

No. 290.

(Published April, 1944.)

---

Abstracts.

On the Velocity Distribution round an Aerofoil  
at High Speeds, I.<sup>(1)</sup>

By

Isao IMAI, *Rigakuhakushi*,  
Member of the Institute.

---

I. Introduction.

§ 1. The object of this paper is to obtain analytical formulae for the velocity distribution round an arbitrary aerofoil section which is placed in a uniform flow of a compressible fluid. For this purpose, a new method of  $M^2$ -expansion is developed, which consists in expanding the velocity potential and stream function in series of powers of  $M^2$ ,  $M$  being the MACH number of the undisturbed flow. Historical survey of several methods of  $M^2$ -expansion—JANZEN-RAYLEIGH's, POGGI's, and the present author's methods—is given in this Introduction.

II. Fundamental Equations.

§ 2. The steady two-dimensional irrotational flow of a compressible perfect fluid obeying the adiabatic law is governed by the simultaneous equations:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.4)$$

---

(1) For convenience, the content of my previous paper will also be given here. Report No. 275.

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left( \frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.8)$$

where  $(x, y)$  are the cartesian coordinates in the plane of fluid motion,  $(u, v)$  the components of velocity,  $q$  its magnitude,  $\phi$  the velocity potential,  $\Psi$  the stream function,  $\rho$  the density,  $\gamma$  the ratio of the specific heats, and  $U, M, \rho_\infty$  are respectively the velocity, the MACH number, and the density of the undisturbed fluid.

§ 3. Let us now introduce a pair of complex variables:

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (3.1)$$

Then we get from (2.4) and (2.12)

$$u - iv = \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \phi = 2 \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3.3)$$

$$u - iv = \frac{\rho_\infty}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi = 2i \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (3.4)$$

respectively. Hence we have

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

We now define a complex velocity potential:

$$F = \phi + i\Psi, \quad (3.6)$$

just as in the theory of an incompressible perfect fluid. (3.5) can then be written in the form:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} = \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.7)$$

Next we assume that the various quantities in the field of flow can be expanded in powers of  $M^2$ . Thus

$$\phi = \phi_0 + M^2 \phi_1 + M^4 \phi_2 + \dots, \quad (3.8)$$

$$\Psi = \Psi_0 + M^2 \Psi_1 + M^4 \Psi_2 + \dots, \quad (3.9)$$

$$F = F_0 + M^2 F_1 + M^4 F_2 + \dots. \quad (3.10)$$

Then  $q^2 = u^2 + v^2 = 4(\partial\phi/\partial z)(\partial\phi/\partial\bar{z})$  can be expressed as

$$q^2 = q_0^2 + M^2 q_1^2 + M^4 q_2^2 + \dots, \quad (3.12)$$

where

$$q_N^2 = 4\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z} \frac{\partial\phi_N}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial\phi_1}{\partial z} \frac{\partial\phi_{N-1}}{\partial\bar{z}} + \dots + \frac{\partial\phi_N}{\partial z} \frac{\partial\phi_0}{\partial\bar{z}}\right), \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.13)$$

Further, we have, from (2.8),

$$1 - \frac{\rho}{\rho_\infty} = M^2 \rho_1 + M^4 \rho_2 + \dots, \quad (3.14)$$

where

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1\right), \quad \rho_2 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{U^2} - \frac{2-\gamma}{8} \left(\frac{q_0^2}{U^2} - 1\right)^2, \dots \quad (3.15, 16)$$

Substituting (3.8)–(3.16) in (3.7), comparing the terms involving the same powers of  $M^2$  on both sides of the equation, and then integrating with respect to  $z$ , we have

$$\bar{F}_0 = \bar{G}_0(\bar{z}), \quad (3.19)$$

$$\bar{F}_N = \int \left(\rho_1 \frac{\partial\phi_{N-1}}{\partial z} + \rho_2 \frac{\partial\phi_{N-2}}{\partial z} + \dots + \rho_N \frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right) dz + \bar{G}_N(\bar{z}), \quad N = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Here  $\bar{G}_N(\bar{z})$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ) are arbitrary analytic functions of  $\bar{z}$  only, which should be determined by the appropriate boundary conditions. These formulae would enable us to find, in succession,  $\phi_1, \phi_2, \dots$  and  $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ , starting from  $\phi_0$ , the velocity potential for the flow of an incompressible fluid.

### III. Mathematical Preliminaries. Conjugate Fourier Series.

§ 4. Let  $g(z)$  be a function analytic on and outside the unit circle:  $z = e^{i\theta}$ . Then  $g(z)$  can be expanded in a LAURENT series:

$$g(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| \geq 1. \quad (4.1)$$

On the unit circle:  $z = e^{i\theta}$ , we have, on putting  $c_n = a_n + ib_n$ ,

$$g(e^{i\theta}) = R(\theta) + iI(\theta), \quad (4.2)$$

where

$$R(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (4.3)$$

$$I(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta). \quad (4.4)$$

Using the FOURIER coefficients associated with the function  $R(\theta)$  we construct a FOURIER series:

$$R^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta), \quad (4.5)$$

which is called the conjugate of the FOURIER series  $R(\theta)$ . Then we have at once

$$R(\theta) = a_0 + I^*(\theta), \quad I(\theta) = b_0 - R^*(\theta). \quad (4.6)$$

It is shown that the conjugate FOURIER series  $R^*(\theta)$  associated with  $R(\theta)$  can be obtained by the formula:

$$R^*(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R(\varphi + \theta) - R(\theta)] \cot \frac{\varphi}{2} d\varphi. \quad (4.13)$$

Further, if we put

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\theta}, \quad C_n = A_n + iB_n, \quad (4.14)$$

where  $A_n, B_n$  are arbitrary real constants, then we have

$$P(\theta) - Q^*(\theta) = A_0 + 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ni\theta}, \quad (4.17)$$

$$Q^*(\theta) - iQ(\theta) = -iB_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (C_n - \bar{C}_{-n}) e^{ni\theta}. \quad (4.18)$$

IV. Zero-th Approximation (Incompressible Fluid).

§ 5. We now consider the boundary conditions which should be satisfied by the complex velocity potential for the uniform flow, parallel to the  $x$ -axis, past an arbitrary profile. From (3.3) and (3.4), we have

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + i \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\rho}{\rho_\infty} \right) (u - iv). \tag{5.1}$$

Hence we get following conditions :

(i)  $\Psi = 0$ , on the profile, (5.2)

(ii)  $\frac{\partial F}{\partial z} \rightarrow U$ , as  $z \rightarrow \infty$ , (5.3)

(iii)  $\partial F/\partial z$  is one-valued and continuous throughout the region outside the profile.

It is well known that the region outside an arbitrary profile P in the  $z$ -plane can be conformally mapped on the region outside the unit circle in the  $Z$ -plane by means of a suitable analytic function of the form :

$$z = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \dots \tag{5.4}$$

Here it may be mentioned that a practical method of finding such an analytic function has been proposed by the present author [3].<sup>(1)</sup>

Now, by considering (3.19) and the conditions (i), (ii), (iii) above, the zero-th approximation to the complex velocity potential for the flow past P is readily found in the form :

$$F_0 = f(z) = \lambda \left( e^{i\delta} Z + \frac{e^{-i\delta}}{Z} \right) + i\kappa_0 \log Z, \tag{5.12}$$

where we have put  $c_{-1} = \lambda e^{i\delta}$  and  $\kappa_0 = \Gamma_0/2\pi U$ ,  $\Gamma_0$  being the circulation round the profile P, and the undisturbed velocity  $U$  is conveniently taken as unity.

---

(1) The number enclosed in square brackets refers to the literature given at the end of this paper.

### V. The First Approximation.

§ 6. From (3.20), we have, by the use of (3.13), (3.15), and (5.12),

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{4} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \int \left( \frac{df}{dz} \right)^2 dz - \frac{1}{4} \int \frac{df}{dz} dz + \bar{G}_1(\bar{z}), \quad (6.4)$$

which may be rewritten in the form :

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = & \frac{1}{4} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{df}{dz} \right)^2 - 2i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + 2i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] \\ & - \frac{1}{4} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \frac{df}{dz} - i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] + \bar{g}_1(\bar{z}), \end{aligned} \quad (6.13)$$

where  $z_0$  is an arbitrary constant, while  $\bar{g}_1(\bar{z})$  is an arbitrary analytic function of  $\bar{z}$ . Taking account of (5.4) and (5.12) as well as of the conditions (ii) and (iii) in § 5, we can readily see that  $dg_1/dz$  is analytic and one-valued in the region outside the profile P and  $dg_1/dz \rightarrow 0$  as  $z \rightarrow \infty$ . Hence  $dg_1/dZ = (dg_1/dz)(dz/dZ)$  is analytic and one-valued in the region outside the unit circle in the  $Z$ -plane, and  $dg_1/dZ \rightarrow 0$  as  $Z \rightarrow \infty$ . Thus,  $g_1$  should be of the form :

$$g_1 = i\kappa_1 \log Z + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \dots, \quad |Z| > 1, \quad (6.16)$$

where  $\kappa_1$  is a real constant as will be shown in the following section.

§ 7. Let us now consider the equation (6.13) on the profile, that is, on the unit circle:  $Z = e^{i\theta}$  in the  $Z$ -plane. The constant  $z_0$  may be conveniently taken to be on the profile, thus corresponding to  $Z = e^{i\theta_0}$ . (Usually it is most convenient to choose  $z_0$  as the trailing edge of the profile.) If we put  $Z = e^{i\theta}$ , we have  $dz = ds e^{i\omega}$ ,  $ds$  being the line element along the profile and  $\omega$  the angle which  $ds$  makes with the positive direction of the  $x$ -axis. Further, on account of (5.2), we have

$$f(e^{i\theta}) = \Phi_0(\theta), \quad F_1(e^{i\theta}) = \Phi_1(\theta), \quad \dots$$

Putting  $Z = e^{i\theta}$  in (6.13) and separating the real and imaginary parts, we get

$$\Phi_1(\theta) = P_1(\theta) + R_1(\theta), \quad 0 = Q_1(\theta) + I_1(\theta), \quad (7.4, 5)$$

where we have put

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta) = \frac{1}{4} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i\omega} + 2\kappa_0 \right\} d\theta - \frac{1}{4} \int_{\theta_0}^{\theta} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} + \kappa_0 \right) d\theta, \quad (7.2)$$

$$g_1(e^{i\theta}) = R_1(\theta) + iI_1(\theta). \quad (7.3)$$

$Q_1(\theta)$  is obviously a periodic function of  $\theta$ , and therefore so is  $I_1(\theta)$  on account of (7.5). Hence, putting  $Z = e^{i\theta}$  in (6.16), we can see at once that  $\kappa_1$  should be real.

Now  $g_1 - i\kappa_1 \log Z$  is one-valued and analytic in the region  $|Z| > 1$  and becomes  $R_1(\theta) + \kappa_1\theta + iI_1(\theta)$  when  $Z = e^{i\theta}$ ; therefore we have, by (4.6),

$$R_1(\theta) + \kappa_1\theta = I_1^*(\theta). \quad (7.6)$$

Substituting (7.5) and (7.6) in (7.4), we get finally

$$\Phi_1(\theta) = P_1(\theta) - Q_1^*(\theta) - \kappa_1\theta, \quad (7.7)$$

which is just the required formula. In fact, each term on the right-hand side of (7.7) is a known quantity, since (7.2) gives  $P_1(\theta)$  and  $Q_1(\theta)$  and hence its conjugate FOURIER series  $Q_1^*(\theta)$  by means of the formula (4.13).  $\kappa_1$  is for the present indeterminate, but in the case of the profile with a sharp trailing edge it can be determined by the well-known assumption of JOUKOWSKI. Thus, assuming  $\phi_1'(\theta_0) = 0$ , we have

$$\kappa_1 = P_1'(\theta_0) - Q_1^{*'}(\theta_0), \quad (7.8)$$

where  $\theta_0$  corresponds to the trailing edge.

## VI. Second Approximation.

§ 8. The second approximation to the velocity potential on the profile can be obtained in quite a similar manner to that for the first approximation. Substituting  $\Phi_0 = \frac{1}{2}(F_0 + \bar{F}_0)$  and  $\Phi_1 = \frac{1}{2}(F_1 + \bar{F}_1)$ ,

as given by (5.12) and (6.13), into (3.13), (3.15), and (3.16), we can express  $\rho_1$  and  $\rho_2$  in terms of  $f(z)$  and  $g_1(z)$ . Hence, by (3.20), we have

$$\begin{aligned}
\bar{F}_2 &= \int \left( \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \rho_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) dz + \bar{G}_2(\bar{z}) \\
&= \frac{1}{16} \left( \frac{df}{dz} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} - 1 \right) \frac{df}{dz} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right)^2 + 2i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}} \right\} d\bar{z} - 2i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] \\
&\quad + \frac{1}{32} \frac{d^2\bar{f}}{d\bar{z}^2} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{df}{dz} \right)^2 - 2i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + 2i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{16} \left\{ 4 \frac{d\bar{g}_1}{d\bar{z}} + i\kappa_0 \left( 2 \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} - 1 \right) \frac{1}{Z} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{z}} \right\} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{df}{dz} \right)^2 - 2i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz \right. \\
&\quad \left. + 2i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left[ 4 \frac{dg_1}{dz} - i\kappa_0 \left( \frac{df}{dz} - 1 \right) \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right] \frac{df}{dz} - 4i\kappa_1 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz \right. \\
&\quad \left. + 4i\kappa_1 \log Z\bar{Z} \right] \\
&\quad - \frac{1}{16} \left\{ 4 \int_{z_0}^z \left( \frac{dg_1}{dz} - i\kappa_1 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right) dz + i(\kappa_0 + 4\kappa_1) \log Z\bar{Z} \right\} \\
&\quad + \frac{\gamma+1}{16} \left( \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \right)^2 \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{df}{dz} \right)^3 - 3i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + 3i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] \\
&\quad - \frac{\gamma}{8} \frac{d\bar{f}}{d\bar{z}} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \left( \frac{df}{dz} \right)^2 - 2i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + 2i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] \\
&\quad + \frac{\gamma-1}{16} \left[ \int_{z_0}^z \left\{ \frac{df}{dz} - i\kappa_0 \frac{1}{Z} \frac{dZ}{dz} \right\} dz + i\kappa_0 \log Z\bar{Z} \right] + \bar{g}_2(\bar{z}), \quad (8.4)
\end{aligned}$$

where  $\bar{g}_2(\bar{z})$  is an analytic function of  $\bar{z}$  to be determined by the boundary conditions. Just the same reasoning as before leads to the conclusion that  $g_2(z)$  should be of the form :

$$g_2 = i\kappa_2 \log Z + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots, \quad |Z| > 1, \quad (8.7)$$

where  $\kappa_2$  is an arbitrary real constant.



§ 9. The state of affairs along the profile can be obtained by putting  $Z = e^{i\theta}$  in (8.4). Thus we have

$$\Phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) - \kappa_2\theta, \quad (9.7)$$

where  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$  is given by (9.8).

## VII. Result.

§ 10. For the sake of convenience, let us now summarize the various formulae obtained for the velocity distribution round an arbitrary profile P which is placed in an otherwise uniform flow of a compressible fluid. Although in the above deduction we have assumed that the undisturbed stream is parallel to the  $x$ -axis, it is not essential. To generalize the results to the case of the undisturbed stream making an angle  $\alpha$  with the  $x$ -axis we have only to make the substitution:

$$\omega \rightarrow \omega - \alpha, \quad \delta \rightarrow \delta - \alpha,$$

as is obvious from the geometrical meaning of  $\omega$  and  $\delta$ .

Let the region outside the profile P:  $z = z_P$  in the  $z$ -plane be conformally mapped on to the region outside the unit circle:  $Z = e^{i\theta}$  in the  $Z$ -plane by means of an analytic function:

$$z = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \dots, \quad c_{-1} = \lambda e^{i\delta}, \quad (10.1)$$

the profile itself being represented by

$$x_P = x_P(\theta), \quad y_P = y_P(\theta). \quad (10.2)$$

The velocity on the profile is then given by

$$q(\theta) = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad (10.3)$$

where

$$\frac{dx_P}{d\theta} + i \frac{dy_P}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta} e^{i\omega}, \quad \text{so that} \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx_P}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_P}{d\theta}\right)^2}. \quad (10.4,5)$$

Also

$$\Phi(\theta) = \Phi_0(\theta) + M^2\Phi_1(\theta) + M^4\Phi_2(\theta) + \dots, \quad (10.6)$$

with

$$\Phi_0(\theta) = 2\lambda \cos(\theta - \alpha + \delta) - \kappa_0\theta, \quad (10.7)$$

$$\Phi_1(\theta) = P_1(\theta) - Q_1^*(\theta) - \kappa_1\theta, \quad (10.8)$$

$$\Phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) - \kappa_2\theta, \quad (10.9)$$

where

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta) = \frac{1}{4} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta - \frac{\lambda}{2} \cos(\theta - \alpha + \delta), \quad (10.10)$$

$$P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - 1 \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta \\ &+ \frac{1}{32} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \right) \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta \right]^2 \\ &+ \frac{1}{16} \left\{ \kappa_0 \left( 2 \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} - 1 \right) - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} + i \frac{dQ_1}{d\theta} + \kappa_1 \right) \right\} \\ &\quad \times \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta \\ &+ \frac{1}{8} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left[ \left\{ \kappa_0 \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} - i \frac{dQ_1}{d\theta} + \kappa_1 \right) \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} + 4\kappa_1 \right] d\theta \\ &+ \frac{1}{4} [Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma}{2} [P_1(\theta) + iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma+1}{8} \lambda \cos(\theta - \alpha + \delta) \\ &+ \frac{\gamma+1}{16} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 e^{-2i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^3 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 e^{2i(\omega-\alpha)} + 3\kappa_0 \right\} d\theta. \end{aligned} \quad (10.11)$$

When  $e^{i\omega}d\theta/ds$  has a simple analytical expression, the velocity  $q(\theta)$  can be obtained by a straightforward analytical calculation with the aid of the above formulae. This would be the case for the general JOUKOWSKI profiles. In general,  $e^{i\omega}d\theta/ds$  has no simple expression for an arbitrarily given aerofoil. In such a case, however, the functions  $x_P(\theta)$ ,  $y_P(\theta)$ , and hence  $e^{i\omega}d\theta/ds$  can be found numerically by some method, e.g., by the present author's method [3]. The above formulae will then furnish a purely numerical method for finding the velocity distribution  $q(\theta)$ .

