

No. 231.

(Published June, 1942.)

**On the Additional Terms in the Equilibrium  
Equations of Thin Elastic Plates which  
Undergo Finite Deformations.**

By

Yosimaru YOSIMURA, *Rigakusi*.

Research Associate of the Institute.

**Abstract.**

The equilibrium equations of thin elastic plates, the lateral deflections of which have magnitudes comparable to the respective plate thicknesses, as will be seen in the case of deformation after buckling or under normal pressure of some extent, have been given by Th. von Kármán. [Eq's (1.1)–(1.3)]<sup>(1)</sup>. These equations are not fully correct for the reasons: (1) that in the equilibrium equation for the direction normal to the plane of the plate, components of forces resulting from the gradient of stress components are neglected, and only the terms due to the changes of curvature are considered, and (2) that in the equations of equilibrium for the plane of the plate, the difference between the state after deformation and that before deformation is not taken into consideration.

In this paper, starting from the results derived by R. Kappus<sup>(2)</sup> for the case of finite deformations of three-dimensional elastic bodies, the author obtained more accurate forms of the equilibrium equations of thin plates as the following:

---

(1) Th. v. Kármán; Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. IV/27 (1910) S. 349.

(2) R. Kappus; Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. Z. A. M. M., Bd. 19, Heft 5. (1939).

$$\begin{aligned}
& T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \\
& + \frac{\partial T_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z' = 0 \\
& \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + X' = 0 \\
& \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Y' = 0
\end{aligned}$$

where the stresses resultants  $T_1$ ,  $S_1$ ,  $T_2$  and the shearing forces normal to the neutral surface  $N_1$ ,  $N_2$  are expressed in terms of the displacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  by the ordinary relations.

The results obtained above were applied to the case of a finite deformation of a plane circular plate subjected to normal pressure, and the relation between the pressure  $p$  and the deformation at the center of the plate  $f$  is given in equation (2.26), which describes the experimental results with more accuracy than the existing formula (2.25). The additional terms in the equation for the  $z$  direction, which are neglected in the conventional theory, are not negligibly small, as was illustrated in this example, but the additional terms in the equations for the  $x$ ,  $y$  directions can be reasonably neglected in this case.

# No. 231

(昭和十七年六月發行)

## 薄い平板の撓みの方程式の省略項に就いて

(一様に加壓される圓板の撓みの計算に對する應用)

囑託 理學士 吉 村 慶 丸

### 目 次

|                   |    |
|-------------------|----|
| 1. 基礎方程式の再吟味..... | 3  |
| 2. 應用.....        | 7  |
| 3. 結論.....        | 14 |

### 1. 基礎方程式の再吟味

薄い平板の撓みが、板厚と同程度の大きさを有する有限な量であり、板の面の大きさに對しては無視し得る様な場合の釣合の式は Kármán によつて初めて與へられ、其の後多くの著者によつて種々の場合に解かれてゐる。この場合には、中央面内の直角應力及び剪斷應力を考慮に入れることを要し、板厚を  $z h$ 、曲げ剛性を  $B$ 、板に垂直な變位を  $w$ 、垂直壓力を  $p$  とすれば、

$$T_1 = z h E \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad T_2 = z h E \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad S_1 = -S_2 = -z h E \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \dots (1 \cdot 1)$$

なる時、

$$B \Delta^4 w = p + z h E \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad \dots (1 \cdot 2)$$

$$\nabla^4 \phi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \dots (1 \cdot 3)$$

なる  $\phi, w$  についての非線形聯立微分方程式が成立することは周知の事柄である。  
この際、式 (1・2) 及び (1・3) は夫々變形前の平面に於ける  $z$  (板の面に直角)

(1) Th. v. Kármán : Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. IV/27. (1910) s. 349.

