

No. 294.

(Published May, 1944.)

Abstract.

Two-dimensional Aerofoil Theory for Compressible Fluids.

By

Isao IMAI, *Rigakuhakushi*,
Member of the Institute.

I. Introduction.

§ 1. In previous papers [4], [5],⁽¹⁾ the present author has developed a new method of M^2 -expansion for dealing with a uniform flow of a compressible fluid past an arbitrary aerofoil, and obtained formulae giving the velocity distribution round the aerofoil correctly to the order of M^4 , M being the MACH number of the uniform flow. In this paper the author attempts to extend PRANDTL-GLAUERT'S linear theory to higher approximations. For this purpose, a method of thin-wing-expansion is developed, which is based on the idea that the disturbance due to the presence of the aerofoil would be small, say of the order of ϵ , compared with the undisturbed velocity, provided that the thickness, camber and angle of attack of the aerofoil are small. The velocity potential and stream function will be thus determined to the order of ϵ^2 . Also, analytical formulae, correct to the order of ϵ^2 , for the velocity distribution as well as for the lift and moment will be obtained for an arbitrary thin aerofoil.

II. Method of Thin-Wing-Expansion.

§ 2. Fundamental equations. The equations governing a uniform flow of a compressible perfect fluid past an arbitrary aerofoil

(1) The number enclosed in square brackets refers to the literature given at the end of this paper.

can be put in the form:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.1, 2)$$

where (u, v) are the component velocities, Φ the velocity potential, Ψ the stream function, ρ the density, and ρ_∞ the density of the undisturbed fluid. If the fluid obeys the adiabatic law: $p/p_\infty = (\rho/\rho_\infty)^\gamma$, BERNOULLI's theorem gives

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (2.4)$$

where p is the pressure, q the magnitude of the velocity, p_∞ , U , M are the pressure, velocity, and MACH number of the undisturbed fluid, and γ is the ratio of the specific heats. For simplicity, we take $U = 1$ in this paper. Then the undisturbed flow will be given by $\Phi = x$, $\Psi = y$. On the assumption that the aerofoil is thin, Φ and Ψ may be expressed as $\Phi = x + \phi$, $\Psi = y + \psi$, where ϕ and ψ are small, say of the order of ϵ . Moreover, we shall assume that we can write

$$\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots, \quad \Psi = y + \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad (2.6, 7)$$

where $\phi_1, \psi_1; \phi_2, \psi_2; \dots$ are respectively $O(\epsilon), O(\epsilon^2), \dots$. We then have

$$q^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 1 + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + O(\epsilon^3), \quad (2.8)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = 1 - M^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - M^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{M^2}{2} \left[\{ 1 - (2-\gamma)M^2 \} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] + O(\epsilon^3). \quad (2.10)$$

§ 3. First approximation. From (2.1, 2) we have

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0. \quad (3.1, 2)$$

Introducing (2.6, 7) and (2.10) into (3.1, 2) and considering the order

of magnitude of the various terms, we get

$$(1-M^2)\frac{\partial\phi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0, \quad (3.3, 4)$$

and

$$(1-M^2)\frac{\partial\phi_2}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=\frac{M^2}{2}\left[\{3-(2-\gamma)M^2\}\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2\right], \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial y}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=M^2\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}. \quad (3.6)$$

We now write

$$x=\xi, \quad y=\frac{1}{\mu}y, \quad \psi=\mu\chi, \quad \mu=\sqrt{1-M^2}. \quad (3.7, 8)$$

Further, let us introduce complex quantities:

$$\zeta=\xi+i\eta, \quad \bar{\zeta}=\xi-i\eta, \quad G=\phi+i\chi. \quad (3.14, 15)$$

Then (3.3, 4) can be put in the form: $\partial G_1/\partial\bar{\zeta}=0$. Hence.

$$G_1=f(\zeta), \quad (3.19)$$

where $f(\zeta)$ is an analytic function of ζ to be determined from appropriate boundary conditions. From (3.19) we have

$$\phi_1=\frac{1}{2}[\bar{f}(\zeta)+f(\bar{\zeta})], \quad \psi_1=\frac{\mu}{2i}[f(\zeta)-\bar{f}(\bar{\zeta})]. \quad (3.20, 21)$$

§ 4. Second approximation. Substituting (3.7, 8), (3.14, 15), (3.20) in (3.5, 6) and integrating with respect to ζ , we get

$$G_2=\frac{M^2}{4}\left[\frac{\gamma+1}{4}\frac{M^2}{1-M^2}\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2\zeta+\left(1+\frac{\gamma+1}{4}\frac{M^2}{1-M^2}\right)\right. \\ \left.\times\left\{2\frac{df}{d\zeta}\bar{f}+\int\left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}}\right)^2d\bar{\zeta}\right\}\right]+\mathfrak{F}(\zeta), \quad (4.3)$$

where $\mathfrak{F}(\zeta)$ is an analytic function of ζ to be determined from the boundary conditions.

III. Exact Boundary Conditions.

§ 5. **Boundary conditions.** From (3.7, 8) and (3.14, 15) we have

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{i}{2\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (5.1)$$

Hence we get following conditions.

- (i) $\partial G/\partial \zeta$ is one-valued and continuous in the field of flow.
- (ii) $\partial G/\partial \zeta \rightarrow 0$ as $\zeta \rightarrow \infty$.
- (iii) $\psi = \text{const.}$ on the profile P; accordingly

$$\Im G(\zeta_P, \bar{\zeta}_P) \equiv \chi(\xi_P, \eta_P) = -\mu^{-2} \eta_P.$$

§ 6. **Conjugate Fourier series.** Let $g(z)$ be a function analytic on and outside the unit circle: $z = e^{i\theta}$. Then $g(z)$ can be expanded in a LAURENT series:

$$g(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad c_n = a_n + ib_n, \quad |z| \geq 1. \quad (6.1)$$

Putting $z = e^{i\theta}$, we have $g(e^{i\theta}) = R(\theta) + iI(\theta)$, where

$$R(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (6.3)$$

$$I(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta). \quad (6.4)$$

If we define the conjugate FOURIER series $R^*(\theta)$ associated with $R(\theta)$ as

$$R^*(\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta), \quad (6.5)$$

we have, from (6.3) and (6.4),

$$R(\theta) = a_0 + I^*(\theta), \quad I(\theta) = b_0 - R^*(\theta). \quad (6.7)$$

Also, if we put

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{ni\theta}, \quad C_n = A_n + iB_n, \quad (6.8)$$

we can readily find

$$P(\theta) - Q^*(\theta) = A_0 + 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{ni\theta}. \quad (6.9)$$

§ 7. **First approximation.** The profile $P: (x_P, y_P)$ corresponds to the profile $P': (\xi_P, \eta_P) = (x_P, \mu y_P)$ in the ζ -plane (Fig. 2). The region outside P' in the ζ -plane can be mapped conformally on to the region outside the unit circle: $Z = e^{i\theta}$ in the Z -plane by means of an analytic function of the form:

$$\zeta = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \dots, \quad |Z| > 1, \quad (7.1)$$

whose existence is asserted by the theory of functions. Thus, the functions:

$$\xi_P = \xi_P(\theta), \quad \eta_P = \eta_P(\theta) \quad (7.2)$$

can be regarded as known. (A practical method of their determination has been proposed by the present author [2].) It can be shown that

$$f = -\frac{1}{\mu^2} \left(\zeta - c_0 - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} \right) \quad (7.4)$$

satisfies the conditions (i), (ii), (iii) in § 5.

If we confine ourselves to the boundary of the profile, we have, on putting $Z = e^{i\theta}$, $f(e^{i\theta}) = \phi_1(\theta) + i\chi_1(\theta)$. Since $f - i\kappa_1 \log Z$ is regular in the region $|Z| > 1$, $\rightarrow 0$ as $Z \rightarrow \infty$, and $= \phi_1(\theta) + \kappa_1\theta + i\chi_1(\theta)$, we have, in virtue of (6.7),

$$\phi_1(\theta) + \kappa_1\theta = \chi_1^*(\theta). \quad (7.6)$$

Hence, taking account of the condition (iii) in § 5, we find

$$\chi_1(\theta) = -\mu^{-2}\eta_P(\theta), \quad \phi_1(\theta) = -\mu^{-2}\eta_P^*(\theta) - \kappa_1\theta. \quad (7.7, 8)$$

§ 8. **Second approximation.** (4.3) can be rewritten in the form:

$$G_2 = H_2(Z, \bar{Z}) + g_2(Z), \quad (8.1)$$

where $g_2(Z)$ is a certain analytic function of Z and

$$H_2 = \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \bar{\zeta} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} (\bar{f} + i\kappa_1 \log \bar{Z} - i\kappa_2 \log Z\bar{Z}) + \left[\left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta + \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 d\bar{\zeta} \right] \right\} \right]. \quad (8.2)$$

It can readily be seen that $\partial H_2/\partial\zeta$ is one-valued and continuous in the field of flow and $\partial H_2/\partial\zeta \rightarrow 0$ as $\zeta \rightarrow \infty$. The same conditions are satisfied by $\partial G_2/\partial\zeta$ on account of (i), (ii) in §5, and consequently by $dg_2/d\zeta = \partial G_2/\partial\zeta - \partial H_2/\partial\zeta$. Therefore $dg_2/dZ = (dg_2/d\zeta)(d\zeta/dZ)$ is regular and one-valued for $|Z| > 1$ and $\rightarrow 0$ as $Z \rightarrow \infty$. Hence g_2 should be of the form:

$$g_2 = i\kappa_2 \log Z + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \quad (8.4)$$

If we put $G_2(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \phi_2(\theta) + i\chi_2(\theta)$, $H_2(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$, $g_2(e^{i\theta}) = R_2(\theta) + iI_2(\theta)$, then we get from (8.2)

$$\phi_2(\theta) = P_2(\theta) + R_2(\theta), \quad \chi_2(\theta) = Q_2(\theta) + I_2(\theta). \quad (8.8, 9)$$

The condition (iii) in §5 now takes the form:

$$\chi_2(\theta) = -\mu^{-2}\eta_P(\theta) - \chi_1(\theta). \quad (8.10)$$

Since $g_2 - i\kappa_2 \log Z$ is regular for $|Z| > 1$, $\rightarrow 0$ as $Z \rightarrow \infty$, and $= R_2(\theta) + \kappa_2\theta + iI_2(\theta)$, we have $R_2(\theta) + \kappa_2\theta = I_2^*(\theta)$, remembering (6.7). Therefore we have

$$\phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) - \kappa_2\theta + \chi_2^*(\theta). \quad (8.13)$$

Let us write, on the profile: $\zeta = \zeta_P$,

$$Z = e^{i\theta}, \quad \zeta_P = \xi_P(\theta) + i\eta_P(\theta), \quad d\zeta_P = d\sigma e^{i\omega}, \quad (8.14)$$

where $d\sigma$ is the line element along the boundary of the profile and ω is the angle formed by $d\sigma$ and the ξ -axis. Then we get

$$\begin{aligned}
P_2(\theta) + iQ_2(\theta) = & \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} \right. \\
& + 2 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ (\bar{f} + \kappa_1 \theta) \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right. \\
& \left. \left. + \Re \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} d\theta \right\} \right]. \quad (8.16)
\end{aligned}$$

(8.13) gives the second approximation to the velocity potential on the surface of the aerofoil.

IV. Approximate Boundary Conditions.

§ 9. Representation of aerofoil. Since we have dealt with the approximate equations of motion, it will be natural to consider the boundary conditions also with the same degree of approximation. In this manner the results obtained above can be considerably simplified.

In general, an arbitrary aerofoil P can be parametrically represented by

$$X = \cos \vartheta, \quad Y = g(\vartheta), \quad (9.12)$$

$\vartheta = 0, \pi$ corresponding to the trailing and leading edges respectively. If a uniform flow takes place in the positive direction of the x -axis, and the aerofoil P is set at an angle of attack α , the coordinates of P will be

$$x_P = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \quad y_P = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha. \quad (9.3, 4)$$

Hence, on the assumption that α and $g(\vartheta)$ are $O(\epsilon)$, we have in the ζ -plane

$$\xi_P = \cos \vartheta + O(\epsilon^2), \quad \eta_P = \mu \{g(\vartheta) - a \cos \vartheta\} + O(\epsilon^3). \quad (9.7, 8)$$

The region outside the profile P' in the ζ -plane may be mapped on to the region outside the unit circle in the Z -plane by an analytic function:

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + C(Z), \quad (9.9)$$

where

$$C(Z) = C_{-1}Z + C_0 + \frac{C_1}{Z} + \dots, \quad C_n = A_n + iB_n, \quad (9.10)$$

$C(Z)$ and hence C_n being $O(\epsilon)$. Putting $C(e^{i\theta}) = A(\theta) + iB(\theta)$, we get from (9.9)

$$\xi_P = \cos \theta + A(\theta), \quad \eta_P = B(\theta). \quad (9.13, 14)$$

§ 10. **Determination of mapping function.** Since the function: $C(Z) - C_{-1}Z - C_0$ is regular for $|Z| > 1$ and $\rightarrow 0$ as $Z \rightarrow \infty$, we have, on the unit circle: $Z = e^{i\theta}$,

$$A(\theta) - A_{-1} \cos \theta + B_{-1} \sin \theta - A_0 = \{B(\theta) - B_{-1} \cos \theta - A_{-1} \sin \theta - B_0\}^*,$$

whence
$$A(\theta) = B^*(\theta) + 2(A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta) + A_0. \quad (10.1)$$

Now, comparing (9.7) with (9.13), we have

$$A(\theta) = -(\vartheta - \theta) \sin \vartheta + O(\epsilon^2), \quad (10.5)$$

whence

$$A(0) = O(\epsilon^2), \quad A(\pi) = O(\epsilon^2), \quad A'(0) = O(\epsilon^2). \quad (10.6, 7, 8)$$

Also, comparing (9.8) with (9.14), we have

$$B(\theta) = \mu g(\vartheta) - \mu a \cos \vartheta + O(\epsilon^3) \quad (10.10)$$

$$= \mu g(\theta) - \mu a \cos \theta + O(\epsilon^2). \quad (10.11)$$

Introducing this into (10.1) and taking account of (10.6, 7, 8), we get

$$A(\theta) = \mu h(\theta) + O(\epsilon^2), \quad (10.14)$$

where

$$h(\theta) = g^*(\theta) - \frac{1}{2} [g^*(0) - g^*(\pi)] \cos \theta - g^{*'}(0) \sin \theta - \frac{1}{2} [g^*(0) + g^*(\pi)]. \quad (10.15)$$

From (10.5) and (10.14) we have

$$\vartheta - \theta = -\mu \frac{h(\theta)}{\sin \theta} + O(\epsilon^2), \quad (10.16)$$

which, on substitution into (10.10), gives

$$B(\theta) = \mu[g(\theta) - a \cos \theta] - \mu^2 \left[\frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) + ah(\theta) \right] + O(\epsilon^3). \quad (10.19)$$

§ 11. Velocity potential. By virtue of (9.14) and (10.19), the condition (iii) in § 5 can be written in the form:

$$\chi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu}[g(\theta) - a \cos \theta], \quad \chi_2(\theta) = \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) + ah(\theta), \quad (11.2, 3)$$

whence, by (7.6),

$$\phi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu}[g^*(\theta) - a \sin \theta] - \kappa_1 \theta, \quad (11.4)$$

and

$$f(e^{i\theta}) \equiv \phi_1(\theta) + i\chi_1(\theta) = \frac{1}{\mu}[f_0(\theta) - \kappa_{10}\theta], \quad (11.6)$$

where

$$f_0(\theta) = -g^*(\theta) - i[g(\theta) - g_0] + ia e^{-i\theta}, \quad (11.7)$$

$$\kappa_{10} = \mu\kappa_1, \quad g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad (11.8)$$

where the constant g_0 has been determined so that f should not contain a constant term when expressed as a power series in Z^{-1} .

