No. 325

(昭和二十年二月發行)

高速度における楕圓柱のまはりの速度分布[1]

On the Velocity Distribution round an Elliptic Cylinder at High Speeds, *Isao Imai and Daisuke Kawata.*

所員 今井　功
川田大介

目次

I. はしがき

高速度における翼型の空氣力學的性能を調べる方法として，さきに著者の一人は M^2 展開法の新しい方式を發表した[5][2]．この方法によれば，流れを表はす物理量がすべて M^2 の羃級數に展開できるといふ假定の下に，任意翼型の表面の速度分布を任意の近似度まで精密に求めることが原理的に許される．しかもその際，翼型の表面に關する量のみを用ゐて計算すればよいのである．こゝに M はみだされない流れの Mach 數を意味する．具體的には，任意の翼型に對して速度分布の M^4 まで嚴密な公式を與へ，更にこれを利用して，圓柱のまはりに任意の大きさの循環のある場合と，任意の反りをもつ圓弧翼が迎角 0 の姿勢におかれてゐる場合とを詳しく議論した[6]．この計算はすべて解析式を用ゐて行つたのであるが，上述の公式はむしろ（簡單な解析表示の得られないやうな）任意の翼型について數値計算を許す點に特長が認められる．しかし個々の翼型について實際計算を行ふ前に，先づ數値計算に要

(1) 昭和 17 年 10 月 16 日數物年會にて講演．
(2) 括弧内の數字は論文の最後に掲げる參考文獻の番號を示す．

する手數と結果の精度について一應の見通しをつけておくのが望ましい.

この論文では，楕圓柱が一様な流れの中に長軸を流れに平行にしておかれてゐる場合について數値計算を行つて見る．この例は既に論じ盡された問題であるが，嚴密な（勿論 M^2 の程度で）解析式が得られてゐる點で，數値計算の精度の檢討に特に適してゐると考へられるからである．なほ楕圓柱の厚み比は $t=1$, 1/2, 1/10 の三通りを選び，また計算は第一近似（M^2 まで嚴密）の程度に止めた.

II. 速度分布の公式

(x, y) 面に x 軸と α なる傾きをなして速度 1, Mach 數 M の一様な流れがあるものとする．その中に任意の翼型 P をおくとき，その表面の速度分布は次の如く計算される.

$z=x+iy$ とすれば，z 面における翼型 P の外部の領域は

$$z=c_{-1}Z+c_0+\frac{c_1}{Z}+\frac{c_2}{Z^2}+\cdots,\qquad c_{-1}=\lambda e^{i\delta} \tag{2.1}$$

なる解析函數によつて Z 面の單位圓の外部に等角寫像される．その際 P 自身は Z 面の單位圓：$Z=e^{i\theta}$ に對應し

$$x=x(\theta),\quad y=y(\theta) \tag{2.2}$$

の如く θ を副變數として表はされる．P に沿つては

$$dz=ds\,e^{i\omega},\quad dZ=ie^{i\theta}d\theta \tag{2.3}$$

であるとする．すなはち ds は翼型に沿ふ線要素，ω は ds と x 軸の正の方向との挾む角である．(2.3) より

$$\frac{dz}{d\theta}\equiv\frac{dx}{d\theta}+i\frac{dy}{d\theta}=\frac{ds}{d\theta}e^{i\omega}. \tag{2.4}$$

從つて

$$\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}, \tag{2.5}$$

$$\cos\omega=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{ds},\quad \sin\omega=\frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}. \tag{2.6}$$

前の論文 [5] によれば，翼型 P の表面の速度 q は θ の函數として次のやうに表はされる：

$$q(\theta)=\frac{d\Phi}{ds}=\frac{d\Phi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}=q_0(\theta)+M^2q_1(\theta)+\cdots. \tag{2.7}$$