方向及び  $x, y$  (板の面内) 方向の力の釣合を変形後の状態に就いて考へることに依つて得られるものであり、且つ中央面内の stress-resultant  $T_1, T_2, S_1$  が式 (I・1) の如く一つの応力函数  $\phi$  に依つて表され得るためには、変形前の状態に於て  $x, y$  方向の応力の釣合が成立つことが要求される。既に変形が有限であることを假定する以上、釣合の式を考へるに當つて、変形前と変形後の状態の差を無視することは不合理である。この意味に於て、本論文では、上記の基礎方程式に就いて再検討を試みた。

三次元連續體の有限變位の彈性論に關する Kappus の結果を借用すれば、直角座標  $x, y, z$  に關する單位直交ベクトルを  $e_x, e_y, e_z$ 、變形後の斜交ベクトルを  $g_x, g_y, g_z$ 、應力を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 、應力テンソルを  $\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{zz}, \kappa_{xy}, \kappa_{yz}, \kappa_{zx}$  とする時、釣合方程式は

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma_x \cos(g_x, e_x) + \tau_{xy} \cos(g_y, e_x) + \tau_{xz} \cos(g_z, e_x) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \tau_{yx} \cos(g_x, e_x) + \sigma_y \cos(g_y, e_x) + \tau_{yz} \cos(g_z, e_x) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \tau_{zx} \cos(g_x, e_x) + \tau_{zy} \cos(g_y, e_x) + \sigma_z \cos(g_z, e_x) \right\} \\ & + X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sigma_x \cos(g_x, e_y) + \tau_{xy} \cos(g_y, e_y) + \tau_{xz} \cos(g_z, e_y) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \tau_{yx} \cos(g_x, e_y) + \sigma_y \cos(g_y, e_y) + \tau_{yz} \cos(g_z, e_y) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \tau_{zx} \cos(g_x, e_y) + \tau_{zy} \cos(g_y, e_y) + \sigma_z \cos(g_z, e_y) \right\} \\ & + Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \kappa_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \kappa_{xz} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \kappa_{yx} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} + \kappa_{yz} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \kappa_{zz} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + Z - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I・4)$$

茲に  $x, y, z$  方向の伸びを  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  とすれば

$$\sigma_x = \kappa_{xx}(1 + \epsilon_x), \quad \tau_{xy} = \kappa_{xy}(1 + \epsilon_y), \quad \tau_{xz} = \kappa_{xz}(1 + \epsilon_z), \quad etc. \quad \dots \dots \dots \quad (1 \cdot 5)$$

$$\kappa_{xy} = \kappa_{yx}, \quad \kappa_{yz} = \kappa_{zy}, \quad \kappa_{zx} = \kappa_{xz} \quad \dots \dots \dots \quad (1 \cdot 6)$$

となる。<sup>(1)</sup>

(1.4) の第3式に於て  $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$  とし、 $z$  に就いて  $-h$  より  $h$  まで積分すれば

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^h \left[ \kappa_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\kappa_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \kappa_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial y} \right] dz \\ & \quad + \left[ \kappa_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \kappa_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \kappa_{zz} \right]_{-h}^h + \int_{-h}^h \left[ Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] dz = 0 \end{aligned}$$

(1.5) により  $\kappa_{xx}, \kappa_{yz}, \dots \dots$  を  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  で表し、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  及びその微係数並びに  $w$  の微係数を一次の微小量と考へ、其等の2次以上を省略すれば、

$$\begin{aligned} & T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & \quad + \frac{\partial T_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + Z' = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (1 \cdot 7) \end{aligned}$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \int_{-h}^h \sigma_x dz, & S_1 &= \int_{-h}^h \tau_{xy} dz, & N_1 &= \int_{-h}^h \tau_{xz} dz \\ T_2 &= \int_{-h}^h -\tau_{xy} dz, & S_2 &= \int_{-h}^h \sigma_y dz, & N_2 &= \int_{-h}^h \tau_{yz} dz \\ Z' &= \left[ \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_z \right]_{-h}^h + \int_{-h}^h \left( Z - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) dz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (1 \cdot 8)$$

(1) R. Kappus : Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen, Z. A. M. M., Bd. 19., Heft 5. (1939).

