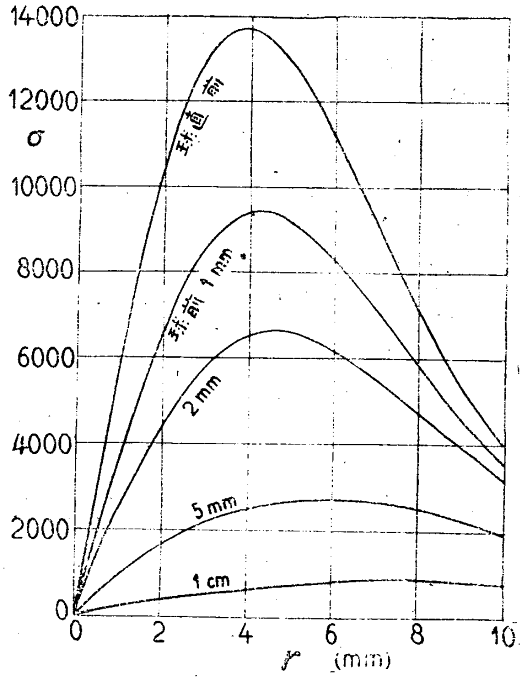
の割合である. 但し，η は流體の粘性係數，ρ は密度，J は熱の仕事當量である.

岐點溫度測定管の前頭部を半徑 R なる球と考へ，理想流體の一様な流れの中に球がある場合の球の附近の流速を與へる式(12)から σ の値を求める. 粘性を有する流體では球の前方での辷りは此の σ よりも小さいこと明である. 球の中心から流れの來る方向に x 軸を取り，x 軸からの距離を r とする. 一様な流れの速度を $-U$ とすれば，球の附近の流れの x 成分 u と r 成分 q とは次の式で與へられる.

$$\left.\begin{aligned} u&=-U\left\{1-\frac{R^3}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3x^2}{x^2+r^2}-1\right)\right\}\\ q&=+\frac{3UR^3xr}{2(x^2+r^2)^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

此の第一式から $\partial u/\partial r$ を求めると x 軸を含む平面内の辷りが出る. 第二の式から x 軸に垂直な平面内の辷りが出るが，これは r が x に比べて小さい所では $\partial u/\partial r$ に比べて小さいから省略して（省略しなくても大して面倒ではないが）$\partial u/\partial r$ を σ の全部として發熱量を計算する.

R を 1 cm とし，U が 100 m/秒 の場合の $\partial u/\partial r$ の値を求めて圖示すれば第 2 圖の様になる. 即ち x 軸上では常に 0 であつて溫度上昇はない. 併かし斷熱變化で出來た溫度分布を亂すから，次の章で考へる熱傳導の結果に影響を及ぼす虞れがある.



第 2 圖

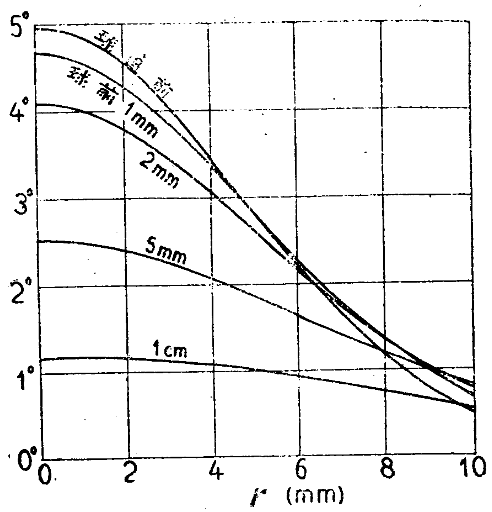
$x=1.1$ 即ち球の前方 1 mm の所の x 軸に垂直な平面では，$r=4.3$ mm で $\partial u/\partial r$ が極大になる. 而して其の値は 9365 である. これを (11) に入れると，此の點での溫度上昇は

This document is provided by JAXA.

毎秒 1.15° なることが分る．此の點を通る流線に沿ひ，此様な $\partial T/\partial t$ の値に dx/u を掛けて，遙か前方から $x=1.1$ まで數値積分を行へば 3.6×10^{-5} 度となる．流速 300 m/秒 のときでも 10^{-4} 度の程度である．故に辷りによる發熱は岐點の前方では問題にならない．

5. 熱 傳 導 の 影 響

此の場合にも前章に於けると同様に理想流體と假定して球の前方の流速を計算し，次に壓縮性を考へて (10) 式により溫度上昇を算出する．流速 100 m/秒 のときの溫度上昇 τ_{ad} の分布を圖示すれば第 3 圖の様になる．