### VIII. Application to the Flow Past a Circular Cylinder in the Presence of Circulation.

§ 11. In this case the  $z$ -plane and the  $Z$ -plane coincide, and therefore we have  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $z_P = e^{i\theta}$ , the radius of the cylinder being taken as unity. Hence

$$ds/d\theta = 1, \quad e^{i\omega} = ie^{i\theta}. \quad (11.1)$$

Assuming the direction of the flow at infinity is parallel to the  $x$ -axis, we have  $\alpha = 0$ . Thus, by (10.7)

$$\Phi_0(\theta) = 2 \cos \theta - k\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} - k\theta, \quad (11.2)$$

the circulation round the cylinder being  $2k\pi$ . Substituting (11.1) and (11.2) in (10.10) we have

$$\begin{aligned} P_1(\theta) + iQ_1(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\theta} \\ &= -\frac{1}{12} e^{3i\theta} - \frac{i}{3} k e^{2i\theta} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} k^2 \right) e^{i\theta} + \sum_{n=0}^3 C_n e^{-ni\theta}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

whence, on account of (10.8) and (4.17)

$$\phi_1(\theta) = 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ni\theta} = -\frac{1}{6} \cos 3\theta + \frac{2}{3} k \sin 2\theta + \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \cos \theta, \quad (11.4)$$

which is in accordance with LAMB's result. Further, we have

$$-q(\theta) = 2 \sin \theta + k + M^2 \left\{ \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \sin \theta - \frac{4}{3} k \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta \right\},$$

which agrees with POGGI's result.

## XI. Summary.

§ 12. On the basis of a new method of  $M^2$ -expansion, analytical formulae are obtained, which give the velocity distribution on an arbitrary wing section placed in a uniform flow of a compressible fluid exactly to the order of  $M^4$ ,  $M$  being the MACH number of the undisturbed stream. These formulae would be of particular value for the purely numerical work, though in some cases they will also enable us to find analytical expressions for the velocity distribution. Examples of the application of the formulae, both analytical and numerical, will be given in forthcoming papers.

## On the Velocity Distribution round an Aerofoil at High Speeds, II. Circular Cylinder and Circular Arc Aerofoil.

By

Isao IMAI, *Rigakuhakushi*,  
Member of the Institute.

### I. Introduction.

§ 1. In this paper the formulae obtained in the previous paper are applied to the case of a circular cylinder with arbitrary circulation and that of a circular arc aerofoil at zero angle of attack, in order to see the manner in which their aerodynamical characteristics are affected by the compressibility of the fluid.

## II. Fundamental Formulae.

§ 2. The various formulae obtained in the previous paper are reproduced here (see § 10 of the previous paper).

## III. Circular Cylinder.

§ 3. The first approximation to the velocity potential. We may assume, without loss of generality, that the undisturbed velocity is of magnitude 1 and parallel to the positive  $x$ -axis and the radius of the cylinder is 1. Then we have  $\lambda = 1$ ,  $\delta = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $d\theta/ds = 1$ ,  $e^{i\omega} = ie^{i\theta}$ . Hence, by (I.10.7)<sup>(1)</sup>, we have

$$\Phi_0(\theta) = 2 \cos \theta - k\theta = e^{i\theta} - k\theta + e^{-i\theta}, \quad (3.5)$$

$2\pi k$  being the circulation round the cylinder, and (I.10.10) becomes

$$\begin{aligned} P_1(\theta) + iQ_1(\theta) = & -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} e^{3i\theta} + \frac{4}{3} ike^{2i\theta} - \left( \frac{4}{3} + 2k^2 \right) e^{i\theta} + \left( \frac{8}{3} - 4ik + k^2 - ik^3 \right) \right. \\ & \left. + \left( 2 + \frac{8}{3} ik + 2k^2 + ik^3 \right) e^{-i\theta} - \left( \frac{8}{3} + k^2 \right) e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Hence (I.4.17) and (I.10.8) give

$$\Phi_1(\theta) = -\frac{1}{6} \cos 3\theta + \frac{2}{3} k \sin 2\theta + \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \cos \theta. \quad (3.10)$$

§ 4. The second approximation to the velocity potential. Remembering (I.4.18) we get from (3.9)

$$\begin{aligned} Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta) = & -\frac{1}{6} e^{3i\theta} + \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{3} ik + \frac{1}{4} k^2 \right) e^{2i\theta} \\ & - \left( \frac{5}{6} - \frac{2}{3} ik + k^2 - \frac{1}{4} ik^3 \right) e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Substituting (3.1), (3.2), (3.5), (3.9) and the above expression into (I.10.11) and making some reduction, we have

---

(1) For example, (I.10.7) denotes the formula (10.7) in the previous paper [4].

$$\begin{aligned}
& P_2(\theta) + iQ_2(\theta) \\
&= (\gamma-1) \left\{ \frac{1}{80} e^{5i\theta} + \frac{23}{320} i k e^{4i\theta} - \left( \frac{11}{240} + \frac{27}{160} k^2 \right) e^{3i\theta} \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{127}{480} i k + \frac{13}{64} i k^3 \right) e^{2i\theta} + \left( \frac{23}{240} + \frac{19}{32} k^2 + \frac{1}{8} k^4 \right) e^{i\theta} + \dots \right\} \\
&\quad + \frac{3}{80} e^{5i\theta} + \frac{59}{288} i k e^{4i\theta} - \left( \frac{25}{144} + \frac{631}{1440} k^2 \right) e^{3i\theta} \\
&\quad - \left( \frac{887}{1440} i k + \frac{61}{144} i k^3 \right) e^{2i\theta} + \left( \frac{37}{80} + \frac{71}{72} k^2 + \frac{1}{8} k^4 \right) e^{i\theta} + \dots \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Hence, by (I.10.9) and (I.4.17), we get

$$\begin{aligned}
\phi_2(\theta) &= (\gamma-1) \left\{ \frac{1}{40} \cos 5\theta - \frac{23}{160} k \sin 4\theta - \left( \frac{11}{120} + \frac{27}{80} k^2 \right) \cos 3\theta \right. \\
&\quad \left. + k \left( \frac{127}{240} + \frac{13}{32} k^2 \right) \sin 2\theta + \left( \frac{23}{120} + \frac{19}{16} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \cos \theta \right\} \\
&\quad + \frac{3}{40} \cos 5\theta - \frac{59}{144} k \sin 4\theta - \left( \frac{25}{72} + \frac{631}{720} k^2 \right) \cos 3\theta \\
&\quad + k \left( \frac{887}{720} + \frac{61}{72} k^2 \right) \sin 2\theta + \left( \frac{37}{40} + \frac{71}{36} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \cos \theta. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

§ 5. Velocity distribution round a circular cylinder. The velocity on the surface of the cylinder may be expressed in the form :

$$q(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta) + \dots, \quad (5.1)$$

where  $q_N(\theta) = -d\phi_N/d\theta$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ). Thus

$$q_0(\theta) = 2 \sin \theta + k, \quad (5.2a)$$

$$q_1(\theta) = -\frac{1}{2} \sin 3\theta - \frac{4}{3} k \cos 2\theta + \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \sin \theta, \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned}
q_2(\theta) &= (\gamma-1) \left\{ \frac{1}{8} \sin 5\theta + \frac{23}{40} k \cos 4\theta - \left( \frac{11}{40} + \frac{81}{80} k^2 \right) \sin 3\theta \right. \\
&\quad \left. - k \left( \frac{127}{120} + \frac{13}{16} k^2 \right) \cos 2\theta + \left( \frac{23}{120} + \frac{19}{16} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin \theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{8} \sin 5\theta + \frac{59}{36} k \cos 4\theta - \left( \frac{25}{24} + \frac{631}{240} k^2 \right) \sin 3\theta \\
 & - k \left( \frac{887}{360} + \frac{61}{36} k^2 \right) \cos 2\theta + \left( \frac{37}{40} + \frac{71}{36} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin \theta. \quad (5.2c)
 \end{aligned}$$

For the calculation of the critical MACH number we must first find the maximum velocity in the field of flow, which is clearly given by

$$q_{\max} = q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^4 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots, \quad (5.3)$$

where

$$q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + k, \quad (5.4a)$$

$$q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{4}{3} k + k^2, \quad (5.4b)$$

$$\begin{aligned}
 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (\gamma - 1) \left( \frac{71}{120} + \frac{49}{30} k + \frac{11}{5} k^2 + \frac{13}{16} k^3 + \frac{1}{4} k^4 \right) \\
 &+ \frac{281}{120} + \frac{1477}{360} k + \frac{3313}{720} k^2 + \frac{61}{36} k^3 + \frac{1}{4} k^4. \quad (5.4c)
 \end{aligned}$$

§ 6. **Circulation and lift.** It was first shown by GLAUERT that the well-known theorem of KUTTA and JOUKOWSKI can be extended to the case of compressible fluids. Thus, when a cylinder of any form is placed in a uniform flow of a compressible fluid, it will experience a lift:  $L = \rho_\infty U \Gamma$ , where  $\Gamma$  is the circulation round the cylinder and  $\rho_\infty$  and  $U$  are respectively the density and the velocity of the undisturbed flow. Therefore, in order to see the effect of compressibility on the lift of the cylinder, we have first to determine the circulation  $\Gamma = 2\pi k$ . For this purpose we shall assume, with HASIMOTO and SIBAOKA [1], that stagnation occurs at fixed points ( $\theta = -\alpha, \pi + \alpha$ ) on the cylinder, independently of the MACH number, so that  $q(-\alpha) = 0$ . Then, remembering (5.1) and (5.2a, b, c), we have

$$k = k_0 + M^2 k_1 + M^4 k_2 + \dots, \quad (6.4)$$

where

$$k_0 = 2 \sin \alpha, \quad (6.5a)$$

$$k_1 = \left( \frac{11}{6} + \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right) \sin \alpha, \quad (6.5b)$$

$$k_2 = \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{23}{24} + \frac{8}{3} \sin^2 \alpha \right) + \frac{1357}{360} + \frac{1127}{180} \sin^2 \alpha - \frac{17}{45} \sin^4 \alpha \right\} \sin \alpha. \quad (6.5c)$$

The lift coefficient,  $C_L$ , of a circular cylinder is given by

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 l} = \frac{2\Gamma}{lU} = 2\pi k, \quad (6.2)$$

where  $l =$  diameter of the cylinder  $= 2$ ,  $U = 1$ . Similarly, the lift coefficient,  $C_{L0}$ , for the case of an incompressible fluid is

$$C_{L0} = 2\pi k_0 = 4\pi \sin \alpha, \quad (6.6)$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{C_L}{C_{L0}} = \frac{k}{k_0} &= 1 + M^2 \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) + M^4 \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{23}{48} + \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1357}{720} + \frac{1127}{360} \sin^2 \alpha - \frac{17}{90} \sin^4 \alpha \right\} + \dots \quad (6.7) \end{aligned}$$

§ 7. **Critical Mach number and available maximum lift.** The critical MACH number,  $M_*$ , is defined as the MACH number of the undisturbed flow at which the velocity of the fluid first attains the local velocity of sound at some point in the field of flow, and therefore it is given by

$$\frac{\gamma + 1}{2} \frac{q_{\max}^2}{U^2} - \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{1}{M_*^2}, \quad (7.1)$$

where  $q_{\max}$  is the maximum velocity in the field of flow. If the fluid velocity  $U$  is increased, the lift of the aerofoil will also increase, until, at last, the critical MACH number will be reached, at which the lift will stop increasing and rapid increase of the drag will set in. Thus, we may define an available maximum lift,



$L_{\max}$ , of an aerofoil as the lift at the critical MACH number, so that

$$L_{\max} = \rho_{\infty} U_* \Gamma_* , \quad (7.2)$$

where \* denotes that the value at the critical MACH number should be taken.

Substituting (6.4) and (6.5a, b, c) in (5.3) and (5.4a, b, c) and making some reduction, we get

$$\begin{aligned} q_{\max} = & 2 + 2 \sin a + M^2 \left( \frac{7}{6} + \frac{9}{2} \sin a + 4 \sin^2 a + \frac{2}{3} \sin^3 a \right) \\ & + M^4 \left[ (\gamma - 1) \left( \frac{71}{120} + \frac{169}{40} \sin a + \frac{44}{5} \sin^2 a + \frac{55}{6} \sin^3 a + 4 \sin^4 a \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2811}{120} + \frac{7831}{360} \sin a + \frac{3313}{180} \sin^2 a + \frac{4207}{180} \sin^3 a \right. \\ & \quad \left. + 4 \sin^4 a - \frac{17}{45} \sin^5 a \right] + \dots , \quad (7.3) \end{aligned}$$

which, in conjunction with (7.1), gives the critical MACH number for a circular cylinder.

§ 8. **Comparison with the result of Hasimoto and Sibaoka.** It is confirmed that the author's expression for the velocity potential is exactly the same as that to which HASIMOTO and SIBAOKA's more general expression would reduce when attention is confined to the state on the surface of the cylinder. It is found, however, that HASIMOTO and SIBAOKA's expressions for the maximum velocity and the lift contain slight mistakes, which are expected, however, to produce no appreciable error in case of numerical discussion.

#### IV. Circular Arc Aerofoil at Zero Angle of Attack.

§ 9. **First approximation.** A circular arc aerofoil in the  $z$ -plane (Fig. 1) is derived from the unit circle in the  $Z$ -plane (Fig. 2) by the transformation functions :

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} , \quad \zeta = \frac{1}{\cos \beta} (Z + i \sin \beta) . \quad (9.1,2)$$

Then the chord and camber of the circular arc aerofoil are respectively given by  $l = 4$ ,  $f = \frac{1}{2} \tan \beta$ , while the leading and trailing edges correspond to  $\theta = -\beta$  and  $\theta = \pi + \beta$ ,  $Z = e^{i\theta}$  being the unit circle. (9.1) and (9.2) give

$$dz = \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{(\zeta-1)(\zeta+1)}{\zeta^2 \cos \beta} dZ, \quad (9.4)$$

whence

$$\frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = -i \cos \beta \frac{\left[ e^{i\theta} + \frac{1}{2}(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \right]^2 e^{-i\theta}}{(e^{i\theta} - e^{-i\beta})(e^{i\theta} + e^{i\beta})}. \quad (9.5)$$

Since  $z = (\cos \beta)^{-1} Z + \dots$ , we have  $\lambda = 1/\cos \beta$ ,  $\delta = 0$ . The angle of attack being assumed to be zero, we have  $\alpha = 0$ . Hence, (I.10.7) becomes

$$\Phi_0(\theta) = \frac{2}{\cos \beta} \cos \theta - \kappa_0 \theta, \quad (9.8)$$

where  $\kappa_0$  can be determined by JOUKOWSKI'S assumption in such a manner that the velocity should remain finite at the trailing edge. Thus  $(d\Phi_0/d\theta)_{\theta=-\beta} = 0$  gives  $\kappa_0 = 2 \tan \beta$ , so that

$$\frac{d\Phi_0}{d\theta} = -\frac{2}{\cos \beta} (\sin \theta + \sin \beta) = \frac{i}{\cos \beta} (1 + e^{i\beta} e^{-i\theta})(1 - e^{-i\beta} e^{-i\theta}) e^{i\theta}. \quad (9.11)$$

Introducing (9.5), (9.6), (9.7), and (9.11) into (I.10.10) and making some reduction, we have

$$\begin{aligned} & P_1(\theta) + iQ_1(\theta) \\ &= \frac{1}{4 \cos \beta} \left\{ \frac{1}{12} (e^{2i\beta} - 2 + e^{-2i\beta}) e^{3i\theta} + \frac{1}{24} (5e^{3i\beta} - 27e^{i\beta} + 27e^{-i\beta} - 5e^{-3i\beta}) e^{2i\theta} \right. \\ &\quad + \frac{7}{48} (e^{4i\beta} - 16e^{2i\beta} + 30 - 16e^{-2i\beta} + e^{-4i\beta}) e^{i\theta} \\ &\quad \left. + \frac{1}{96} (3e^{5i\beta} - 147e^{3i\beta} + 534e^{i\beta} - 782e^{-i\beta} + 199e^{-3i\beta} + e^{-5i\beta}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{48}(-15e^{4i\beta} + 78e^{2i\beta} - 250 + 228e^{-2i\beta} - 39e^{-4i\beta} - 2e^{-6i\beta})e^{-i\theta} \\
 & + \frac{1}{96}(3e^{3i\beta} + 25e^{i\beta} + 50e^{-i\beta} - 90e^{-3i\beta} + 11e^{-5i\beta} + e^{-7i\beta})e^{-2i\theta} \\
 & + \frac{1}{4}(e^{2i\beta} - 2 + e^{-2i\beta})e^{-3i\theta} \Big\}. \tag{9.15}
 \end{aligned}$$

Substituting this into (I.10.8) and taking account of (I.4.17), we get

$$\begin{aligned}
 \phi_1(\theta) = \tan \beta \Big\{ & -\frac{1}{6} \sin \beta \cos 3\theta + \frac{1}{6}(5 \sin^2 \beta + 3) \sin 2\theta \\
 & + \frac{7}{6} \sin \beta (\sin^2 \beta + 3) \cos \theta \Big\} - \kappa_1 \theta, \tag{9.16}
 \end{aligned}$$

where  $\kappa_1$  can be determined by JOUKOWSKI's assumption so that  $(d\phi_1/d\theta)_{\theta=-\beta} = 0$ . Thus

$$\kappa_1 = \tan \beta \left( 1 + \frac{5}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \sin^4 \beta \right). \tag{9.17}$$

§ 10. **Second approximation.** The procedure of obtaining the second approximation for the circular arc aerofoil is quite similar to that for the circular cylinder. But, in the case of a circular arc aerofoil, special consideration is required by the fact that  $(d\theta/ds)e^{-i\omega}$ , as given by (9.5), is not a polynomial in  $e^{i\theta}$ . This somewhat complicates the matter.