次に変形前の状態に於て板の中央面に垂直であつた線素は変形後も板の中央面に垂直な直線であるとすれば  $(g_x, e_x), (g_y, e_x), \dots$  は  $z$  に關しては const. である。且つ  $x, y$  平面内の變形は、それに垂直な方向の變形に比して極めて小さいと考へられるから  $\cos(g_x, e_x) = 1, \cos(g_y, e_x) = 0, \cos(g_z, e_x) = -\frac{\partial w}{\partial x}$  と置き得る。従つて (I・4) の第 1 式及び第 2 式を  $z$  に關して  $-h$  より  $h$  まで積分すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + X' &= 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Y' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdots(I \cdot 9)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} X' &= \left[ \tau_{zx} - \sigma_z \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{-h}^h + \int_{-h}^h \left( X - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dz \\ Y' &= \left[ \tau_{zy} - \sigma_z \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{-h}^h + \int_{-h}^h \left( Y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dz \end{aligned} \right\} \quad \cdots(I \cdot 10)$$

(I・7)、(I・10) が力の釣合の式であり、 $T_1, T_2, S_1$  は

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{zhE}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ T_2 &= \frac{zhE}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\ S_1 &= \frac{zhE}{1+\nu} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \cdots(I \cdot 11)$$

で與へられることは從來の結果と變りはない。茲に  $E$  は板のヤング率、 $\nu$  はポアソン比である。

剪断力  $N_1, N_2$  は嚴密にはモーメントの釣合の式より求められるものであるが、モーメントの釣合は板の曲げのみを考へればよいから、變位が有限な場合にも微小變位の場合と同様の釣合の式が成立つと考へられる。従つて、從來通り

$$N_1 = -B \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w), \quad N_2 = -B \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w), \quad \cdots \cdots \cdots (I \cdot 12)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

として差支へない。

結局 (1・7)、(1・10)、(1・11) 及び (1・12) が 8 個の量  $T_1, T_2, S_1, N_1, N_2, u, v, w$  に對する 8 個の聯立微分方程式である。(1・7) に於て

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad \dots \dots \dots \quad (1 \cdot 13)$$

が省略され、(1・10) に於て  $N_1, N_2$  と  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  との積及び  $\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial y}$  と  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  との積が省略される場合には、 $T_1, S_1, T_2$  は應力函數  $\phi$  を以て (f・1) の如く表はされ、Kármán の與へた方程式と全く一致する。一般の曲面板について Love の求めた結果に於ては  $z$  方向の釣合の式中の (1・13) の項が省略され、 $x, y$  方向の釣合の式中の  $\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial y}$  と  $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$  との積が省略されてゐるが、之等の項は次節の計算に於て示される如く一般に無視し得るものではない。從來多くの例題に於て、 $w$  が板厚の程度の大きさを越えた所では、實驗結果と計算値との間に相當の距りが認められるのは、解法が近似的であることの外に上記の項の省略に據るものと考へられる。

## 2. 應用

上述の基礎方程式の一つの最も簡単な應用として、一様な垂直壓力を受ける薄い圓板を考へて見よう。この場合には變形は中心に關して對稱であるから (1・7)、(1・9) に相當する釣合の方程式は、 $T_1, T_2$  を夫々半徑方向及び圓周方向の垂直合應力、 $N$  を半徑に垂直な斷面に作用する板の面に垂直な剪斷力とすれば、

$$\frac{d(Nr)}{dr} + T_1 r \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{d(T_1 r)}{dr} \frac{dw}{dr} + T_2 \frac{dw}{dr} + pr = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 1)$$

$$\frac{d(T_1 r)}{dr} - T_2 = Nr \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{d(Nr)}{dr} \frac{dw}{dr} \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 2)$$

茲に

$$N = -B \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \quad \dots \dots \dots \quad (2 \cdot 3)$$

(1) (1・13) によつて表される項が零になるのは板の面内の釣合を變形前の狀態に於て考へてゐるためである（小野先生の御注意による）

(2) A. E. H. Love, Mathematical Theory of Elasticity, 3rd. edi. (1920), Art. 331.