こゝに Φ は速度ポテンシヤルで

$$\Phi=\Phi_0+M^2\Phi_1+M^4\Phi_2+\cdots, \tag{2.8}$$

$$q_0=\frac{d\Phi_0}{d\theta}\frac{d\theta}{ds},\qquad q_1=\frac{d\Phi_1}{d\theta}\frac{d\theta}{ds},\quad\cdots \tag{2.9}$$

である．但し

$$\Phi_0=2\lambda\cos(\theta-\alpha+\delta)-\kappa_0\theta, \tag{2.10}$$

$$\Phi_1=P_1(\theta)-Q_1{}^*(\theta)-\kappa_1\theta. \tag{2.11}$$

こゝに

$$P_1(\theta)+iQ_1(\theta)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{d\Phi_0}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}e^{-i(\omega-\alpha)}\int_{\theta_0}^{\theta}\left\{\left(\frac{d\Phi_0}{d\theta}\right)^2\frac{d\theta}{ds}e^{-i(\omega-\alpha)}+2\kappa_0\right\}d\theta-\frac{\lambda}{2}\cos(\theta-\alpha+\delta). \tag{2.12}$$

また $Q_1^*(\theta)$ は $Q_1(\theta)$ に對する共軛 Fourier 級數であつて

$$Q_1^*(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[Q_1(\varphi+\theta)-Q_1(\theta)]\cot\frac{\varphi}{2}d\varphi \tag{2.13}$$

で與へられる.

最後に，翼型 P のまはりの循環（時計方向を正とする）は

$$\Gamma=2\pi\,(\kappa_0+M^2\kappa_1+\cdots) \tag{2.14}$$

で與へられる. 但し後緣の鋭い翼型では Joukowski の假定に從ひ

$$\Phi_0'(0)=0,\ \ \Phi_1'(0)=0,\ \ \cdots \tag{2.15}$$

すなはち

$$\kappa_0=2\lambda\sin(\alpha-\delta),\ \ \kappa_1=P_1'(0)-Q_1^{*\prime}(0),\ \ \cdots \tag{2.16}$$

と定めればよい，但し後緣は $\theta=0$ に對應するものとする.

いま (2.12) を實數部と虛數部とに分ければ

$$P_1(\theta)=AC+BD-\frac{\lambda}{2}\cos(\theta-\alpha+\delta), \tag{2.17}$$

$$Q_1(\theta)=AD-BC, \tag{2.18}$$

$$A=\frac{1}{2}\frac{d\Phi_0}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\cos(\omega-\alpha),\quad B=\frac{1}{2}\frac{d\Phi_0}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\sin(\omega-\alpha), \tag{2.19}$$

$$C=\int_0^{\theta}\left(A\frac{d\Phi_0}{d\theta}+\kappa_0\right)d\theta,\quad D=\int_0^{\theta}B\frac{d\Phi_0}{d\theta}d\theta, \tag{2.20}$$

$$\frac{d\Phi_0}{d\theta}=-\{2\lambda\sin(\theta-\alpha+\delta)+\kappa_0\} \tag{2.21}$$

となる. 但し $\theta_0=0$ と選んである.

翼型 P が任意に與へられた場合，(2.1) の λ, δ 及び (2.2) の $x(\theta)$, $y(\theta)$ は數値的に計算することができる [4]. 從つて (2.5), (2.6) によつて $d\theta/ds$, ω がわかり，(2.21) によつて $d\Phi_0/d\theta$ がわかるから，(2.19), (2.20) の A, B, C, D が計算でき，更に (2.17), (2.18) によつて $P_1(\theta)$, $Q_1(\theta)$ が求まる. (2.13) によつて $Q_1^*(\theta)$ を計算すれば (2.11) によつて $\Phi_1(\theta)$ が得られる. これを數値微分して $d\Phi_1/d\theta$ を求め，$d\Phi_0/d\theta$ と共に (2.9) に入れゝば，結局 (2.7) によつて速度 $q(\theta)$ が求まるのである.