We may naturally consider a circular arc aerofoil as the limiting case of a general JOUKOWSKI profile derived from the unit circle,  $Z = e^{i\theta}$ , by the transformation

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}, \quad \zeta = \zeta_0 + aZ, \quad (|\zeta_0 \pm 1| < a) \tag{10.1,2}$$

since (9.2) is obtained from (10.2) by the limiting process:  $\zeta_0 \rightarrow i \tan \beta$ ,  $a \rightarrow \sec \beta$ . Now, for a general JOUKOWSKI profile

$$\frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = -\frac{i}{a} \frac{\left(1 + \frac{\zeta_0}{a} e^{-i\theta}\right)^2 e^{-i\theta}}{\left(1 + \frac{\zeta_0 - 1}{a} e^{-i\theta}\right) \left(1 + \frac{\zeta_0 + 1}{a} e^{-i\theta}\right)}$$

$$= -\frac{i}{2} \left(1 + \frac{\zeta_0}{a} e^{-i\theta}\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left(\frac{\zeta_0-1}{a}\right)^n - \left(\frac{\zeta_0+1}{a}\right)^n \right\} e^{-ni\theta}, \quad (10.3)$$

which reduces, on making the above-mentioned limiting process, to

$$\frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = -i \cos \beta e^{-i\theta} \left\{ 1 + \frac{1}{4} (e^{2i\beta} + 2 + e^{-2i\beta}) e^{-2i\theta} - \frac{1}{4} (e^{3i\beta} + e^{i\beta} - e^{-i\beta} - e^{-3i\beta}) e^{-3i\theta} + \dots \right\}. \quad (10.4)$$

This being a series of negative powers of  $e^{i\theta}$ , first few terms are sufficient to find positive power terms of  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$ , which only contribute to  $P_2(\theta) - Q_2^*(\theta)$ .

§ 11. **Result.** The result of the analysis can be summarized as follows.

Putting  $Z = e^{i\theta}$  in (9.1), (9.2) and separating real and imaginary parts, we have

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{2}{\cos \beta} \frac{(1 + \sin \beta \sin \theta) \cos \theta}{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}, \\ y_P &= 2 \tan \beta \frac{(\sin \beta + \sin \theta)^2}{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

for the coordinates of the circular arc aerofoil. The velocity potential on the surface of the aerofoil can be expressed as:

$$\phi(\theta) = \phi_0(\theta) + M^2 \phi_1(\theta) + M^4 \phi_2(\theta) + \dots, \quad (11.2)$$

where

$$\phi_0(\theta) = \frac{2}{\cos \beta} \cos \theta - \kappa_0 \theta, \quad (11.3a)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\theta) &= \tan \beta \left\{ -\frac{1}{6} \sin \beta \cos 3\theta + \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \sin^2 \beta \right) \sin 2\theta \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{7}{2} + \frac{7}{6} \sin^2 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right\} - \kappa_1 \theta, \end{aligned} \quad (11.3b)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_2(\theta) = \tan \beta \left[ (\gamma+1) \left\{ \frac{1}{40} \sin^3 \beta \cos 5\theta - \left( \frac{1}{8} + \frac{13}{80} \sin^2 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 4\theta \right. \right. \\
 - \left( \frac{1}{6} + \frac{7}{8} \sin^2 \beta + \frac{2}{5} \sin^4 \beta \right) \sin \beta \cos 3\theta \\
 + \left( \frac{19}{12} + \frac{9}{4} \sin^2 \beta + \frac{19}{40} \sin^4 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 2\theta \\
 \left. \left. + \left( 1 + \frac{59}{12} \sin^2 \beta + \frac{11}{4} \sin^4 \beta + \frac{11}{40} \sin^6 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right\} \right. \\
 + \frac{1}{40} \sin^3 \beta \cos 5\theta - \left( \frac{1}{8} + \frac{43}{360} \sin^2 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 4\theta \\
 - \left( \frac{7}{24} + \frac{43}{72} \sin^2 \beta + \frac{29}{360} \sin^4 \beta \right) \sin \beta \cos 3\theta \\
 + \left( \frac{3}{8} + \frac{7}{4} \sin^2 \beta + \frac{41}{72} \sin^4 \beta - \frac{29}{72} \sin^6 \beta \right) \sin 2\theta \\
 \left. \left. + \left( \frac{29}{8} + \frac{13}{4} \sin^2 \beta - \frac{89}{72} \sin^4 \beta - \frac{17}{24} \sin^6 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right] - \kappa_2 \theta. \quad (11.3c)
 \end{aligned}$$

Also the circulation,  $\Gamma$ , round the aerofoil is given by

$$\Gamma/2\pi = \kappa = \kappa_0 + M^2 \kappa_1 + M^4 \kappa_2 + \dots, \quad (11.4)$$

where

$$\kappa_0 = 2 \tan \beta, \quad (11.5a)$$

$$\kappa_1 = \tan \beta \left( 1 + \frac{5}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \sin^4 \beta \right), \quad (11.5b)$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_2 = \tan \beta \left\{ (\gamma+1) \left( \frac{13}{6} + \frac{71}{60} \sin^2 \beta + \frac{3}{10} \sin^4 \beta - \frac{1}{40} \sin^6 \beta \right) \sin^2 \beta \right. \\
 \left. + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} \sin^2 \beta - \frac{61}{180} \sin^4 \beta - \frac{5}{9} \sin^6 \beta + \frac{17}{360} \sin^8 \beta \right\}. \quad (11.5c)
 \end{aligned}$$

The velocity along the aerofoil is given by  $q(\theta) = -(d\phi/d\theta)(d\theta/ds)$ , and takes the form:

$$q(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta) + \dots, \quad (11.7)$$

where

$$q_0(\theta) = 1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta, \quad (11.9a)$$

$$q_1(\theta) = \sin \beta (1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta) \\ \times \left\{ -\frac{1}{12} \sin^3 \beta + \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \beta\right) \sin \theta + \sin \beta \sin^2 \theta \right\}, \quad (11.9b)$$

$$q_2(\theta) = \sin \beta (1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta) \\ \times \left[ (\gamma + 1) \left\{ -\left(\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{4}{3} \sin^3 \beta + \frac{13}{40} \sin^5 \beta + \frac{1}{80} \sin^7 \beta\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{6} \sin^2 \beta - \frac{1}{10} \sin^4 \beta + \frac{3}{20} \sin^6 \beta\right) \sin \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sin \beta + 2 \sin^3 \beta + \frac{4}{5} \sin^5 \beta\right) \sin^2 \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \left(2 \sin^2 \beta + \frac{8}{5} \sin^4 \beta\right) \sin^3 \theta + \sin^3 \beta \sin^4 \theta \right\} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin^3 \beta - \frac{1}{8} \sin^5 \beta - \frac{17}{720} \sin^7 \beta\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \beta - \frac{199}{180} \sin^4 \beta - \frac{17}{45} \sin^6 \beta\right) \sin \theta \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{4} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta - \frac{77}{180} \sin^5 \beta\right) \sin^2 \theta \right. \\ \left. + \left(2 \sin^2 \beta + \frac{41}{45} \sin^4 \beta\right) \sin^3 \theta + \sin^3 \beta \sin^4 \theta \right]. \quad (11.9c)$$

Putting  $\theta = \pi/2$  in (11.7), we have for the maximum velocity in the field of flow

$$q_{\max} = q\left(\frac{\pi}{2}\right) = q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^4 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots, \quad (11.10)$$

where

$$q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \sin \beta)^2, \quad (11.11a)$$

$$q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \sin \beta)^2 \sin \beta \left(1 + \sin \beta + \frac{2}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{12} \sin^3 \beta\right), \quad (11.11b)$$

$$q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \sin \beta)^2 \sin \beta \times \left[ (\gamma + 1) \left( \frac{3}{4} \sin \beta + \frac{13}{6} \sin^2 \beta + \frac{5}{3} \sin^3 \beta + \frac{3}{2} \sin^4 \beta + \frac{19}{40} \sin^5 \beta + \frac{3}{20} \sin^6 \beta - \frac{1}{80} \sin^7 \beta \right) + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \sin \beta + \frac{7}{4} \sin^2 \beta + \frac{5}{6} \sin^3 \beta - \frac{7}{36} \sin^4 \beta - \frac{109}{360} \sin^5 \beta - \frac{17}{45} \sin^6 \beta + \frac{17}{720} \sin^7 \beta \right]. \quad (11.11c)$$

Finally, the lift coefficient of the aerofoil is given by KUTTA-JOUKOWSKI-GLAUERT's theorem as

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2 l} = \frac{\Gamma}{2U} = \pi \kappa. \quad (11.13)$$

Hence

$$\frac{C_L}{C_{L0}} = 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots, \quad (11.15)$$

and the available maximum lift, as given by (7.2), is

$$\frac{L_{\max}}{\pi \rho_\infty C_\infty^2 l} = M_*^2 \tan \beta \left( 1 + M_*^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M_*^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots \right). \quad (11.16)$$

§ 12. **Circular Cylinder as a limiting case of a circular arc aerofoil.** In the limiting case of  $\beta = \pi/2$ , a circular arc aerofoil degenerates into a circular cylinder. But, in this case, the forward and rear stagnation points on the surface of the cylinder should coincide at a point  $\theta = -\pi/2$ , since the flow is assumed to be smooth at the leading and trailing edges of the aerofoil. It is shown that the formulae obtained for the circular cylinder and circular arc aerofoil are in perfect agreement in this limiting case.

This agreement may be considered as an evidence of the correctness of the formulae.

§ 13. **Comparison with the thin aerofoil theory.** Extending the idea of PRANDTL-GLAUERT's linear theory, the present author has recently developed a new method of successive approximation for treating the compressible fluid flow past an arbitrary aerofoil. Thus, if a uniform flow of a compressible fluid is streaming past an aerofoil whose thickness, camber, and angle of attack are small, the disturbed velocity will be also small, say of the order of  $\epsilon$ . Hence the velocity potential  $\phi$  and stream function  $\psi$  may be expressed as  $\phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots$ ,  $\psi = y + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ , where  $\phi_1$ ,  $\psi_1$ ;  $\phi_2$ ,  $\psi_2$ ;  $\dots$  are respectively of the order of  $\epsilon$ ,  $\epsilon^2$ ,  $\dots$ . It is clear that the first approximation ( $\phi_1 = x + \phi_1$ ,  $\psi_1 = y + \psi_1$ ) is essentially the same as PRANDTL-GLAUERT's linear theory. The present author has proceeded to the second approximation, and obtained the general formulae for the velocity distribution round an arbitrary aerofoil as well as the lift and moment acting on the aerofoil [6]. As an example, the formulae were applied to a general JOUKOWSKI profile. Since a circular arc aerofoil is a special case of a JOUKOWSKI aerofoil, it will naturally be expected that the results would agree with those of the present investigation.

Now, a circular arc aerofoil of chord 2 and chamber  $\frac{1}{2} \tan \beta$  is expressed by

$$x_P = \cos \vartheta, \quad y_P = \beta \sin^2 \vartheta + O(\beta^3), \quad (13.1)$$

where the camber, and therefore  $\beta$ , is assumed to be small. According to the result of the above-mentioned investigation [6], the velocity on the aerofoil is given by

$$q = 1 + \frac{2\beta}{\sqrt{1-M^2}} \sin \vartheta - \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \beta^2 \cos 2\vartheta. \quad (13.2)$$

From (11.1), which gives the coordinates of the aerofoil of chord 4, we have, dividing by 2 and expanding with respect to  $\beta$ ,

$$x_P = \cos \theta - \frac{1}{2} \beta \sin 2\theta + O(\beta^2). \quad (13.3)$$



Comparing (13.1) and (13.3), we have

$$\theta = \vartheta - \beta \cos \vartheta + O(\beta^2). \quad (13.9)$$

Introducing this into (11.9) we have

$$q_0 = 1 + 2\beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 2 \sin^2 \vartheta) + O(\beta^3), \quad (13.11a)$$

$$q_1 = \beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 4 \sin^2 \vartheta) + O(\beta^3), \quad (13.11b)$$

$$q_2 = \frac{3}{4}\beta \sin \vartheta - \left(1 + \frac{\gamma+1}{4}\right)\beta^2(1 - 4 \sin^2 \vartheta) + O(\beta^3). \quad (13.11c)$$

If we expand (13.2) with respect to  $M^2$ , it will readily be seen that the first three terms are exactly the same as (13.11a), (13.11b), (13.11c) respectively. This agreement may also be considered as furnishing some evidence of the correctness of the results obtained.

§ 14. Numerical discussions. a) From (11.15) we have

$$\frac{C_L}{C_{L0}} = 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots, \quad \kappa_2 = \kappa_{20} + (\gamma+1)\kappa_{21}. \quad (14.1)$$

Table 1 gives the values of camber  $\left(\frac{1}{2} \tan \beta\right)$ ,  $\kappa_1/\kappa_0$ ,  $\kappa_{20}/\kappa_0$ ,  $\kappa_{21}/\kappa_0$ ,  $\kappa_2/\kappa_0$  for some values of  $\beta$ , taking  $\gamma = 1.4$  for air. Table 2 then gives the first and second approximations to  $C_L/C_{L0}$  for some values of  $M$  and  $\beta$ , PRANDTL-GLAUERT'S factor  $1/\sqrt{1-M^2}$  being also given. These are graphically shown in Fig. 3.

b) Table 3 gives  $q_0(\pi/2)$ ,  $q_1(\pi/2)$ ,  $q_{20}(\pi/2)$ ,  $q_{21}(\pi/2)$ ,  $q_2(\pi/2) = q_{20}(\pi/2) + (\gamma+1)q_{21}(\pi/2)$  as functions of  $\beta$ , taking  $\gamma = 1.4$  for air. Using this table, we can determine the critical MACH number  $M_*$  from (7.1) and (11.10), and the available maximum lift  $L_{\max}$  from (14.5). These are shown in Table 4 and Fig. 4, where  $M_{*0}$ ,  $M_{*1}$ ,  $M_{*2}$  are respectively the zero-th, first, second approximations to  $M_*$ , that is, the values of  $M_*$  obtained when adopting  $q_0$ ,  $q_0 + M^2 q_1$ ,  $q_0 + M^2 q_1 + M^4 q_2$  as  $q_{\max}$ .

c) Table 5 gives  $x_P(\theta)$ ,  $q_0(\theta)$ ,  $q_1(\theta)$ ,  $q_2(\theta)$  as functions of  $\theta$  in the special case of  $\beta = 10^\circ$ , corresponding to the camber of 0.0882.

$q_I(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta)$ ,  $q_{II}(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta)$  are then calculated for  $M = 0.6$ , and shown in Table 6 and Fig. 5. It will be seen that the convergence is very good for the lower surface of the aerofoil, but not so good for the upper surface in this case of  $M = 0.6$  where the critical state is approached ( $M_* = 0.615$ ).

## V. Summary.

---

# 高速度における翼型のまはりの速度分布 について、II. 圓柱及び圓弧翼

(On the Velocity Distribution round an Aerofoil at High Speeds,  
II. Circular Cylinder and Circular Arc Aerofoil.)

所 員 今 井 功

## 目 次

I. はしがき	173
§ 1.	173
II. 基礎の公式	175
§ 2.	175
III. 圓 柱	177
§ 3. 速度ポテンシャルの第一近似式	177
§ 4. 速度ポテンシャルの第二近似式	178
§ 5. 圓柱表面の速度分布	180
§ 6. 循環と揚力	181
§ 7. 臨界 Mach 數と有效最大揚力	182
§ 8. 橋本・柴岡の結果との比較	183
IV. 迎角 $0^\circ$ の圓弧翼	185
§ 9. 第一近似	185
§ 10. 第二近似	188
§ 11. 結 果	189
§ 12. 圓弧翼の極限として得られる圓柱	192
§ 13. 薄翼理論との比較	193
§ 14. 數值的議論	195
V. む す び	202
§ 15.	202
参 考 文 献	202

## I. は し が き

§1. さきに筆者は、任意の翼型が壓縮性完全流體の一樣な流れの中におかれてゐるときの翼型表面の速度分布を  $M^1$  まで精密に與へる公式を導いた<sup>(1)</sup> [4]. (こゝに  $M$  は一樣な流れの Mach 數である.) そして、その公式を用ゐて、流れが任意の傾きで楕圓柱にあたる場合の表面速度の第一近似式 ( $M^2$  まで嚴密) が簡単に見出されることを示した [5], [7]. 本來この公式の特長は、任意の翼型に對して全く同様の手數で簡単に速度分布の數値計算ができる

(1) 括弧の中の數字は論文の最後に掲げる参考文献の番號を示す.