$$B = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$$

又 (1.11) に相當する圓板の式より  $u, v$  を消去すれば

$$\frac{d(T_2r)}{dr} - T_1 - \nu \left[ \frac{d(T_1r)}{dr} - T_2 \right] + 2hE \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

従つて (2.2)、(2.3)、(2.4) は次の二式に歸着する。

$$\frac{d(T_1r)}{dr} - T_2 + Br \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \frac{d^2 w}{dr^2} + B \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right\} \frac{dw}{dr} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(T_2r)}{dr} - T_1 + \nu Br \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu B \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right\} \frac{dw}{dr} \\ + hE \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

今圓板の半徑を  $a$  として

$$\frac{r}{a} = s \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

と置き變數として  $s$  を用ひれば、(2.1)、(2.5) 及び (2.6) は夫々

$$p = \frac{B}{a^4} \nabla_s^4 w - \frac{1}{a^2} \left[ T_1 \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{1}{s} T_2 \frac{dw}{ds} + \frac{1}{s} \frac{d(T_1 s)}{ds} \frac{dw}{ds} \right] \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\frac{d(T_1 s)}{ds} - T_2 + \frac{B}{a^4} s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{B}{a^4} \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \right\} \frac{dw}{ds} = 0 \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(T_2 s)}{ds} - T_1 + \nu \frac{B}{a^4} s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \frac{d^2 w}{ds^2} + \nu \frac{B}{a^4} \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \right\} \frac{dw}{ds} \\ + \frac{hE}{a^2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

(2.9)、(2.10) の和及び差を作れば

$$s \frac{d(T_1 + T_2)}{ds} + \alpha(s) + \beta(s) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

$$s \frac{d(T_1 - T_2)}{ds} + 2(T_1 - T_2) + \{a(s) - \beta(s)\} = 0 \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 12)$$

茲に

$$\left. \begin{aligned} a(s) &= \frac{B}{a^4} \left[ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \right\} \frac{dw}{ds} \right] \\ \beta(s) &= \nu \frac{B}{a^4} \left[ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left\{ s \frac{d}{ds} (\nabla_s^2 w) \right\} \frac{dw}{ds} \right] + \frac{hE}{a^2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2 \cdot 13)$$

(2・11)、(2・12) は  $a(s)$ 、 $\beta(s)$  が  $s$  の函数として與へられれば、 $T_1 + T_2$ 、 $T_1 - T_2$  に就いて解き得られる。今微小變位の場合の式

$$w = f(I + ms^2 + ms^4), \quad I + m + n = 0 \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 14)$$

を假定すれば、 $a$ 、 $\beta$  は  $s$  の函数として表はされ

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{B}{a^4} 32f^2 \left[ (I + \nu) \left( \frac{3mn}{2}s^2 + \frac{5n^2}{2}s^4 \right) + (I - \nu) \left( \frac{3mn}{4}s^2 + \frac{5n^2}{3}s^4 \right) \right] \\ &\quad - \frac{hE}{a^2} 2f^2 \left( \frac{m^2}{4}s^2 + \frac{mn}{3}s^4 + \frac{n^2}{6}s^6 \right) + c_1 + \frac{c_2}{s^2} \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{B}{a^4} 32f^2 \left[ (I + \nu) \left( \frac{3mn}{2}s^2 + \frac{5n^2}{2}s^4 \right) - (I - \nu) \left( \frac{3mn}{4}s^2 + \frac{5n^2}{3}s^4 \right) \right] \\ &\quad - \frac{hE}{a^2} 2f^2 \left( \frac{3m^2}{4}s^2 + \frac{5mn}{3}s^4 + \frac{7n^2}{6}s^6 \right) + c_1 - \frac{c_2}{s^2} \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 16) \end{aligned}$$

$$s = 0 \text{ 及び } I = 0 \text{ に於て } T_1 \cdot s^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 17)$$