III. 圓　　　柱

先づ圓柱の場合を考へる. 流れは x 軸に平行 ($\alpha=0$) で，圓柱の半徑は 1 とする. このとき z 面と Z 面とは明かに一致するから，(2.1) において $\lambda=1$, $\delta=0$ となり，圓柱は (2.2) により

$$x=\cos\theta, \qquad y=\sin\theta \tag{3.1}$$

で與へられる．從つて (2.5), (2.6) は

$$\frac{ds}{d\theta}=1, \tag{3.2}$$

$$\cos\omega=-\sin\theta, \quad \sin\omega=\cos\theta \tag{3.3}$$

となる．

いま循環はないものとすれば ($\kappa_0=0$), (2.10) は單に

$$\varPhi_0=2\cos\theta \tag{3.4}$$

となる．從つて (2.19), (2.20) は

$$A=\sin^2\theta, \qquad B=-\sin\theta\cos\theta, \tag{3.5}$$

$$C=-2\int_0^\theta \sin^3\theta\,d\theta, \qquad D=2\int_0^\theta \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta \tag{3.6}$$

である．

數值計算には

$$\theta=\frac{k\pi}{20} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 39)$$

すなはち

$$\theta=0°,\ 9°,\ 18°,\ \cdots,\ 351°$$

の 40 個の點のみを用ゐる．[(1)]

(3.6) の不定積分は勿論容易に求められるけれども，數値計算の精度を確かめるのがこの論文の目的であるから (5.1,2) の方式によつて數値積分を行つた．但し第四階差 $\triangle^4$ まで考慮した．

かやうにして得られた C, D を A, B と共に (2.17), (2.18) に入れて $P_1(\theta)$, $Q_1(\theta)$ を計算する．

次に (5.6) の公式により $Q_1^*(\theta)$ を計算する．これより $\varPhi_1(\theta)=P_1(\theta)-Q_1^*(\theta)$ が得られる．

最後に (5.3) の公式によつて數値微分を行ふ．但し第五階差 $\triangle^5$ まで考慮した．

以上の數値計算によつて得られた $\varPhi_1(\theta)$, $q_1(\theta)$ を第 1 表に示す．圓柱の場合，流れは明かに x 軸と y 軸について對稱であるから $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ のみを與へてある．

圓柱については $\varPhi_1(\theta)$, $q_1(\theta)$ の解析式は周知の如く

$$\varPhi_1(\theta)=\frac{2}{3}\cos\theta-\frac{1}{6}\cos 3\theta,$$

$$-q_1(\theta)=\frac{2}{3}\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 3\theta$$

で與へられる．これを用ゐて得られる數値は嚴密解として第 1 表に示す．この論文の方式に

(1) 任意の翼型に對して $x(\theta)$, $y(\theta)$ の函數を求めるために，吾々は現在 [4] の方法を用ゐてゐる（實際上の計算手續についての詳細は近く報告するつもりである）．この方法では θ の 9° おきの値に對して $x(\theta)$, $y(\theta)$ の數値が十分精密に求められるので，この論文でも 9° おきの値を既知として議論するのである．

第 1 表

θ	數値解		嚴密解	
	$\Phi_1(\theta)$	$-q_1(\theta)$	$\Phi_1(\theta)$	$-q_1(\theta)$
0	−0.16665	0	−0.16667	0
9°	−0.15671	−0.1226	−0.15671	−0.1227
18°	−0.13060	−0.1985	−0.13060	−0.1985
27°	−0.09874	−0.1912	−0.09873	−0.1912
36°	−0.07582	−0.0836	−0.07582	−0.0837
45°	−0.07742	0.1178	−0.07741	0.1179
54°	−0.11629	0.3848	−0.11630	0.3848
63°	−0.19940	0.6723	−0.19939	0.6722
72°	−0.32582	0.9278	−0.32582	0.9279
81°	−0.48671	1.1039	−0.48671	1.1040
90°	−0.66666	1.1666	−0.66667	1.1667

