

超音速および極超音速における円柱列の研究

第2報 超音速における2本の平行な円柱の周りの衝撃波

河 村 龍 馬
沢 田 孝 士*
関 和 市

Study of Lattice of Circular Cylinders in Supersonic and Hypersonic Flow

2. Shock Waves about Lattices of Two Parallel Circular Cylinders in Supersonic Flow

By

Ryuma KAWAMURA, Takashi SAWADA
and Kazuichi SEKI

Abstract: In this paper are described the analyses of shock envelopes about single circular cylinder and lattices of two parallel circular cylinders in supersonic flow of Mach number 2 based on the experiments reported previously. The vertices of the envelopes are taken as origin, the direction of uniform flow as X co-ordinate, the perpendicular to it as Y , the diameter of the cylinder as unit of length. It is found the formula $X=AY^n$ gives adequate expression for every shock envelope in a limited domain, where A and n are constants defined by experimental data. For single cylinder $A=0.207$, $n=1.70$, and Δ (the detachment distance)=0.64. For lattices, the following equations are applicable:

$$\begin{aligned}A &= 0.116 - 0.0603(H')^{0.67}, \\n &= 3.65 - 1.15(2.5 - H')^{0.50}, \\ \Delta &= 1.46 - 0.20H', \quad 0 < H' < 2.5,\end{aligned}$$

where H' is the shortest distance between the surfaces of two cylinders. Furthermore, the radius of curvature in the vicinity of the vertex of shock envelope and the intersection of two shock waves are considered theoretically.

概 要

本報においては超音速 ($M=2$) における単独円柱および2本の平行な円柱の周りの衝撃波面の解析を行なった。衝撃波面は Schlieren 写真法によって得られたものである。波面の頂点を原点にとり、流れの方向に X , それと直角の方向に Y 軸をとる。円柱の直径を長さの単位に選ぶことによって、長さを無次元化してある。すると $X=AY^n$ の型の方程

* 北海道学芸大学

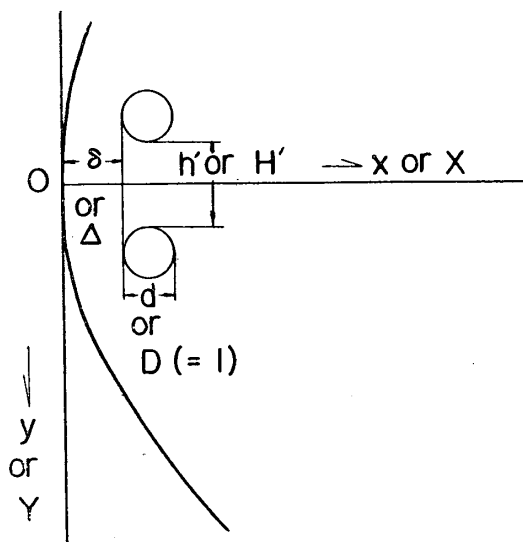
式において, A, n に適当な値を与えることによって, すべての衝撃波面を, ある有限の領域にわたり, 高い近似度をもって表現しうる. 単独円柱の場合は $A=0.207$, $n=1.70$, 離れ距離 $\Delta=0.64$ である. 円柱列の場合は

$$\begin{aligned} A &= 0.116 - 0.0603(H')^{0.67}, \\ n &= 3.65 - 1.15(2.5 - H')^{0.50}, \\ \Delta &= 1.46 - 0.20H', \quad 0 < H' < 2.5 \end{aligned}$$

という関係がなりたつ. ここで H' は2本の円柱の最短距離である. 最後に衝撃波面の頂点付近の曲率半径および, 2つの衝撃波の干渉に関する理論的考察を行なった.

1. 衝撃波面の解析

円柱あるいは円柱列において, その周りの衝撃波面 (shock envelope) を知ることは, きわめて有益である. たとえば内田, 保原 [1] 両氏の行なった円柱の周りの flux analysis においても, あらかじめ shock envelope が既知であるなら, 計算の労苦はかなり軽減されるだろう. 従来は球または円柱の shock envelope の解析的表示としては放物線あるいは双曲線による近似が行なわれている [2], [3]. もちろん解析に便利な函数形を選ぶということは当然であるが, 実際の shock envelope がどのような形をしているかを知ることでもある重要なことである. この報告で述べる shock envelope の測定と解析は第1報 [4] の図版の original film に対して行なったものである. その方法は projector を用いて実物の2倍に拡大し, 方眼紙の上に輪郭を記録して数値を読みとった. この際, 特に大切なことは中心線に対して envelope が完全に左右対称になるように投射することである. 楔の底辺を中心線に対して直角に投射しただけでは左右対称はえられない. ということは, 風洞中の超音速流は必ずしも楔に対して厳密には左右対称になっていないことを意味している. もちろんその偏りはきわめて小さいから抵抗係数の測定などの場合は補正の必要は生じないが, envelope の解析においては, かりに左右の平均値を採るとしても誤差を生ずる恐れがある. 互に対応



第1図 記号の説明.