Next, we consider (8.16). Remembering $\bar{\zeta}_P = \zeta_P - 2i\eta_P = \zeta_P + O(\epsilon)$ and $df/d\zeta = O(\epsilon)$, we have

$$\bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} = \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 = \zeta_P \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 + O(\epsilon^3).$$

It can readily be seen that $\zeta_P(df/d\zeta)_P^2$ contains only terms of negative powers of $e^{i\theta}$, so that it contributes nothing to $P_2(\theta) - Q_2^*(\theta)$, in virtue of (6.9). Thus we have, from (8.13) and (8.16),

$$\frac{d\phi_2}{d\theta} = \nu \left[\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} + P'(\theta) - Q_2^*(\theta) \right] + \frac{d\chi_2^*}{d\theta} - \kappa_2, \quad (11.11)$$

where

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega}, \quad (11.12)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right). \quad (11.13)$$

V. Velocity Distribution and Lift.

§ 12. Velocity formula I. The velocity along the surface of the aerofoil is given by

$$q = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{ds} = \left\{ \frac{dx_P}{d\vartheta} + \left(\frac{d\phi_1}{d\theta} + \frac{d\phi_2}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{d\vartheta} \right\} \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (12.3)$$

where

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\vartheta} \right)^2} = \sqrt{\sin^2 \vartheta + [g'(\vartheta)]^2}, \quad (12.4)$$

$$\frac{dx_P}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \cos a + g'(\vartheta) \sin a, \quad (12.5)$$

$$\frac{d\phi_1}{d\theta} = -\frac{1}{\mu} [g^{*'}(\theta) - a \cos \theta + \kappa_{10}], \quad (12.6)$$

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = 1 + \mu \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{h(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right\} + O(\epsilon^2), \quad (12.17)$$

and $d\phi_2/d\theta$ is given by (11.11).

§ 13. Velocity formula II. On account of (10.16), $d\Phi/d\vartheta$ can be put in the form:

$$-\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \sin \vartheta + \frac{1}{\mu} [g^{*'}(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}] + S'(\vartheta) + \nu T(\vartheta) + \kappa_2, \quad (13.1)$$

where

$$S(\theta) = \frac{a^2}{2} \cos \theta - ag(\theta) + \{g^{*'}(\theta) - a \cos \theta + \kappa_{10}\} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} - \left\{ g'(\theta) \frac{h(\theta)}{\sin \theta} + ah(\theta) \right\}^*, \quad (13.2)$$

$$T(\theta) = -\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} - \{P'(\theta) - Q^{*'}(\theta)\}. \quad (13.3)$$

The velocity q is then given by $q = (d\phi/d\vartheta)(d\vartheta/ds)$.

§ 14. Velocity formula III. From (12.4) we have

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \pm \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{g'(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right]^2 \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (\vartheta \neq 0, \pi), \quad (14.1)$$

which gives, in conjunction with (13.1),

$$q = 1 + \frac{1}{\mu} \frac{g^{*'}(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}}{\sin \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ S'(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\sin \vartheta} + \nu T(\vartheta) + \kappa_2 \right\}. \quad (14.2)$$

The first, second, and third terms represent respectively the undisturbed flow, the first order correction, which is essentially the same as that given by PRANDTL-GLAUERT'S linear theory, and the second order correction. It may be interesting to note that in the second order correction MACH number M appears in the combination:

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right).$$

§ 15. Circulation and lift. The lift acting on the profile is given by KUTTA-JOUKOWSKI-GLAUERT'S theorem as $L = \rho_\infty U \Gamma$, where the circulation Γ is $2\pi(\kappa_1 + \kappa_2)$. Therefore, the lift coefficient is ($l = \text{chord} = 2$)

$$C_L \equiv \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2 l} = \frac{2\Gamma}{Ul} = 2\pi(\kappa_1 + \kappa_2). \quad (15.3)$$

For an aerofoil with a sharp trailing edge, the circulation should be determined by JOUKOWSKI'S assumption in such a manner that $(d\phi/d\vartheta)_{\vartheta=0} = 0$. Thus, from (13.1), we get

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{10}}{\mu} = \frac{1}{\mu} [a - g^{*'}(0)], \quad \kappa_2 = -S'(0) - \nu T(0). \quad (15.4, 5)$$

In the case of an aerofoil with a round trailing edge, it is recommended to calculate $T(0)$ by the formula:

$$T(0) = \frac{1}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} [T(\vartheta) + T(-\vartheta)]. \quad (15.10)$$

§ 16. **Pressure distribution.** The velocity q having been already known, the pressure may be calculated by the formula:

$$\frac{p}{p_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (16.1)$$

Let us define the pressure coefficient by

$$C_p \equiv \frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2} = \frac{p-p_\infty}{p_\infty} \cdot \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \cdot \frac{2}{\gamma U^2} = \frac{2}{\gamma M^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right). \quad (16.3)$$

Then, we get

$$C_p = -\left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) + \frac{M^2}{4} \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right)^2 - \frac{2-\gamma}{24} M^4 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right)^3 + \dots \quad (16.4)$$

$$= -2q_1 - (1-M^2)q_1^2 - 2q_2 + O(\epsilon^3), \quad (16.8)$$

where we have written (14.2) as $q = 1 + q_1 + q_2 + \dots$.

VI. Moment.

§ 17. **Fundamental equations.** According to a theorem due to the present author [1], the moment, about a point z_0 , of an arbitrary profile which is placed in a uniform flow of a compressible fluid in the z -plane is given by

$$M_z = -\pi\rho_\infty U^2 (1 + \sqrt{1-M^2}) \Im(A_{-1,0}^0), \quad (17.2)$$

where $A_{-1,0}^0$ is the coefficient of $(z-z_0)^{-1}$ in the asymptotic expression of $2\phi/U$ in a series of powers of $(z-z_0)^{-1}$ and $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{2\phi}{U} &= (z-z_0) + (\bar{z}-\bar{z}_0) + i \frac{\Gamma}{2\pi U} \log \frac{z-z_0}{\bar{z}-\bar{z}_0} \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{mn}^l (z-z_0)^m (\bar{z}-\bar{z}_0)^n \{ \log(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) \}^l. \end{aligned}$$

In the present problem we have $2\phi = z + \bar{z} + G_1 + \bar{G}_1 + G_2 + \bar{G}_2$, $U = 1$, where G_1, G_2 are given by (7.4), (8.1) respectively.

§ 18. **First approximation.** The correspondence of the z - and the ζ -planes is given by (3.7) and (3.14) in the form:

$$\zeta - c_0 = \frac{1}{2}(1 + \mu)(z - z_0) + \frac{1}{2}(1 - \mu)(\bar{z} - \bar{z}_0), \quad (18.2)$$

where z_0 is the point corresponding to c_0 . Hence, remembering the inequality $|(1 - \mu)(\bar{z} - \bar{z}_0) / (1 + \mu)(z - z_0)| = |(1 - \mu) / (1 + \mu)| < 1$, we find

$$\frac{1}{\zeta - c_0} = \frac{2}{1 + \mu} \frac{1}{z - z_0} \left\{ 1 - \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} + \dots \right\}, \quad (18.10)$$

$$\begin{aligned} \log \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} &= \log \frac{1 + \mu}{2c_{-1}} + \log(z - z_0) + \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (18.11)$$

Now, from (7.1), it follows immediately that

$$\zeta - c_0 - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} = \frac{c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{\zeta - c_0} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right), \quad (18.12)$$

$$\log Z = \log \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right). \quad (18.6)$$

In view of the fact that only the terms $(z - z_0)^{-1}$, $(\bar{z} - \bar{z}_0)^{-1}$ are required for the calculation of the moment; it will be convenient to use the sign \rightarrow to express such important terms. Thus

$$\zeta - c_0 - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} \rightarrow \frac{2c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{1 + \mu} \frac{1}{z - z_0}, \quad \log Z \rightarrow 0,$$

and hence, by (7.4),

$$G_1 = f \rightarrow -\frac{2c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{\mu^2(1 + \mu)} \frac{1}{z - z_0}. \quad (18.15)$$

§ 19. **Second approximation.** Proceeding in the same way as above we get

$$G_2 \rightarrow \left(\frac{2b_1c_{-1}}{1+\mu} + \text{r.c.} \right) \frac{1}{z-z_0} + \frac{\text{r.c.}}{\bar{z}-\bar{z}_0}, \quad (19.11)$$

where r.c. is a certain real constant.

§ 20. **Moment about z_0 .** From (18.15) and (19.11), we have

$$A_{-1,0}^0 = -\frac{2c_{-1}(c_1-\bar{c}_{-1})}{\mu^2(1+\mu)} + \frac{2b_1c_{-1}}{1+\mu} + \text{r.c.} \quad (20.1)$$

Comparing (7.1) with (9.9), we find $2c_{-1}(c_1-\bar{c}_{-1}) = (1+2C_{-1}) \times (C_1-\bar{C}_{-1})$, and $2b_1c_{-1} = (1+2C_{-1})b_1 = b_1 + O(\epsilon^3)$, since b_1 is naturally $O(\epsilon^2)$ (see (8.4)). Therefore (17.2) takes the form:

$$\frac{M_z}{\rho_\infty U^2} = \frac{\pi}{\mu^2} \Im \{ (1+2C_{-1})(C_1-\bar{C}_{-1}) \} - \pi \Im (b_1). \quad (20.7)$$

By considering (9.10), we readily find

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C(e^{i\theta}) e^{ni\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ A(\theta) + iB(\theta) \} e^{ni\theta} d\theta. \quad (20.8)$$

First, substituting (10.14) and (10.19), we have, after some reduction,

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{\mu^2} \Im \{ (1+2C_{-1})(C_1-\bar{C}_{-1}) \} \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi a \right\} - \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta \\ & \quad - 2a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Next, we consider $\Im(b_1)$. From (8.4) we have

$$I_2(\theta) = \Im g_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Im(b_n) \cos n\theta - \Re(b_n) \sin n\theta \},$$

whence

$$\mathfrak{J}(b_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I_2(\theta) \cos \theta d\theta. \quad (20.15)$$

Now, by virtue of (8.9), $I_2(\theta) = -Q_2(\theta)$; for in this case the first approximation f exactly satisfies the boundary condition so that $\chi_2(\theta)$, as given by (8.10), vanishes identically. (20.15) can then be written in the form:

$$\mathfrak{J}(b_1) = -\frac{1}{\pi} \mathfrak{J} \int_0^{2\pi} \{P_2(\theta) + iQ_2(\theta)\} \cos \theta d\theta, \quad (20.18)$$

where $P_2(\theta) + iQ_2(\theta)$ is given by (8.16). But, if we neglect $O(\varepsilon^3)$, we may write

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma}\right)^2 e^{-2i\omega} \bar{\zeta}_P \cos \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_P^2 \bar{\zeta}_P \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_P^2 \zeta_P^2 \frac{d(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} = \frac{1}{i} \oint \left(\frac{df}{d\zeta}\right)_P^2 \zeta^2 \frac{dZ}{Z} = 2\pi i \left(-\frac{\kappa_1^2}{i}\right) = -2\pi \kappa_1^2, \end{aligned}$$

taking account of (7.4) and using CAUCHY'S theorem of residues. Consequently (20.18) takes the form:

$$\mathfrak{J}(b_1) = -\frac{\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\theta) \cos \theta d\theta, \quad (20.23)$$

where $Q(\theta)$ and ν are given by (11.12) and (11.13) respectively.

§ 21. **Moment about the trailing edge.** Remembering (18.2) and (20.8), we have

$$x_0 + i\mu y_0 \equiv c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{A(\theta) + iB(\theta)\} d\theta,$$

whence

$$x_0 = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + O(\varepsilon^2), \quad y_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + O(\varepsilon^2). \quad (21.1, 2)$$

Remembering that the trailing edge (x_K, y_K) corresponds to $\vartheta = 0$, we find, from (9.3, 4), that $x_K = 1 + O(\varepsilon^2)$. The moment about the trailing edge is obviously given by

$$M_K = M_z - (x_K - x_0)L. \quad (21.7)$$

Therefore, the moment coefficient is expressed as

$$C_m \equiv \frac{M_K}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 l^2} = \frac{M_z}{2\rho_\infty U^2} - \frac{C_L}{2}(x_K - x_0). \quad (21.9)$$

Thus we have finally

$$\begin{aligned} C_m = & \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi a \right\} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta \\ & - a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} [a - g^{*'}(0)] \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \\ & + \frac{\nu}{2} \int_0^{2\pi} Q(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} C_L. \end{aligned} \quad (21.11)$$

VII. Results.

§ 22. The results obtained are summarized in this section.

VIII. Summary.

§ 23. In this paper a method of "thin-wing-expansion" is developed for treating a uniform flow of a compressible fluid past an arbitrary aerofoil. In particular, analytical expressions are determined for the velocity potential and stream function to the order of ϵ^2 , ϵ being some measure of the magnitude of disturbance due to the aerofoil. Further, explicit formulae, correct to the order of ϵ^2 , are found for the lift and moment as well as for the velocity and pressure distributions for an arbitrary aerofoil. Finally, it is pointed out that the method of thin-wing-expansion can be successfully applied to the investigation of the asymptotic behaviour of compressible fluid flow at a great distance from an aerofoil submerged in it [3].