といふ點に存するのであるが、簡単な形の翼型については解析的な取扱いも許されるのである。すなはち、従來の方法では第二近似に進むには流體內の各點における速度の第一近似値を知る必要に迫られるが、上述の公式では單に翼型表面だけを問題にすればよい。このために計算の勞力は従來のものよりずつと少くなるものと期待される。そこでこの論文では、(i) 流れの中に圓柱がおかれ且つそのまはりに任意の大きさの循環がある場合と、(ii) 迎角  $0^\circ$  の圓弧翼の場合とを取扱つて見る。

第一の問題については既に Janzen-Rayleigh の方法による橋本・柴岡兩氏の研究がある [1]。すなはち兩氏は、流れの中の各點における速度ポテンシャルの第二近似式 ( $M^4$  まで厳密) を求め、圓柱のまはりの循環を Mach 數  $M$  と圓柱上の前後兩岐點の位置との函數として表はす式を見出し、更に岐點の位置によつて臨界 Mach 數の變化する有様を數值的に議論した。筆者の公式によれば、直接に圓柱表面の速度ポテンシャルの式が得られる。そしてこれは兩氏の結果で特に圓柱表面を考へたものと一致することが確められた。兩氏の論文では表面速度分布の式が掲げてないから、後の便宜のためにこの論文ではそれを書き記すことにする。また循環に對する兩氏の式にはごく些細ではあるが誤りが認められるので、これを訂正しておく。しかし、それによつて臨界 Mach 數の計算値に現はれるべき誤差は恐らくいふに足りない程度に小さく、兩氏の結果は何等信頼性を失はないものと思はれる。

第二の問題は、反りのある翼型の最も簡単な場合を代表するものと考へられる。さきに筆者は、Joukowski 變換によつて圓から導かれる翼型に對する第一近似解を求め、その特別な場合として迎角  $0^\circ$  の圓弧翼を取扱つた [2]。すなはち、翼型表面の速度分布と翼のまはりの循環從つて翼に働く揚力の第一近似式を與へ、更に反りと臨界 Mach 數との關係を數值的に議論した。また臨界 Mach 數における揚力は、壓縮性失速を問題とするときの最大揚力と考へられるので、これを假に有効最大揚力と名付け、反りと共にその値がどんな有様で變化するかを數值的に調べたのである。筆者の公式では第二近似に進むこともさして困難ではないと考へられるので、この論文で取扱つたわけである。従來第二近似解の得られた翼型が圓柱だけであることを考へると、たとひ迎角  $0^\circ$  といふ特別な場合であるとはいへ、實際の翼型をある程度代表する圓弧翼の解を求めることは興味あり且つ重要な問題であると信ずる。

圓弧翼は極端な場合には圓柱となるので、第一及び第二の問題はある程度お互ひに檢算の役目を果すことになる。すなはち、圓柱表面の前後兩岐點が重り合つて一點となる場合はどちらの場合にも特別な場合として含まれるから、兩方の結果が一致しなければならないのである。

壓縮性を考へに入れた翼理論には、上述の  $M^2$  展開法の他に、薄翼の近似、すなはち、いはゆる Prandtl-Glauert の一次理論がある。最近筆者はこの理論を考へ直して、薄翼としての逐次近似法を展開した [6]。その第一近似は Prandtl-Glauert の理論に相當する。筆者は第二近似まで詳しく考へ、特に任意翼型表面の速度分布、翼型に働く揚力及びモーメント等に對する解析的な公式を見出したのである。この理論では壓縮性に關する限り何等の省略も行つてゐない (つまり  $M^2$  展開法でいへば第  $\infty$  近似まで求めたことになる)。具體的な

(1) 實際、橋本・柴岡兩氏の結果に誤りを見出したのは、筆者の求めた圓弧翼についての結果が特別な場合に兩氏の結果と一致しなかつたことが動機となつたのである。

一例として, 筆者は一般 Joukowski 翼型にこの理論を適用したのであるが[6], 周知の如く一般 Joukowski 翼型は特別な場合に圓弧翼となるから, これもまた第二の問題の檢算として役立つことになる. 實際, 薄翼としての近似式を  $M^2$  について展開して  $M^4$  まで残したものは, 最初  $M^2$  展開法を行つてから更に薄翼の近似を施して得られる結果と全く一致するべきはずである.

上の二様の檢算によつて, 圓弧翼に對する結果の正しいことはほぼ確められたものと考へる.

數值的な議論は圓弧翼についてのみ行ふことにする. すなはち, 種々の反りの場合に Mach 數と共に揚力がどのやうに變化するか, また臨界 Mach 數及び有効最大揚力が反りによつてどう變化するかを調べる. なほ, 反りが 0.08816 であるやうな圓弧翼を選んで, 表面における速度分布を計算した.

## II. 基礎の公式

§2. 便宜のために前の報告で求めた一般的な諸公式を再録しよう.

$(x, y)$  平面に  $x$  軸と  $\alpha$  なる傾きをなして速度 1, Mach 數  $M$  の一様な流れがあるものとする. その中に任意の翼型  $P$  をおけば, 表面における速度  $q$  は

$$q(\theta) = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (2.1)$$

で與へられる. こゝに  $\Phi$  は速度ポテンシャルで

$$\Phi = \Phi_0 + M^2 \Phi_1 + M^4 \Phi_2 + \dots \quad (2.2)$$

の如く表はされる. 但し

$$\Phi_0(\theta) = 2\lambda \cos(\theta - \alpha + \delta) - \kappa_0 \theta, \quad (2.3a)$$

$$\Phi_1(\theta) = P_1(\theta) - Q_1^*(\theta) - \kappa_1 \theta, \quad (2.3b)$$

$$\Phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) - \kappa_2 \theta, \quad (2.3c)$$

また

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta) = \frac{1}{4} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega - \alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta - \frac{\lambda}{2} \cos(\theta - \alpha + \delta), \quad (2.4a)$$

$$P_2(\theta) + iQ_2(\theta) = \frac{1}{16} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 - 1 \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega - \alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta$$

$$+ \frac{1}{32} \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)} \right\} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)} \left[ \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega - \alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta \right]^2$$

$$+ \frac{1}{16} \left\{ \kappa_0 \left( 2 \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)} - 1 \right) - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} + i \frac{dQ_1}{d\theta} + \kappa_1 \right) \right\} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega - \alpha)}$$

$$\times \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega - \alpha)} + 2\kappa_0 \right\} d\theta$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left[ \left\{ \kappa_0 \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} - 1 \right) - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} - i \frac{dQ_1}{d\theta} + \kappa_1 \right) \right\} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{i(\omega-\alpha)} + 4\kappa_1 \right] d\theta \\
& + \frac{1}{4} [Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma}{2} [P_1(\theta) + iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma+1}{8} \lambda \cos(\theta - \alpha + \delta) \\
& + \frac{\gamma+1}{16} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 e^{-2i(\omega-\alpha)} \int_{\theta_0}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^3 \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 e^{2i(\omega-\alpha)} + 3\kappa_0 \right\} d\theta \quad (2.4b)
\end{aligned}$$

である。こゝに  $\gamma$  は比熱の比である。

なほ  $z = x + iy$  とし、 $z$  面における翼型  $P$  の外部の領域は

$$z = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \dots, \quad c_{-1} = \lambda e^{i\delta} \quad (2.5)$$

なる解析函数によつて  $Z$  面における単位圓外の領域  $|Z| > 1$  に等角寫像されるものとする。その際  $P$  自身は単位圓  $Z = e^{i\theta}$  に對應し、

$$x_P = x_P(\theta), \quad y_P = y_P(\theta) \quad (2.6)$$

の如く  $\theta$  を副變數として表はされる。(かやうな函数  $z(Z)$  の存在は函数論の定理の保證する所であり、また實際その函数形  $z(Z)$ 、あるひは (2.6) の形を定めるには例へば筆者の方法を用ゐればよい [3].) 更に、 $P$  に沿つては

$$dz_P = ds e^{i\omega}, \quad dZ_P = i e^{i\theta} d\theta \quad (2.7)$$

であるとする。すなはち  $ds$  は翼型に沿ふ線要素、 $\omega$  はそれと  $x$  軸の正の方向との挟む角である。

翼型のまはりの循環を  $\Gamma = 2\pi\kappa$  とすれば

$$\kappa = \kappa_0 + M^2 \kappa_1 + M^4 \kappa_2 + \dots, \quad (2.8)$$

$\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \dots$  は一般には任意であるが、後縁の鋭い翼型では Joukowski の假定を用ゐて、後縁で速度が有限になるやうに定めればよい。

最後に、 $Q^*(\theta)$  は  $Q(\theta)$  に對する共軛 Fourier 級數である。すなはち、 $Q(\theta)$  が

$$Q(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (2.9)$$

の如く Fourier 級數に展開されるとき

$$Q^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \quad (2.10)$$

の如く與へられる函数であつて、また

$$Q^*(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [Q(\varphi + \theta) - Q(\theta)] \cot \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad (2.11)$$

のやうに表はすこともできる。なほ

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \quad (2.12)$$

とすれば

$$P(\theta) - Q^*(\theta) = \text{const} + 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{ni\theta}, \quad (2.13)$$

$$Q^*(\theta) - iQ(\theta) = \text{const} - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - \bar{c}_{-n}) e^{ni\theta}, \quad (2.14)$$

が成り立つことも容易に確かめられる。

### III. 圓 柱

#### §3. 速度ポテンシャルの第一近似式

圓柱の場合には  $z$  面と  $Z$  面とは一致する。従つて (2.5) において  $c_{-1} = 1$  であるから

$$\lambda = 1, \quad \delta = 0. \quad (3.1)$$

また (2.7) より

$$\frac{d\theta}{ds} = 1, \quad e^{i\omega} = ie^{i\theta}. \quad (3.2)$$

圓柱の場合には迎角  $\alpha$  をどんなに選んでも本質的には異なるから、簡単のために

$$\alpha = 0 \quad (3.3)$$

とおく。また  $\kappa_0, \kappa_1, \dots$  はすべて任意であるから、 $\kappa_0$  に任意性を受持たせて  $\kappa_1, \kappa_2, \dots$  はすべて 0 であるとしても一般性を失はない。すなはち

$$\kappa_0 = k, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \dots = 0 \quad (3.4)$$

とおく。但し  $k$  は一般に  $M^2$  の函数と考へなければならない。

先づ (2.3 a) は

$$\Phi_0(\theta) = 2 \cos \theta - k\theta = e^{i\theta} - k\theta + e^{-i\theta} \quad (3.5)$$

となり、これより

$$\frac{d\Phi_0}{d\theta} = -2 \sin \theta - k = i(e^{i\theta} + 2ik - e^{-i\theta}). \quad (3.6)$$

いまの場合  $\theta_0 = 0$  とすれば (2.4a) は

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta) = \frac{1}{4} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{i\theta} - 2ik \right\} d\theta - \frac{1}{2} \cos \theta \quad (3.7)$$

となる。(3.6) より

$$\int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{i\theta} - 2ik \right\} d\theta = i \left\{ \frac{1}{3} e^{3i\theta} + ike^{2i\theta} - (2+k^2)e^{i\theta} + \frac{8}{3} - ik + k^2 - e^{-i\theta} \right\}. \quad (3.8)$$

(3.6), (3.8) を (3.7) に入れて整理すれば

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta)$$

$$= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} e^{3i\theta} + \frac{4}{3} i k e^{2i\theta} - \left( \frac{4}{3} + 2k^2 \right) e^{i\theta} + \left( \frac{8}{3} - 4ik + k^2 - ik^3 \right) \right. \\ \left. + \left( 2 + \frac{8}{3} ik + 2k^2 + ik^3 \right) e^{-i\theta} - \left( \frac{8}{3} + k^2 \right) e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta} \right\} \quad (3.9)$$

が得られる。これを (2.3b) に入れ、且つ (2.12), (2.13) に注意すれば

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) &= P_1(\theta) - Q_1^*(\theta) \\ &= -\frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{1}{3} e^{3i\theta} + \frac{4}{3} i k e^{2i\theta} - \left( \frac{4}{3} + 2k^2 \right) e^{i\theta} \right\} \\ &= -\frac{1}{6} \cos 3\theta + \frac{2}{3} k \sin 2\theta + \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

但し常数は重要でないから省略した。これで速度ポテンシャルに対する第一近似が求められたわけである。

#### § 4. 速度ポテンシャルの第二近似式

次に第二近似に進む。いまの場合 (2.3c) は

$$\Phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) \quad (4.1)$$

となり、(2.4b) は

$$\begin{aligned} &P_2(\theta) + iQ_2(\theta) \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 - 1 \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{-i\theta} + 2ik \right\} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{32} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} \right) e^{-i\theta} \left[ \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{i\theta} - 2ik \right\} d\theta \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{16} \left\{ k \left( 2i \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} + 1 \right) + 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} + i \frac{dQ_1}{d\theta} \right) \right\} e^{-i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{i\theta} - 2ik \right\} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} \int_0^\theta \left\{ k \left( i \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} - 1 \right) - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} - i \frac{dQ_1}{d\theta} \right) \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{4} [Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma}{2} [P_1(\theta) + iQ_1(\theta)] - \frac{\gamma+1}{8} \cos \theta \\ &\quad + \frac{\gamma+1}{16} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{-2i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{2i\theta} - 3k \right\} d\theta \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。さて計算を進める前に次の事柄に注意する。すなわち (2.13) の関係式によれば、 $\Phi_2(\theta)$  を求めるには  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$  の式の中で  $e^{ni\theta} (n > 0)$  の項だけを知ればよい。

先づ、(2.14) を (3.9) に適用すれば

$$\begin{aligned} &Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{1}{3} - 1 \right) e^{3i\theta} + \left\{ \frac{4}{3} ik + \left( \frac{8}{3} + k^2 \right) \right\} e^{2i\theta} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\left( \frac{4}{3} + 2k^2 \right) - \left( 2 - \frac{8}{3} ik + 2k^2 - ik^3 \right) \right\} e^{i\theta} \right] \end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{6}e^{3i\theta} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}ik + \frac{1}{4}k^2\right)e^{2i\theta} - \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3}ik + k^2 - \frac{1}{4}ik^3\right)e^{i\theta} \quad (4.3)$$

が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 - 1 \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{-i\theta} + 2ik \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{48} \left\{ 3e^{5i\theta} + (-8 + 6ik - 3k^2)e^{4i\theta} + 3(-8ik + k^2 - 3ik^3)e^{3i\theta} \right. \\ & \quad + (16 + 12ik + 30k^2 + 15ik^3 + 9k^4)e^{2i\theta} \\ & \quad \left. + (-7 + 40ik - 39k^2 + 23ik^3 - 12k^4 + 3ik^5)e^{i\theta} + \dots \right\}, \\ & \frac{1}{32} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} \right) e^{-i\theta} \left[ \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{2i\theta} - 2ik \right\} d\theta \right]^2 \\ &= \frac{1}{288} \left\{ -ike^{4i\theta} + 2(1 + 3k^2)e^{3i\theta} + 3(8ik + 5ik^3)e^{2i\theta} \right. \\ & \quad \left. + 2(-12 - 8ik - 36k^2 - 3ik^3 - 9k^4)e^{i\theta} + \dots \right\}, \\ & -\frac{1}{16} \left\{ k \left( 2i \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} + 1 \right) + 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} + i \frac{dQ_1}{d\theta} \right) \right\} e^{-i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{i\theta} - 2ik \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{144} \left\{ 3ike^{2i\theta} + (10 + 8ik - 3k^2 + 3ik^3)e^{i\theta} + \dots \right\}, \\ & \frac{1}{8} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{-i\theta} \int_0^\theta \left\{ k \left( i \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} - 1 \right) - 4 \left( \frac{dQ_1^*}{d\theta} - i \frac{dQ_1}{d\theta} \right) \right\} \frac{d\Phi_0}{d\theta} e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{1440} \left\{ -72e^{5i\theta} + 3(80 - 29ik + 30k^2)e^{4i\theta} \right. \\ & \quad + (-8 + 720ik - 265k^2 + 270ik^3)e^{3i\theta} \\ & \quad + 5(-144 - 103ik - 198k^2 - 110ik^3 - 54k^4)e^{2i\theta} \\ & \quad \left. + 10(68 - 144ik + 127k^2 - 78ik^3 + 27k^4 - 9ik^5)e^{i\theta} + \dots \right\}, \\ & \frac{1}{4} [Q_1^*(\theta) - iQ_1(\theta)] \\ &= \frac{1}{48} \left\{ -2e^{3i\theta} + (8 + 4ik + 3k^2)e^{2i\theta} + (-10 + 8ik - 12k^2 + 3ik^3)e^{i\theta} + \dots \right\}, \\ & \frac{1}{16} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 e^{-2i\theta} \int_0^\theta \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^3 e^{2i\theta} - 3k \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{320} \left\{ 4e^{5i\theta} + 23ike^{4i\theta} - 2(14 + 27k^2)e^{3i\theta} - (138ik + 65ik^3)e^{2i\theta} \right. \\ & \quad \left. + 2(52 + 135k^2 + 20k^4)e^{i\theta} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

これらの値を入れると, (4.2) は

$$\begin{aligned}
& P_2(\theta) + iQ_2(\theta) \\
&= (\gamma - 1) \left\{ \frac{1}{80} e^{5i\theta} + \frac{23}{320} i k e^{4i\theta} - \left( \frac{11}{240} + \frac{27}{160} k^2 \right) e^{3i\theta} \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{127}{480} i k + \frac{13}{64} i k^3 \right) e^{2i\theta} + \left( \frac{23}{240} + \frac{19}{32} k^2 + \frac{1}{8} k^4 \right) e^{i\theta} + \dots \right\} \\
&\quad + \frac{3}{80} e^{5i\theta} + \frac{59}{288} i k e^{4i\theta} - \left( \frac{25}{144} + \frac{631}{1440} k^2 \right) e^{3i\theta} \\
&\quad - \left( \frac{887}{1440} i k + \frac{61}{144} i k^3 \right) e^{2i\theta} + \left( \frac{37}{80} + \frac{71}{72} k^2 + \frac{1}{8} k^4 \right) e^{i\theta} + \dots \quad (4.4)
\end{aligned}$$

となる。従つて、(2.13) により (4.1) は次の如くなる：

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\theta) &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{1}{40} \cos 5\theta - \frac{23}{160} k \sin 4\theta - \left( \frac{11}{120} + \frac{27}{80} k^2 \right) \cos 3\theta \right. \\
&\quad \left. + k \left( \frac{127}{240} + \frac{13}{32} k^2 \right) \sin 2\theta + \left( \frac{23}{120} + \frac{19}{16} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \cos \theta \right\} \\
&\quad + \frac{3}{40} \cos 5\theta - \frac{59}{144} k \sin 4\theta - \left( \frac{25}{72} + \frac{631}{720} k^2 \right) \cos 3\theta \\
&\quad + k \left( \frac{887}{720} + \frac{61}{72} k^2 \right) \sin 2\theta + \left( \frac{37}{40} + \frac{71}{36} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \cos \theta. \quad (4.5)
\end{aligned}$$

これで速度ポテンシャルに対する第二近似式が求められた。

### § 5. 圓柱表面の速度分布

圓柱表面における速度分布は、(2.1), (2.2) によつて次の如く表はされる (但し便宜上  $\theta$  の減る方向を速度の正の方向とする)：

$$q(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta) + \dots, \quad (5.1)$$

こゝに

$$q_0(\theta) = -\frac{d\Phi_0}{d\theta}, \quad q_1(\theta) = -\frac{d\Phi_1}{d\theta}, \quad q_2(\theta) = -\frac{d\Phi_2}{d\theta}, \dots$$

であつて、これらはそれぞれ (3.6), (3.10), (4.5) によつて次の如く與へられる。

$$q_0(\theta) = 2 \sin \theta + k, \quad (5.2a)$$

$$q_1(\theta) = -\frac{1}{2} \sin 3\theta - \frac{4}{3} k \cos 2\theta + \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \sin \theta, \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned}
q_2(\theta) &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{1}{8} \sin 5\theta + \frac{23}{40} k \cos 4\theta - \left( \frac{11}{40} + \frac{81}{80} k^2 \right) \sin 3\theta \right. \\
&\quad \left. - k \left( \frac{127}{120} + \frac{13}{16} k^2 \right) \cos 2\theta + \left( \frac{23}{120} + \frac{19}{16} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin \theta \right\} \\
&\quad + \frac{3}{8} \sin 5\theta + \frac{59}{36} k \cos 4\theta - \left( \frac{25}{24} + \frac{631}{240} k^2 \right) \sin 3\theta \\
&\quad - k \left( \frac{887}{360} + \frac{61}{36} k^2 \right) \cos 2\theta + \left( \frac{37}{40} + \frac{71}{36} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin \theta. \quad (5.2c)
\end{aligned}$$

臨界 Mach 数を出すには, 流れの中の速度の最大値を知らねばならない. 最大速度  $q_{\max}$  は明かに圓柱表面の  $\theta = \pi/2$  のところに起るから

$$q_{\max} = q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^4 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots \quad (5.3)$$

但し

$$q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + k, \quad (5.4a)$$

$$q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{6} + \frac{4}{3}k + k^2, \quad (5.4b)$$

$$q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = (r-1) \left( \frac{71}{120} + \frac{49}{30}k + \frac{11}{5}k^2 + \frac{13}{16}k^3 + \frac{1}{4}k^4 \right) \\ + \frac{281}{120} + \frac{1477}{360}k + \frac{3313}{720}k^2 + \frac{61}{36}k^3 + \frac{1}{4}k^4 \quad (5.4c)$$

で與へられる.