する envelope 上の左右の二つの領域を中心線に対して左右対称になるように投射すると, 残りの全領域が, 測定の誤差の範囲内で完全に左右対称となる. 離れ距離 δ の測定を行なう際は特に細心の注意を要する. 円柱の端面は陰影部になっているため写真にはほとんど写っていない. したがって stagnation point より発生している波を手掛りに円柱の頂点を探りだすほかないのである.

なお写真に写っている楔の大きさを測定した結果, 次のようなことが判った. 実際の大きさは横 100 mm に対し縦 54.5 mm である. しかし写真から測ると横を 100 とすると縦は 56 くらいとなる. この原因の一つとし

て、写真の像がゆがんでいて、縦横の倍率が等しくなっていないということも考えられよう。しかし以下においては、このようなゆがみは存在しないものと仮定して、測定の結果を整理した。

第1図は座標、その他の記号を示したものである。一般に長さに cm, あるいは mm を用いたときは記号は小文字とし、円柱の直径を長さの単位に選んで、長さを無次元化した場合は大文字を用いることにする。

1. 単 独 円 柱

第2図は測定値を対数方眼紙上に plot したものである。 $x < 1 \text{ cm}$ の領域は、測定はかなり困難であるが、測定点はきれいに並んでおり、かつ左右の対称性も申し分ない。これらの点列は、わずかに彎曲した曲線の上に並んでいて、 x が増すと共に shock envelope が Mach line に漸近することを示している。しかし $x > 6 \text{ cm}$ の領域においては、A のような直線で近似しても、 y の誤差は 1 mm 以下である。この直線の方程式は

$$x = 0.182y^{1.70} \quad 0 < x < 6 \text{ cm} \quad (1-A)$$

である。Shock envelope を放物線で表示するということは、たとえば B のような直線で近似することであって、あまりよい近似ではないことがわかる。B の方程式は