よる純數値的な計算結果と解析式による結果との一致は極めて優秀で，圓周上の 40 個の點のみを用ゐた計算で十分精密な結果の得られることがわかる．特に速度ポテンシヤル $\Phi_1(\theta)$ の値は嚴密な値と小數點以下 5 桁において高々 1 單位の誤差をもつに過ぎない．速度 $q_1(\theta)$ は數値微分のために稍々精度が落ちるが，それでも小數點以下 4 桁までは大體正確である．

IV. 楕　圓　柱

楕圓の外部は周知の如く Joukowski 變換によつて單位圓の外部に等角寫像される．すなはち

$$z=Z+\frac{\sigma^2}{Z} \tag{4.1}$$

とすれば Z 面の單位圓：$Z=e^{i\theta}$ は

$$x=(1+\sigma^2)\cos\theta, \qquad y=(1-\sigma^2)\sin\theta \tag{4.2}$$

に寫像される．これは長半徑 $1+\sigma^2$，短半徑 $1-\sigma^2$ の楕圓に他ならない．(4.2) より

$$\frac{dx}{d\theta}=-(1+\sigma^2)\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta}=(1-\sigma^2)\cos\theta. \tag{4.3}$$

いま，與へられた楕圓の厚み比を t とすれば

$$t=\frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2} \qquad 從つて \qquad \sigma^2=\frac{1-t}{1+t}. \tag{4.4}$$

故に t を與へれば σ が定まり，從つて (4.3) の $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ の値が知れる．これを基にして II の方法を用ゐれば與へられた楕圓柱の表面における速度分布が求まるのである．

實際計算は $t=1/2$, $1/10$ なる二つの場合について行つた．θ としては圓柱の場合と同様 $\theta=0°$, $9°$, $18°$, …… の 40 個の點のみを用ゐた．

(i) $t=1/2$. 數値積分及び數値微分等の計算方法は圓柱（すなはち $t=1$）の場合と全

く同様である.

(ii) $t=1/10$. (2.20) の C, D の値を求めるとき, 被積分部 $A\,d\Phi_0/d\theta$, $B\,d\Phi_0/d\theta$ は $\theta=0$ の附近で急激に變化するので, 歩みを $h=9°$ とした數値積分では精度が低くなる惧れがある. それ故, 被積分部の變化の急激な範圍だけは歩みをこまかくして數値積分を行ふことにした(その方式は V で述べる). すなはち $\theta=0°$, $9°$ の間の積分は歩みを四等分して Simpson の法則により計算した. $\theta=9°$ 以後の積分は圓柱の場合と全く同様である.

$Q_1{}^*(\theta)$ を求める際 $Q_1{}'(\theta)$ を計算する必要がある. 後縁 ($\theta=0°$) の附近では Stirling の内挿式による數値微分は收斂が悪いから, $\theta=9°$, $18°$ に對しては Newton の内挿式を用ゐて數値微分を行つた. $\Phi_1(\theta)$ から $d\Phi_1/d\theta$ を求めるときも同様である.

計算の結果得られた q_1 の値を第 2 表に示す.

さて一様な流れの中におかれた楕圓柱の表面における速度分布に對する M^2 まで嚴密な式は最初 Kaplan [9] によつて與へられた. 但し長軸が流れに平行な場合である. 楕圓柱が流れに對して任意の姿勢をもつ場合はその後今井と相原 [8](1), 友近と玉田 [10], 橋本 [1], [2], 今井 [7] 等によつて論ぜられた. かやうに, 速度を

$$q(\theta)=q_0(\theta)+M^2q_1(\theta)+\cdots$$

で表はすとき $q_0(\theta)$, $q_1(\theta)$ の嚴密な解析式は既によく知られてゐる. そこでこれを用ゐて厚み比 $t=1/2$, $1/10$ の場合の數値を計算した. 結果はやはり第 2 表に示す. なほ參考のために圓柱 ($t=1$) に對する値も共に掲げる.