なる條件より

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{B}{a^4} 32f^2 \left[ (I + \nu) \left( \frac{3mn}{2} + \frac{5n^2}{2} \right) + (I - \nu) \left( \frac{3mn}{4} + \frac{5n^2}{3} \right) \right] \\ &\quad + \frac{hE}{a^2} 2f^2 \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (2 \cdot 18)$$

$$c_2 = 0$$

(2・15)、(2・16) 及び (2・18) の第一項は第二項に比して  $\frac{t^2}{a^2}$  の order の微小量であ

るから省略出来るとすれば、 $T_1, T_2$  は應力函数  $\phi$  によつて表はされ、

$$\frac{d\phi}{ds} = -f^2 \left( \frac{m^2}{4}s^3 + \frac{mn}{3}s^5 + \frac{n^2}{6}s^7 \right) + f^2 \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right)s \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 19)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2hE}{r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{2hE}{a^2} \frac{1}{s} \frac{d\phi}{ds} \\ T_2 &= 2hE \frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{2hE}{a^2} \frac{d^2\phi}{ds^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 20)$$

従つて (2・8) は

$$p = \frac{B}{a^4} \nabla_s^4 w - \frac{1}{a^4} 2hE \left[ \frac{1}{s} \frac{d}{ds} \left( \frac{d\phi}{ds} \frac{dw}{ds} \right) + \frac{1}{s} \frac{d^2\phi}{ds^2} \frac{dw}{ds} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 21)$$

右邊の最後の項のみが圓板の場合に省略し得ざるものとして新しく附加へられた。  
(2・21) の兩邊に  $wrdr = a^2wsds$  を乗じて  $s$  について 0 から 1 まで積分すれば

$$\begin{aligned} a^4 \int_0^1 pwsds &= B \int_0^1 ws \cdot \nabla_s^4 wds \\ &\quad - 2hE \int_0^1 \left[ \frac{d}{ds} \left( \frac{d\phi}{ds} \frac{dw}{ds} \right) + \frac{d^2\phi}{ds^2} \frac{dw}{ds} \right] wds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left( \frac{d\phi}{ds} \frac{dw}{ds} \right) wds &= \left[ \frac{d\phi}{ds} \frac{dw}{ds} w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 ds \\ &= - \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 ds \\ \int_0^1 \frac{d^2\phi}{ds^2} \frac{dw}{ds} wds &= \left[ \frac{d\phi}{ds} \frac{dw}{ds} w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \frac{d}{ds} \left( \frac{dw}{ds} w \right) ds \\ &= - \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \frac{d^2w}{ds^2} wds - \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 ds \end{aligned}$$

により (2・22) は

$$a^4 \int_0^1 pwsds = B \int_0^1 ws\nabla_s^4 wds \\ + 4hE \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 ds + 2hE \int_0^1 \frac{d\phi}{ds} \frac{d^2 w}{ds^2} wds \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 23)$$

この式に (2・14) 及び (2・19) を入れれば

$$\frac{a^4 p}{t^4 E} (3-n) = \frac{16}{1-\nu^2} n \left( 1 - \frac{1}{3} n \right) \frac{f}{t} \\ + \left[ 2 \left( 1 + \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{21} n^4 \right) + 12m \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right) \right. \\ \left. + 6 \left\{ (m^2 + 6n) \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right) - \frac{m^3}{4} \right\} \right. \\ \left. + 4 \left\{ 7mn \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right) - \frac{m^2}{4} (m^2 + 6n) - \frac{m^2 n}{3} \right\} \right. \\ \left. + 3 \left\{ 6n^2 \left( \frac{m^2}{4} + \frac{mn}{3} + \frac{n^2}{6} \right) - \frac{7m^3 n}{4} - \frac{mn}{3} (m^2 + 6n) - \frac{mn^2}{6} \right\} \right. \\ \left. - \frac{24}{10} (4m^2 n^2 + n^3) - \frac{19mn^3}{3} - \frac{n^4}{14} \right] \left( \frac{f}{t} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (2 \cdot 24)$$