$$x = 0.147y^{2.00} \quad (1-B)$$

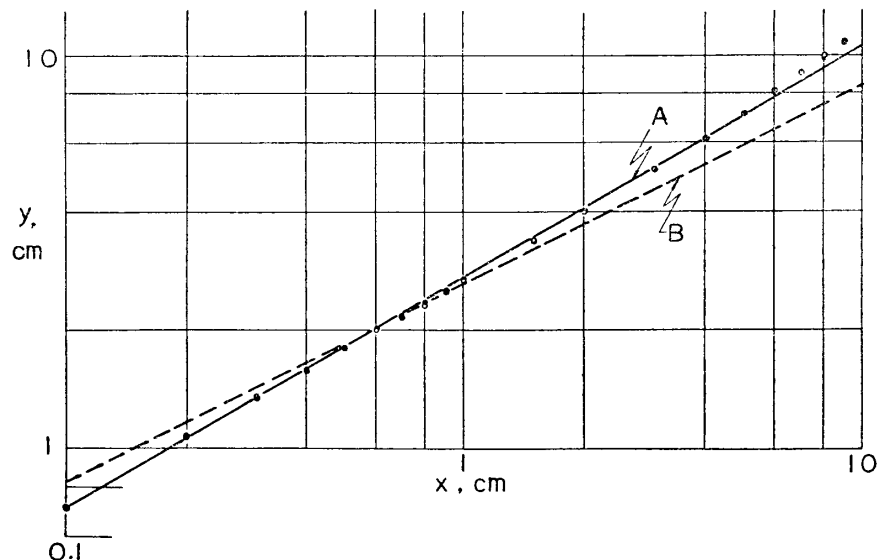
である。

(1-A) 式を無次元化すると

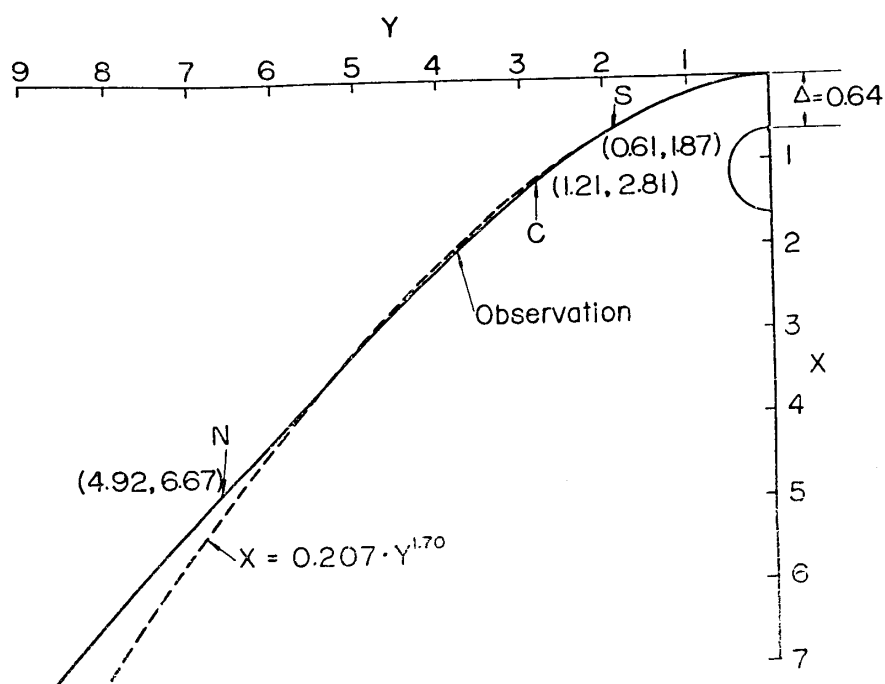
$$X = 0.207Y^{1.70} \quad (1-AO)$$

となる。離れ距離 δ の測定はきわめて困難で $0.80 \sim 0.75 \text{ cm}$ の間にあるように見える。そこで $\delta = 0.77 \text{ cm}$ とするなら

$$\Delta = \frac{\delta}{d} = \frac{0.77}{1.2} = 0.64 \quad (2)$$



第2図 単独円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線。白および黒丸はそれぞれ x 軸に関して左および右の値をしめす。



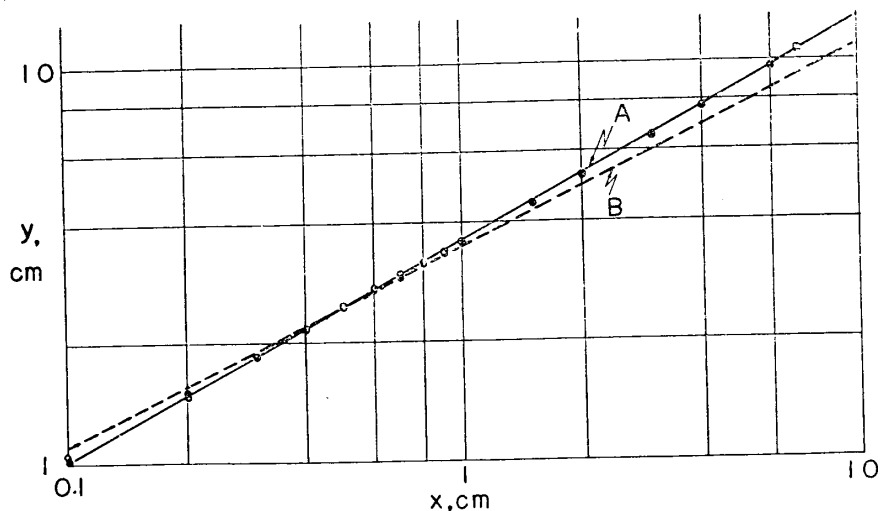
第3図 単独円柱の shock envelope.

となる。第3図の実線は観測された shock envelope を示し、破線は (1-AO) 式による曲線である。この図からも、(1-AO) 式による近似が、きわめてすぐれたものであることがわかる。

2. 2本の平行な円柱

1) $h'=0$

第1報、図版7(a)でわかるように、黒い線で現られるはずの shock envelope が、きわめて淡く見難いのでやむをえず、その下の白い帯の前縁に沿って envelope を決めた。しかし δ の測定には真の shock envelope の頂点まで測らねばならない。さてこのような方法で第4図がえられた。

第4図 $h'=0$ なる2本の平行な円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線.

$h'=0.1$ および 1.0 mm の場合も測定を行なったが、その結果は測定誤差の範囲内で第4図と同じといってよい位であった。図においてAなる直線で envelope を近似すると、 y の誤差を 1 mm 以下にとどめて

$$x=0.100y^{1.80} \quad 0 < x < 7 \text{ cm} \quad (3-A)$$

なる方程式で示すことができる。

また長さを無次元化すると、(3-A) 式は

$$X=0.116Y^{1.80} \quad (3-AO)$$

と書きかえられる。

つぎに図のBなる直線は、放物線により近似した例であって、Aにくらべて近似性はずっと悪くなる。Bは

$$x=0.0827y^{2.00} \quad (3-B)$$

なる方程式で示される。

2) $h'=5$ mm

第5図が測定の結果であって、非常におもしろいことは図中に示すような、 y の power がちょうど 2.00 になるような直線を引くと、かなり良い近似で envelope を近似することができる。この直線の方程式は