第　3　圖

此の圖で見ると，x 軸に直角の方向の τ_{ad} (本章では單に τ と書く) の分布曲線は其の形が公算曲線に酷似して居る．故に公算曲線と同様に

$$\tau=\tau_0 e^{-br^2} \qquad \cdots\cdots(13)$$

として表はす．但し τ_0 は x 軸上の τ の値である．斯くして，x の色々の所の b の値を τ_0 と r の餘り大きくない點の τ とから計算する．其の一例を示せば，$x=1.2$ 即ち球の前方 2 mm の所では $\tau_0=4.10°$，$b=1.82$ である．

x 軸に垂直な方向の熱傳導の方程式は

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=C\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r}\right) \qquad \cdots\cdots(14)$$

である．但し

$$C=\frac{\kappa}{c_p\rho} \qquad \cdots\cdots(15)$$

であつて，κ は熱傳導度，c_p は定壓比熱，ρ は密度を表はす．

此の方程式の解は次の形に書くことが出來る．

$$\tau=\int_0^\infty k\Phi(k)e^{-k^2Ct}J_0(kr)dk$$

此の式で $t=0$ のとき (13) が成立つとして $\Phi(k)$ を求める．然るときは Haukel の定理により

$$\Phi(k)=\int_0^\infty \tau_0 e^{-bl^2} lJ_0(kl)dl=\frac{\tau_0}{2b}e^{-\frac{k^2}{4b}}$$

となる．故に

$$\tau=\frac{\tau_0}{2b}\int_0^\infty e^{-k^2Ct}ke^{-\frac{k^2}{4b}}J_0(kr)dk$$

This document is provided by JAXA.

として積分を行へば

$$\tau = \frac{(\tau_0)_{t=0}}{1+4bCt} e^{-\frac{br^2}{1+4bCt}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

が得られる．即ち溫度分布の形には變化が起らないことが分る．x 軸上では

$$\tau_0 = \frac{(\tau_0)_{t=0}}{1+4bCt}$$

となる．但し $(\tau_0)_{t=0}$ は(10)式（V^2 の代りに U^2-u^2 と置く）で計算した τ の値である．$t=0$ に於ける溫度變化の速さは

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial t} = -4bC(\tau_0)_{t=0} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

で與へられる．

C の値を計算するのに，(15)に於て，$c_p=0.242$，$\rho=0.001293$（0°C，1 氣壓）とし，氣流は亂れて居ないものとして靜止狀態に於ける κ の値 $\kappa=5.33\times10^{-5}$ を入れゝば $C=0.170$ となる．此の値を入れて前記の球の前方 2 mm の所の τ_0 の降下の割合を求めると毎秒 5.1° となる．

此の様な $\partial\tau_0/\partial t$ の數値を x 軸上の各點に就いて求め，dx/u を掛けて $x=\infty$ から球の直前まで積分を行ふ．球の直前では急激に增大するから，$x=1$ までゞなく，$x=\infty$ から $x=1.01$ まで數値積分を行へば 1.035×10^{-3} 度となる．$x=1.01$ から $x=1$ までは τ_0 及び b の値が殆んど變化しないから，τ_0 と b とを不變と置いて數式による積分を行ふことが出來る．積分を $x=1$ まで行へば結果は無限大となる．これは $x=1$ では $u=0$ となるのに，(16)の代りに(17)を用ゐた爲であつて，勿論意味は無い．然かし(16)を用ゐるとしても $x=1$ まで積分すべきではない．岐點溫度測定器で動壓管の中へ小さい速度で空氣を吸込むのも一つは此の爲であつて，管內の空氣を止めてしまへば溫度計は外管の溫度を示す．動壓管に 1 m/秒で空氣を吸込むとして，上記の積分を $u=1$ m となる點（球の前方 0.033 mm）まで行ひ，前記の 1.01 までの積分と加へると

$$\triangle\tau_0 = 1.31\times10^{-3} \text{ 度}$$

となる．更に $u=10$ cm/秒 及び $u=1$ cm/秒 となる點まで積分すれば 1.87×10^{-3} 度及び 2.43×10^{-3} 度となる．球の直前では流速の r 方向の成分 q が大きいからこれは嚴密な計算ではないが，動壓管に小さい速度で空氣を吸込めば，岐點溫度に對する傳導の影響は極めて小さいことが分る．流速 300 m のとき 3 cm/秒 の速度で吸込んでも岐點溫度は計算値より 7/1000 度くらゐ低いだけである．それよりも第 1 圖の B 管が無いと外管からの輻射と傳導との影響の方が大きいであらう．故に熱電接點は（B 管があつても）成るべく管の前の方に置く方がよい．若し氣流が亂れて居れば κ が大きくなるから熱傳導の影響はもつと大きくなる．

終に臨み，計算に助力を與へられた所員木村錬一君に感謝の意を表する．

This document is provided by JAXA.