第 2 表

θ	$t=1$			$t=\frac{1}{2}$			$t=\frac{1}{10}$		
	嚴密解		數値解	嚴密解		數値解	嚴密解		數値解
	q_0	q_1	q_1	q_0	q_1	q_1	q_0	q_1	q_1
0°	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9°	0.3129	−0.1227	−0.1226	0.4530	−0.1396	−0.1384	0.9301	−0.0619	−0.0621
18°	0.6180	−0.1985	−0.1985	0.8173	−0.1484	−0.1480	1.0513	0.0120	0.0115
27°	0.9080	−0.1912	−0.1912	1.0706	−0.0528	−0.0531	1.0794	0.0353	0.0356
36°	1.1756	−0.0837	−0.0836	1.2357	0.0708	0.0707	1.0897	0.0449	0.0450
45°	1.4142	0.1179	0.1178	1.3416	0.1808	0.1809	1.0945	0.0496	0.0496
54°	1.6180	0.3848	0.3848	1.4099	0.2660	0.2661	1.0971	0.0522	0.0522
63°	1.7820	0.6722	0.6723	1.4536	0.3270	0.3270	1.0986	0.0537	0.0538
72°	1.9021	0.9279	0.9278	1.4806	0.3673	0.3673	1.0994	0.0546	0.0547
81°	1.9754	1.1040	1.1039	1.4953	0.3902	0.3906	1.0999	0.0551	0.0552
90°	2.0000	1.1667	1.1666	1.5000	0.3976	0.3980	1.1000	0.0552	0.0553

(1) この論文の (8.3), (8.6) の式には次の誤植がある.

(誤) $\log\dfrac{1+2\sigma\cos 2\eta+\sigma^2}{1-2\sigma\cos 2\eta+\sigma^2}$ (正) $\log\dfrac{1+2\sigma\cos\eta+\sigma^2}{1-2\sigma\cos\eta+\sigma^2}$

II の公式による純數値的な計算の結果を解析式による正確な値と比較すれば次の如く結論することができよう.

（1） 厚みが餘り薄くないときは, θ の 9° おきの値だけを用ゐた數値計算は十分精密な結果を與へる.

（2） 厚みが薄い場合前線・後線の附近では精度が稍々落ちる. しかし實用的には差支へない程度である.

V. 數値計算の公式

1. 不定積分の計算. 日高 [3] p. 37 參照.

x_{-n}, x_{-n+1}, $\cdots$, x_{-1}, x_0, x_1, $\cdots$, x_n を等間隔 h の數列とすれば, Bessel の内挿式による數値積分の公式は

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{2}\left\{(y_0+y_1)-\frac{1}{12}(\triangle^2 y_{-1}+\triangle^2 y_0)+\frac{11}{720}(\triangle^4 y_{-2}+\triangle^4 y_{-1})\right.$$
$$\left.-\frac{191}{60480}(\triangle^6 y_{-3}+\triangle^6 y_{-2})+\cdots\right\}, \tag{5.1}$$

Stirling の内挿式による數値積分の公式は

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)dx=2h\left(y_0+\frac{1}{6}\triangle^2 y_{-1}-\frac{1}{180}\triangle^4 y_{-2}+\frac{1}{1512}\triangle^6 y_{-3}-\cdots\right) \tag{5.2}$$

である. いま

$$I(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

なる不定積分を $x=x_1, x_2, \cdots$ に對して求めるには次の如くするのが便利である. 先づ (5.1) によつて

$$I(x_1)=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$$

を求める. 次に (5.2) により

$$I(x_2)=\int_{x_0}^{x_2}, \qquad I(x_4)-I(x_2)=\int_{x_2}^{x_4}, \qquad I(x_6)-I(x_4)=\int_{x_4}^{x_6}, \quad \cdots$$
$$I(x_3)-I(x_1)=\int_{x_1}^{x_3}, \qquad I(x_5)-I(x_3)=\int_{x_3}^{x_5}, \quad \cdots$$

を求める. さうすれば

$$I(x_3)=I(x_1)+\int_{x_1}^{x_3}, \qquad I(x_5)=I(x_3)+\int_{x_3}^{x_5}, \quad \cdots$$
$$I(x_4)=I(x_2)+\int_{x_2}^{x_4}, \qquad I(x_6)=I(x_4)+\int_{x_4}^{x_6}, \quad \cdots$$

によつて $I(x_3)$, $I(x_5)$, $\cdots$; $I(x_4)$, $I(x_6)$, $\cdots$ が次々と計算できる.