$$x=0.0693y^{2.00} \quad 0 < x < 5 \text{ cm} \quad (4)$$

である。

3) $h'=10$ mm

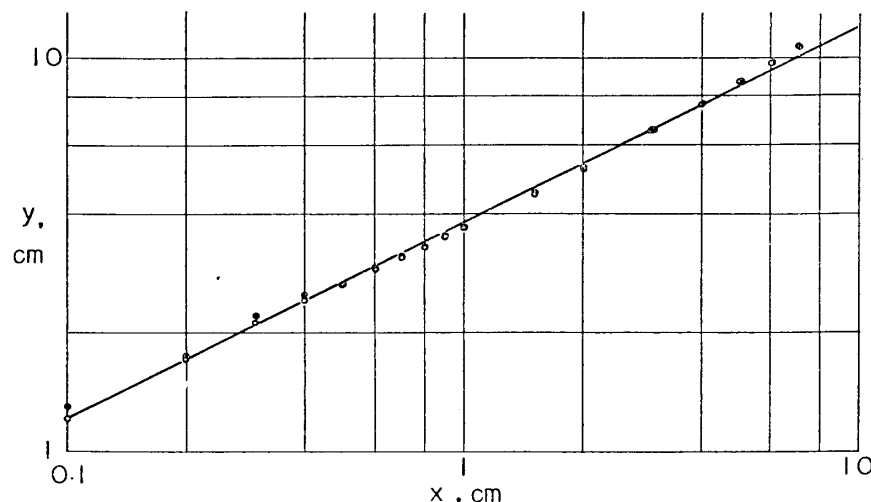
第6図に示すような直線で envelope を近似すると、その方程式は

$$x=0.0499y^{2.16} \quad 0 < x < 3.5 \text{ cm} \quad (5)$$

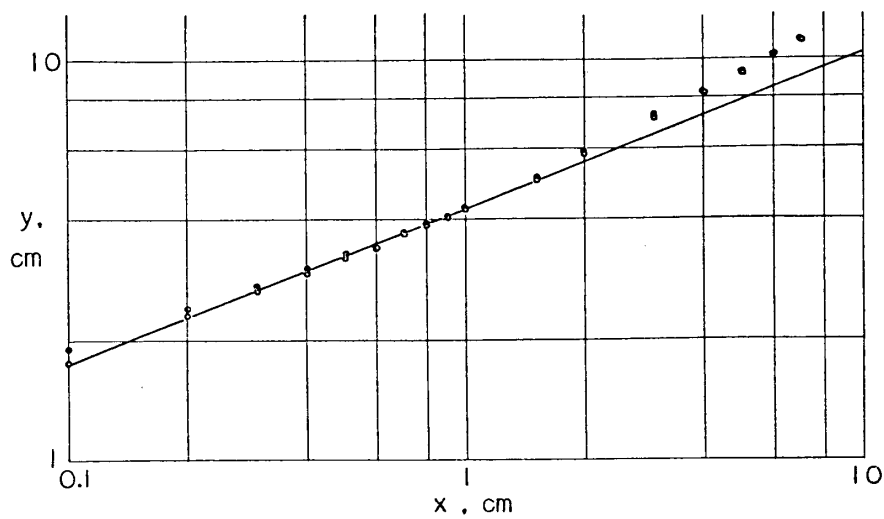
である。

4) $h'=20$ mm

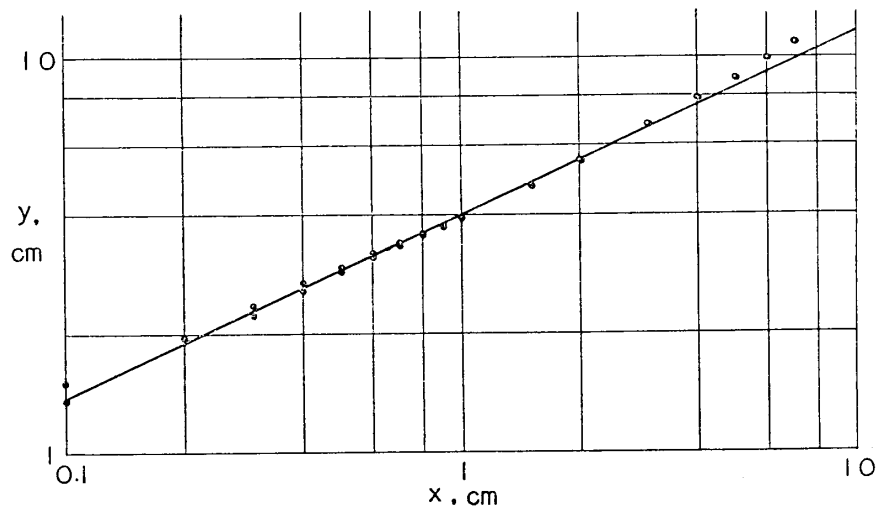
第7図に示すような直線で envelope を近似すると、その方程式は



第5図 $h'=5$ mm なる2本の平行な円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線。



第6図 $h'=10$ mm なる2本の平行な円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線.



第7図 $h'=20$ mm なる2本の平行な円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線.

$$x=0.0239y^{2.59} \quad 0 < x < 1.8 \text{ cm} \quad (6)$$

である.