縮む流體における二次元翼の理論

功 井 今 員 所

目 次

I. はしがき.....299	§ 12. 速度公式 I.....314
§ 1.299	§ 13. 速度公式 II.....315
II. 薄翼展開法.....300	§ 14. 速度公式 III.....316
§ 2. 基礎の方程式.....300	§ 15. 循環及び揚力.....317
§ 3. 第一近似.....301	§ 16. 壓力分布.....318
§ 4. 第二近似.....303	VI. モーメント.....319
III. 厳密な境界条件.....303	§ 17. 基礎の式.....319
§ 5. 境界条件.....303	§ 18. 第一近似.....320
§ 6. 共軛 Fourier 級数.....304	§ 19. 第二近似.....322
§ 7. 第一近似.....306	§ 20. α_0 のまはりのモーメント.....323
§ 8. 第二近似.....307	§ 21. 後縁のまはりのモーメント.....327
IV. 近似的な境界条件.....309	VII. 結果.....328
§ 9. 翼型の表示.....309	§ 22.328
§ 10. 寫像函数の決定.....311	VIII. むすび.....330
§ 11. 速度ポテンシャル.....312	§ 23.330
V. 翼型表面の速度分布、揚力.....314	参考文献.....331

I. は し が き

§ 1. 高速度で飛行する翼型の空氣力學的性能を議論するには、周知の通り空氣の壓縮性を考へに入れなければならない。縮まない完全流體に對しては既に二次元翼理論の美しい體系が完成してゐるけれども、縮む流體に對してはいまのところそのやうな整然たる理論は見當らない。これは縮む流體の運動を支配する方程式が線型でないといふ數學的困難に由來するのであつて、この困難を避けるためにはこれまで種々の近似方法が考へ出されてゐる。

i) M^2 展開法, (ii) Prandtl-Glauert の一次理論, (iii) ホドグラフ法——がこれである。

第一の M^2 展開法は Janzen 及び Rayleigh の研究に源を發するもので、その後 Poggi, 友近, 玉田, 川村, 筆者等によつて種々の方式が提案されてゐる。最近筆者は任意の翼型が縮む流體の一樣な流れの中におかれてゐる場合にその表面上の速度分布を M^2 まで厳密に與へる公式を導いた [4]*。但し M は一樣な流れの Mach 數である。速度分布がわかれば Bernoulli の定理によつて壓力分布がわかり、更に揚力、モーメント等の値も計算できるから、 M^2 展開法による翼理論としてはこれで一應解決を見たものと考へる。ところが友近・川村・橋本の諸氏の研究 [6] によれば、 M^2 展開法における逐次近似の收斂性は臨界 Mach

* 括弧内の數字は本文最後の引用文献の番號を示す。

数の近くではかなり悪くなり，第一近似 (M^2 まで厳密) 或は第二近似 (M^3 まで厳密) で計算を打切つたために生ずる誤差が無視できない程度になる惧れがある。すなはち M^2 展開法は Mach 数のあまり大きくない場合には十分信頼できるが，臨界 Mach 数に近い場合はその應用に幾分不安が伴ふのである。

さて飛行機の翼は普通その厚さも反りもあまり大きくなく，また迎角も，特に高速飛行状態では，極めて小さい。このことを考慮して近似を行へば翼型の理論は著しく簡單化され，いはゆる薄翼の理論が生れる。この場合流體の壓縮性を考へに入れても，單に $\sqrt{1-M^2}$ なる因數が所々に現はれるだけで，理論はさまで複雑にならない。これが Prandtl-Glauert の一次理論である。

Prandtl-Glauert の一次理論は實驗と相當良い一致を示すけれども，場合によつては翼型の厚さ，反り，或は迎角の影響を更に詳しく考へる必要に迫られる。ところが Prandtl や Glauert の考へ方をそのまま用ゐたのでは，近似を進めることは相當難しく思はれる。合理的な方法で組織的に“薄翼としての近似”を更に精密にしようとするのが，この論文の目的である。

それには，翼型の存在によつて一様な流れに生ずる速度變化が $O(\epsilon)$ の小さい量であると考へ，速度ポテンシャル Φ 及び流れの函數 Ψ ，從つてまた，すべての物理量が ϵ の冪に展開できるものと假定してこれらを定めようとするのである。その第一近似 (ϵ の程度まで正確) は明かに Prandtl-Glauert の一次理論と本質的に同等である。この論法を用ゐれば任意の近似まで到達することができるのであるが，計算の複雑性と實用性を考へて，この論文では第二近似 (ϵ^2 の程度まで正確) までに考察を限り，翼型表面における速度分布，翼型に働く揚力及びモーメントの $O(\epsilon^2)$ まで厳密な一般公式を導く。

II. 薄翼展開法

§2. 基礎の方程式

縮む流體の一様な流れの中に任意の形の翼型がおかれてゐるときの二次元的な流れを考へる。粘性を無視すれば，Helmholtz の定理によつて渦無し運動のみを考へればよいから (衝撃波は起らないものとする)，流れの平面を (x, y) 面とすると速度 (u, v) は

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.1)$$

の如く速度ポテンシャル Φ を用ゐて表はされる。また連続の方程式から

$$u = \frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\rho_\infty}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

なる流れの函數 Ψ の存在がわかる。こゝに ρ は流體の密度， ρ_∞ はみだされない流體の密度である。なほ流體は斷熱變化を行ふものとするれば

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad (2.3)$$

が成り立ち, Bernoulli の方程式はこの場合

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (2.4)$$

の形に表はされる. ここで γ は比熱の比, p は圧力, q は速度で, p_∞ , U , M はそれぞれみだされない流れにおける圧力, 速度, Mach 数である. 今後簡単のために $U=1$ となるやうに単位を選ぶことにする. 従つて, みだされない流れは $\Phi=x$, $\Psi=y$ で表はされる. いま翼型は厚みも反りも著しくなく, また迎角も小さいものとすれば, 翼型のために一様な流れの受ける変化は僅かなものであらう. すなはち, この場合

$$\Phi = x + \phi, \quad \Psi = y + \psi \quad (2.5)$$

と書けば ϕ, ψ は小さい量であらう. そこで改めて (2.5) を次のやうに書き

$$\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots, \quad (2.6)$$

$$\Psi = y + \psi_1 + \psi_2 + \dots \quad (2.7)$$

添字 1, 2, ... によつて大きさの程度を表はすことにする. すなはち $\phi_1, \psi_1; \phi_2, \psi_2; \dots$ はそれぞれ $O(\varepsilon), O(\varepsilon^2), \dots$ の小さい量と假定する.

(2.1), (2.6) より

$$q^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 = 1 + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + O(\varepsilon^3). \quad (2.8)$$

これより

$$q = 1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (2.9)$$

(2.8) を (2.4) に入れて展開すれば

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = 1 - M^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - M^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{M^2}{2} \left[\{1 - (2-\gamma)M^2\} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] + O(\varepsilon^3). \quad (2.10)$$

従つて (2.3) により

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \gamma M^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \gamma M^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\gamma}{2} M^2 \left\{ (1 - M^2) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} + O(\varepsilon^3). \quad (2.11)$$

§3. 第一近似

(2.1), (2.2) を組合せると

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

が得られる. (2.6), (2.7), (2.10) を (3.1), (3.2) に入れて $O(\varepsilon)$ の項に着目すれば

$$(1 - M^2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

が得られ, $O(\varepsilon^2)$ の項に着目すれば

$$(1-M^2) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{M^2}{2} \left[\{3-(2-\gamma)M^2\} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = M^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \quad (3.6)$$

が得られる. いま

$$x = \xi, \quad y = \frac{1}{\mu} \eta \quad (3.7)$$

$$\phi = \mu \chi, \quad \phi_N = \mu \chi_N, \quad N=1, 2, \dots \quad (3.8)$$

但し

$$\mu = \sqrt{1-M^2} \quad (3.9)$$

とおけば, (3.3)–(3.6) は

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} = \frac{M^2}{2} \left[\left\{ 3 + (\gamma+1) \frac{M^2}{1-M^2} \right\} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right)^2 \right], \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} = M^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \quad (3.13)$$

となる. ここで更に

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta \quad (3.14)$$

$$G = \phi + i\chi, \quad G_N = \phi_N + i\chi_N, \quad N=1, 2, \dots \quad (3.15)$$

とおき, $\zeta, \bar{\zeta}$ を独立変数とすれば

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = i \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \right), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3.17)$$

なる関係がある. (3.10) に $1/2$, (3.11) に $i/2$ を掛けて加へ合はせると (3.15), (3.17) により

$$\frac{\partial G_1}{\partial \bar{\zeta}} = 0, \quad (3.18)$$

従つて

$$G_1 = f(\zeta) \quad (3.19)$$

となり, $f(\zeta)$ は ζ の解析関数である. これを実数部と虚数部とに分ければ

$$\phi_1 = \frac{1}{2} [f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})], \quad (3.20)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{2i} [f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})] \quad (3.21)$$

これで第一近似が求められたわけである。

§4. 第二近似

(3.20) より

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\zeta} + \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right), \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} = \frac{i}{2} \left(\frac{df}{d\zeta} - \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right). \quad (4.1)$$

(3.12) に 1/2, (3.13) に i/2 を掛けて加へ合せ, 且つ右邊に (4.1) を代入すれば, (3.15), (3.17) により

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2}{\partial \bar{\zeta}} &= \frac{M^2}{4} \left[\left\{ 3 + (\gamma+1) \frac{M^2}{1-M^2} \right\} \frac{1}{4} \left(\frac{df}{d\zeta} + \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{df}{d\zeta} - \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\zeta} + \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right) \left(\frac{df}{d\zeta} - \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right) \right] \\ &= \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 + \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} \frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} + \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 \right\} \right]. \quad (4.2) \end{aligned}$$

故に $\bar{\zeta}$ について積分すれば

$$G_2 = \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \bar{\zeta} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} \bar{f} + \int \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 d\bar{\zeta} \right\} \right] + \mathcal{F}(\zeta). \quad (4.3)$$

但し $\mathcal{F}(\zeta)$ は ζ の解析函数でさしあたり任意である。しかしこれは個々の翼型について境界条件から定められるべき性質のものである。次にその境界条件を考へよう。

III. 厳密な境界条件

§5. 境界条件

(3.15), (3.17) 及び (3.7), (3.8) により

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} - i \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi} - i \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{i}{2\mu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \quad (5.1) \end{aligned}$$

さて (2.1), (2.2), (2.5) により

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= u-1, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\rho}{\rho_\infty} v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_\infty} u-1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

であるから, $\partial \phi / \partial x$, $\partial \phi / \partial y$, $\partial \psi / \partial x$, $\partial \psi / \partial y$ は流れの場で到るところ一價連続である。従つて $\partial G / \partial \zeta$ も一價連続である。また翼型から無限に遠いところでは, 速度 1, 密度 ρ_∞ の一様な流れであるから

$$x, y \rightarrow \infty : u \rightarrow 1, v \rightarrow 0, \rho \rightarrow \rho_\infty.$$

従つて

$$x, y \rightarrow \infty : \frac{\partial \phi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0.$$

となる。これより、 $\zeta \rightarrow \infty$ のとき $\partial G / \partial \zeta \rightarrow 0$ がいへる。

次に、翼型の表面は流線と一致するべきであるから、そこでは $\Psi = \text{const}$ が成り立つ。いま翼型の座標を (x_P, y_P) で表はし、且つ上の const を 0 とおけば、(2.5) により

$$\Psi(x_P, y_P) = y_P + \phi(x_P, y_P) = 0.$$

従つて (3.7), (3.8) によつて

$$\chi(\xi_P, \eta_P) = -\frac{1}{\mu^2} \eta_P \quad (5.3)$$

と書ける。こゝに勿論

$$\xi_P = x_P, \quad \eta_P = \mu y_P \quad (5.5)$$

である。

以上を総合すれば、 $G(\zeta, \bar{\zeta})$ のみたすべき条件は

(i) 流れの場で $\partial G / \partial \zeta$ は一價連続。

(ii) $\zeta \rightarrow \infty$ のとき $\partial G / \partial \zeta \rightarrow 0$ 。

(iii) 翼型表面で $\Psi = 0$, 従つて $\chi(\xi_P, \eta_P) = -\frac{1}{\mu^2} \eta_P$,

$$\text{すなはち } \Im G(\zeta_P, \bar{\zeta}_P) = -\frac{1}{\mu^2} \Im(\zeta_P).$$

となる。

§6. 共軛 Fourier 級数

後の便宜上この節では共軛 Fourier 級数についての諸公式を擧げておく。その詳しい説明については筆者の前の論文を参照されたい[4]。

いま $g(z)$ は $|z| \geq 1$ において一價正則な函数とすれば、次の如く Laurent 級数に展開できる：

$$g(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots, \quad |z| \geq 1. \quad (6.1)$$

$c_n = a_n + ib_n$ とし、 $z = e^{i\theta}$ とおけば

$$g(e^{i\theta}) = R(\theta) + iI(\theta) \quad (6.2)$$

となる。但し

$$R(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (6.3)$$

$$I(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta). \quad (6.4)$$

いま $R^*(\theta)$ を $R(\theta)$ の共軛 Fourier 級数とすれば、これは

$$R^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \quad (6.5)$$

で定義される。すなはち $R(\theta)$ の $\cos n\theta$ の係数を $\sin n\theta$ の係数とし、 $\sin n\theta$ の係数の符號を變へて $\cos n\theta$ の係数とする Fourier 級数である。任意に周期函数 $R(\theta)$ が與へられたと

き、その共軛 Fourier 級数 $R^*(\theta)$ を見出すには、 $R(\theta)$ の Fourier 分析を行つて、その後上述のやうな係数の入れかへを行へばよいのであるが、その他直接

$$R^*(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [R(\varphi + \theta) - R(\theta)] \cot \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad (6.6)$$

なる公式によつて求めることもできる。

なほ $|z| \geq 1$ で正則な函数の實數部 $R(\theta)$ と虚數部 $I(\theta)$ の間には

$$R(\theta) = a_0 + I^*(\theta), \quad I(\theta) = b_0 - R^*(\theta) \quad (6.7)$$

なる関係のあることは容易に確かめられる。

次に

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\theta}, \quad C_n = A_n + iB_n \quad (6.8)$$

で定義される周期函数を考へれば、共軛 Fourier 級数の定義により

$$P(\theta) - Q^*(\theta) = A_0 + 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\theta} \quad (6.9)$$