### §6. 循環と揚力

次に圓柱に働く揚力  $L$  を考へよう. Glauert の擴張した Kutta-Joukowski の定理によれば, みだされぬ流れの密度を  $\rho_\infty$ , 速度を  $U$ , 圓柱のまはりの循環を  $\Gamma$  とすれば

$$L = \rho_\infty U \Gamma \quad (6.1)$$

である. いまの場合  $U=1$ , 翼弦=直徑=2, であるから, 揚力係數  $C_L$  は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 \cdot 2} = \frac{\Gamma}{U} = 2\pi k \quad (6.2)$$

である. 従つて, 揚力が壓縮性の影響でどのやうに變化するかを見るには,  $k$  と Mach 數  $M$  との關係を調べればよい. いま橋本・柴岡と同様に, 圓柱表面の前後兩岐點が Mach 數によらない一定の位置  $\theta = -a, \pi + a$  を占めるものと假定しよう. さうすれば

$$q(-a) = q_0(-a) + M^2 q_1(-a) + M^4 q_2(-a) + \dots = 0,$$

すなはち

$$2 \sin a - k - M^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin 3a - \frac{4}{3} k \cos 2a - \left( \frac{2}{3} + k^2 \right) \sin 3a \right\} \\ - M^4 \left[ (r-1) \left\{ -\frac{1}{8} \sin 5a + \frac{23}{40} k \cos 4a + \left( \frac{11}{40} + \frac{81}{80} k^2 \right) \sin 3a \right. \right. \\ \left. \left. - k \left( \frac{127}{120} + \frac{13}{16} k^2 \right) \cos 2a - \left( \frac{23}{120} + \frac{19}{16} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin a \right\} \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \sin 5a + \frac{59}{36} k \cos 4a + \left( \frac{25}{24} + \frac{631}{240} k^2 \right) \sin 3a \right. \\ \left. - \left( \frac{887}{360} + \frac{61}{36} k^2 \right) k \cos 2a - \left( \frac{37}{40} + \frac{71}{36} k^2 + \frac{1}{4} k^4 \right) \sin a \right] + \dots = 0 \quad (6.3)$$

である。これを  $k$  について解くには

$$k = k_0 + M^2 k_1 + M^4 k_2 + \dots \quad (6.4)$$

と (6.3) に代入し、 $M^2$  の各の冪の係数を 0 とすればよい。かやうにして次の結果が得られる：

$$k_0 = 2 \sin \alpha, \quad (6.5a)$$

$$k_1 = \left( \frac{11}{6} + \frac{2}{3} \sin^2 \alpha \right) \sin \alpha, \quad (6.5b)$$

$$k_2 = \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{23}{24} + \frac{8}{3} \sin^2 \alpha \right) + \frac{1357}{360} + \frac{1127}{180} \sin^2 \alpha - \frac{17}{45} \sin^4 \alpha \right\} \sin \alpha. \quad (6.5c)$$

縮まない流體 ( $M=0$ ) に対する揚力係数を  $C_{L_0}$  とすれば、明かに (6.2) と同様

$$C_{L_0} = 2\pi k_0 \quad (6.6)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{C_L}{C_{L_0}} = \frac{k}{k_0} &= 1 + M^2 \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \right) \\ &+ M^4 \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{23}{48} + \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right) + \frac{1357}{720} + \frac{1127}{360} \sin^2 \alpha - \frac{17}{90} \sin^4 \alpha \right\} \\ &+ \dots \quad (6.7) \end{aligned}$$

となる。

## §7. 臨界 Mach 数と有効最大揚力

一様な流れの中に物體をおくとき、みだされない流れの Mach 数  $M$  が低い間は、流れの中の各点における流速はその点での局所音速より小さい。すなはち、流れは到るところ“音より遅い”。 $M$  を増して行くとき、ある値  $M_*$  になると流れの中のどこかに流速と局所音速の一致する点が現はれる。 $M_*$  を越えて更に  $M$  を増せば、流れの中に“音より速い”部分が現はれる。 $M_*$  を臨界 Mach 数と名付ける。音より速い領域では、流れの中に僅かでも不規則性が生ずると、これは粗密波、いはゆる Mach 波の源となり、Mach 波が集つて包絡面を作れば急激な圧力・密度の變化すなはち衝撃波を生ずるであらう。これに伴ひ翼型表面の境界層は剝離を起し、翼型は大きい抵抗を受けることになる。これがいはゆる圧縮性失速の現象である。もつとも、たとひ音より速い領域が現はれても、Mach 波が包絡面を作りさへしなければ衝撃波は発生しないであらう。しかし、とにかく Mach 数が  $M_*$  を越えない間は圧縮性失速の危険は全く考へられない。こゝで定義した臨界 Mach 数は、それを越せば必ず衝撃波が現はれるといふものではなく、單に上述のやうな意味のものと考へなければならぬ。

さて流れの中の最大速度を  $q_{\max}$  とすれば、臨界 Mach 数の定義により、 $M = M_*$  では

$$\frac{q_{\max}^2}{U^2} = \frac{c^2}{U^2} = \frac{1}{M_*^2} - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{q_{\max}^2}{U^2} - 1 \right),$$

従つて

$$\frac{\gamma+1}{2} \frac{q_{\max}^2}{U^2} - \frac{\gamma-1}{2} = \frac{1}{M_*^2} \quad (7.1)$$

いま與へられた翼型を一定の姿勢に保ちつゝ流速  $U$ , 従つて Mach 數  $M$  を増して行けば, 翼型に働く揚力は次第に増加するであらう. しかし揚力はどこまでも無制限に増加するものではなく,  $M$  が臨界 Mach 數  $M_*$  を超えると壓縮性失速の危険が起り, 揚力の増加が止まるのみならず抵抗は急激に上昇し始める. それ故, 實用的な飛行速度の最大値は Mach 數が  $M_*$  になるやうなものと考えることができる. またこれに對應する揚力の値は實用的な揚力の最大値と考へられるから, 假にこれを有効最大揚力と名付け  $L_{\max}$  で表はすことにする. 臨界 Mach 數に對應する量に \* 印をつけて表はせば,  $L_{\max}$  は明かに

$$\begin{aligned} L_{\max} &= \rho_{\infty} U_* \Gamma_* = \rho_{\infty} c_{\infty}^2 \left( \frac{U_*}{c_{\infty}} \right)^2 \frac{\Gamma_*}{U_*} \\ &= 2\pi \rho_{\infty} c_{\infty}^2 M_*^2 k_* \end{aligned} \quad (7.2)$$

で與へられる.

圓柱の場合は  $q_{\max}$  として (5.3), (5.4 a, b, c) を用ゐればよい. 圓柱上の前後兩岐點の位置を ( $\theta = -a, \pi+a$ ) に指定しておけば,  $k$  は (6.4), (6.5 a, b, c) により  $M, a$  の函數として與へられる. 従つて (7.1) は  $M_*$  を  $a$  の函數として與へることになる. いま (6.4), (6.5 a, b, c) を (5.3), (5.4 a, b, c) に代入し  $M^4$  まで考慮すれば

$$\begin{aligned} q_{\max} &= 2 + 2 \sin a + M^2 \left( \frac{7}{6} + \frac{9}{2} \sin a + 4 \sin^2 a + \frac{2}{3} \sin^3 a \right) \\ &+ M^4 \left[ (\gamma-1) \left( \frac{71}{120} + \frac{169}{40} \sin a + \frac{44}{5} \sin^2 a + \frac{55}{6} \sin^3 a + 4 \sin^4 a \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2811}{120} + \frac{7831}{360} \sin a + \frac{3313}{180} \sin^2 a + \frac{4207}{180} \sin^3 a \right. \\ &\quad \left. + 4 \sin^4 a - \frac{17}{45} \sin^5 a \right] + \dots \quad (7.3) \end{aligned}$$

が得られる. (7.1) と (7.3) によつて,  $a$  と  $M_*$  とが直接に結びつけられるわけである.

### §8. 橋本・柴岡の結果との比較

既にはしがきで述べた通り, 橋本・柴岡の兩氏は Janzen-Rayleigh の方法を用ゐて圓柱を過ぎる縮む流體の流れを取扱ひ, 流れの中の各點における速度ポテンシャルの  $M^4$  まで正確な解析式を求めた. その際, 圓柱のまはりに任意の大きさの循環  $\Gamma$  があるものとしてゐる. 循環の大きさ ( $\Gamma = 2\pi k$ ) が, 圓柱表面の前後兩岐點の位置 ( $\theta = -a, \pi+a$ ) を指定すれば  $M$  の函數として一義的に定まることは §6 で述べた通りである.

さて兩氏は速度ポテンシャルの式を基として最大速度の解析式を導き, 更に前後兩岐點の位置の二三の場合について臨界 Mach 數の計算を行つた ( $\gamma = 1.405$ ;  $a = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ ). なほ, 圓柱に働く揚力は循環によつて定まり, 循環自身は前後兩岐點の位置と Mach 數との函數であるから, 岐點の位置を一定に保つとき圓柱の揚力が Mach 數によつて如何に變化するかを調べるることができる. 兩氏はこれに對する解析式を與へ, 且つ二三の場合について數値

計算を行つてゐる ( $\gamma=1.405$ ;  $\alpha=5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ ).

この論文で筆者の用ゐた方法は橋本柴岡兩氏の採用した Janzen-Rayleigh の方法とは(原理的には同じであるが)全く別なものであるから, 兩方の結果を比較することは筆者の公式の正否を検討する上にも, また圓柱に對する結果の式そのものゝ吟味としても興味あることと思はれる.

(a) 先づ橋本・柴岡の與へた速度ポテンシャルの公式で特に圓柱表面の値を求めたところ, 筆者の結果と完全に一致した. これにより兩氏の結果と共に筆者の結果の正確なことはほぼ確實であらうと思はれる.

(b) 最大速度に對して橋本・柴岡は

$$Q_{\max} = U \left[ 2 + k + \left( \frac{7}{6} + \frac{4}{3} k + k^2 \right) M^2 + \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{71}{120} + \frac{49}{30} k + \frac{11}{5} k^2 + \frac{13}{16} k^3 + \frac{1}{4} k^4 \right) + \frac{281}{120} + \frac{1477}{360} k + \frac{1649}{360} k^2 + \frac{61}{39} k^3 + \frac{1}{4} k^4 \right\} M^4 \right]$$

といふ式を與へてゐる ([1] の (31) 式). これを筆者の求めた (5.3), (5.4 a, b, c) と比較するに,  $M^4$  の項  $q_0(\pi/2)$  に僅かばかり相違が認められる. すなはち橋本・柴岡の式で  $(1649/360)k^2$  の項は筆者の式では  $(3313/720)k^2$  となつてゐる. これは後者が正しいものと考へられる. 臨界 Mach 數の數値計算には橋本柴岡の兩氏は上記の式を用ゐられたが, そのための誤差はいふに足りない程度に小さい. 實際兩氏の式の誤差は

$$\Delta q_{\max} = \left( \frac{1649}{360} - \frac{3313}{720} \right) k^2 M^4 = -\frac{1}{48} k^2 M^4.$$

故に

$$\frac{\Delta q_{\max}}{q_{\max}} = -\frac{1}{48} \frac{k_0^2 M^4}{2 + k_0} = -\frac{1}{24} \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} M^4.$$

圓柱の場合臨界 Mach 數  $M_*$  は明かに循環 0 のとき最大であつて, 且つそのとき  $M_* \doteq 0.4$  の程度であることを考へると

$$\left| \frac{\Delta q_{\max}}{q_{\max}} \right| < \frac{1}{24} \sin^2 \alpha \cdot (0.4)^4 \doteq 0.001 \sin^2 \alpha.$$

従つて兩氏の式を用ゐて臨界 Mach 數を計算しても, そのために生ずる誤差は極めて微々たることが想像される. 結局臨界 Mach 數に對する橋本・柴岡の計算値は信頼してよい.

(b) 圓柱のまはりの循環を  $\Gamma = 2\pi k$ , 圓柱の揚力係数を  $C_L$ , 圓柱表面の前後兩岐點の位置を  $\theta = -\alpha, \pi + \alpha$  とするとき, 橋本・柴岡の結果では

(1) 實際, 橋本・柴岡兩氏は再計算を行つて筆者と同じ結果を得られた.

$$\frac{C_L}{C_{L_0}} = \frac{k}{k_0} = 1 + \left( \frac{11}{12} + \frac{1}{3} \sin^2 a \right) M^2 + \left\{ (\gamma - 1) \left( \frac{23}{48} + \frac{4}{3} \sin^2 a \right) + \frac{1357}{720} + \frac{293}{90} \sin^2 a - \frac{16}{45} \sin^4 a \right\} M^4$$

なる関係が成り立つ ([1] の (37) 式). これを筆者の結果 (6.7) と比較するに,  $M^4$  の項で  $\sin^2 a$  及び  $\sin^4 a$  の項に不一致が見られる. これも筆者の式が正しい. この場合橋本・柴岡の式は

$$\begin{aligned} \Delta(C_L/C_{L_0}) &= \Delta(k/k_0) \\ &= \left( \frac{293}{90} \sin^2 a - \frac{16}{45} \sin^4 a \right) M^4 - \left( \frac{1127}{360} \sin^2 a - \frac{17}{90} \sin^4 a \right) M^4 \\ &= \left( \frac{1}{8} \sin^2 a - \frac{1}{6} \sin^4 a \right) M^4 \end{aligned}$$

なる誤差を含む. 容易に確かめられる通り

$$-\frac{1}{24} \leq \frac{1}{8} \sin^2 a - \frac{1}{6} \sin^4 a \leq \frac{3}{128}$$

であるから,

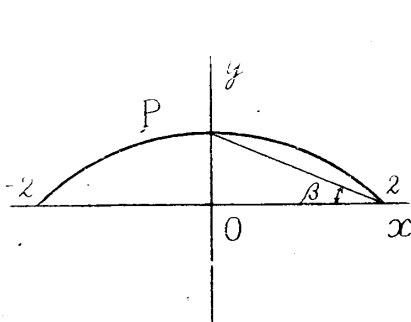
$$|\Delta(C_L/C_{L_0})| = |\Delta(k/k_0)| \leq \frac{1}{24} M^4.$$

従つてこの場合も橋本・柴岡両氏の数値結果には認め得る程度の誤差は含まれないものと考えられる.

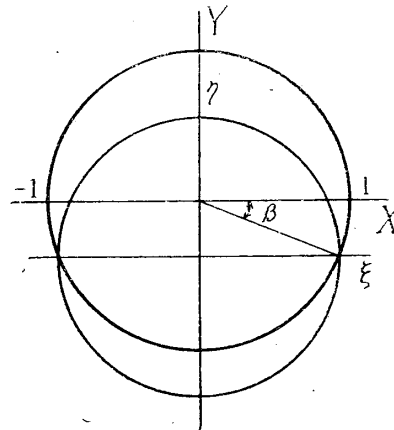
#### IV. 迎角 $0^\circ$ の圓弧翼

##### §9. 第一近似

この章では, 反りの任意な圓弧翼が一様な流れの中に迎角  $0^\circ$  の姿勢でおかれてゐる場合を考へる.



第 1 圖



第 2 圖

$z$  面における第 1 圖のやうな圓弧翼が

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}, \quad (9.1)$$

$$\zeta = \frac{1}{\cos \beta} (Z + i \sin \beta) \quad (9.2)$$

なる變換によつて  $Z$  面の單位圓  $Z = e^{i\theta}$  に寫像されることは容易に確められる (第 2 圖). この場合, 圓弧翼の翼弦長  $l$ , 反り  $f$  はそれぞれ

$$l = 4, \quad f = \frac{1}{2} \tan \beta \quad (9.3)$$

で與へられ, 後縁及び前縁はそれぞれ  $\theta = -\beta$ ,  $\theta = \pi + \beta$  に對應する.