5) $h'=30$ mm

第8図に示すような直線で envelope を近似すると, その方程式は

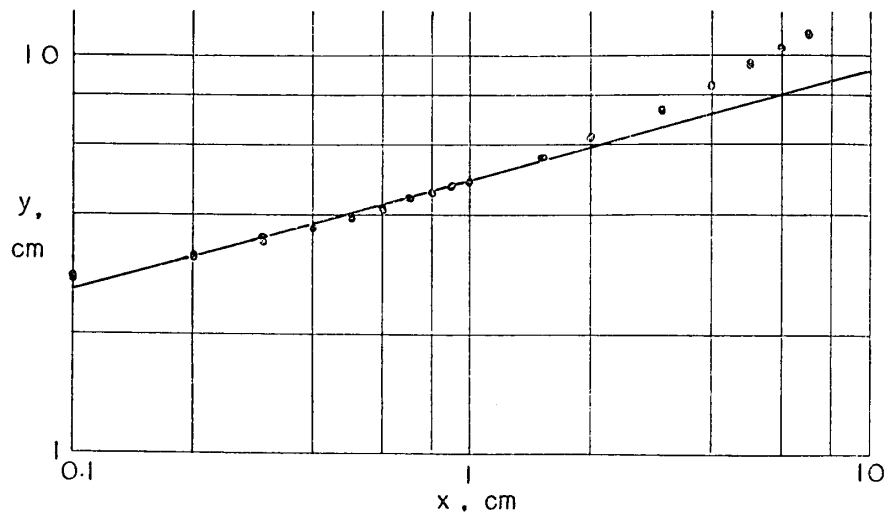
$$x=0.00305y^{3.65} \quad 0 < x < 1.8 \text{ cm} \quad (7)$$

である.

6) $h'=48$ mm

第1報, 図版8(a)で示すように, envelope の中央部は少しくぼんでいる. したがって y の power で envelope を近似する方法は適用できない. そこでわれわれの解析は $h'=30$ mm でやめ, それ以上のところは choking が不完全であると考えてもよいだろう.

以上のような解析の結果を表に示すと第1表となる. 記号を説明すると

第8図 $h'=30$ mm なる2本の平行な円柱の shock envelope の実測値とその近似曲線。

第1表

h' (mm)	δ (cm)	a	n	x_m (cm)
0	1.75	0.100	1.80	7
0.1	"	"	"	"
1	"	"	"	6
5	1.65	0.0693	2.00	5
10	1.55	0.0499	2.16	3.5
20	1.35	0.0239	2.59	1.8
30	1.15	0.00305	3.65	1.8
Single Cylinder	0.77	0.182	1.70	5

第2表

H'	Δ	A	n	X_m
0	1.46	0.116	1.80	5.8
0.008	"	"	"	"
0.083	"	"	"	5.0
0.417	1.38	0.0831	2.00	4.2
0.834	1.29	0.0616	2.16	2.9
1.667	1.13	0.0319	2.59	1.5
2.500	0.96	0.00494	3.65	1.5
Single Cylinder	0.64	0.0207	1.70	4.2

$$x = ay^n \quad (8)$$

を一般式とし、 h' を変えて a, n を測定した結果を示してある。また y の誤差 1 mm 以下なる点の x の値を x_m で示した。すなわち (8) 式は $0 < x < x_m$ の範囲で適用しうる。そのほか δ の値も示してあり、これによって (8) 式の原点が決定される。 x, y の単位は cm である。

次に $X = x/d$, $Y = y/d$, $\Delta = \delta/d$, $H' = h'/d$ のごとく円柱の直径に関して長さを無次元化し、一般式を