なることは容易に確かめられる。なほ

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n \quad (6.10)$$

なる Laurent 級数を考へれば、單位圓周上： $z = e^{i\theta}$ においては

$$F(e^{i\theta}) = P(\theta) + iQ(\theta) \quad (6.11)$$

となり確かに収斂する。いま $F(z)$ を二つに分け

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \quad (6.12)$$

但し

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n z^n \quad (6.13)$$

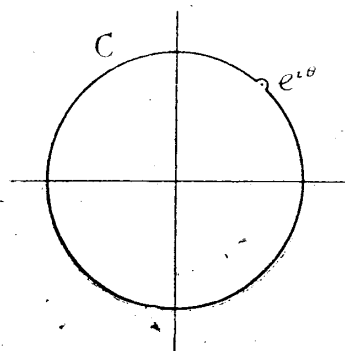
とする。 $z = e^{i\theta}$ において $F_1(z)$ 、 $F_2(z)$ は収斂するから、これはそれぞれ $|z| < 1$ 、 $|z| > 1$ において収斂し正則函数を表はす。更に $z = e^{i\theta}$ が $F(z)$ の正則點であるならば、Cauchy の定理により

$$F_1(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F_1(z)}{z - e^{i\theta}} dz,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F_2(z)}{z - e^{i\theta}} dz.$$

但し、積分路 C は點 $e^{i\theta}$ のところを僅か膨らませた單位圓である(第1圖)。上の二式を加へ合はせて(6.12)を考へれば

$$F_1(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(z)}{z - e^{i\theta}} dz \quad (6.14)$$

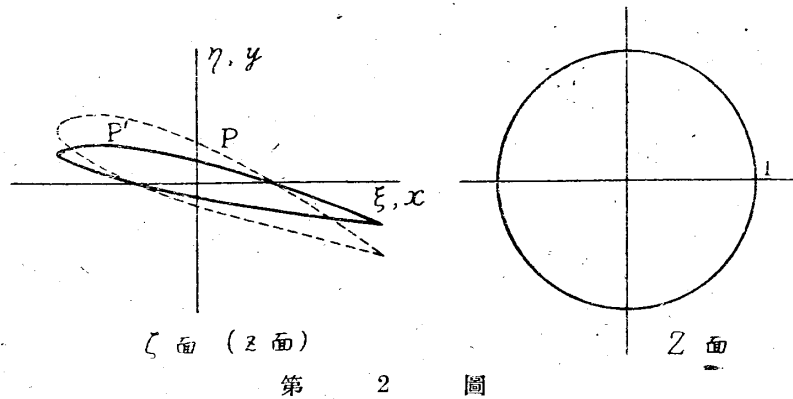


第 1 圖

が得られる。右邊の積分は例へば留數の方法を用ゐることにより簡単に計算できよう。

§7. 第一近似

先づ、翼型が與へられたとき (3.19) の $f(\zeta)$ の形を境界条件によつて定めよう。翼型 P が與へられてゐるのであるから、その直角座標 (x_P, y_P) が知れてをり、従つて (5.5) で定義される $(\xi_P, \eta_P) = (x_P, \mu y_P)$ も知れる。 ζ 面上では、これはもとの翼型を y 軸方向に μ 倍に縮めた翼型 P' を表はすことになる (第2圖)。



ζ 面の P' の外部の領域を Z 面の單位圓の外部の領域に等角寫像する函数は必ず存在し

$$\zeta = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \dots, \quad |Z| > 1 \quad (7.1)$$

なる形に展開されることは函数論の定理からよく知れてゐる。この際、翼型自身は單位圓 $Z = e^{i\theta}$ に對應し、 $\zeta_P = \zeta(e^{i\theta})$, 従つて

$$\xi_P = \xi_P(\theta), \quad \eta_P = \eta_P(\theta) \quad (7.2)$$

の如く θ を副變數として表はされる。任意に與へられた翼型に對して係數 c_{-1}, c_0, c_1, \dots 或は $\xi_P(\theta), \eta_P(\theta)$ の函数形を具體的に定めるには、例へば筆者の方法 [2] を用ゐればよい。

§5 の條件 (iii) により第一近似として

$$\Im G_1(\zeta_P, \bar{\zeta}_P) = \Im f(\zeta_P) = -\frac{1}{\mu^2} \Im(\zeta_P) \quad (7.3)$$

を得る。翼型表面 $\zeta = \zeta_P$ では $Z = e^{i\theta}$, 従つて $Z\bar{Z} = 1$ であるから、上式は次の如く變形される。

$$\begin{aligned} f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta}) &= -\frac{1}{\mu^2}(\zeta - \bar{\zeta}) \\ &= -\frac{1}{\mu^2} \left\{ (\zeta - c_{-1}Z) - (\bar{\zeta} - \bar{c}_{-1}\bar{Z}) + c_{-1}Z - \bar{c}_{-1}\bar{Z} \right\} \\ &= -\frac{1}{\mu^2} \left\{ (\zeta - c_{-1}Z) - (\bar{\zeta} - \bar{c}_{-1}\bar{Z}) + \frac{c_{-1}}{Z} - \frac{\bar{c}_{-1}}{\bar{Z}} \right\} \\ &= -\frac{1}{\mu^2} \left\{ \left(\zeta - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} \right) - \left(\bar{\zeta} - \bar{c}_{-1}\bar{Z} - \frac{c_{-1}}{\bar{Z}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

なほ $Z=e^{i\theta}$ では $i \log Z = -\theta$ は實數であるから

$$f = -\frac{1}{\mu^2} \left(\zeta - c_0 - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} \right) + i\kappa_1 \log Z \quad (7.4)$$

とおけば、 f はすべての条件を満すことになる。實際 (7.1) に注意すれば、§5 の (i), (ii) の条件の満されてゐることは容易にわかる。 κ_1 は任意の實數であるが、後縁の鋭い翼型の場合には Joukowski の假定を用ゐて一義的に確定することができる。すなはち、後縁において $df/dZ=0$ なる条件から定めればよい。

速度ポテンシャルや流れの函数には一般に常數だけの任意性を伴ふのであるが、こゝでは f を Z^{-1} の冪級數に展開するとき常數項が現はれないやうに定めてある。この定め方は、後になつてモーメントを計算する際に有利となるであらう。なほ、このために翼型の表面では $\Psi = \Im(\zeta_0)/\mu = \text{const}$ となり $\Psi=0$ とはならないが、勿論これは差支へないのである。

次に、(7.4) で與へられる複素速度ポテンシャル f が翼型表面でどんな値をとるか考へよう。翼型表面は $Z=e^{i\theta}$ に對應するから

$$f(e^{i\theta}) = \phi_1(\theta) + i\chi_1(\theta) \quad (7.5)$$

と書くことにする。いま $f - i\kappa_1 \log Z$ を考へるに、(7.1), (7.4) から明かなやうに、これは $|Z| \geq 1$ において正則で、且つ $Z \rightarrow \infty$ に對して $\rightarrow 0$ となり、 $Z=e^{i\theta}$ では $\phi_1(\theta) + \kappa_1\theta + i\chi_1(\theta)$ となる。従つて (6.7) の關係により

$$\phi_1(\theta) + \kappa_1\theta = \chi_1^*(\theta). \quad (7.6)$$

§5 の条件 (iii) により

$$\chi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu^2} \eta_P(\theta) \quad (7.7)$$

であるから、これを (7.6) に入れると

$$\phi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu^2} \eta_P^*(\theta) - \kappa_1\theta. \quad (7.8)$$

これによつて翼型表面における速度ポテンシャルの第一近似が知れたわけである。

§8. 第二近似

次に G_2 の形を定めよう。(4.3) において、任意函数 $\mathfrak{F}(\zeta)$ を改めて

$$\mathfrak{F} = \frac{M^2}{4} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ -2 \frac{df}{d\zeta} (i\kappa_1 \log Z) + \int \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \right\} + g_2(Z)$$

と書くことにすれば、 $g_2(Z)$ はやはり Z の解析函数である。そして (4.3) は次の如くなる：

$$G_2 = H_2(Z, \bar{Z}) + g_2(Z). \quad (8.1)$$

但し H_2 は Z, \bar{Z} についての知れた函数であつて

$$H_2 = \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \bar{\zeta} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \times \left\{ 2 \frac{df}{d\zeta} (\bar{f} + i\kappa_1 \log \bar{Z} - i\kappa_2 \log Z \bar{Z}) + \int \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta + \int \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 d\bar{\zeta} \right\} \right] \quad (8.2)$$

のやうに與へられる。こゝで問題は $g_2(z)$ を定めることに歸着する。

(8.1) より

$$\frac{dg_2}{d\zeta} = \frac{\partial G_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_2}{\partial \zeta} \quad (8.3)$$

さて $G = G_1 + G_2 + \dots$ において, $G_1 = f$ は既に §5 の (i), (ii) の條件を満足するのであるから, G_2 は次の條件を満足しなければならない。

(i) 流れの場で $\partial G_2 / \partial \zeta$ は一價連続。

(ii) $\zeta \rightarrow \infty$ のとき $\partial G_2 / \partial \zeta \rightarrow 0$ 。

(8.2) の式によれば $\partial H_2 / \partial \zeta$ についても全く同じ條件が成り立つことが容易に確かめられる。従つてまた (8.3) により $dg_2/d\zeta$ は流れの場で一價連続 (従つて正則), $\zeta \rightarrow \infty$ に對して $dg_2/d\zeta \rightarrow 0$ である。Z 面で考へれば流れの場は $|Z| > 1$ に對應し, $d\zeta/dZ$ は $|Z| > 1$ で勿論正則であるから $dg_2/dZ = (dg_2/d\zeta)(d\zeta/dZ)$ は $|Z| > 1$ で一價正則で, $Z \rightarrow \infty$ に對して 0 にならねばならない。これより g_2 は

$$g_2 = i\kappa_2 \log Z + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots \quad (8.4)$$

なる形をもつことがわかる。後にわかるやうに κ_2 は實數でなければならない。

次に翼型表面における條件を考へよう。 $Z = e^{i\theta}$ とおき

$$G_2(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \phi_2(\theta) + i\chi_2(\theta), \quad (8.5)$$

$$H_2(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = P_2(\theta) + iQ_2(\theta), \quad (8.6)$$

$$g_2(e^{i\theta}) = R_2(\theta) + iI_2(\theta) \quad (8.7)$$

と書くことにする。さうすれば (8.1) より

$$\phi_2(\theta) = P_2(\theta) + R_2(\theta), \quad (8.8)$$

$$\chi_2(\theta) = Q_2(\theta) + I_2(\theta). \quad (8.9)$$

さて §5 の條件 (iii) はいまの場合

$$\chi_2(\theta) = -\mu^{-2}\gamma_P(\theta) - \chi_1(\theta) \quad (8.10)$$

と書けるから, $\chi_2(\theta)$ は知れた函数である。従つて (8.9) により

$$I_2(\theta) = \chi_2(\theta) - Q_2(\theta) \quad (8.11)$$

も知れた函数となる。さて (8.4) によれば $g_2 - i\kappa_2 \log Z$ は (6.1) と同じ性質の正則函数で (しかも $c_0 = 0$), $Z = e^{i\theta}$ に對して $R_2(\theta) + \kappa_2\theta + iI_2(\theta)$ となるから, (6.7) により

$$R_2(\theta) + \kappa_2\theta = I_2^*(\theta). \quad (8.12)$$

(8.11), (8.12) を (8.8) に入れると

$$\phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) - \kappa_2\theta + \chi_2^*(\theta). \quad (8.13)$$

これで翼型表面における速度ポテンシャルの第二近似が求まつたわけである。

(1) (7.7) の關係が嚴密に滿されてゐる場合には (8.10) の右邊は 0 になる。これに反して (7.7) の式が第一近似の程度しか滿されてゐないとすれば, (8.10) の右邊には $O(\epsilon^2)$ の程度の量が残る。それは勿論 θ についての知れた函数である。

なほ、翼型表面： $\zeta = \zeta_P$ では

$$Z = e^{i\theta}, \quad d\zeta_P = d\sigma e^{i\omega}, \quad (8.14)$$

従つて

$$\frac{d\zeta_P}{d\theta} \equiv \frac{d\xi_P}{d\theta} + i \frac{d\eta_P}{d\theta} = \frac{d\sigma}{d\theta} e^{i\omega} \quad (8.15)$$

とおけば $d\sigma$ は翼型に沿ふ線要素、 ω は $d\sigma$ と x 軸との挟む角である。これらを用ゐると、(8.2) から容易に

$$P_2(\theta) + iQ_2(\theta) = \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} + 2 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \right. \\ \left. \times \left\{ (\bar{f} + \kappa_1 \theta) \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} + \Re \int_0^\theta \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} d\theta \right\} \right] \quad (8.16)$$

が得られる。 $\bar{\zeta}_P = \xi_P(\theta) - i\eta_P(\theta)$, $f = \phi_1(\theta) + i\chi_1(\theta)$, $(d\theta/d\sigma)e^{-i\omega}$ はすべて既知であるから、(8.16) の右邊は計算できるはずなのである。

上に述べて来た薄翼展開法は他の方面にも應用できる。一樣な流れの中に任意の翼型がおかれてゐる場合、翼型から遠く離れたところでの流れの漸近的性質がわかれば、その翼型に働く揚力及びモーメントの一般式が得られる。筆者は以前 M^2 展開法を基礎にしてこれらの議論を行つたのであるが[1]、こゝで述べる薄翼展開法によれば同じ結果が極めて容易に得られる[3]。實際、翼型の厚さ、反り、迎角がどんなに大きくても、翼型から遠く離れたところでは一樣な流れからの變化は極めて小さいことが豫想され、 $\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots$, $\Psi = y + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ なる形の展開が最も威力を發揮するのである。

VI. 近似的な境界条件

§9. 翼型の表示

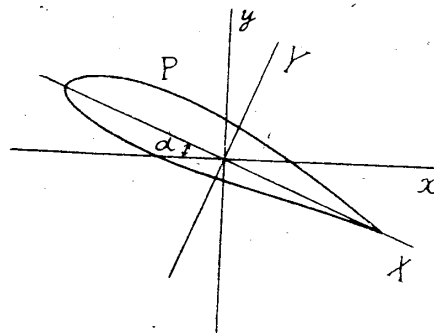
翼型があまり厚くなく、反りも迎角も小さいといふ假定の下に運動方程式を簡単にしたのが上の議論であるが、境界条件についてはいままで何等近似を行ふことなく厳密に考慮して来た。運動方程式について近似を行ふ以上、境界条件についても同じ程度の近似を行ふことは極めて合理的であると考へられる。しかもこれによつて結果は著しく見易い形に書き表はされるのである。