さて

$$dz = \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{(\zeta-1)(\zeta+1)}{\zeta^2 \cos \beta} dZ \quad (9.4)$$

であるから, (2.7) を考慮すれば

$$ds e^{i\omega} = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\beta})(e^{i\theta} + e^{-i\beta})}{\left[e^{i\theta} + \frac{1}{2}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})\right]^2} \frac{ie^{i\theta}}{\cos \beta} d\theta,$$

故に

$$\frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = -i \cos \beta \frac{[e^{i\theta} + \frac{1}{2}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})]^2 e^{-i\theta}}{(e^{i\theta} - e^{-i\beta})(e^{i\theta} + e^{-i\beta})}. \quad (9.5)$$

また (2.5) を考へると (9.1), (9.2) より

$$\lambda e^{i\delta} = \frac{1}{\cos \beta},$$

従つて

$$\lambda = \frac{1}{\cos \beta}, \quad \delta = 0. \quad (9.6)$$

更に迎角は  $0^\circ$  と假定するから

$$\alpha = 0 \quad (9.7)$$

である. これらを用ゐると速度ポテンシャルに對する第 0 近似 (縮まない流體) は (2.3) によつて

$$\Phi_0(\theta) = \frac{2}{\cos \beta} \cos \theta - \kappa_0 \theta \quad (9.8)$$

のやうに與へられる. これより

$$\frac{d\Phi_0}{d\theta} = -\frac{2}{\cos \beta} \sin \theta - \kappa_0. \quad (9.9)$$

Joukowski の假定に従ひ, 後縁で速度が有限であることを要求すれば

$$\text{後縁 } \theta = -\beta : \frac{d\Phi_0}{d\theta} = 0.$$



従つて

$$\kappa_0 = 2 \tan \beta. \quad (9.10)$$

これを (9.9) に入れると

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{d\theta} &= -\frac{2}{\cos \beta} (\sin \theta + \sin \beta) \\ &= -i \frac{1}{\cos \beta} (1 + e^{i\beta} e^{-i\theta})(1 - e^{-i\beta} e^{-i\theta}) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

(9.5), (9.11) を用ひて計算すれば

$$\frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = 1 + (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) e^{-i\theta} + \frac{1}{4} (e^{2i\beta} - 2 + e^{-2i\beta}) e^{-2i\theta}. \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i\omega} &= \frac{i}{\cos \beta} \left[ \left( \frac{1}{4} e^{2i\beta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2i\beta} \right) e^{3i\theta} + \left( \frac{1}{4} e^{3i\beta} - \frac{7}{4} e^{i\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{7}{4} e^{-i\beta} - \frac{1}{4} e^{-3i\beta} \right) e^{2i\theta} + \left( -\frac{5}{4} e^{2i\beta} + \frac{7}{2} - \frac{5}{4} e^{-2i\beta} \right) e^{i\theta} \right. \\ &\quad \left. + 2(e^{i\beta} - e^{-i\beta}) - e^{-i\theta} \right]. \end{aligned} \quad (9.13)$$

$\kappa_0 = 2 \tan \beta$  を考へに入れると (9.13) から

$$\begin{aligned} &\int_{-\beta}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i\omega} + 2\kappa_0 \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\cos \beta} (e^{i\theta} - e^{-i\beta}) \left\{ \left( \frac{1}{12} e^{2i\beta} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} e^{-2i\beta} \right) e^{2i\theta} + \left( \frac{1}{8} e^{3i\beta} - \frac{19}{24} e^{i\beta} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{17}{24} e^{-i\beta} - \frac{1}{24} e^{-3i\beta} \right) e^{i\theta} + \left( -\frac{9}{8} e^{2i\beta} + \frac{65}{24} - \frac{13}{24} e^{-2i\beta} - \frac{1}{24} e^{-4i\beta} \right) - e^{i\beta} e^{-i\theta} \right\} \end{aligned} \quad (9.14)$$

が得られる. 従つて (2.4 a) により

$$P_1(\theta) + iQ_1(\theta)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} \int_{-\beta}^{\theta} \left\{ \left( \frac{d\Phi_0}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{ds} e^{i\omega} + 2\kappa_0 \right\} d\theta - \frac{1}{2 \cos \beta} \cos \theta \\ &= \frac{1}{4 \cos \beta} \left\{ \frac{1}{12} (e^{2i\beta} - 2 + e^{-2i\beta}) e^{3i\theta} + \frac{1}{24} (5e^{3i\beta} - 27e^{i\beta} + 27e^{-i\beta} - 5e^{-3i\beta}) e^{2i\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{48} (e^{4i\beta} - 16e^{2i\beta} + 30 - 16e^{-2i\beta} + e^{-4i\beta}) e^{i\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{96} (3e^{5i\beta} - 147e^{3i\beta} + 534e^{i\beta} - 782e^{-i\beta} + 199e^{-3i\beta} + e^{-5i\beta}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{48} (-15e^{4i\beta} + 78e^{2i\beta} - 250 + 228e^{-2i\beta} - 39e^{-4i\beta} - 2e^{-6i\beta}) e^{-i\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{96} (3e^{3i\beta} + 25e^{i\beta} + 50e^{-i\beta} - 90e^{-3i\beta} + 11e^{-5i\beta} + e^{-7i\beta}) e^{-2i\theta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (e^{2i\beta} - 2 + e^{-2i\beta}) e^{-3i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (9.15)$$

これを (2.3b) に入れ、且つ (2.12), (2.13) を考へ合はせると

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) = \tan \beta \left\{ -\frac{1}{6} \sin \beta \cos 3\theta + \frac{1}{6} (5 \sin^2 \beta + 3) \sin 2\theta \right. \\ \left. + \frac{7}{6} \sin \beta (\sin^2 \beta + 3) \cos \theta \right\} - \kappa_1 \theta. \end{aligned} \quad (9.16)$$

こゝで再び Joukowski の假定を用ゐて

$$\left( \frac{d\Phi_1}{d\theta} \right)_{\theta=-\beta} = 0$$

とすれば、 $\kappa_1$  は次のやうに定まる：

$$\kappa_1 = \tan \beta \left( 1 + \frac{5}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \sin^4 \beta \right). \quad (9.17)$$

(9.16), (9.17) により迎角  $0^\circ$  の圓弧翼上の速度ポテンシャルに対する第一近似式が見出されたわけである。

## §10. 第二近似

次に第二近似に進む。計算は圓柱の場合と大體同様に行へばよいから詳細は省略するが、たゞ一つ次の點に注意しなければならない。すなはち圓柱の場合には計算に當つて  $e^{i\theta}$  の正及び負の有限次多項式のみを取扱へばよかつたのであるが、圓弧翼の場合は稍々趣きを異にする。これは (9.5) で與へられる  $(d\theta/ds)e^{-i\omega}$  が  $e^{i\theta}$  の多項式とはならず分數式であることに由來する。たゞ第一近似の計算では  $(d\theta/ds)e^{-i\omega}$  は常に  $(d\Phi_0/d\theta)(d\theta/ds)e^{-i\omega}$  のやうに一塊りとなつて現はれるので、(9.12) の示す通り多項式の計算を行へばよいのである。ところが  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$  に対しては、(2.4b) の右邊の第二項及び第三項は  $(d\theta/ds)e^{-i\omega}$  を裸かのみで含むから、第二近似では  $e^{i\theta}$  の分數式が現はれることになる。しかしこれに基づく困難は次の如くして避けられる。

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}, \quad (10.1)$$

$$\zeta = \zeta_0 + aZ, \quad \text{但し } |\zeta_0 \pm 1| < a \quad (10.2)$$

とすれば、 $Z$  面の單位圓  $|Z|=1$  は  $z$  面における一般 Joukowski 翼型(後縁のまるい)に對應する。このとき

$$dz = \left( 1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) a dZ = \frac{(aZ + \zeta_0 - 1)(aZ + \zeta_0 + 1)}{(aZ + \zeta_0)^2} a dZ.$$

こゝで  $Z = e^{i\theta}$  とおけば

$$dz = d\zeta e^{i\omega}, \quad dZ = ie^{i\theta} d\theta$$

であるから

$$\frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} = \frac{i}{a} \frac{\left( 1 + \frac{\zeta_0}{a} e^{-i\theta} \right)^2 e^{-i\theta}}{\left( 1 + \frac{\zeta_0 - 1}{a} e^{-i\theta} \right) \left( 1 + \frac{\zeta_0 + 1}{a} e^{-i\theta} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{i}{2} \left(1 + \frac{\zeta_0}{a} e^{-i\theta}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{\zeta_0 - 1}{a} e^{-i\theta}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{\zeta_0 + 1}{a} e^{-i\theta}\right)^{-1} \right\} \\
 &= -\frac{i}{2} \left(1 + \frac{\zeta_0}{a} e^{-i\theta}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left(\frac{\zeta_0 - 1}{a}\right)^n - \left(\frac{\zeta_0 + 1}{a}\right)^n \right\} e^{-ni\theta} \quad (10.3)
 \end{aligned}$$

と書ける。但し  $|\zeta_0 \pm 1| < a$  を考へて級数展開を行つた。こゝで始めて圓弧翼への極限移行を行ふ。それには

$$\zeta_0 = i \tan \beta, \quad a \rightarrow \sec \beta$$

とすればよい。このとき

$$\frac{\zeta_0 \pm 1}{a} \rightarrow i \sin \beta \pm \cos \beta = \pm e^{\pm i\beta}$$

であるから, (10.3) は

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{ds} e^{-i\omega} &\rightarrow -\frac{i}{2} (1 + i \sin \beta e^{-i\theta})^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{ e^{-ni\beta} - (-1)^n e^{ni\beta} \} e^{-ni\theta} \\
 &= -i \cos \beta e^{-i\theta} \left\{ 1 + \frac{1}{4} (e^{2i\beta} + 2 + e^{-2i\beta}) e^{-2i\theta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{4} (e^{3i\beta} + e^{i\beta} - e^{-i\beta} - e^{-3i\beta}) e^{-3i\theta} + \dots \right\} \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

となり  $e^{-i\theta}$  の昇幂無限級数の形に表はされる。さて既に §4 で述べた通り,  $\Phi_2(\theta)$  を求めるには  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$  の式で  $e^{i\theta}$  の正数幂の項のみを知ればよい。それ故 (2.4b) の計算に際しても  $(d\theta/ds)e^{-i\omega}$  としては (10.4) の式で最初の数項 (いまの場合  $e^{-3i\theta}$  の項まで) を知るだけで十分である。かやうにして  $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$  従つて  $\Phi_2(\theta)$  の計算も有限項だけで完全に遂行できる。

計算結果は第 0 近似, 第一近似と共に次の節にまとめて記す。

### §11. 結 果

(9.1), (9.2) において  $Z = e^{i\theta}$  とおき實數部虚數部に分けると, 圓弧翼は副變數  $\theta$  を用ひて

$$\left. \begin{aligned}
 x_P &= \frac{2}{\cos \beta} \frac{(1 + \sin \beta \sin \theta) \cos \theta}{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}, \\
 y_P &= 2 \tan \beta \frac{(\sin \beta + \sin \theta)^2}{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}
 \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

の如く表はされる。そして圓弧翼表面の速度ポテンシャルは次の形に與へられる：

$$\Phi(\theta) = \Phi_0(\theta) + M^2 \Phi_1(\theta) + M^4 \Phi_2(\theta) + \dots, \quad (11.2)$$

但し

(1) 楕圓柱の場合には既に第一近似において無限級数の演算を行はねばならない。[5] を見よ。

$$\Phi_0(\theta) = \frac{2}{\cos \beta} \cos \theta - \kappa_0 \theta, \quad (11.3 a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) = \tan \beta \left\{ -\frac{1}{6} \sin \beta \cos 3\theta + \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \sin^2 \beta \right) \sin 2\theta \right. \\ \left. + \left( \frac{7}{2} + \frac{7}{6} \sin^2 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right\} - \kappa_1 \theta, \end{aligned} \quad (11.3 b)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\theta) = \tan \beta \left[ (\gamma+1) \left\{ \frac{1}{40} \sin^3 \beta \cos 5\theta - \left( \frac{1}{8} + \frac{13}{80} \sin^2 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 4\theta \right. \right. \\ \left. - \left( \frac{1}{6} + \frac{7}{8} \sin^2 \beta + \frac{2}{5} \sin^4 \beta \right) \sin \beta \cos 3\theta \right. \\ \left. + \left( \frac{19}{12} + \frac{9}{4} \sin^2 \beta + \frac{19}{40} \sin^4 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 2\theta \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{59}{12} \sin^2 \beta + \frac{11}{4} \sin^4 \beta + \frac{11}{40} \sin^6 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right\} \\ \left. + \frac{1}{40} \sin^3 \beta \cos 5\theta - \left( \frac{1}{8} + \frac{43}{360} \sin^2 \beta \right) \sin^2 \beta \sin 4\theta \right. \\ \left. - \left( \frac{7}{24} + \frac{43}{72} \sin^2 \beta + \frac{29}{360} \sin^4 \beta \right) \sin \beta \cos 3\theta \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{8} + \frac{7}{4} \sin^2 \beta + \frac{41}{72} \sin^4 \beta - \frac{29}{72} \sin^6 \beta \right) \sin 2\theta \right. \\ \left. + \left( \frac{29}{8} + \frac{13}{4} \sin^2 \beta - \frac{89}{72} \sin^4 \beta - \frac{17}{24} \sin^6 \beta \right) \sin \beta \cos \theta \right] - \kappa_2 \theta. \end{aligned} \quad (11.3 c)$$

また圓弧翼のまはりの循環  $\Gamma$  は

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \kappa = \kappa_0 + M^2 \kappa_1 + M^4 \kappa_2 + \dots, \quad (11.4)$$

但し

$$\kappa_0 = 2 \tan \beta, \quad (11.5 a)$$

$$\kappa_1 = \tan \beta \left( 1 + \frac{5}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{6} \sin^4 \beta \right), \quad (11.5 b)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2 = \tan \beta \left\{ (\gamma+1) \left( \frac{13}{6} + \frac{71}{60} \sin^2 \beta + \frac{3}{10} \sin^4 \beta - \frac{1}{40} \sin^6 \beta \right) \sin^2 \beta \right. \\ \left. + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} \sin^2 \beta - \frac{61}{180} \sin^4 \beta - \frac{5}{9} \sin^6 \beta + \frac{17}{360} \sin^8 \beta \right\} \end{aligned} \quad (11.5 c)$$

で與へられる。

さて (9.5) により

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \cos \beta \left| \frac{(e^{i\theta} + i \sin \beta)^2}{(e^{i\theta} - e^{-i\beta})(e^{i\theta} + e^{-i\beta})} \right| \\ &= \frac{\cos \beta}{2} \frac{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}{|\sin \beta + \sin \theta|}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

(2.1), (11.2) により圆弧翼表面の速度  $q$  は  $\theta$  を副変数として

$$q(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta) + \dots \quad (11.7)$$

のやうに表はされる. こゝに

$$q_0(\theta) = \mp \frac{d\Phi_0}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad q_1(\theta) = \mp \frac{d\Phi_1}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \quad q_2(\theta) = \mp \frac{d\Phi_2}{d\theta} \frac{d\theta}{ds}, \dots \quad (11.8)$$

であつて, 符號 (-), (+) はそれぞれ翼の上面及び下面に對應する. (11.3 a, b, c), (11.5 a, b, c), (11.6) より

$$q_0(\theta) = 1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta, \quad (11.9 a)$$

$$q_1(\theta) = \sin \beta (1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta) \times \left\{ -\frac{1}{12} \sin^3 \beta + \left(1 + \frac{2}{3} \sin^2 \beta\right) \sin \theta + \sin \beta \sin^2 \theta \right\}, \quad (11.9 b)$$

$$q_2(\theta) = \sin \beta (1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta) \times \left[ (\gamma + 1) \left\{ -\left(\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{4}{3} \sin^3 \beta + \frac{13}{40} \sin^5 \beta + \frac{1}{80} \sin^7 \beta\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{6} \sin^2 \beta - \frac{1}{10} \sin^4 \beta + \frac{3}{20} \sin^6 \beta\right) \sin \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sin \beta + 2 \sin^3 \beta + \frac{4}{5} \sin^5 \beta\right) \sin^2 \theta \right. \right. \\ \left. \left. + \left(2 \sin^2 \beta + \frac{8}{5} \sin^4 \beta\right) \sin^3 \theta + \sin^3 \beta \sin^4 \theta \right\} \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{4} \sin \beta + \frac{1}{2} \sin^3 \beta - \frac{1}{8} \sin^5 \beta - \frac{17}{720} \sin^7 \beta\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \beta - \frac{199}{180} \sin^4 \beta - \frac{17}{45} \sin^6 \beta\right) \sin \theta \right. \\ \left. + \left(\frac{7}{4} \sin \beta + \frac{1}{3} \sin^3 \beta - \frac{77}{180} \sin^5 \beta\right) \sin^2 \theta \right. \\ \left. + \left(2 \sin^2 \beta + \frac{41}{45} \sin^4 \beta\right) \sin^3 \theta + \sin^3 \beta \sin^4 \theta \right]. \quad (11.9 c)$$

特に  $\theta = \pi/2$  とおけば最大速度  $q_{\max}$  が出る :

$$q_{\max} = q\left(\frac{\pi}{2}\right) = q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + M^4 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots, \quad (11.10)$$