$$X = AY^n \quad (8-0)$$

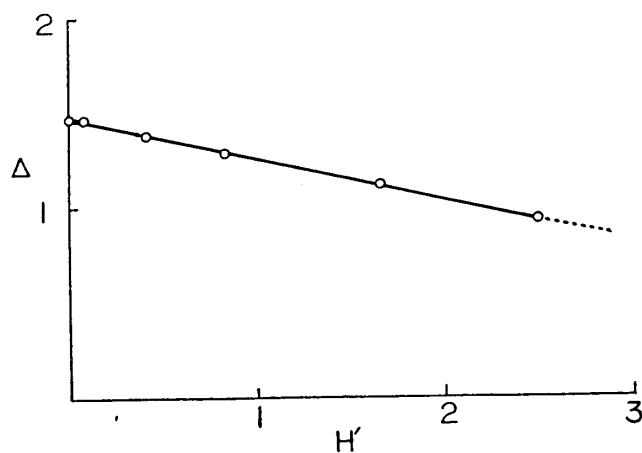
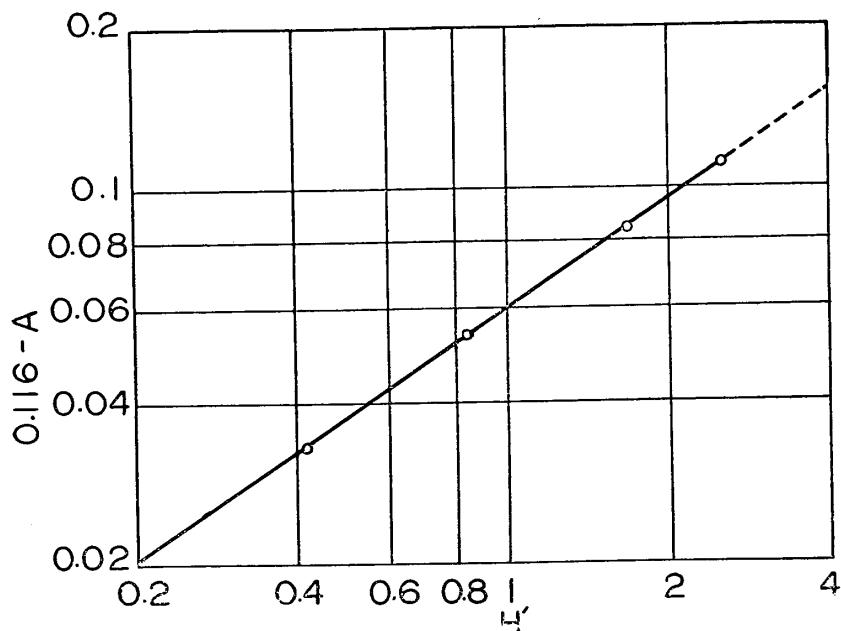
とかいて、定数を計算すると第2表がえられる。

第9図は H' と Δ との関係を図示したものである。図から

$$\Delta = 1.46 - 0.20H' \quad 0 < H' < 2.5 \quad (9)$$

という簡単な関係が求められる。

つぎに $H'=0$ における A の値 0.116 から A を引いた値と H' との関係を対数方眼紙上に plot すると第10図がえられる。4点が一直線上にのることから

第9図 2本の平行な円柱における Δ と H' との関係.第10図 2本の平行な円柱における A と H' との関係.

$$A = 0.116 - 0.0603(H')^{0.67} \quad 0 < H' < 2.5 \quad (10)$$

という関係がえられる.

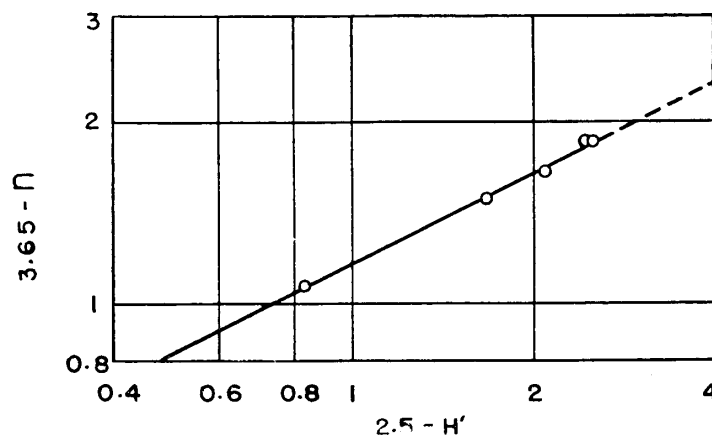
さらに, $H' = 2.5$ における n の値が 3.65 であるという事実を利用して, $2.5 - H'$ と $3.65 - n$ との関係を対数方眼紙上に plot すると第11図がえられる. 実測された点が, ほぼ一直線にのることから

$$n = 3.65 - 1.15(2.5 - H')^{0.50} \quad 0 < H' < 2.5 \quad (11)$$

という関係がえられる.

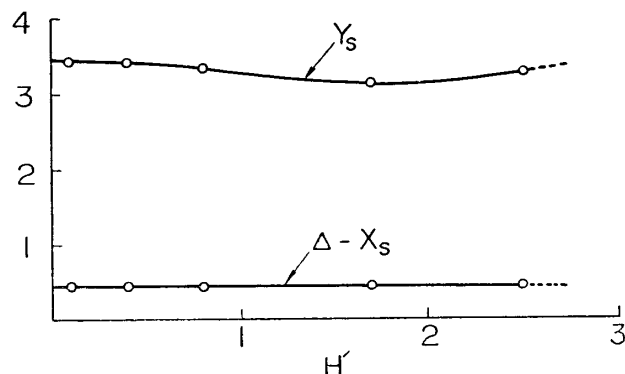
このようにして, (9)~(11) 式を用い, 任意の H' における shock envelope を知ることができる.

最後に envelope 上の sonic line を決定しよう. 単独円柱の場合は (1-AO) 式を用いて

第 11 図 2本の平行な円柱における n と H' との関係.

第 3 表

H'	Y_s	X_s	Δ	$\Delta - X_s$
0.1	3.42	1.01	1.44	0.43
0.4	3.43	0.95	1.38	0.43
0.8	3.35	0.85	1.30	0.45
1.7	3.33	0.69	1.12	0.43
2.5	3.60	0.54	0.96	0.42

第 12 図 2本の平行な円柱における $\Delta - X_s$ および Y_s と H' との関係.