いま任意に與へられた翼型 P の上で最も遠い二点を前縁・後縁とし、これらを結ぶ線分すなはち翼弦を X 軸に、翼弦の垂直二等分線を Y 軸にとる。また弦長の半分を長さの單位に選べば、翼型は

$$X = \cos \vartheta, \quad (9.1)$$

$$Y = g(\vartheta) \quad (9.2)$$

の如く ϑ を副變數として表はすことができる。明



第 4 圖

かに $\vartheta=0, \pi$ はそれぞれ後縁及び前縁を與へる。

いま x 軸の正の方向に一様な流れがあるものとし、これに對して翼型 P が α なる迎角をもつものとするれば、 x, y 座標軸について見れば P の座標 x_P, y_P は明かに

$$x_P = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, \quad (9.3)$$

$$y_P = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha \quad (9.4)$$

で與へられる。翼型の厚みも反りも小さければ $g(\vartheta)$ は小さく、また迎角が小さければ α は小さい。そこで $\alpha, g(\vartheta)$ は共に $O(\epsilon)$ であるとし今後 $O(\epsilon^2)$ までの議論を行ふことにする。

このとき (9.3), (9.4) は

$$x_P = \cos \vartheta + O(\epsilon^2), \quad (9.5)$$

$$y_P = g(\vartheta) - \alpha \cos \vartheta + O(\epsilon^3) \quad (9.6)$$

と書ける。更に (3.7) の關係によつて $\zeta (= \xi + i\eta)$ 面に移れば、翼型は流れに直角の方向に μ 倍に縮められて P' となり

$$\xi_P = \cos \vartheta + O(\epsilon^2), \quad (9.7)$$

$$\eta_P = \mu \{g(\vartheta) - \alpha \cos \vartheta\} + O(\epsilon^3) \quad (9.8)$$

のやうに與へられる。 ζ 面における P' の外部の領域を Z 面の單位圓の外部に等角寫像する解析函數 (6.1) を

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) + C(Z), \quad (9.9)$$

但し

$$C(Z) = C_{-1}Z + C_0 + \frac{C_1}{Z} + \dots, \quad C_n = A_n + iB_n \quad (9.10)$$

のやうに表はせば $C(Z)$ は $O(\epsilon)$ 、従つて $C_n (n = -1, 0, 1, \dots)$ はすべて $O(\epsilon)$ であらう。實際、極端な場合として $g(\theta) = 0, \alpha = 0$ を考へると、P' は ξ 軸上の長さ 2 の直線分となり、その外部の領域は Joukowski 變換：

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \quad (9.11)$$

によつて Z 面の單位圓の外部に等角寫像されるからである。

なほ (9.9) による寫像の際、後縁は $Z = 1$ に對應するものとする。

いま

$$C(e^{i\theta}) = A(\theta) + iB(\theta) \quad (9.12)$$

と書くことにすれば $A(\theta), B(\theta)$ は共に $O(\epsilon)$ である。(9.9) で $Z = e^{i\theta}$ とおき實數部と虚數部とに分けると

$$\xi_P = \cos \theta + A(\theta), \quad (9.13)$$

$$\eta_P = B(\theta). \quad (9.14)$$

かやうに、與へられた翼型は (9.7), (9.8) のやうに ϑ を副變數として表はすことも、或は (9.13), (9.14) のやうに θ を副變數として表はすこともできるのである。次の節では $A(\theta), B(\theta)$ の形を具體的に定めよう。

§ 10. 寫像函数の決定

(9.10) において, $C(Z) = C_{-1}Z + C_0$ なる函数を考へるに, これは $|Z| > 1$ で正則で $Z \rightarrow \infty$ のとき 0 となり, $Z = e^{i\theta}$ では

$$A(\theta) = A_{-1} \cos \theta + B_{-1} \sin \theta - A_0 + i\{B(\theta) - B_{-1} \cos \theta - A_{-1} \sin \theta - B_0\}$$

となる. 従つて (6.7) により

$$A(\theta) - A_{-1} \cos \theta + B_{-1} \sin \theta - A_0 = \{B(\theta) - B_{-1} \cos \theta - A_{-1} \sin \theta - B_0\}^* \\ * = B^*(\theta) - B_{-1} \sin \theta + A_{-1} \cos \theta.$$

すなはち

$$A(\theta) = B^*(\theta) + 2(A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta) + A_0. \quad (10.1)$$

いま (9.7), (9.13) を比べると

$$\cos \vartheta = \cos \theta + A(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10.2)$$

$A(\theta) = O(\varepsilon)$ であるから

$$\vartheta - \theta = O(\varepsilon). \quad (10.3)$$

故に

$$\cos \vartheta = \cos(\theta + \vartheta - \theta) = \cos \theta - \sin \theta \cdot (\vartheta - \theta) + O((\vartheta - \theta)^2) \\ = \cos \theta - \sin \theta \cdot (\vartheta - \theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10.4)$$

(10.2), (10.4) を比べて

$$A(\theta) = -\sin \theta \cdot (\vartheta - \theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10.5)$$

假定により後縁は $Z=1$ に對應するから, $\vartheta=0$ は $\theta=0$ に對應する. いま (10.5) において $\theta=0, \pi$ とおけば

$$A(0) = O(\varepsilon^2), \quad (10.6)$$

$$A(\pi) = O(\varepsilon^2). \quad (10.7)$$

(10.5) を θ について微分して $\theta=0$ とおけば

$$A'(0) = O(\varepsilon^2). \quad (10.8)$$

また, (10.5) より

$$\vartheta - \theta = -\frac{A(\theta)}{\sin \theta} + O(\varepsilon^2). \quad (10.9)$$

次に (9.8), (9.14) を比べて

$$B(\theta) = \mu g(\vartheta) - \mu a \cos \vartheta + O(\varepsilon^3) \quad (10.10)$$

が得られ, 更に (10.3) を考へに入れると

$$B(\theta) = \mu g(\theta) - \mu a \cos \theta + O(\varepsilon^2) \quad (10.11)$$

が得られる. 従つて

$$B^*(\theta) = \mu g^*(\theta) - \mu a \sin \theta + O(\varepsilon^2). \quad (10.12)$$

これを (10.1) に入れると

$$A(\theta) = \mu g^*(\theta) - \mu a \sin \theta + 2(A_{-1} \cos \theta - B_{-1} \sin \theta) + A_0 + O(\varepsilon^2). \quad (10.13)$$

ここで A_{-1} , B_{-1} , A_0 は (10.6), (10.7), (10.8) を用ゐて次の如く定められる.

$$\begin{aligned} A(0) &= \mu g^*(0) + 2A_{-1} + A_0 + O(\varepsilon^2), \\ A(\pi) &= \mu g^*(\pi) - 2A_{-1} + A_0 + O(\varepsilon^2), \\ A'(0) &= \mu g^{*\prime}(0) - \mu a - 2B_{-1} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

これらを A_{-1} , B_{-1} , A_0 についてとけば

$$\begin{aligned} 2A_{-1} &= -\frac{\mu}{2}[g^*(0) - g^*(\pi)] + O(\varepsilon^2), \\ 2B_{-1} + \mu a &= \mu g^{*\prime}(0) + O(\varepsilon^2), \\ A_0 &= -\frac{\mu}{2}[g^*(0) + g^*(\pi)] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

これらを (10.13) に入れると結局

$$A(\theta) = \mu h(\theta) + O(\varepsilon^2) \quad (10.14)$$

となる. 但し

$$h(\theta) = g^*(\theta) - \frac{1}{2}[g^*(0) - g^*(\pi)]\cos\theta - g^{*\prime}(0)\sin\theta - \frac{1}{2}[g^*(0) + g^*(\pi)]. \quad (10.15)$$

これを (10.9) に入れると

$$\vartheta - \theta = -\mu \frac{h(\theta)}{\sin\theta} + O(\varepsilon^2). \quad (10.16)$$

さて

$$\begin{aligned} g(\vartheta) &= g(\theta + \vartheta - \theta) = g(\theta) + g'(\theta)(\vartheta - \theta) + \dots \\ &= g(\theta) - \mu \frac{h(\theta)}{\sin\theta} g'(\theta) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (10.17)$$

また (10.2), (10.14) より

$$\cos\vartheta = \cos\theta + \mu h(\theta) + O(\varepsilon^2). \quad (10.18)$$

(10.17), (10.18) を (10.10) に入れると

$$B(\theta) = \mu [g(\theta) - a \cos\theta] - \mu^2 \left[\frac{h(\theta)}{\sin\theta} g'(\theta) + ah(\theta) \right] + O(\varepsilon^3). \quad (10.19)$$

(10.14) (10.19) により $A(\theta)$ は $O(\varepsilon)$ まで, $B(\theta)$ は $O(\varepsilon^2)$ まで厳密に定められたわけである.

§ 11. 速度ポテンシャル

z 面における翼型 P' の外部を Z 面の単位圓 $Z = e^{i\theta}$ の外部に寫像するとき, θ を副變數として P' を與へる式:

$$\xi_P = \cos\theta + A(\theta), \quad \eta_P = B(\theta) \quad (11.1)$$

が具體的に求められたから, これを § 7, § 8 の結果に應用すれば速度ポテンシャル $\phi_1(\theta)$, $\phi_2(\theta)$ の形が具體的に得られるはずである. 次にこれを試みよう.

§ 5 の境界條件 (iii) を (11.1), (10.9) によつて書き變へると

$$\chi_1(\theta) + \chi_2(\theta) = -\frac{1}{\mu} [g(\theta) - a \cos\theta] + \frac{h(\theta)}{\sin\theta} g'(\theta) + ah(\theta) + O(\varepsilon^3).$$

故に χ_1, χ_2 の大きさの程度を考へて

$$\chi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu} [g(\theta) - a \cos \theta], \quad (11.2)$$

$$\chi_2(\theta) = \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) + ah(\theta) \quad (11.3)$$

が得られる。(11.2) を (7.6) に入れれば

$$\phi_1(\theta) = -\frac{1}{\mu} [g^*(\theta) - a \sin \theta] - \kappa_1 \theta. \quad (11.4)$$

翼型の後縁が鋭い場合には Joukowski の假定を用ゐて κ_1 を一義的に定めることができる。すなはち $\phi_1'(0) = 0$ とすれば (11.4) より

$$\kappa_1 = \frac{1}{\mu} [a - g^*(0)]. \quad (11.5)$$

(11.2), (11.4) より

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \phi_1(\theta) + i\chi_1(\theta) \\ &= -\frac{1}{\mu} [g^*(\theta) + ig(\theta) - iae^{-i\theta}] - \kappa_1 \theta. \end{aligned}$$

(7.4) について述べたやうに, f を Z^{-1} の冪級数に展開するとき常數項を含まないことを要求すれば, 上の式の右邊において $g(\theta)$ の代りに $g(\theta) - g_0$ を用ゐればよい。但し

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

とする。モーメントの計算にはかやうな取りきめが便利である (§20 参照)。かくて上の式は

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mu} [f_0(\theta) - \kappa_{10} \theta] \quad (11.6)$$

と書ける。こゝに

$$f_0(\theta) = -\{g^*(\theta) + i[g(\theta) - g_0] - iae^{-i\theta}\}, \quad (11.7)$$

$$\kappa_{10} = \mu\kappa_1 = a - g^*(0) \quad (11.8)$$

は Mach 數によらない。それ故 (11.6) は Prandtl-Glauert の近似に相當することがわかる。實際 (11.6) の右邊の [] の式は $M=0$ ($\mu=1$) すなはち縮まない流れに對する複素速度ポテンシャルに他ならない。

次に (8.13) より

$$\phi_2(\theta) = P_2(\theta) - Q_2^*(\theta) + \chi_2^*(\theta) - \kappa_2 \theta. \quad (11.9)$$

但し (8.16) により

$$\begin{aligned} P_2(\theta) + iQ_2(\theta) &\equiv \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ (\bar{f} + \kappa_1 \theta) \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} + \Re \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} d\theta \right\} \right]. \quad (11.10) \end{aligned}$$

さて

$$\bar{\zeta}_P = \zeta_P - 2i\gamma_P = \zeta_P + O(\epsilon), \quad \frac{df}{d\zeta} = O(\epsilon).$$

$$\bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} = \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 = \zeta_P \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 + O(\epsilon^3)$$

である。 $\zeta(df/d\zeta)^2$ は明かに ζ , 従つて Z , の負の冪のみを含むから ((7.1), (7.4) 参照), $\zeta_P(df/d\zeta)_P^2$ は $e^{i\theta}$ の負の冪のみを含み, 従つて (6.8), (6.9) により $P_2(\theta) - Q_2^*(\theta)$ に寄與しない。すなはち $O(\epsilon^3)$ を無視すれば, (11.10) の右邊第一項は $P_2(\theta) - Q_2^*(\theta)$ に寄與しないのである。そこで (11.10) の重要な項だけを残して (11.6) を入れると

$$P_2(\theta) + iQ_2(\theta) = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \\ \times \left\{ \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} + \Re \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} d\theta \right\}.$$

また (11.9) を微分して上の式を考へれば

$$\frac{d\phi_2}{d\theta} = \nu \left[\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} + P'(\theta) - Q_2^{*'}(\theta) \right] + \frac{d\chi_2^*}{d\theta} - \kappa_2. \quad (11.11)$$

但し

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega}, \quad (11.12)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right). \quad (11.13)$$

V. 翼型表面の速度分布. 揚力

§12. 速度公式 I.