但し

$$q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \sin \beta)^2, \quad (11.11 a)$$

$$q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1 + \sin \beta)^2 \sin \beta \left(1 + \sin \beta + \frac{2}{3} \sin^2 \beta - \frac{1}{12} \sin^3 \beta\right), \quad (11.11 b)$$

$$\begin{aligned}
q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (1 + \sin \beta)^2 \sin \beta \\
&\times \left[ (\gamma + 1) \left( \frac{3}{4} \sin \beta + \frac{13}{6} \sin^2 \beta + \frac{5}{3} \sin^3 \beta + \frac{3}{2} \sin^4 \beta + \frac{19}{40} \sin^5 \beta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{20} \sin^6 \beta - \frac{1}{80} \sin^7 \beta \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \sin \beta + \frac{7}{4} \sin^2 \beta + \frac{5}{6} \sin^3 \beta - \frac{7}{36} \sin^4 \beta - \frac{109}{360} \sin^5 \beta \right. \\
&\quad \left. - \frac{17}{45} \sin^6 \beta + \frac{17}{720} \sin^7 \beta \right]. \quad (11.11 \text{ c})
\end{aligned}$$

最後に、圓弧翼に働く揚力を  $L$  とすれば Kutta-Joukowski-Glauert の定理により

$$L = \rho_{\infty} U \Gamma, \quad (11.12)$$

いまの場合みだされぬ速度は  $U=1$ 、圓弧翼の弦長は  $l=4$  であるから、揚力係数  $C_L$  は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 \cdot l} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{U} = \pi \kappa. \quad (11.13)$$

$\kappa$  としては (11.4), (11.5 a, b, c) を用ゐればよい。縮まない流體に對する揚力係数を  $C_{L_0}$  とすれば、明かにこれは上式において  $M=0$  として得られる：

$$C_{L_0} = \pi \kappa_0 = 2\pi \tan \beta. \quad (11.14)$$

(11.13), (11.14) より

$$\begin{aligned}
\frac{C_L}{C_{L_0}} &= 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots \\
&= 1 + M^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \sin^2 \beta - \frac{1}{12} \sin^4 \beta \right) \\
&\quad + M^4 \left\{ (\gamma + 1) \left( \frac{13}{12} + \frac{71}{120} \sin^2 \beta + \frac{3}{20} \sin^4 \beta - \frac{1}{80} \sin^6 \beta \right) \sin^2 \beta \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} + \frac{5}{4} \sin^2 \beta - \frac{61}{360} \sin^4 \beta - \frac{5}{18} \sin^6 \beta + \frac{17}{720} \sin^8 \beta \right\} + \dots \quad (11.15)
\end{aligned}$$

有効最大揚力を  $L_{\max}$  とすれば、翼弦長は  $l=4$  であるから (7.2), (11.4) により

$$\frac{L_{\max}}{\pi \rho_{\infty} c_{\infty}^2 l} = M_*^2 \tan \beta \left( 1 + M_*^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M_*^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots \right), \quad (11.16)$$

但し  $M_*$  は臨界 Mach 数である。

## § 12. 圓弧翼の極限として得られる圓柱

圓弧翼は  $\beta = \pi/2$  なる特別の場合に圓柱になるから、この場合は圓柱に對するものと同じ結果を與へなければならぬ。但し圓弧翼については前後縁において流速が有限であるやうに循環が定めてあるから、極限として得られる圓柱については前後兩岐點が重り合つて  $\alpha = \pi/2$  に落ちるやうな特別な流れを論ずることになる。このことを念頭において圓柱及び

圓弧翼に對する諸公式を比較しよう.

さていままで取扱つた圓弧翼は弦長 1, 従つて曲率半径が

$$R = \frac{2}{\sin 2\beta}$$

であるが, 圓柱の場合と比較するには曲率半径 1 の圓弧翼を考へるのが便利である. そのためには §11 の諸公式において速度ポテンシャル及び循環の式を共に  $1/R = 1/2 \sin 2\beta$  倍すればよい. そこで  $\beta \rightarrow \pi/2$  なる極限をとれば, (11.4), (11.5 a,b,c) により

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = 2 + \frac{5}{2}M^2 + \left\{ \frac{29}{8}(\gamma+1) + \frac{173}{72} \right\} M^4 + \dots \quad (12.1)$$

これは (6.4), (6.5 a,b,c) において  $\alpha = \pi/2$  とした結果と完全に一致する.

次に (11.9 a,b,c) の各式に  $1/2 \sin 2\beta$  を掛け  $\beta \rightarrow \pi/2$  なる極限をとれば

$$q_0(\theta) = 2(1 + \sin \theta), \quad (12.2 a)$$

$$q_1(\theta) = 2(1 + \sin \theta) \left( -\frac{1}{12} + \frac{5}{3} \sin \theta + \sin^2 \theta \right), \quad (12.2 b)$$

$$q_2(\theta) = 2(1 + \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ (\gamma+1) \left( -\frac{461}{240} + \frac{13}{60} \sin \theta + \frac{19}{5} \sin^2 \theta + \frac{18}{5} \sin^3 \theta + \sin^4 \theta \right) \right. \\ & \left. - \frac{433}{720} - \frac{59}{60} \sin \theta + \frac{149}{90} \sin^2 \theta + \frac{131}{45} \sin^3 \theta + \sin^4 \theta \right\}. \quad (12.2 c) \end{aligned}$$

一方 (5.1), (5.2 a,b,c) において  $\alpha = \pi/2$  とおき,  $k$  が (12.1) で與へられることを考慮すれば, 簡単な計算の後

$$q(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta) + \dots$$

の如く表はされることがわかる. 但し  $q_0(\theta)$ ,  $q_1(\theta)$ ,  $q_2(\theta)$  は (12.2 a,b,c) で與へられる. 更に (12.2 a,b,c) において  $\theta = \pi/2$  とおけば

$$q_{\max} = 4 + \frac{31}{3}M^2 + \left\{ \frac{2867}{180} + \frac{1607}{60}(\gamma+1) \right\} M^4 + \dots \quad (12.3)$$

が得られる. (7.3) において  $\alpha = \pi/2$  としても, また (11.10), (11.11 a,b,c) において  $\beta = \pi/2$  としても同じ結果 (12.3) に達することは容易に確められる.

最後に (11.15) において  $\beta = \pi/2$  とすれば

$$\frac{C_L}{C_{L_0}} = 1 + \frac{5}{4}M^2 + \left\{ \frac{173}{144} + \frac{29}{16}(\gamma+1) \right\} M^4 + \dots \quad (12.4)$$

この結果はまた (6.7) において  $\alpha = \pi/2$  とおけば得られる.

以上の如く, 圓柱に對する公式と圓弧翼に對する公式とは少くともこの節の例では完全に一致する. この事實は兩方の結果の正しいことをある程度裏書きするやうに思はれる.

### §13. 薄翼理論との比較

縮む流體における翼理論としては, この論文で用ゐた  $M^2$  展開法の他に, いはゆる Prandtl-

Glauert の一次理論がある。これは普通の翼では厚さ、反り、迎角がさほど大きくないことを考慮してそれらを一次の無限小（みだされぬ流れの速度に對して）と考へ、二次以上を無視するものである。最近筆者はこの理論を考へ直して薄翼としての逐次近似理論を展開した [6]。その第一近似が Prandtl-Glauert の理論に相當する。筆者は特に第二近似に就て任意翼型表面の速度分布、翼型の受ける揚力、モーメントに對する一般公式を導いた。この理論は薄翼としての近似の他には壓縮性については何等の省略を行はず、いはゞ  $M^2$  展開法における第  $\infty$  近似に相當する。具體例としては、一般 Joukowski 翼型——圓から Joukowski 變換によつて導かれる翼型を便宜上かやうに名付ける。後縁は必ずしも鋭くない——を詳しく論じた [6]。圓弧翼は勿論一般 Joukowski 翼型の特別な場合として含まれるから、薄翼理論の結果とこの論文の結果とを比較すれば正否を檢討する一つの試金石が得られるであらう。

弦長 2, 反り  $\frac{1}{2} \tan \beta$  の圓弧翼は

$$x_P^2 + (y_P + \cot 2\beta)^2 = \operatorname{cosec}^2 2\beta$$

なる方程式で表はされる。いま反り、從つて  $\beta$  が小さいものとして上の式を  $y_P$  について解けば

$$\begin{aligned} y_P &= -\cot 2\beta + \sqrt{\operatorname{cosec}^2 2\beta - x_P^2} \\ &= \beta(1 - x_P^2) + O(\beta^3). \end{aligned}$$

從つてこの圓弧翼はまた

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \cos \vartheta, \\ y_P &= \beta \sin^2 \vartheta + O(\beta^3) \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

のやうに  $\vartheta$  を副變數として表はすこともできる。

さて前に述べた論文 [6] によれば、迎角  $0^\circ$  の圓弧翼表面の速度分布は

$$q = 1 + \frac{2\beta}{\sqrt{1-M^2}} \sin \vartheta - \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left( 1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \beta^2 \cos 2\vartheta \quad (13.2)$$

の如く與へられる。これを  $M^2$  について展開すれば容易に次の結果が得られる：

$$\begin{aligned} q &= 1 + 2\beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 2 \sin^2 \vartheta) \\ &\quad + M^2 \{ \beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 4 \sin^2 \vartheta) \} \\ &\quad + M^4 \left\{ \frac{3}{4} \beta \sin \vartheta - \left( 1 + \frac{\gamma+1}{4} \right) \beta^2(1 - 4 \sin^2 \vartheta) \right\} + O(M^6). \end{aligned} \quad (13.3)$$

一方、本論文の結果 (11.9 a, b, c) において  $\beta$  の三乗以上を無視すれば

$$\begin{aligned} q_0(\theta) &= 1 + 2\beta \sin \theta + \beta^2 + O(\beta^3), \\ q_1(\theta) &= \beta \sin \theta + 3\beta^2 \sin^2 \theta + O(\beta^3), \\ q_2(\theta) &= \frac{3}{4} \beta \sin \theta - \left( \frac{1}{4} + \frac{\gamma+1}{4} \right) \beta^2 + \left( \frac{13}{4} + \gamma + 1 \right) \beta^2 \sin^2 \theta + O(\beta^3). \end{aligned}$$

次に  $\theta$  を  $\vartheta$  で表はさねばならない。考へる圓弧翼は (19.1) で與へられる。いま  $\beta$  を小さいとして (11.1) を展開すれば（弦長はこの場合 2 であることに注意する）

$$x_P = \cos \theta - \frac{1}{2} \beta \sin 2\theta + O(\beta^2). \quad (13.4)$$



(13.1), (13.4) より

$$\cos \vartheta = \cos \theta - \frac{\beta}{2} \sin 2\theta + O(\beta^2). \quad (13.5)$$

これを  $\theta$  について解かう。先づ

$$\cos \theta = \cos \vartheta + O(\beta),$$

従つて

$$\theta = \vartheta + O(\beta). \quad (13.6)$$

故に

$$\sin 2\theta = \sin 2\vartheta + O(\beta), \quad (13.7)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\vartheta + \theta - \vartheta) = \cos \vartheta - \sin \vartheta \cdot (\theta - \vartheta) + O((\theta - \vartheta)^2) \\ &= \cos \vartheta - \sin \vartheta \cdot (\theta - \vartheta) + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (13.8)$$

(13.7), (13.8) を (13.5) に入れて両邊を  $\sin \vartheta$  で割れば

$$\theta = \vartheta - \beta \cos \vartheta + O(\beta^2). \quad (13.9)$$

これより

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(\vartheta - \beta \cos \vartheta) + O(\beta^2) = \sin \vartheta - \beta \cos^2 \vartheta + O(\beta^2) \\ &= \sin \vartheta - \beta(1 - \sin^2 \vartheta) + O(\beta^2). \end{aligned} \quad (13.10)$$

(13.10) を  $q_0(\theta)$ ,  $q_1(\theta)$ ,  $q_2(\theta)$  の式に入れると

$$q_0 = 1 + 2\beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 2\sin^2 \vartheta) + O(\beta^3), \quad (13.11 a)$$

$$q_1 = \beta \sin \vartheta - \beta^2(1 - 4\sin^2 \vartheta) + O(\beta^3), \quad (13.11 b)$$

$$q_2 = \frac{3}{4}\beta \sin \vartheta - \left(1 + \frac{\gamma+1}{4}\right)\beta^2(1 - 4\sin^2 \vartheta) + O(\beta^3) \quad (13.11 c)$$

となる。これは (13.3) と完全に一致する。すなはち期待通り  $M^2$  展開法による本論文の結果は薄翼理論の結果と矛盾しないのである。

#### §14. 数値的議論

§11 では種々の解析式を與へたが、この節ではそれを基にして数値的な議論を行つて見よう。

(a) Mach 數と共に揚力係數が如何に變化するかは (11.15) によつて

$$\frac{C_L}{C_{L_0}} = 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} + \dots \quad (14.1)$$

のやうに與へられる。こゝで

$$\kappa_2 = \kappa_{20} + (\gamma+1)\kappa_{21} \quad (14.2)$$

と書けば  $\kappa_1/\kappa_0$ ,  $\kappa_{20}/\kappa_0$ ,  $\kappa_{21}/\kappa_0$  は  $\beta$ , 従つて反り  $1/2 \tau \beta$  だけの函數となる。第1表には  $\beta$  の種々の値に對して反り  $1/2 \tau \beta$  並びに  $\kappa_1/\kappa_0$ ,  $\kappa_2/\kappa_0$ ,  $\kappa_{20}/\kappa_0$ ,  $\kappa_{21}/\kappa_0$  の値を示す。但し氣體としては空氣をとり  $\gamma=1.4$  とおいてある。

次に  $\beta \rightarrow 0^\circ$ ,  $\beta=6^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$  の各の場合,  $M=0, 0.1, 0.2, \dots$  に對して  $C_L/C_{L_0}$  の數値を計算し第2表に示す。但し

第 1 表 ( $\gamma=1.4$ )

$\beta$	反り $1/2 \tan \beta$	$\frac{\kappa_1}{\kappa_0}$	$\frac{\kappa_{20}}{\kappa_0}$	$\frac{\kappa_{21}}{\kappa_0}$	$\frac{\kappa_2}{\kappa_0}$
0°	0	0.5000	0.3750	0	0.3750
2°	0.0175	0.5010	0.3765	0.0013	0.3797
4°	0.0350	0.5041	0.3811	0.0053	0.3938
6°	0.0526	0.5091	0.3886	0.0119	0.4172
8°	0.0703	0.5161	0.3991	0.0212	0.4500
10°	0.0882	0.5251	0.4125	0.0332	0.4922
15°	0.1340	0.5555	0.4579	0.0753	0.6385
20°	0.1820	0.5963	0.5185	0.1351	0.8426
30°	0.2887	0.7031	0.6727	0.3101	1.4169
45°	0.5000	0.8958	0.9244	0.7076	2.6225
90°	$\infty$	1.2500	1.2014	1.8125	5.5514

$$\left(\frac{C_L}{C_{L0}}\right)_I = 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0}, \quad (14.3a)$$

$$\left(\frac{C_L}{C_{L0}}\right)_{II} = 1 + M^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} \quad (14.3b)$$

の如く、添字 I, II はそれぞれ第一近似及び第二近似を意味する。なほ Prandtl-Glauert の一次理論では、周知の通り

$$\frac{C_L}{C_{L0}} = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \quad (14.4)$$

であるが、この値も第2表に與へてある。第3圖には  $\beta \rightarrow 0^\circ$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\beta = 20^\circ$  について  $C_L/C_{L0} \sim M$  の曲線を描く、細線は  $(C_L/C_{L0})_I$ , 太線は  $(C_L/C_{L0})_{II}$ , 鎖線は  $(1-M^2)^{-1/2}$  である。また臨界 Mach 数より上の部分に對しては破線を用ゐてある。圖から明かな通り、揚力係数は壓縮性の影響によつて増し、且つその増し方は反りの大きいものほど大きい。なほ Prandtl-Glauert の公式は反りの相當大きい圓弧翼についても比較的良い近似として成り立つことがわかる。臨界 Mach 数より低い Mach 数に對しては第一近似と第二近似の差は著しくなく、第一近似だけで相當の程度まで壓縮性の影響を議論することができるやうに思はれる。このことは迎角  $0^\circ$  の圓弧翼に限らず任意の實用翼についても或る程度あてはまるものと考へられる。

(b) 臨界 Mach 数は §7 で述べた方式に従つて計算した。すなはち (7.1) により ( $U=1!$ )

$$\frac{\gamma+1}{2} q_{\max}^2 - \frac{\gamma-1}{2} - \frac{1}{M_*^2} = 0. \quad (14.5)$$

こゝで  $q_{\max}$  としては、(10.10), (11.11 a,b,c) により

$$q_0\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M_*^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad q_0\left(\frac{\pi}{2}\right) + M_*^2 q_1\left(\frac{\pi}{2}\right) + M_*^4 q_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を代入して  $M_*$  について解いて得た値をそれぞれ  $M_{*0}$ ,  $M_{*1}$ ,  $M_{*2}$  で表はせば、これらは臨界 Mach 数の第0, 第一, 第二近似値に他ならない。この計算に用ゐる  $q_0(\pi/2)$ ,  $q_1(\pi/2)$ ,

第 2 表

M	$\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$	$\beta \rightarrow 0^\circ$		$\beta = 6^\circ$	
		$(C_L/C_{L0})$	$(C_L/C_{L0})_{II}$	$(C_L/C_{L0})_I$	$(C_L/C_{L0})_{II}$
0	1	1	1	1	1
0.1	1.0050	1.0050	1.0050	1.0051	1.0051
0.2	1.0206	1.0200	1.0206	1.0204	1.0210
0.3	1.0483	1.0450	1.0480	1.0458	1.0492
0.4	1.0911	1.0800	1.0896	1.0815	1.0921
0.5	1.1547	1.1250	1.1484	1.1273	1.1534
0.6	1.2500	1.1800	1.2286	1.1833	1.2378
0.7	1.4003	1.2450	1.3350	1.2495	1.3501
0.8	1.6667	1.3200	1.4736	1.3258	1.4967
0.9	2.2942	1.4050	1.6510	1.4124	1.6861
1.0	$\infty$	1.5000	1.8750	1.5091	1.9263