計算できる。その結果は第3図に示してある。

円柱列の場合は (9)~(11) 式を用い, $H'=0.1, 0.4, 0.8, 1.7, 2.5$ に対する A, n, Δ を求め, それから sonic line の座標 X_s, Y_s を計算した。その結果を第3表に示す。

この結果を図示すると第12図のごとくなる。すなわち円柱列という物体を座標の原点にとると, sonic line の X 座標は H' のいかんにかかわらずほぼ一定である。 Y 座標は H' の増加とともに, はじめ少し減少した後, ふたたび増大する。しかしその変化は $\pm 5\%$ 以下である。このことは第1報, 図版8(c)において, h' の変化にもかかわらず, envelope が sonic line の近くで重なり合っているという事実に対応している。

2. 衝撃波面の曲率

物体の周りの shock envelope の曲率半径と曲率中心がわかっていると, 流れの解析が容易となる。たとえば G. E. Kaattari [3] は vehicle の周りの shock envelope を球で近似している。一般に曲線の曲率半径 R は

$$R = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dX}{dY} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2X}{dY^2} \right)} \quad (12)$$

で求められるから、(8-0) 式を用いると shock envelope の頂点の曲率半径は

$$1) \quad n=2 \text{ なら} \quad R_{X=0} = \frac{1}{2A} \quad (13-1)$$

$$2) \quad n < 2 \text{ なら} \quad \lim_{X=0} R = 0 \quad (13-2)$$

$$3) \quad n > 2 \text{ なら} \quad \lim_{X=0} R = \infty \quad (13-3)$$

となる。このことは厳密な意味で $X=0$ における曲率半径を云々することは、かなり危険であることを示している。われわれが shock envelope の頂点における曲率半径を求める本当の意味は、envelope をある領域にわたって2次曲線で近似した上で、その曲線の頂点における曲率半径を考えているのである。

1. 単独円柱

(1-B) 式から

$$r_1 = 3.40 \text{ cm} \quad (14)$$

または

$$R_1 = 2.84 \quad (14-0)$$

がえられる。

2. 2本の平行な円柱

1) $h'=0$

(3-B) 式より

$$r_2 = 6.05 \text{ cm} \quad (15)$$

または

$$R_2 = 5.04 \quad (15-0)$$

2) $h'=5 \text{ mm}$

この場合は(4)式がなりたつから、かなりよい近似をもって

$$r = 7.21 \text{ cm} \quad (16)$$

または

$$R = 6.02 \quad (16-0)$$

なる円を用いて、shock envelope を表すことができる。

(14) と (15) から

$$2R_1 > R_2 \quad (17)$$

という関係がえられる。これが第1報、第14図に示した事実の解析的な説明である。

3. 衝撃波の干渉

第1報において、円柱間の距離 h' がある限界値以下になると choking の現象が起ることを述べた。本報の第3図に示したC点は $M_1=2$ における、そのような限界点である。C点よりさらに外側で shock wave が干渉した場合には、どのような現象が起るかを考えてみよう。

2本の平行な円柱は、中心線に関して左右対称であるから、第13図のごとく中心線に沿

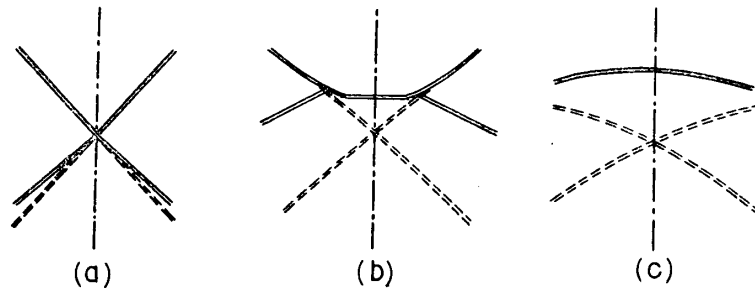
って1つの仮想的な壁を考えると, 2つの shock wave の干渉の代りに, 1つの shock wave が壁によって反射される現象に置き換えればよいことがわかる. このような現象は楔などの場合に良く知られている [5].

