No. 234.

(Published July, 1942.)

Flexural-Torsional Vibrations of a Wing in Flutter Condition, solved with Matrix-Operational Methods.

By

Gorō HAYASHI, *Rigakusi.*

Abstract.

Let $q_1, q_2, \ldots q_n$ be generalized coordinates of a system and $f_1(t), f_2(t) \ldots, f_n(t)$ be given external forces, then the linear dynamical equations of the system with n degrees of freedom are expressed by matrix form as follows:

$$[A]\{\ddot{q}\}+[B]\{\dot{q}\}+[C]\{q\} = \{f(t)\}\,, \qquad (1)$$

where [A], [B] and [C] are square matrices with constant elements Aij, Bij, Cij $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ respectively and braces express column matrices. In the first place we solve the differential equations (1) by matrix-operational method under general initial conditions,

$$t = 0: \quad \{q(t)\} = \{q(0)\}\,, \quad \{\dot{q}(t)\} = \{\dot{q}(0)\}\,.$$

Then we have

$$\begin{aligned}\{q(t)\} &= \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}[A]\{(\dot{q}\,0)\}e^{\alpha_\nu t} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}([A]\alpha_\nu+[B])\{q(0)\}e^{\alpha_\nu t} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\{f(\tau)\}\,d\tau\,, \qquad (2)\end{aligned}$$

where $[P(s)]$ is adjoint matrix of $[p(s)] = [A]s^2+[B]s+[C]$ and $\Delta(s)$ such determinant of $[p(s)]$ that $\Delta(s) = 0$ is characteristic equation of (1). The characteristic equation

$\Delta(s)=0$ is of 2n degrees with respect to s and generally this equation has 2n distinct complex roots α_ν ($\nu=1, 2, \ldots, 2n$) and $\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)$ means $\left(\frac{d}{ds}\Delta(s)\right)_{s=\alpha_\nu}$.

In vibration problems the first and second terms of (2) represent the free vibrations which depend on initial conditions and the third term of (2) gives the forced vibration together with free vibration accompanied by forced vibration. Since with operational method the solution (2) results very simply, the method is of great advantage in treating the free and forced vibrations simultaneously.

For brevity, in the following investigations we consider problems with vanishing initial conditions. If the given external forces are sinusoidal, i.e.,

$$\begin{aligned}\{f(t)\} &= \{\varphi \sin(\omega t+\varepsilon)\} \\ &= \{\psi \sin \omega t + \rho \cos \omega t\}\,,\end{aligned} \tag{3}$$

then from (2) we get

$$\begin{aligned}\{q(t)\} =& \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{\alpha_\nu^2+\omega^2}\{\psi\omega+\alpha_\nu\rho\} \\ &-\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)} \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu^2+\omega^2}}\{\varphi \sin(\omega t+\varepsilon+\eta)\}\,.\end{aligned} \tag{4}$$

The first and second terms of (4) represent free vibration and forced vibration respectively and this is the general solution of (1) with vanishing initial conditions and sinusoidal external forces. But if we consider forced vibration only, the method described above is not suitable and we rather use the Laplace transforms of q's and f's and furthermore the inversion formula directly. Hence it is necessary that we performs the calculus of residues. The result is as follows:

$$R_r^2 = \frac{E_r \bar{E}_r}{\Delta(i\omega)\Delta(-i\omega)}\,, \tag{5}$$

where Rr is the forced amplitude of $q_r(t)$, E_r determenant obtained when the r-th column of $\Delta(i\omega)$ is replaced by $\psi+i\rho$, and $\bar{E}_r$ the conjugate complex of E_r. This is a general formula of forced amplitude when the sinusoidal external forces are applied to the system. From this formula we know that the forced amplitude is finite except when the characteristic equation $\Delta(s)=0$ has a pure imaginary root. If $\Delta(s)=0$ has a pure imaginary root, the damping coefficient (real part of characteristic root) is zero and the denominator of (5) vanishes, so that the forced amplitude (5) is infinite.