を得る。茲に

$$1+m+n=0$$

であり、(2・24) は (2・17) なる条件の下に成立するものであり、周邊固定 ( $r=a$   
 $\frac{dw}{dr}=0$ ) の場合には  $n=1$ 、周邊支持 ( $r=a$ , モーメント=0) の場合には  $n=\frac{1+\nu}{5+\nu}$ 、  
周邊に於て任意に拘束される場合には  $1>n>\frac{1+\nu}{5+\nu}$  である。(1・13) によつて表は  
される項を省略する場合は (2・24) の  $\left( \frac{f}{t} \right)^3$  の項としては

$$\left( 1 + \frac{2}{3} n^2 + \frac{1}{21} n^4 \right) \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

のみであるから、上記以外のものが  $\left(\frac{f}{t}\right)^3$  の係数の補正項として導入されたこととなる。

次に (2・24) が從來の結果に對してどの程度改良されたかを確めるために、筆者(1)が以前に有機硝子の圓板に就いて行つた實驗及びその場合の計算結果と比較して見ると、

(i) 周邊固定の場合 ( $n=1$ )

$$\frac{a^4 p}{t^4 E} = 6.55 \frac{f}{t} + 0.857 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

(ii) 周邊支持の場合 ( $n = \frac{1+\nu}{5+\nu}$ ,  $\nu=0.43$ )

$$\frac{a^4 p}{t^4 E} = 1.72 \frac{f}{t} + 0.383 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

(iii) 實驗に於て實現された固定度の場合 ( $n=0.764$ )

$$\frac{a^4 p}{t^4 E} = 5.0 \frac{f}{t} + 0.629 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

…(2・25)

に對して現在の結果 (2・24) による時は夫々上記の場合に相當して

$$(i) \quad \frac{a^4 p}{t^4 E} = 6.55 \frac{f}{t} + 1.097 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

$$(ii) \quad \frac{a^4 p}{t^4 E} = 1.72 \frac{f}{t} + 0.415 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

$$(iii) \quad \frac{a^4 p}{t^4 E} = 5.0 \frac{f}{t} + 0.796 \left( \frac{f}{t} \right)^3$$

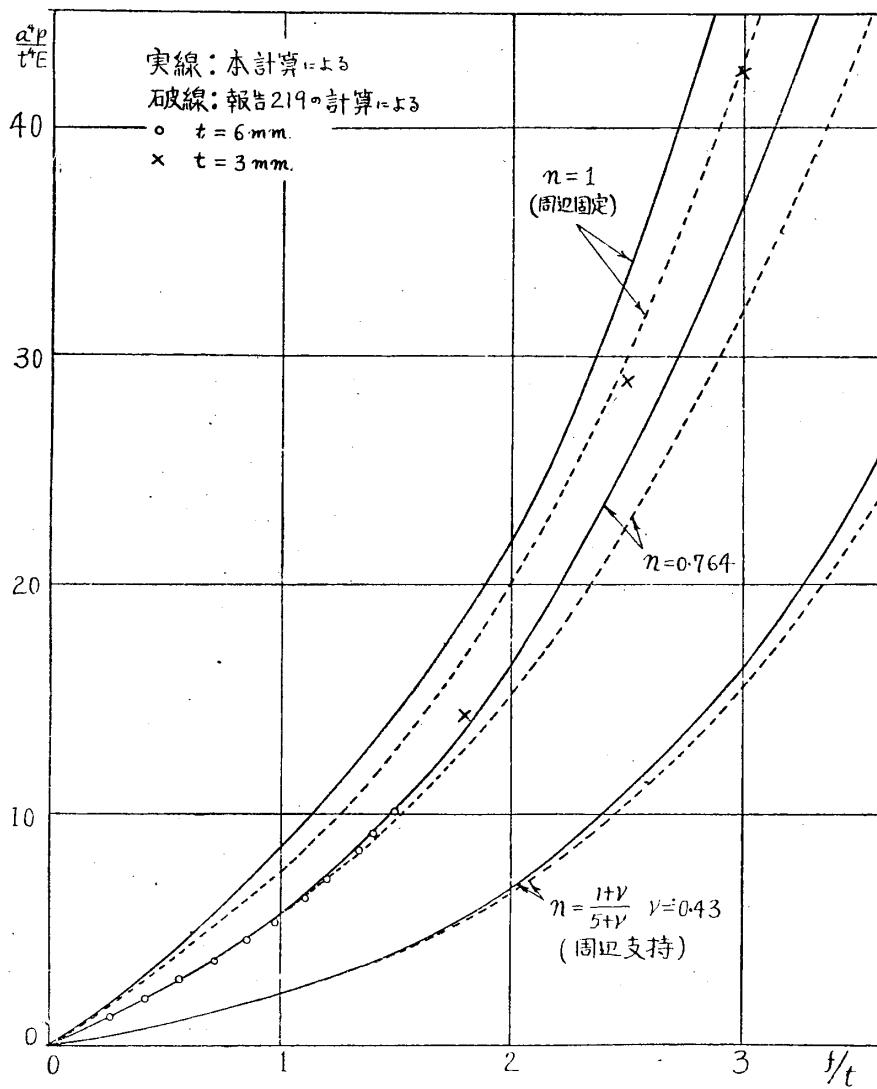
…(2・26)