第 14 図は上記の考え方を直観するために描かれたものである [6]. $M_1=2$ として, M_2 と流れの偏倚角 θ_1 との関係を示す曲線と, そのような M_2 に対する最大偏倚角 θ_m の関係を示す曲線は1点で交わる. 図からその点で $M_2=1.53$, $\theta_1=12.9^\circ$ であることがわかる. すなわち

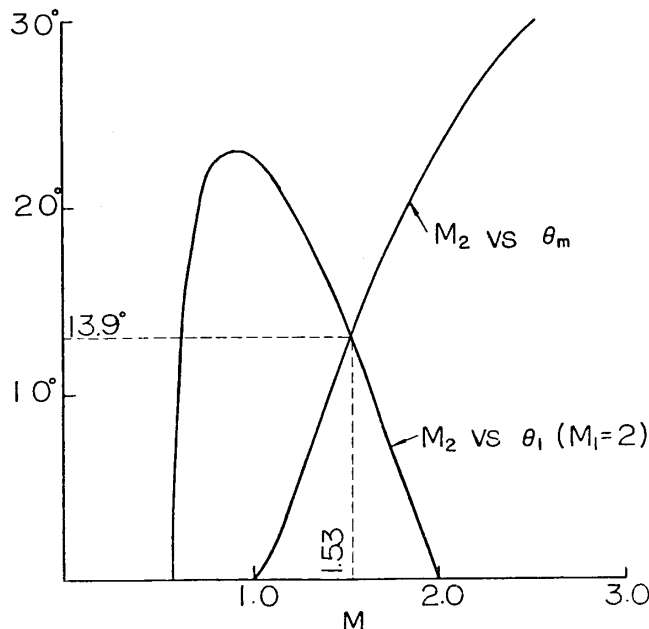
$$1.53 < M_2 < 2.00 \quad (16)$$

を満たす場合には, 第 13 図 (a) のような干渉が起りうる. 第 3 図より β_1 と Y の関係を求め, さらにそのような β_1 に対する θ_1 を求めて図示すると第 15 図がえられる. 図から $\theta_1=12.9^\circ$ に対応する Y の値は 6.67 である. これが第 3 図の N 点の Y 座標の値である. すなわち N 点より外側において shock wave が干渉するときは第 13 図 (a) のような干渉波が生じる.

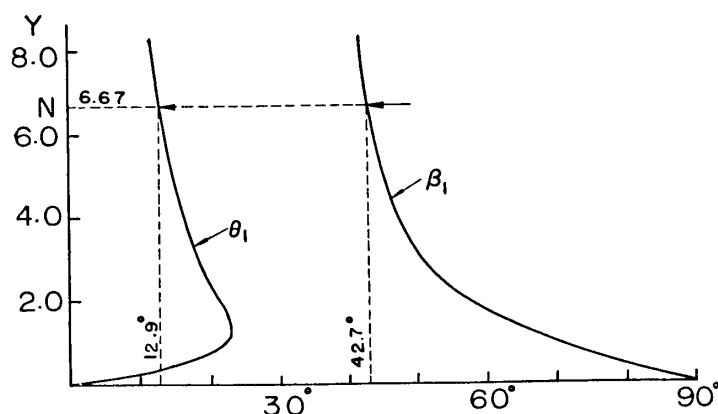
次に N 点と C 点の中間の領域で干渉した場合は第 13 図 (b) のように, 部分的に normal



第 13 図 2つの shock wave の干渉.



第 14 図 第 13 図 (a) に示す干渉の起りうる M_2 および θ_1 の限界値を示す.



第15図 単独円柱の shock envelope 上において第14図に示す θ_1 の限界値の存在する点 N の Y 座標の値を示す。

shock の発生を見るだろう。事実、第1報、図版7(d)を見ると、明らかにこのような normal shock の存在を見ることができる。この normal shock と、元の shock と接合する部分は、ゆるやかに傾きを変えながら連続しているものと思われる。そして sonic line に達した所から第2の波が下方に向って発生するものと予想される。

さらにC点をこえた領域で強い干渉が起れば第13図(c)のように choking が起るのである。

文 献

- [1] Shigeo Uchida and Michiru Yasuhara: Rotational Field Behind a Curved Shock Wave Calculated by the Method of Flux Analysis. Journ. Aero. Sci., Vol. 23, No. 9 (1956), pp. 830-845.
- [2] Tōru Kawamura: On the Detached Shock Wave in front of a Body of Revolution moving with Supersonic Speeds. Journ. Phys. Soc. Japan, Vol. 7, No. 5 (1952), pp. 486-488.
- [3] George E. Kaattari: Predicted Shock Envelopes About Two Types of Vehicles at Large Angles of Attack. NASA TN D-860 (1961).
- [4] 河村龍馬, 沢田孝士, 関 和子: 超音速および極超音速における円柱列の研究, 第1報. 東京大学航空研究所集報, 第3巻, 第6号(A) (1963), pp. 283-318.
- [5] H. W. Liepmann and A. Roshko, Elements of Gasdynamics (John Wiley & Sons, Inc., 1960), pp. 101-107.
- [6] Antonio Ferri, Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows (Macmillan Comp., 1949), pp. 405, 412.

第1報 正 誤 表

page	行	誤	正
285	下 3	風洞天秤	風洞天秤
293	第 10 図	1428	1.428
		405	4.05
294	下 2	動作した.	動作した
295	(1) の表	1.78	1.18
297	下 11	流水	流れ
302	下 9	chock	shock
306	上 6	調べる.	調べると,