2. 微分の計算. 日高 [3] p. 32 參照.

Stirling の内挿式による數値微分の公式は

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left\{(\triangle y_{-1}+\triangle y_0)-\frac{1}{6}(\triangle^3 y_{-2}+\triangle^3 y_{-1})+\frac{1}{30}(\triangle^5 y_{-3}+\triangle^5 y_{-2})-\cdots\right\} \tag{5.3}$$

である．Newton の内挿式によれば

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left\{\triangle y_0-\frac{1}{2}\triangle^2 y_0+\frac{1}{3}\triangle^3 y_0-\frac{1}{4}\triangle^4 y_0+\cdots\right\}. \tag{5.4}$$

3. 共軛 Fourier 級數の計算.

$$Q^*(\theta)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[Q(\theta+\varphi)-Q(\theta)]\cot\frac{\varphi}{2}d\varphi \tag{5.5}$$

を $\theta=0,\ h,\ 2h,\ \cdots,\ (2N-1)h$ なる $2N$ 個の點に對して求める．但し

$$h=\frac{\pi}{N}\ .$$

例へば $Q^*(0)$ を求めるには次の如くする．

$$-Q^*(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[Q(\varphi)-Q(0)]\cot\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$\doteqdot\frac{1}{2\pi}\left[\left\{[Q(\varphi)-Q(0)]\cot\frac{\varphi}{2}\right\}_{\varphi=0}+\{Q(h)-Q(0)\}\cot\frac{h}{2}\right.$$
$$\left.+\{Q(2h)-Q(0)\}\cot\frac{2h}{2}+\cdots+\{Q(\overline{2N-1}h)-Q(0)\}\cot\frac{2N-1}{2}h\right]h.$$

さて $Nh=\pi$ であるから

$$\cot\frac{2N-n}{2}h=\cot\left(\pi-\frac{n}{2}h\right)=-\cot\frac{n}{2}h\ .$$

また

$$\lim_{\varphi\to 0}[Q(\varphi)-Q(0)]\cot\frac{\varphi}{2}=2Q'(0).$$

從つて

$$-Q^*(0)=\frac{1}{2N}\left[2Q'(0)+Q(1)\cot\frac{h}{2}+Q(2)\cot\frac{2h}{2}+\cdots+Q(N-1)\cot\frac{N-1}{2}h\right.$$
$$\left.-Q(2N-1)\cot\frac{h}{2}-Q(2N-2)\cot\frac{2h}{2}-\cdots-Q(N+1)\cot\frac{N-1}{2}h\right].$$

但し，簡單のために $Q(nh)$ を $Q(n)$ と書いてある．上と同様にして一般に

$$-Q^*(n)=\frac{1}{N}Q'(n)$$
$$+\frac{1}{2N}\left[Q(n+1)\cot\frac{h}{2}+Q(n+2)\cot\frac{2h}{2}+\cdots+Q(n+N-1)\cot\frac{N-1}{2}h\right.$$
$$\left.-Q(n-1)\cot\frac{h}{2}-Q(n-2)\cot\frac{2h}{2}-\cdots-Q(n-N+1)\cot\frac{N-1}{2}h\right]. \tag{5.6}$$

但し，右邊の $Q(n+m)$, $Q(n-m)$ において $n+m>2N$, $n-m<0$ なる場合は $Q(\theta)$ の周期性によりそれぞれ $Q(n+m-2N)$, $Q(n-m+2N)$ を用ゐればよい．

4. 積分間隔の細分

一般に薄翼については (2.20) の被積分部は翼の前縁・後縁の附近で急激な變化を行ふから，精度を上げるためには積分の歩みをこまかにしなければならない．それには次のやうにするのが便利である．