翼型表面における速度ポテンシャルの値が知れたから, 速度の大きさは容易に見出すことができる。先づ翼型は ϑ を副變數として

$$X = \cos \vartheta, \quad Y = g(\vartheta) \quad (12.1)$$

のやうに與へられる。表面における速度ポテンシャルは (2.6) により

$$\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + O(\epsilon^3). \quad (12.2)$$

翼型表面に沿ふ線要素を ds とすれば, 表面速度 q は明かに

$$q = \frac{d\Phi}{ds} = \frac{d\Phi}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{ds} = \left\{ \frac{dx_P}{d\vartheta} + \left(\frac{d\phi_1}{d\theta} + \frac{d\phi_2}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{d\vartheta} \right\} \frac{d\vartheta}{ds} \quad (12.3)$$

で與へられる。右邊の各項は次のやうに計算される。

先づ (12.1) より

$$\frac{ds}{d\vartheta} = \sqrt{\left(\frac{dX}{d\vartheta} \right)^2 + \left(\frac{dY}{d\vartheta} \right)^2} = \sqrt{\sin^2 \vartheta + [g'(\vartheta)]^2}. \quad (12.4)$$

次に (9.3) より

$$\begin{aligned}\frac{dx_P}{d\vartheta} &= \frac{dX}{d\vartheta} \cos a + \frac{dY}{d\vartheta} \sin a = -\sin\vartheta \cos a + g'(\vartheta) \sin a \\ &= -\left(1 - \frac{a^2}{2}\right) \sin\vartheta + ag'(\vartheta) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\quad (12.5)$$

(11.4) より

$$\frac{d\phi_1}{d\theta} = -\frac{1}{\mu} [g^{*\prime}(\theta) - a \cos\theta + \kappa_{10}]. \quad (12.6)$$

(11.11) より

$$\frac{d\phi_2}{d\theta} = \nu \left[\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} + P(\theta) - Q^{*\prime}(\theta) \right] + \frac{d\chi_2^*}{d\theta} - \kappa_2. \quad (12.7)$$

但し (11.13), (11.7), (11.12), (11.3), (10.15), (8.15), (10.14), (10.19) によつて

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right), \quad (12.8)$$

$$f_0(\theta) = -\{g^*(\theta) + i[g(\theta) - g_0] - iae^{-i\theta}\}, \quad (12.9)$$

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega}, \quad (12.10)$$

$$\chi_2(\theta) = \frac{h(\theta)}{\sin\theta} g'(\theta) + ah(\theta), \quad (12.11)$$

$$h(\theta) = g^*(\theta) - \frac{1}{2} [g^*(0) - g^*(\pi)] \cos\theta - g^{*\prime}(0) \sin\theta - \frac{1}{2} [g^*(0) + g^*(\pi)], \quad (12.12)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} = \left(\frac{d\xi_P}{d\theta} + i \frac{d\eta_P}{d\theta} \right)^{-1} = \{-\sin\theta + A'(\theta) + iB'(\theta)\}^{-1}, \quad (12.13)$$

$$A(\theta) = \mu h(\theta) + O(\varepsilon^2), \quad (12.14)$$

$$B(\theta) = \mu [g(\theta) - a \cos\theta] + O(\varepsilon^2). \quad (12.15)$$

最後に (10.16) より

$$\theta = \vartheta + \mu \frac{h(\vartheta)}{\sin\vartheta} + O(\varepsilon^2), \quad (12.16)$$

従つて

$$\frac{d\theta}{d\vartheta} = 1 + \mu \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{h(\vartheta)}{\sin\vartheta} \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (12.17)$$

翼型表面の一点 (ϑ) における速度 $q(\vartheta)$ を求めるには, (12.16) により ϑ に對する θ を求め, (12.6), (12.7) により $d\phi_1/d\theta$, $d\phi_2/d\theta$ を求め, 更に (12.17) により $d\theta/d\vartheta$, (12.5) により $dx_P/d\vartheta$, (12.4) により $ds/d\vartheta$ を求めて, (12.3) によつて計算すればよい.

§13. 速度公式 II.

前の節では翼型表面における速度を $O(\varepsilon^2)$ まで厳密に求める方式を示した. θ と ϑ の差が $O(\varepsilon)$ であることに注目し更に近似を行へば, q と ϑ の関係を具體的に表はす公式を導くことができる. 新しく近似を行ふために幾分精度は落ちるかも知れないが, 公式としてはやはり $O(\varepsilon)$ まで正しいのである.

(12.2), (9.3), (12.13) により

$$\begin{aligned}\Phi &= x_P + \phi_1 + \phi_2 + O(\varepsilon^3) \\ &= X \cos \alpha + Y \sin \alpha + \phi_1(\vartheta) + \phi_2(\vartheta) + O(\varepsilon^3) \\ &= \cos \vartheta \cos \alpha + g(\vartheta) \sin \alpha + \phi_1(\vartheta) + \phi_1'(\vartheta)(\theta - \vartheta) + \phi_2(\vartheta) + O(\varepsilon^3) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \cos \vartheta + ag(\vartheta) + \phi_1(\vartheta) + \mu \phi_1'(\vartheta) \frac{h(\vartheta)}{\sin \vartheta} + \phi_2(\vartheta) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

右邊の函数はすべて ϑ について表はされてゐる。これより

$$\frac{d\Phi}{d\vartheta} = -\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \sin \vartheta + ag'(\vartheta) + \frac{d\phi_1}{d\vartheta} + \mu \frac{d}{d\vartheta} \left\{ \frac{d\phi_1}{d\vartheta} \frac{h(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right\} + \frac{d\phi_2}{d\vartheta} + O(\varepsilon^3).$$

前の結果を用ゐて簡単な變形を行へば

$$-\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \sin \vartheta + \frac{1}{\mu} \{g^{*'}(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}\} + S'(\vartheta) + \nu T(\vartheta) + \kappa_2 \quad (13.1)$$

なる形に書ける。こゝに函数 $S(\theta)$, $T(\theta)$ は

$$\begin{aligned}S(\theta) &= \frac{\alpha^2}{2} \cos \theta - ag(\theta) + \left\{ g^{*'}(\theta) - a \cos \theta + \kappa_{10} \right\} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} \\ &\quad - \left\{ g'(\theta) \frac{h(\theta)}{\sin \theta} + ah(\theta) \right\}^*,\end{aligned} \quad (13.2)$$

$$T(\theta) = -\left[\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} + P'(\theta) - Q^{*'}(\theta) \right] \quad (13.3)$$

で與へられる。

(12.4) の $ds/d\vartheta$ と (13.1) の $d\Phi/d\vartheta$ を用ゐれば $q = (d\Phi/d\vartheta)(d\vartheta/ds)$ によつて速度が求まるのである。

§14. 速度公式 III.

$d\Phi/d\vartheta$ を與へる (13.1) の右邊では、第一項、第二項及び残りの項はそれぞれ $O(1)$, $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$ の大きさをもつてゐる。次に、速度 $q(\vartheta)$ 自身についてかやうな式を導かう。

(12.4) より、 $g'(\vartheta) = O(\varepsilon)$ に注意すれば

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{ds} &= \{ \sin^2 \vartheta + [g'(\vartheta)]^2 \}^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ 1 + \left[\frac{g'(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right]^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \pm \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{g'(\vartheta)}{\sin \vartheta} \right]^2 \right\} + O(\varepsilon^3), \quad (\vartheta \neq 0, \pi).\end{aligned} \quad (14.1)$$

但し $+$ は翼の上面、 $-$ は翼の下面に對應する。(14.1), (13.1) を掛け合はせると結局

$$\begin{aligned}q &= 1 + \frac{1}{\mu} \frac{g^{*'}(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}}{\sin \vartheta} \\ &\quad + \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ S'(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\sin \vartheta} + \nu T(\vartheta) + \kappa_2 \right\}\end{aligned} \quad (14.2)$$

となる。但し翼の上面、下面を問はず速度 q が後縁に向ふ場合その符號を正と定めてある。

(14.2) の第一項 1 はみだされない流れ, 第二項は $O(\varepsilon)$, 第三項は $O(\varepsilon^2)$ の量を表はす. 第二項の因数 $1/\mu = 1/\sqrt{1-M^2}$ は Prandtl-Glauert の因数に他ならない. また $O(\varepsilon^2)$ の量のうち Mach 数によつて變化する項は $\nu T(\vartheta)$ と κ_2 のみであるが, $T(\vartheta)$ は實際上ほとんど Mach 数によらないから, 結局 M は

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right)$$

なる組合せにおいてのみ現はれることになる. (次の節で見る通り κ_2 についても同様である). 従つて (14.2) によれば, 與へられた翼型の與へられた姿勢に對する速度分布が Mach 数によつて變化する有様は極めて容易に調べられるのである. この點において本節の公式は前の二節のものより遙かに便利であらう.

翼の前縁及び後縁の附近では $\vartheta = \pi, 0$ であるから (14.1) の展開は成り立たず, 従つて (14.2) の公式も用ゐられない. しかし元來前縁及び後縁の附近では, この論文で採用した出發の假定——みだされない流れに對して, 翼型の存在のために付け加はる速度が小さい——は勿論正しくないのであるから, その附近で (14.2) が用ゐられないといふことはさして大きな障害とはいへないであらう.

§ 15. 循環及び揚力

翼型に働く揚力 L は Kutta-Joukowski-Glauert の定理により, 翼型のまはりの循環の値 Γ (時計方向を正とする) の値がわかれば

$$L = \rho_{\infty} U \Gamma \quad (15.1)$$

によつて計算される. こゝに U, ρ_{∞} はみだされない流れの速度及び密度である.

さて翼型のまはりの循環は

$$-\Gamma = \oint q ds = \oint \frac{d\theta}{ds} ds = \oint d\theta,$$

すなはち翼型を一周する場合に $\theta = x_p + \phi_1 + \phi_2 \dots$ の受ける變化であるから, (11.4), (11.9) によつて容易に, $O(\varepsilon^2)$ まで考へると

$$\Gamma = 2\pi(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (15.2)$$

であることがわかる. いまの場合 $U=1$, 弦長 $l=2$ であるから揚力係数 C_L は

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} U^2 l} = \frac{2\Gamma}{Ul} = 2\pi(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (15.3)$$

で與へられる.

κ_1, κ_2 は Joukowski の假定を用ゐて, $\vartheta=0$ において $d\theta/d\vartheta=0$ になる如く定めればよい. (13.1) より

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{10}}{\mu} = \frac{1}{\mu} [\alpha - g^{*'}(0)], \quad (15.4)$$

$$\kappa_2 = -S'(0) - \nu T(0). \quad (15.5)$$

故に

$$C_L = 2\pi \left\{ \frac{1}{\mu} [a - g^{*'}(0)] - S'(0) - \nu T(0) \right\}. \quad (15.6)$$

但し

$$\mu = \sqrt{1 - M^2}, \quad (15.7)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1 - M^2} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{M^2}{1 - M^2} \right). \quad (15.8)$$

(15.6) の括弧内第一項は明かに Prandtl-Glauert の一次理論に相当する。残りは第二近似の補正を表はす。この場合 Mach 数が ν なる組合せで現はれることは注目し値すると考へられる。

ここで注意すべきは $T(0)$ の計算である。後縁の鋭くない翼型では $T(\vartheta)$ が $\vartheta \rightarrow 0$ のとき ∞ となることがある。この場合には勿論いきなり $T(0)$ を計算することはできない。これは丸い後縁ではこの論文での近似法が意味を失ふといふ事情に基づくものである。このときには Joukowski の假定に相当して

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} [\phi'(\vartheta) + \phi'(-\vartheta)] = 0 \quad (15.9)$$

を用ゐることにより目的を達するであらう (例へば 楕圓柱など)。そして上の諸式において $T(0)$ の代りに

$$T(0) = \frac{1}{2} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} [T(\vartheta) + T(-\vartheta)] \quad (15.10)$$

を用ゐればよい。 $T(0)$ の存在する場合には勿論上の等式は正しい。

§16. 圧力分布

翼型のまはりの速度分布が知れば圧力分布は Bernoulli の定理によつて計算できる。すなはち (2.3), (2.4) により

$$\frac{p}{p_\infty} = \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (16.1)$$

速度公式 I, II, III のどれかを用ゐて q/U がわかるから, (16.1) によつて p/p_∞ を求めればよい。圧力係数を

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} \quad (16.2)$$

で定義すれば, $c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty$ に注意して

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{p_\infty} \cdot \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \cdot \frac{2}{\gamma U^2} = \frac{2}{\gamma M^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right) \quad (16.3)$$

を得る。 M の小さい場合は (16.3) は計算に適しない。このときは (16.1) を展開して

$$\frac{p}{p_\infty} = 1 - \frac{\gamma}{2} M^2 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) + \frac{\gamma}{8} M^4 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right)^2 - \frac{\gamma(2-\gamma)}{48} M^6 \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right)^3 + \dots$$

と書けば, (16.3) は

$$C_p = -\left(\frac{q^2}{U^2} - 1\right) + \frac{M^2}{4}\left(\frac{q^2}{U^2} - 1\right)^2 - \frac{2-\gamma}{24}M^4\left(\frac{q^2}{U^2} - 1\right)^3 + \dots \quad (16.4)$$

となる。これは M の小さい場合の計算に特に便利である。

さて吾々の計算は $q/U \approx 1$ といふ假定に基づくもので、 $q/U - 1 = O(\epsilon)$ として $O(\epsilon^2)$ まで考へたものに相當する。従つて (16.4) においては始めの二項だけを考慮すればよい。(第三項以下が相當大きい場合は、この理論そのものが怪しくなる！)

なほ、速度公式 III に相當して壓力公式を導くことができる。すなはち (14.2) は

$$\frac{q}{U} = 1 + q_1 + q_2 + \dots \quad (16.5)$$

の形に書ける ($U=1$)。但し

$$q_1 = \frac{1}{\mu} \frac{g^*(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}}{\sin \vartheta}, \quad (16.6)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ S'(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\sin \vartheta} + \nu T(\vartheta) + \kappa_2 \right\}. \quad (16.7)$$

また、後縁の鋭い翼型では κ_{10} , κ_2 はそれぞれ (15.4), (15.6) で與へられる。

(16.5) を (16.4) に代入すれば容易に

$$C_p = -2q_1 - (1 - M^2)q_1^2 - 2q_2 + O(\epsilon^3) \quad (16.8)$$

が得られる。しかし實際計算には、先づ q/U を計算した後で (16.4) を用ゐて C_p を出す方が有利であらう。(1)

V. モーメント

§17. 基礎の式

前の節において翼型のまはりの壓力分布の計算法を述べた。壓力分布がわかれば、これを翼型表面について積分することにより、翼型に働く揚力及びモーメントを求めることができるはずである。ところが前にも述べた通り、翼型の前縁及び後縁の附近では、この論文で展開する薄翼展開法は不適當となるので積分計算の結果に幾分誤差を生ずるおそれがある。さしはひ揚力については Kutta-Joukowski-Glauert の定理により簡単な形の公式 (15.6) が得られてゐる。同様な公式をモーメントに對しても導くことができないであらうか？ これが次の問題である。

さきに筆者は、縮む流體の一様な流れの中に任意の形の翼型がおかれてゐる場合に、翼型から無限に遠いところでの流れの漸近的性質を調べ、これを基として翼型に働く揚力及びモーメントの一般式を導いた [1], [3]。揚力の公式は Kutta-Joukowski-Glauert の公式に他ならないが、Glauert の證明法の不備を補つたものである。またモーメントの公式は全く新しい。この公式は次の形に表はされる。

一般に $z (= x + iy)$ 面において x 軸の正の方向に速度 U , Mach 數 M の一様な流れがあ

(1) なほ (16.8) の公式は所望の壓力分布をもつ翼型の設計に利用されよう。これについては目下研究が進められてゐる。

つて、その中に任意の形の翼型がおかれてゐる場合に速度ポテンシャルは

$$\Phi = \frac{U}{2} \left\{ z + \bar{z} + i \frac{\Gamma}{2\pi U} \log \frac{z}{\bar{z}} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^l_{m,n} z^m \bar{z}^n (\log z \bar{z})^l \right\} \quad (17.1)$$

なる形をもつ。このとき翼型に働く壓力の、 z 面の原点 $z=0$ のまはりのモーメントは

$$M_z = -\pi \rho \infty U^2 (1 + \sqrt{1 - M^2}) \mathfrak{S}(A^0_{-1,0}) \quad (17.2)$$