となる。從來の結果によれば、或る  $f/t$  の値に對する  $p$  の實驗値はその計算値に比して大きく、その差は  $f/t$  が增加すると共に大となるのが常である。上の結果から分る如く、 $(f/t)^3$  の係数が可成り大きくなるから、實驗値と理論値の一致する範圍が擴大される(第一圖参照)。この場合に於ても  $f/t=2$  以上ではやはり兩者の差が認められるが、この差は實驗裝置の關係上  $f/t$  が大となるに従つて  $n$  が

(1) 著者：「周邊に於て任意に拘束され、一様に加壓される圓板に就いて」航研報告 219 號

(2) 例へば P. T. Steinthal : Some experimental data on the flexure of flat circular plates within the elastic limits, Engineering. Vol. 91 (1911), p. 677.

大となる様な條件に置かれてゐることにもよるものと思はれる。 $n$  が一定である様な條件の下に實驗すればこの相違は遙に縮小されるものと思はれる。尙厚さ 4mm の有機硝子について行つた實驗結果は稍不正確と思はれる節があるので第一圖には



第一圖

記入しなかつたが、それ等の實驗値の内には式 (2・25) の (i) によつて計算される  $a^4 p / t^4 E$  の値よりも大きく、式 (2・26) の (i) の  $a^4 p / t^4 E$  の値よりも小さいもの、上記の何れよりも大きいもの等が存在してゐるが、尙精確に實驗すれば、實驗値は大體後者よりも小さくなると思はれる。

### 3. 結 論

有限変位を行ふ薄い平板の撓みの方程式として従来 Kármán によつて求められた結果が一般に用ひられてゐるが、この方程式に於ては  $z$  方向の釣合及び應力と變位  $w$  との關係は變形後の狀態を考へてゐるのに對して、 $x, y$  方向の釣合は變形前の狀態を考へることによつて應力函數  $\phi$  を用ひてゐる點に矛盾を有することを指摘し、且つ夫々の釣合の式の更に正確な形を提出した。その結果

(1) 板の面内の力の釣合の式に於ては

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad -\frac{\partial}{\partial x} \left( N_1 \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

なる項が附加されること、

(2) 板の面に垂直な方向の釣合の式に於ては

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y}$$

なる項が附加され、之は

$$T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

に對して無視出來ないことを明かにした。

(3) 之等の結果を一様に加壓される圓板の場合に應用したが、その結果は従来の結果よりも更によく實驗と一致する。この場合  $\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}, \dots; N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \dots$  は結局省略され、應力は一つの應力函數によつて表はされる。

終りに臨み本研究は小川所員の御指導の下になされたこと、特に第二節全部は先生の御指示により補足されたことを記し衷心より謝意を表する。尙有益なる助言を戴いた小野先生、妹澤先生、東京工業大學倉西教授に對し厚く御禮申上げる。