例へば$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ を求めるには，歩みを四等分して各分點における $f(x)$ の値を

$$y(\xi)=f(x_0+\xi h) \qquad \left(\xi=0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right)$$

とする．Simpson の法則を用ゐると

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{12}\left[y(0)+y(1)+4\left\{y\left(\frac{1}{4}\right)+y\left(\frac{3}{4}\right)\right\}+2y\left(\frac{1}{2}\right)\right]. \qquad (5.7)$$

さて x_0 の附近では $f(x)$ の變化は烈しいから，$f(nh)$ ($n=0,\ 1,\ 2\cdots$) の値から直接に内挿法により $f(x_0+\xi h)$ の値を求めるわけには行かない．ところが (4.3) から想像されるやうに $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ は前縁及び後縁の附近でも滑かな變化をするので，内挿法を用ゐることができる．例へば Bessel の内挿公式では

$$y(\xi)=y(0)+\xi\triangle y_0+\frac{B_2}{2}(\triangle^2 y_{-1}+\triangle^2 y_0)+B_3\triangle^3 y_{-1}+\frac{B_4}{2}(\triangle^4 y_{-2}+\triangle^4 y_{-1})+\cdots. \qquad (5.8)$$

こゝに B_2, B_3, B_4 は第 3 表で與へられる．かやうにして求めた $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ の値を用ゐて $ds/d\theta$, A, B 等の値を計算すれば (5.7) の右邊の値が見出されるのである．

第　3　表

ξ	$\frac{1}{2}B_2$	B_3	$\frac{1}{2}B_4$
0.25	−0.046875	0.00781	0.00854
0.5	−0.0625	0	0.01172
0.75	−0.046875	−0.00781	0.00854

VI. む　す　び

さきに著者の一人は，縮む流體の一様な流れの中に任意の翼型がおかれてゐるとき，その表面の速度分布を M^4 まで嚴密に與へる公式を導いた．この公式を用ゐて數値計算を行ふ場合，どの程度の勞力が必要か，また結果の精度はどうであらうか？ この點を明かにしておくことは公式の應用上望ましいと思はれるので，解析的な結果の既に得られてゐる楕圓柱について數値計算を行つた．但し楕圓の厚み比としては $t=1$ (圓柱), $t=1/2$, $t=1/10$ なる三つの場合を選んだ．計算には楕圓柱表面の 40 個の點のみを用ゐたけれども，結果の精度は第 2 表の示す如く極めて滿足すべきものがある．

楕圓柱に對する計算から想像すると，他の任意の翼型についても，ほとんど同様の手數で十分精密な結果が得られるものと考へられる．

昭 和 19 年 12 月　　　　　　　　　理 論 空 氣 力 學 部

参 考 文 献

[1] HASIMOTO, Z. : *On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder, I.* 數物記事 **24** (1942), 696.

[2] HASIMOTO, Z. : *On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder, II.* 數物記事 **24** (1942), 720.

[3] 日高孝次 : 數値積分法. 上巻. 岩波書店. 昭和 11 年.

[4] 今井　功 : 任意翼型の理論. 航空學會誌. **9** (1942), 865.

[5] 今井　功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布について, I. 航研報告 **275** (1943).

[6] 今井　功 : 高速度における翼型のまはりの速度分布について, II. 圓柱及び圓弧翼. 航研報告 **290** (1944).

[7] IMAI, I. : *Note on the velocity distribution round an elliptic cylinder at high speeds.* 數物記事 **26** (1944), 71.

[8] IMAI, I. & AIHARA, T. : *On the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder.* 航研報告 **194** (1940).

[9] KAPLAN, C. : *Two-dimensional subsonic compressible flow past elliptic cylinders.* N. A. C. A. Tech. Rep. **624** (1938).

[10] TOMOTIKA, S. & TAMADA, K. : *Studies on the subsonic flow of a compressible fluid past an elliptic cylinder.* 航研報告 **201** (1940).