で與へられる。すなはち $2\Phi/U$ を $1/z$, $1/\bar{z}$ について昇冪級數に展開するときの $1/z$ の係數 $A^0_{-1,0}$ がわかりさへすれば M_z が求まる。全く同様にして $z=z_0$ のまはりのモーメントを計算するには、 $2\Phi/U$ を $(z-z_0)^{-1}$, $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-1}$ について昇冪級數に展開して、 $(z-z_0)^{-1}$ の係數を $A^0_{-1,0}$ として (17.2) の公式を適用すればよい。

さて吾々の場合、(2.6) により

$$\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots, \quad (17.3)$$

但し (3.15) により

$$\phi_N = \frac{1}{2} (G_N + \bar{G}_N) \quad (N=1, 2, \dots) \quad (17.4)$$

であるから

$$2\Phi = z + \bar{z} + G_1 + \bar{G}_1 + G_2 + \bar{G}_2. \quad (17.5)$$

こゝに (3.19), (7.4), (8.1), (8.2) により

$$G_1 = f = -\frac{1}{\mu^2} \left(\zeta - c_0 - c_{-1} Z - \frac{c_{-1}}{Z} \right) + i\kappa_1 \log Z, \quad (17.6)$$

$$G_2 = \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 \bar{\zeta} + \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \left\{ \left(\frac{df}{d\zeta} \right)^2 d\zeta + \left(\frac{d\bar{f}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 d\bar{\zeta} + 2 \frac{df}{d\zeta} (\bar{f} + i\kappa_1 \log \bar{Z} - i\kappa_1 \log Z \bar{Z}) \right\} \right] + g_2(Z). \quad (17.7)$$

但し、(6.1), (8.4) により

$$\zeta = c_{-1} Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \dots, \quad (17.8)$$

$$g_2 = i\kappa_2 \log Z + \frac{b_1}{Z} + \frac{b_2}{Z^2} + \dots. \quad (17.9)$$

なほ (3.7), (3.14) により

$$\zeta = \xi + i\eta = x + i\mu y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{\mu}{2}(z - \bar{z}).$$

すなはち

$$\zeta = \frac{1}{2}(1 + \mu)z + \frac{1}{2}(1 - \mu)\bar{z}. \quad (17.10)$$

そこで問題は (17.5) を $(z-z_0)^{-1}$, $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-1}$ についての冪級數に展開するときの $(z-z_0)^{-1}$ の係數を見出すことに歸着する。

§18. 第一近似

いま z 面上の任意の一点 z_0 に對應する ζ 面上の點を ζ_0 とすれば (17.10) により

$$\zeta_0 = \frac{1}{2}(1+\mu)z_0 + \frac{1}{2}(1-\mu)\bar{z}_0 \quad (18.1)$$

である。再び (17.10) を用ゐて

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{1}{2}(1+\mu)(z - z_0) + \frac{1}{2}(1-\mu)(\bar{z} - \bar{z}_0). \quad (18.2)$$

さて (17.8) より

$$\zeta - c_0 = c_{-1}Z + \frac{c_1}{Z} + \dots \quad (18.3)$$

故に $\zeta - c_0$ の大きいところでは

$$Z = \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} - \frac{c_1}{\zeta - c_0} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right), \quad (18.4)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{c_{-1}}{\zeta - c_0} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^3}\right), \quad (18.5)$$

$$\log Z = \log \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right) \quad (18.6)$$

である。いま特に ζ_0 として c_0 をとらう。すなはちこれは

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad \text{但し} \quad c_0 = x_0 + i\mu y_0 \quad (18.7)$$

なる點 z_0 のまはりのモーメントを考へることに相當する。

(18.2) より

$$\begin{aligned} \zeta - c_0 &= \frac{1}{2}(1+\mu)(z - z_0) + \frac{1}{2}(1-\mu)(\bar{z} - \bar{z}_0) \\ &= \frac{1}{2}(1+\mu)(z - z_0) \left\{ 1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right\}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

さて

$$\left| \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| = \frac{1-\mu}{1+\mu} < 1. \quad (18.9)$$

従つて (18.8) より

$$\frac{1}{\zeta - c_0} = \frac{2}{1+\mu} \frac{1}{z - z_0} \left\{ 1 - \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} + \dots \right\}, \quad (18.10)$$

$$\log \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} = \log \frac{1+\mu}{2c_{-1}} + \log(z - z_0) + \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} \right)^2 + \dots \quad (18.11)$$

(18.3), (18.5) より

$$\begin{aligned} \zeta - c_0 - c_{-1}Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} &= \frac{c_1 - \bar{c}_{-1}}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \\ &= \frac{c_{-1}(\bar{c}_1 - \bar{c}_{-1})}{\zeta - c_0} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right). \end{aligned} \quad (18.12)$$

モーメントの計算には $(z - z_0)^{-1}$, $(\bar{z} - \bar{z}_0)^{-1}$ の項だけが問題となり, $(z - z_0)^l (\bar{z} - \bar{z}_0)^m$ のや

うな混合積は必要がないから、今後簡単のために $(z-z_0)^{-1}$, $(\bar{z}-\bar{z}_0)^{-1}$ の項だけを矢印 \rightarrow を用ゐて表はすことにしよう。さうすれば (18.10), (18.12) により

$$\zeta - c_0 - c_{-1} Z - \frac{\bar{c}_{-1}}{Z} \rightarrow \frac{2c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{1 + \mu} \frac{1}{z - z_0}. \quad (18.13)$$

また (18.6), (18.11) より

$$\log Z \rightarrow 0. \quad (18.14)$$

(18.13), (18.14) を (17.6) に入れると

$$G_1 = f \rightarrow - \frac{2c_{-1}(c_1 - c_{-1})}{\mu^2(1 + \mu)} \frac{1}{z - z_0}. \quad (18.15)$$

これでモーメントに対する第一近似が計算できる。

§19. 第二近似

(17.6), (18.6), (18.12) より

$$f = i\kappa_1 \log \frac{\zeta - c_0}{c_{-1}} - \frac{c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{\mu^2(\zeta - c_0)} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right). \quad (19.1)$$

従つて

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{i\kappa_1}{\zeta - c_0} + \frac{c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{\mu^2(\zeta - c_0)^2} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^3}\right), \quad (19.2)$$

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 = - \frac{\kappa_1^2}{(\zeta - c_0)^2} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^3}\right). \quad (19.3)$$

さて (18.2) より ($\zeta_0 = c_0$ である),

$$\bar{\zeta} = \bar{c}_0 + \frac{1}{2}(1 + \mu)(\bar{z} - \bar{z}_0) + \frac{1}{2}(1 - \mu)(z - z_0). \quad (19.4)$$

故に (19.3), (19.4) より, (18.10) に注意すれば

$$\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \bar{\zeta} \rightarrow - \frac{2\kappa_1^2(1 - \mu)}{(1 + \mu)^2} \frac{1}{z - z_0} \quad (19.5)$$

を得る。また (19.3) より, (18.10) を考へて

$$\int \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\zeta = \frac{\kappa_1^2}{\zeta - c_0} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right) \rightarrow \frac{2\kappa_1^2}{1 + \mu} \frac{1}{z - z_0}. \quad (19.6)$$

故に

$$\int \left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 d\bar{\zeta} \rightarrow \frac{2\kappa_1^2}{1 + \mu} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (19.7)$$

次に (18.6), (19.1), (19.2) より

$$\begin{aligned} & \frac{df}{d\zeta} (\bar{f} + i\kappa_1 \log \bar{Z} - i\kappa_1 \log Z\bar{Z}) \\ &= \frac{df}{d\zeta} (\bar{f} - i\kappa_1 \log Z) \\ &= \frac{\kappa_1^2}{\zeta - c_0} \log \frac{(\zeta - c_0)(\bar{\zeta} - \bar{c}_0)}{c_{-1}\bar{c}_{-1}} + O\left(\frac{1}{(\zeta - c_0)^2}\right). \end{aligned} \quad (19.8)$$

さて (18.10), (18.11) によれば $(\zeta - c_0)^{-1}$, $\log \{(\zeta - c_0)(\bar{\zeta} - \bar{c}_0)/c_{-1}\bar{c}_{-1}\}$ を $z - z_0$, $\bar{z} - \bar{z}_0$ について展開するとき, 係数はすべて實数である. 故に (19.8) の右邊第一項を $z - z_0$, $\bar{z} - \bar{z}_0$ について展開するときの係数もすべて實数である. 従つて

$$\frac{df}{d\zeta} (\bar{f} + ik_1 \log \bar{Z} - ik_1 \log Z\bar{Z}) \rightarrow \frac{\text{r.c.}}{z - z_0} + \frac{\text{r.c.}}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (19.9)$$

但し r.c. は實数の常數を意味する.

最後に (17.9), (18.5), (18.10), (18.14) より

$$g_2 = ik_2 \log Z + \frac{b_1}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right) \rightarrow \frac{2b_1 c_{-1}}{1 + \mu} \frac{1}{z - z_0}. \quad (19.10)$$

結局 (17.7), (19.5), (19.6), (19.7), (19.9), (19.10) によつて

$$G_2 \rightarrow \left(\frac{2b_1 c_{-1}}{1 + \mu} + \text{r.c.}\right) \frac{1}{z - z_0} + \frac{\text{r.c.}}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (19.11)$$

が得られる.

§ 20. z_0 のまはりのモーメント

(18.15), (19.11) を (17.5) に入れれば, 2ϕ を $(z - z_0)^{-1}$, $(\bar{z} - \bar{z}_0)^{-1}$ の昇冪に展開するときの $(z - z_0)^{-1}$ の係数 $A^0_{-1,0}$ は

$$A^0_{-1,0} = -\frac{2c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1})}{\mu^2(1 + \mu)} + \frac{2b_1 c_{-1}}{1 + \mu} + \text{r.c.} \quad (20.1)$$

であることが容易にわかる. さて (17.8), (9.9) (9.10) により

$$\begin{aligned} \zeta &= c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \dots \\ &= \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \bar{C}(Z), \end{aligned} \quad (20.2)$$

但し

$$C(Z) = C_{-1}Z + C_0 + \frac{C_1}{Z} + \dots \quad (20.3)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} c_n &= C_n, \quad (n > 1) \\ c_{-1} &= \frac{1}{2} + C_{-1}, \quad c_0 = C_0, \quad c_1 = \frac{1}{2} + C_1 \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

である. また假定により $C_n = O(\epsilon)$, $(n = -1, 0, 1, \dots)$ である. (20.4) より

$$c_{-1}(c_1 - \bar{c}_{-1}) = (\frac{1}{2} + c_{-1})(C_1 - C_{-1}). \quad (20.5)$$

b_1 は明かに $O(\epsilon^2)$ であるから

$$2b_1 c_{-1} = b_1 + O(\epsilon^3). \quad (20.6)$$

従つて (20.1) より

$$\Im(A^0_{-1,0}) = -\frac{1}{\mu^2(1 + \mu)} \Im\{(1 + 2C_{-1})(C_1 - C_{-1})\} + \frac{1}{1 + \mu} \Im(b_1) + O(\epsilon^3).$$

これを (17.2) に入れて $\mu = \sqrt{1-M^2}$ に注意すれば

$$\frac{M_z}{\rho_\infty U^2} = \frac{\pi}{\mu^2} \Im \{ (1+2C_{-1})(C_1 - \bar{C}_{-1}) \} - \pi \Im \{ b_1 \}. \quad (20.7)$$

(20.3) より Cauchy の定理により

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{C(Z)}{Z^2} dZ,$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{C(Z)}{Z} dZ,$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint C(Z) dZ.$$

但し積分路は Z 面において単位円 $: Z = e^{i\theta}$ を内部に含む任意の閉曲線である。いま特に単位円自身を積分路に選べば, (9.12) により

$$C(e^{i\theta}) = A(\theta) + iB(\theta)$$

であるから, 上の三つの式はそれぞれ

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) + iB(\theta)] e^{-i\theta} d\theta, \quad (20.8)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) + iB(\theta)] d\theta, \quad (20.9)$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) + iB(\theta)] e^{i\theta} d\theta \quad (20.10)$$

となる。従つて

$$C_1 - \bar{C}_{-1} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta) \cos \theta d\theta,$$

$$2C_{-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) \cos \theta + B(\theta) \sin \theta] d\theta - \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) \sin \theta - B(\theta) \cos \theta] d\theta.$$

これより

$$\begin{aligned} & \Im \{ (1+2C_{-1})(C_1 - \bar{C}_{-1}) \} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} A(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} B(\theta) \cos \theta d\theta \\ & \quad + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} A(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} B(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (20.11)$$

さて (10.14), (10.19) より

$$A(\theta) = \mu h(\theta) + O(\epsilon^2), \quad (20.12)$$

$$B(\theta) = \mu [g(\theta) - a \cos \theta] - \mu^2 \left[\frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) + ah(\theta) \right] + O(\epsilon^3). \quad (20.13)$$

故に

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A(\theta) \cos \theta d\theta &= \mu \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + O(\epsilon^2), \\ \int_0^{2\pi} A(\theta) \sin \theta d\theta &= \mu \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta + O(\epsilon^2), \\ \int_0^{2\pi} B(\theta) \cos \theta d\theta &= \mu \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi\mu a \\ &\quad - \mu^2 \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta - \mu^2 a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + O(\epsilon^3), \\ \int_0^{2\pi} B(\theta) \sin \theta d\theta &= \mu \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

これらを (20.11) に入れれば

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{\mu^2} \Im \{ (1+2C_{-1})(C_1 - \bar{C}_{-1}) \} \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi a \right\} - \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta - 2a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (20.14)$$

次に $\Im(b_1)$ を求めよう。(17.9) により

$$\begin{aligned} g_2(e^{i\theta}) &= -\kappa_2 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ni\theta} \\ &= -\kappa_2 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Re(b_n) + i \Im(b_n) \} (\cos n\theta - i \sin n\theta) \\ &= -\kappa_2 \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Re(b_n) \cos n\theta + \Im(b_n) \sin n\theta \} \\ &\quad + i \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Im(b_n) \cos n\theta - \Re(b_n) \sin n\theta \}. \end{aligned}$$

ところが (8.7) により

$$g_2(e^{i\theta}) = R_2(\theta) + iI_2(\theta).$$

であるから、上の式と比べて

$$I_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \Im(b_n) \cos n\theta - \Re(b_n) \sin n\theta \}.$$

故に

$$\Im(b_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I_2(\theta) \cos \theta d\theta. \quad (20.15)$$