M	$\beta = 10^\circ$		$\beta = 15^\circ$		$\beta = 20^\circ$	
	$(C_L/C_{L0})_I$	$(C_L/C_{L0})_{II}$	$(C_L/C_{L0})_I$	$(C_L/C_{L0})_{II}$	$(C_L/C_{L0})_I$	$(C_L/C_{L0})_{II}$
0	1	1	1	1	1	1
0.1	1.0053	1.0053	1.0056	1.0056	1.0060	1.0060
0.2	1.0210	1.0218	1.0222	1.0232	1.0239	1.0252
0.3	1.0473	1.0513	1.0500	1.0552	1.0537	1.0605
0.4	1.0840	1.0966	1.0889	1.1052	1.0954	1.1170
0.5	1.1313	1.1620	1.1389	1.1788	1.1491	1.2017
0.6	1.1890	1.2528	1.2000	1.2827	1.2147	1.3239
0.7	1.2573	1.3755	1.2722	1.4255	1.2922	1.4945
0.8	1.3361	1.5377	1.3555	1.6171	1.3816	1.7268
0.9	1.4253	1.7403	1.4500	1.8689	1.4830	2.0358
1.0	1.5251	2.0173	1.5555	2.1940	1.5963	2.4389

$q_{20}(\pi/2)$ ,  $q_{21}(\pi/2)$ ,  $q_2(\pi/2)$  は第 3 表に示す。但し

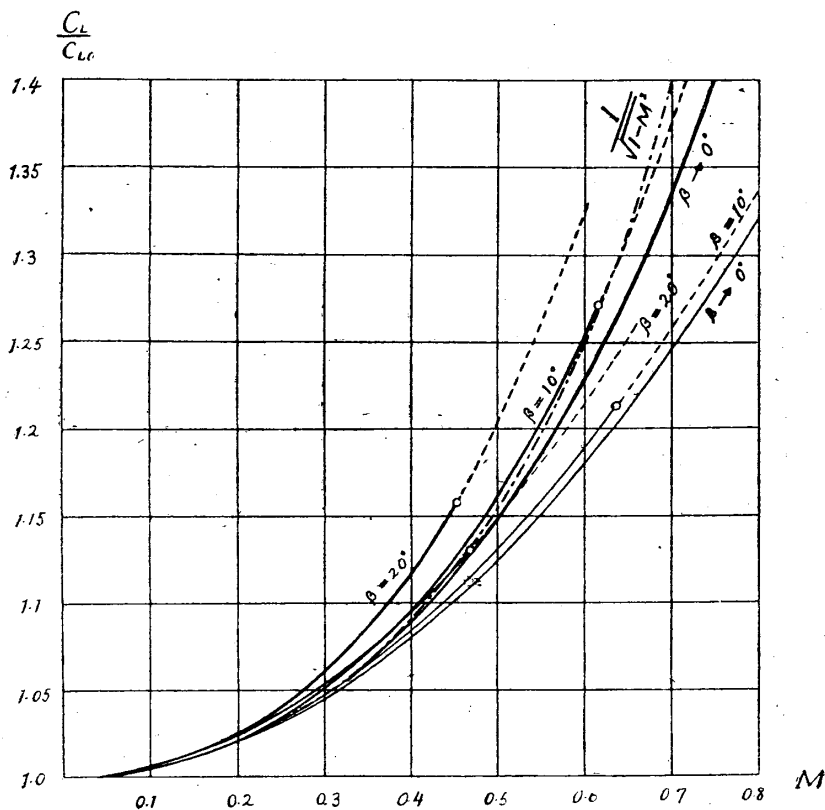
$$q_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = q_{20}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (\gamma + 1)q_{21}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

とおき,  $\gamma = 1.4$  (空気) としてある。

有効最大揚力  $L_{\max}$  は (11.16) により

$$\frac{L_{\max}}{\pi \rho \infty c \infty^2 l} = M_{*2}^2 \tan \beta \left( 1 + M_{*2}^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} + M_{*2}^4 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} \right) \quad (14.6)$$

を用いて計算される。  $M_{*0}$ ,  $M_{*1}$ ,  $M_{*2}$ ,  $L_{\max}$  を第 4 表及び第 4 圖に示す。



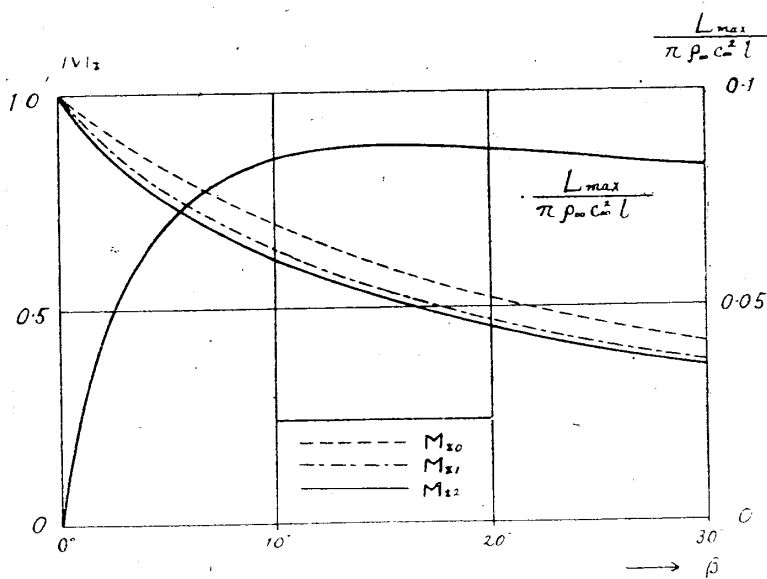
第 3 圖

第 3 表

$\beta$	$q_0(\pi/2)$	$q_1(\pi/2)$	$q_{20}(\pi/2)$	$q_{21}(\pi/2)$	$q_2(\pi/2)$
$0^\circ$	1	1	0	0	0
$2^\circ$	1.0710	0.0387	0.03007	0.00108	0.0327
$4^\circ$	1.1444	0.0857	0.06893	0.00507	0.0811
$6^\circ$	1.2200	0.1418	0.11819	0.01328	0.1501
$8^\circ$	1.2977	0.2080	0.17967	0.02735	0.2453
$10^\circ$	1.3775	0.2854	0.25531	0.04921	0.3734
$15^\circ$	1.5846	0.5340	0.52028	0.15399	0.8899
$20^\circ$	1.8010	0.8726	0.92177	0.36936	1.8082
$30^\circ$	2.2500	1.8633	2.26594	1.39032	5.6027
$45^\circ$	2.9142	4.3678	5.75755	5.52161	19.0096
$90^\circ$	4.0000	10.3333	15.9278	26.7833	80.2078

第 4 表

$\beta$	$M_{*0}$	$M_{*1}$	$M_{*2}$	$\frac{L_{max}}{\pi \rho_{\infty} c_{\infty}^2 l}$
0°	1	1	1	0
2°	0.9220	0.8920	0.8754	0.04300
4°	0.8539	0.8086	0.7876	0.06351
6°	0.7940	0.7410	0.7191	0.07472
8°	0.7411	0.6843	0.6628	0.08110
10°	0.6939	0.6358	0.6152	0.08470
15°	0.5962	0.5397	0.5219	0.08749
20°	0.5204	0.4681	0.4530	0.08648
30°	0.4126	0.3696	0.3581	0.08244
45°	0.3164	0.2821	0.2745	0.08156
90°	0.2294	0.2065	0.2014	$\infty$



第 4 圖

(c) 最後に, 圓弧翼表面の速度分布の有様を窺ふために  $\beta=10^\circ$  なる翼に對して  $q_0(\theta)$ ,  $q_1(\theta)$ ,  $q_2(\theta)$  を計算した. これらを第5表に示す. 但し流體としてはやはり空氣をとり,  $r=1.4$  としてある. なお翼型上の各點の横座標は (11.1) によつて

$$x_P = \frac{2}{\cos \beta} \frac{(1 + \sin \beta \sin \theta) \cos \theta}{1 + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \theta}$$

で與へられる. この値も第5表に示す. 第5表を用ゐれば  $M$  の任意の値に對する速度分布を (11.7) によつて容易に計算することができる. こゝでは臨界 Mach 數  $M_{*2}=0.615$  に近い値  $M=0.6$  に對して速度分布の第0, 第一, 第二近似すなはち

$$q_0(\theta),$$

$$q_{\text{I}}(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta),$$

$$q_{\text{II}}(\theta) = q_0(\theta) + M^2 q_1(\theta) + M^4 q_2(\theta)$$

を計算した。速度分布は勿論前後対称であるから、後半部のみを示せば第6表及び第5圖のやうになる。なほ圖には  $\beta = 10^\circ$  の圓弧翼の形を太い實線で示してある。

翼の下面では逐次近似の収斂性は極めて良いが、これに反して翼の上面では第二近似は第一近似からかなり離れ、また壓縮性の影響そのものも下面よりは著しく現はれてゐる。もつとも、いまの例では臨界状態に非常に近いために逐次近似の収斂性が良くないのであつて、Mach 數がもつと低ければ恐らく第一近似だけで議論して差支へないのではなからうかと思ふ。翼の下面については収斂性の懸念はほとんどなからう。

第 5 表 ( $\beta = 10^\circ$ ,  $\gamma = 1.4$ )

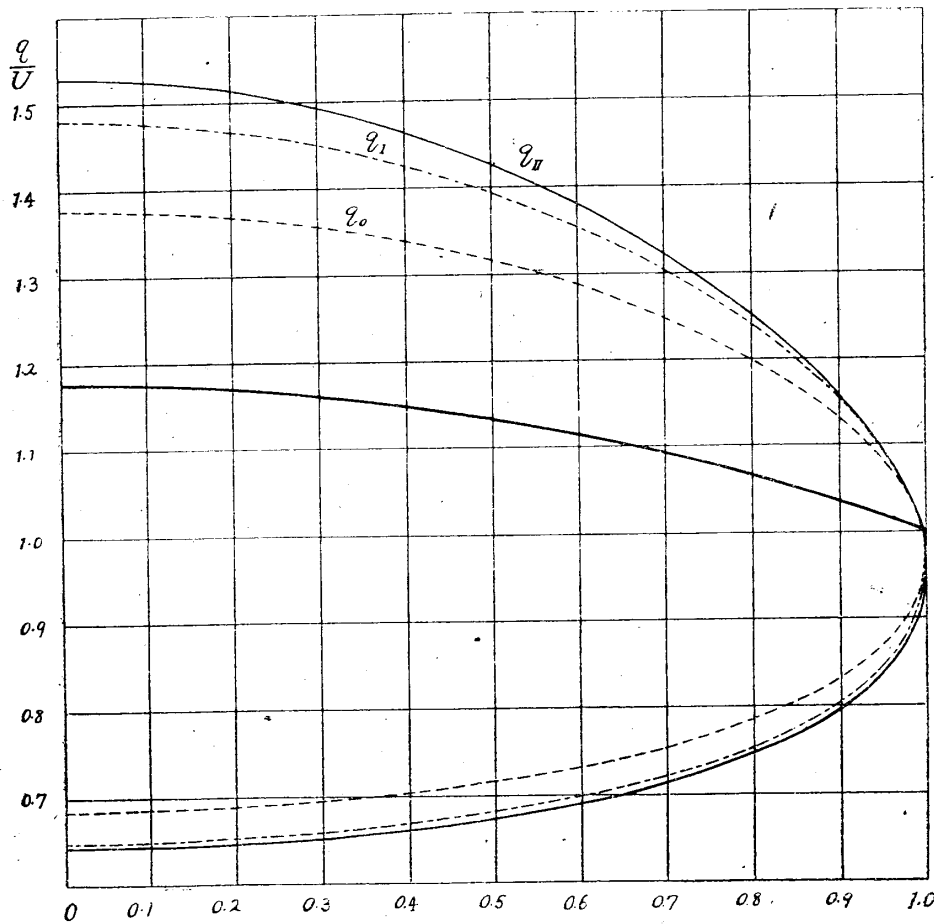
$\theta$	$x_P(\theta)$	$q_0(\theta)$	$q_1(\theta)$	$q_2(\theta)$
0°	0.9857	1.0802	-0.0001	-0.0299
9°	0.9499	1.0845	0.0308	-0.0057
18°	0.8946	1.1375	0.0655	0.0283
27°	0.8217	1.1878	0.1028	0.0721
36°	0.7335	1.2343	0.1413	0.1240
45°	0.6319	1.2757	0.1789	0.1812
54°	0.5192	1.3111	0.2137	0.2391
63°	0.3974	1.3396	0.2434	0.2924
72°	0.2687	1.3605	0.2662	0.3355
81°	0.1355	1.3732	0.2805	0.3637
90°	0	1.3775	0.2854	0.3734

$\theta$	$x_P(\theta)$	$q_0(\theta)$	$q_1(\theta)$	$q_2(\theta)$
0°	0.9857	1.0302	-0.0001	-0.0299
-9°	0.9998	0.9758	-0.0264	-0.0453
-18°	0.9903	0.9228	-0.0479	-0.0536
-27°	0.9552	0.8725	-0.0648	-0.0566
-36°	0.8930	0.8260	-0.0775	-0.0562
-45°	0.8028	0.7846	-0.0865	-0.0539
-54°	0.6848	0.7492	-0.0926	-0.0508
-63°	0.5407	0.7207	-0.0966	-0.0477
-72°	0.3743	0.6999	-0.0989	-0.0453
-81°	0.1915	0.6871	-0.1001	-0.0437
-90°	0	0.6829	-0.1004	-0.0432

第 6 表 ( $\beta=10^\circ, \gamma=1.4, M=0.6$ )

上 面			下 面			$\theta$	
$\theta$	$q_0(\theta)$	$q_1(\theta)$	$q_2(\theta)$	$q_0(\theta)$	$q_1(\theta)$		$q_2(\theta)$
$0^\circ$	1.0302	1.0302	1.0263	1.0302	1.0302	1.0263	$0^\circ$
$9^\circ$	1.0845	1.0956	1.0949	0.9758	0.9663	0.9604	$-9^\circ$
$18^\circ$	1.1375	1.1611	1.1648	0.9228	0.9056	0.8986	$-18^\circ$
$27^\circ$	1.1878	1.2248	1.2342	0.8725	0.8492	0.8418	$-27^\circ$
$36^\circ$	1.2343	1.2852	1.3012	0.8260	0.7981	0.7908	$-36^\circ$
$45^\circ$	1.2757	1.3401	1.3636	0.7846	0.7535	0.7465	$-45^\circ$
$54^\circ$	1.3111	1.3880	1.4190	0.7492	0.7159	0.7093	$-54^\circ$
$63^\circ$	1.3396	1.4272	1.4651	0.7207	0.6859	0.6797	$-63^\circ$
$72^\circ$	1.3605	1.4563	1.4998	0.6999	0.6643	0.6584	$-72^\circ$
$81^\circ$	1.3732	1.4742	1.5213	0.6871	0.6511	0.6454	$-81^\circ$
$90^\circ$	1.3775	1.4802	1.5286	0.6829	0.6468	0.6412	$-90^\circ$



第 3 圖

## V. む す び

§ 15. 前の論文では、縮む流體の一樣な流れの中におかれた任意翼型の表面速度を  $M^2$  まで厳密に與へる公式を導いた。これを應用して圓柱並びに圓弧翼の場合を取扱ふのがこの論文の目的である。但し圓柱はそのまはりに任意の大きさの循環があるものとし、また圓弧翼は反りは任意であるが迎角  $0^\circ$  のときだけを考へる。

圓柱については既に橋本・柴岡兩氏の研究があるが、筆者の結果はよくこれと一致する。たゞ兩氏の與へた臨界 Mach 數、揚力係數の式には僅かながら誤りがあるのでこれを訂正しておいた。しかしこれは數値的には大した影響を及ぼさないことがわかる。

圓弧翼は反りのある翼型の中で最も簡單なものである。從來圓柱以外の翼型では第一近似 ( $M^2$  まで厳密) の議論しか行はれてゐないことを考へると、迎角  $0^\circ$  といふ特別な場合とはいへ第二近似を求めることは理論的に極めて重要な問題であらう。そればかりではなく、任意の薄翼に對しても (その中心線が圓弧に近ければ)、いはゆる理想迎角における状態は迎角  $0^\circ$  の圓弧翼の場合に類似すると想像されるから、この問題は實際的にも大きな意味があると考へられる。この論文では翼型表面の速度分布、翼に働く揚力の  $M^2$  まで厳密な式を求めた。また數値的には、種々の反りの場合に Mach 數と共に揚力がどのように變化するか、臨界 Mach 數及び有効最大揚力が反りによつてどう變るかを調べた。なほ、反りが 0.08816 の圓弧翼について表面速度の數値計算を行つた。臨界 Mach 數に近い Mach 數では翼の上面は下面に比べて逐次近似の收斂性が劣り、且つ壓縮性の影響そのものも著しく現はれることが認められた。

この論文を終るに當り、絶えず御鞭撻を賜つた寺澤寛一先生、御激勵を忝うした友近晋先生に厚く御禮を申上げる。なほ數値計算には上野繁子嬢の御助力を頂いた。こゝに深く感謝の意を表する。

昭和 18 年 9 月

航空研究所空氣力學第一部にて

## 参 考 文 獻

- (1) HASIMOTO, Z. & SIBAKA, Y. : *On the flow with circulation of a compressible fluid past a circular cylinder.* 數物記事 23 (1941), 696.
- (2) IMAI, I. : *On the subsonic flow of a compressible fluid past a general Joukowski profile.* 航研報告 216 (1941).
- (3) 今井 功 : 任意翼型の理論. 日本航空學會誌 9 (1942), 865.
- (4) 今井 功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布について, I. 航研報告 275 (1943).
- (5) 今井 功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布. 特に楕圓柱について. 寺澤寛一教授還暦記念論文集.
- (6) 今井 功 : 縮む流體における任意翼型の理論. 航研懇話會第 5 回定期講演會にて發表 (1942 年 12 月). 航研報告に近刊.
- (7) IMAI, I. : *Note on the velocity distribution round an elliptic cylinder at high speeds.* 數物記事に印刷中.