さて (8.11) より⁽¹⁾

$$I_2(\theta) = -Q_2(\theta). \quad (20.16)$$

但し $Q_2(\theta)$ は (18.6) によつて

(1) 複素速度ポテンシャルの第一近似 f はいまの場合完全に境界条件を満たしてゐるから、(8.10) の右邊は 0, 従つて $\gamma_2(\theta)$ は 0 である。

$$\begin{aligned}
& P_2(\theta) + iQ_2(\theta) \\
&= \frac{M^2}{4} \left[\frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \bar{\zeta}_P \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} + 2 \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ (\bar{f} + \kappa_1 \theta) \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} + \Re \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} d\theta \right\} \right] \quad (20.17)
\end{aligned}$$

の如く與へられる。従つて (20.15) は

$$\Im(b_1) = -\frac{1}{\pi} \Im \int_0^{2\pi} [P_2(\theta) + iQ_2(\theta)] \cos \theta d\theta \quad (20.18)$$

のやうに書き表はされる。次に $O(\varepsilon^3)$ を無視して (20.18) を簡単にしよう。

先づ

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 e^{-2i\omega} \bar{\zeta}_P \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} (df/d\zeta)_P^2 \bar{\zeta}_P \cos \theta d\theta$$

である。ところが $df/d\zeta = O(\varepsilon)$ で

$$\zeta_P = \xi_P + i\eta_P = \cos \theta + O(\varepsilon), \quad \bar{\zeta}_P = \xi_P - i\eta_P = \cos \theta + O(\varepsilon)$$

であるから、 $O(\varepsilon^3)$ を無視すれば

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 \bar{\zeta}_P \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 \zeta_P^2 \frac{d(e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} = \frac{1}{i} \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 \zeta^2 \frac{dZ}{Z},$$

但し積分路は単位圓であるが、被積分函数が Z の解析函数 ($Z > 1$ で正則な) であるから、これはまた単位圓を内部に含む任意の閉曲線でおきかへられる。従つて (19.3) に注意すれば Cauchy の留数の定理により上の積分は

$$\frac{1}{i} \oint \left(\frac{df}{d\zeta} \right)_P^2 \zeta^2 \frac{dZ}{Z} = 2\pi i \times \frac{1}{i} (-\kappa_1^2) = -2\pi \kappa_1^2$$

となり實數である。従つて (20.17) の左邊括弧内の第一項は $\Im(b_1)$ には寄與しない。

なほ (20.17) の最後の項は實數であるから、勿論 $\Im(b_1)$ には寄與しない。

さて (11.6), (11.7), (11.8) により

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{\mu} [f_0(\theta) - \kappa_{10}\theta] + O(\varepsilon^2), \quad (20.19)$$

但し

$$f_0(\theta) = -\{g^*(\theta) + i[g(\theta) - g_0] - iae^{-i\theta}\}, \quad (20.20)$$

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad (20.21)$$

$$\kappa_{10} = \mu \kappa_1 = a - g^{*'}(0). \quad (20.22)$$

これらを (20.17), (20.18) に入れると結局

$$\Im(b_1) = -\frac{\nu}{\pi} \int_0^{2\pi} Q(\theta) \cos \theta d\theta \quad (20.23)$$

を得る。こゝで (11.13), (11.14) と同様

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega}, \quad (20.24)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1-M^2} \left(1 + \frac{\gamma+1}{4} \frac{M^2}{1-M^2} \right) \quad (20.25)$$

とおいてある。

こゝで一言注意すべきは、(17.6)で與へられる f は Z^{-1} の冪級数として常數項をもたず、従つて (20.20) で與へられる $f_0(\theta)$ を $e^{-i\theta}$ の冪級数として表はせばやはり常數項をもたないことである。

(20.7), (20.14), (20.23) により $z=z_0$ のまはりのモーメントが與へられるのである。

§21. 後縁のまはりのモーメント

前の節で求めたモーメントは $z_0 = x_0 + iy_0$ なる特別な點のまはりのものである。ところが (18.7), (20.4); (20.9) によれば

$$x_0 + iy_0 \equiv c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\theta) + iB(\theta)] d\theta.$$

従つて

$$x_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\theta) d\theta = \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + O(\epsilon^2), \quad (21.1)$$

$$y_0 = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{2\pi} B(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta + O(\epsilon^2). \quad (21.2)$$

實際的には、かやうな特別な點ではなく何かはつきりした點のまはりのモーメントを求めることが望ましい。吾々はそこで後縁のまはりのモーメントを求めることにしよう。

翼型の表面の點は (9.5), (9.6) により

$$x_P = \cos \vartheta + O(\epsilon^2), \quad (21.3)$$

$$y_P = g(\vartheta) - a \cos \vartheta + O(\epsilon^3) \quad (21.4)$$

の如く與へられる。後縁 (x_K, y_K) は $\vartheta=0$ に對應するから

$$x_K = 1 + O(\epsilon^2), \quad y_K = g(0) - a + O(\epsilon^3). \quad (21.5)$$

従つて (21.1), (21.5) より

$$x_K - x_0 = 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta + O(\epsilon^2). \quad (21.6)$$

いま後縁のまはりのモーメントを M_K で表はせば (頭下げを正とする), 明かに

$$M_K = M_z - (x_K - x_0)L. \quad (21.7)$$

揚力係數及びモーメント係數をそれぞれ

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 l}, \quad C_m = \frac{M_K}{\frac{1}{2}\rho_\infty U^2 l^2} \quad (21.8)$$

で表はせば、いまの場合弦長は $l=2$ であるから

$$C_m = \frac{M_z}{2\rho_\infty U^2} - \frac{C_L}{2} (x_K - x_0). \quad (21.9)$$

但し (15.6) により

$$C_L = 2\pi \left\{ \frac{1}{\mu} [a - g^{*'}(0)] - S'(0) - \nu T(0) \right\}. \quad (21.10)$$

(20.7), (20.14), (20.23), (21.6), (21.10) を (21.9) に入れれば

$$\begin{aligned} C_m = & \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi a \right\} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta \\ & - a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} [a - g^{*'}(0)] \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \\ & + \frac{\nu}{2} \int_0^{2\pi} Q(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} C_L. \end{aligned} \quad (21.11)$$

VII. 結 果

§22. 應用の便利のために、いままでに得た結果をまとめておかう。

任意の翼型 P は

$$X = \cos \vartheta, \quad Y = g(\vartheta) \quad (22.1)$$

の如く ϑ を副變數として表はすことができる。いま P が、速度 U , Mach 數 M の一様な流れの中に迎角 α なる姿勢でおかれてゐるものとすれば、P の表面における速度分布は(こゝでは速度公式 III だけを記す)

$$\begin{aligned} \frac{q}{U} = & 1 + \frac{1}{\mu} \frac{g^{*'}(\vartheta) - a \cos \vartheta + \kappa_{10}}{\sin \vartheta} \\ & + \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ S'(\vartheta) - \frac{1}{2} \frac{[g'(\vartheta)]^2}{\sin \vartheta} + \nu T(\vartheta) + \kappa_2 \right\} \end{aligned} \quad (22.2)$$

で與へられる。但し

$$\mu = \sqrt{1 - M^2}, \quad (22.3)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \frac{M^2}{1 - M^2} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{4} \frac{M^2}{1 - M^2} \right). \quad (22.4)$$

また

$$\begin{aligned} S(\theta) = & \frac{\alpha^2}{2} \cos \theta - \alpha g(\theta) + \left\{ g^{*'}(\theta) - a \cos \theta + \kappa_{10} \right\} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} \\ & - \left\{ g'(\theta) \frac{h(\theta)}{\sin \theta} + \alpha h(\theta) \right\}^* \end{aligned} \quad (22.5)$$

$$T(\theta) = -\Re \left\{ \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right)^2 \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} \right\} - \{ P'(\theta) - Q^{*'}(\theta) \}, \quad (22.6)$$

但し

$$h(\theta) = g^*(\theta) - \frac{1}{2}[g^*(0) - g^*(\pi)] \cos \theta - g^{*'}(0) \sin \theta - \frac{1}{2}[g^*(0) + g^*(\pi)], \quad (22.7)$$

$$f_0(\theta) = -\{g^*(\theta) + i[g(\theta) - g_0] - iae^{-i\theta}\}, \quad (22.8)$$

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta, \quad (22.9)$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} = \{-\sin \theta + A'(\theta) + iB'(\theta)\}^{-1}, \quad (22.10)$$

$$A(\theta) = \mu h(\theta) + O(\varepsilon^2), \quad (22.11)$$

$$B(\theta) = \mu[g(\theta) - a \cos \theta] + O(\varepsilon^2), \quad (22.12)$$

$$P(\theta) + iQ(\theta) = \bar{f}_0 \left(\frac{df_0}{d\theta} - \kappa_{10} \right) \frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega}. \quad (22.13)$$

また * 印は共軛 Fourier 級数を示す。すなはち、 $g(\theta)$ を Fourier 級数で表はして

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \quad (22.14)$$

とすれば

$$g^*(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n \cos n\theta + a_n \sin n\theta) \quad (22.15)$$

である。なほ

$$g^*(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [g(\theta + \varphi) - g(\theta)] \cot \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad (22.16)$$

なる関係も成り立つ。

翼のまはりの循環を Γ とすれば (時計方向を正とする)

$$\Gamma = 2\pi(\kappa_1 + \kappa_2), \quad (22.17)$$

但し κ_1, κ_2 は Joukowski の假定に従へば

$$\kappa_1 = \frac{\kappa_{10}}{\mu} = \frac{1}{\mu} [a - g^{*'}(0)], \quad (22.18)$$

$$\kappa_2 = -[S'(0) + \nu T(0)] \quad (22.19)$$

で與へられる。

壓力分布を求めるには (16.4) により

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2} = -\left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right) + \frac{M^2}{4} \left(\frac{q^2}{U^2} - 1 \right)^2 \quad (22.20)$$

を用ゐればよい。

次に、翼型に働く揚力を L 、後縁のまはりのモーメントを M_K (頭下げを正とする)、弦長を $l=2$ とし

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2 l}, \quad C_m = \frac{M_K}{\frac{1}{2} \rho_\infty U^2 l^2} \quad (22.21)$$

で揚力係数 C_L 、モーメント係数 C_m を定義すれば、これらは

$$C_L = 2\pi \left\{ \frac{1}{\mu} [a - g^{*'}(0)] - S'(0) - \nu T(0) \right\}, \quad (22.22)$$

$$\begin{aligned} C_m = & \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta - \pi a \right\} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{\sin \theta} g'(\theta) \cos \theta d\theta \\ & - a \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} [a - g^{*'}(0)] \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta \\ & + \frac{\nu}{2} \int_0^{2\pi} Q(\theta) \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} C_L \end{aligned} \quad (22.23)$$

で與へられる。

最後に、 $T(\theta)$ の計算について注意すべきは、 $\theta=0, \pi$ の附近を除けば (20.10) は

$$\frac{d\theta}{d\sigma} e^{-i\omega} = -\frac{1}{\sin \theta} + O(\varepsilon) \quad (22.24)$$

のやうに表はせることである。このおきかへをすれば計算はずつと簡単になる。 $\theta=0, \pi$ の附近では上のおきかへは許せないから、そこだけは (22.10) を正しく計算するか、或はむしろ元へ戻つて速度公式 I (§12) または速度公式 II (§13) によつて計算する方がよい。しかし、この論文で用ゐた近似法そのものが岐點の近傍ではあやしくなることから考へると、上は述べたやうな幾分合理的ではあるがそれだけ面倒な計算を行つて $\theta=0, \pi$ の附近の値を求めても、得られる結果はさほど精密にはならないのではなからうかと思はれる。

なほ上の事實と関連して、 $T(0)$ を計算するには

$$T(0) = \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} [T(\theta) + T(-\theta)] \quad (22.25)$$

を用ゐるのが實際的に有利である。

VIII. む す び

§23. 高速度における翼型の空氣力學的理論の一つとして、さきに筆者は“ M^2 展開法”を述べたが、この論文では“薄翼展開法”を述べる。すなはち任意の翼型を一樣な流れの中におくとき、翼型の厚みも反りも著しくなく、迎角も小さいとすれば、翼型の存在のために一樣な流れの受ける變化は小さい量と考へられる。そこでこれを ε の程度の小さい量と假定する。そして流れを表はす速度ポテンシャル Φ 、流れの函数 Ψ を $\Phi = x + \phi_1 + \phi_2 + \dots$ 、 $\Psi = y + \psi_1 + \psi_2 + \dots$ の如く展開できるものとして $\phi_1, \psi_1; \phi_2, \psi_2; \dots$ を定めようとするのである。但し添字 1, 2, \dots はそれぞれ $O(\varepsilon)$, $O(\varepsilon^2)$, \dots の量を表はす。

容易に認められるとほり、この理論の第一近似 ($\Phi = x + \phi_1$, $\Psi = y + \psi_1$ に對應する) は Prandtl-Glauert の一次理論と同等である。

原理的にはこの方法で如何程高次の近似にも進むことができるのであるが、計算の複雑さと實用性とを考へて、この論文では第二近似すなはち $\Phi = x + \phi_1 + \phi_2$, $\Psi = y + \psi_1 + \psi_2$ まで嚴

密に求めるに止める。

任意翼型を通り過ぎる一様な流れにおいて、翼型から無限に遠いところでの ϕ , ψ の漸近展開式については、さきに筆者は M^2 展開法から出發してこれを求め、更にこれを利用して翼型に働く揚力、モーメントの一般公式を導いたのであるが [1]、この論文で述べた方法を用ゐると一層簡単に結果の式が得られる [3]。

翼型表面だけに考察を限れば結果は更にはつきりした形に表はすことができる。すなはち、翼型表面の速度分布は具體的な公式 I, II, III の形にまとめ上げることができる。このうち公式 III が最も便利であらう。なほ、翼型に働く揚力及びモーメントに対しても一般的な公式を導くことができた。

上の諸公式の具體的な應用例として筆者は一般 Joukowski 翼型を取扱ひ、速度分布、揚力、モーメントの解析式を見出し、また數值的な議論も行つたが、これらについては改めて報告するつもりである。

昭和 18 年 10 月 31 日

空氣力學第一部

参 考 文 献

- [1] IMAI, I. : On the asymptotic behaviour of compressible fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to its lift and moment. *Proc. Phys-Math. Soc. Japan*, 24 (1942), 231.
- [2] 今井 功 : 任意翼型の理論. 航空學會誌 9 (1942), 865.
- [3] 今井 功 : 柱を過ぎる壓縮性流體の流れの無限遠における漸近的性質. 數物會誌 17 (1943), 495.
- [4] 今井 功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布について, I 航研報告 275 (1943).
- [5] 今井 功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布について, II. 圓柱及び圓弧翼. 航研報告 285 (1944).
- [6] 友近 晋・川村 徹・橋本次郎 : 壓縮性流體の亞音速流理論に於ける逐次近似法及び臨界 Mach 數に対する吟味, I. 航空學會誌 10 (1943), 337.