Specializing the above described theory, we shall next treat the system with two degrees of freedom. From (3), (4) and (5) we have

$$
\begin{aligned}
q_1(t) = \varphi_1 \Bigg\{ & \frac{\sqrt{(-A_{22}\omega^2 + C_{22})^2 + \omega^2 B_{22}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4 - p_2\omega^2 + p_4)^2 + \omega^2(p_1\omega^2 - p_3)^2}} \sin(\omega t + \varepsilon_1 + \alpha) \\
& + \sum_{\nu=1}^{4} e^{\alpha_\nu t} \frac{1}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)} \frac{1}{\alpha_\nu^2 + \omega^2} (A_{22}\alpha_\nu^2 + B_{22}\alpha_\nu + C_{22})(\omega \cos \varepsilon_1 + \alpha_\nu \sin \varepsilon_1) \Bigg\} \qquad (6) \\
- \varphi_2 \Bigg\{ & \frac{\sqrt{(-A_{12}\omega^2 + C_{12})^2 + \omega^2 B_{12}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4 - p_2\omega^2 + p_4)^2 + \omega^2(p_1\omega^2 - p_3)^2}} \sin(\omega t + \varepsilon_2 + \beta) \\
& + \sum_{\nu=1}^{4} e^{\alpha_\nu t} \frac{1}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)} \frac{1}{\alpha_\nu^2 + \omega^2} (A_{12}\alpha_\nu^2 + B_{12}\alpha_\nu + C_{12})(\omega \cos \varepsilon_2 + \alpha_\nu \sin \varepsilon_2) \Bigg\},
\end{aligned}
$$

where p's denote the coefficients of expanded form of $\Delta(s)$, i.e.

$$\Delta(s) = p_0 s^4 + p_1 s^3 + p_2 s^2 + p_3 s + p_4 .$$

Similar relation hold for $q_2(t)$.

We apply above results to the problems of flexural-torsional vibrations of a wing in flutter condition by using the method of Frazer-Jones. (See Fig. 1). Then from (6) and similar relation for $q_2(t)$, we have

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{R_1}{d}\right)^2 = \frac{(-A_{22}\omega^2 + C_{22})^2 + \omega^2 B_{22}^2}{(p_0\omega^4 - p_2\omega^2 + p_4)^2 + \omega^2(p_1\omega^2 - p_3)^2}, \qquad (7)$$

and similarly for R_2, where R_1 and R_2 are the forced amplitudes at leading edge and trailing edge respectively, $d\sigma_0 \sin \omega t$ is forced external force and σ_0 is stiffness rate of the spring S denoted in Fig. 1. And the free vibration of the leading edge is represented by

$$q_1'(t) = r_1' e^{\lambda_1 t} \sin(\mu_1 t + \eta_1) + r_2' e^{\lambda_2 t} \sin(\mu_2 t + \eta_2),$$

where

$$
\begin{aligned}
r_1' &= d\sigma_0 \frac{\omega}{p_0}\left[\frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\mu_1(C^2 + D^2)(E^2 + F^2)}\right], \\
r_2' &= d\sigma_0 \frac{\omega}{p_0}\left[\frac{\sqrt{P'^2 + Q'^2}}{\mu_2(C'^2 + D'^2)(E'^2 + F'^2)}\right].
\end{aligned} \qquad (8)
$$

anc C, D, E, F, P, Q and their dashes depend on λ, μ and ω. For the meaning of their expressions we shall refer (5.11) of our paper. λ's and μ's are real and imaginary parts of the characteristic roots respectively.

From numerical values given by experiments which described in section 6 of our paper we can calculate the roots of the characteristic equation and using these values it is possible to write the graphs of resonance curves and relations between forced frequencies and amplitudes of free vibrations by (7) and (8) respectively. Fig. 2 and 3 are such graphs for various air-speeds. We know from our calculations that $V = 20.665$ m./sec. is critical speed for flutter and $\nu = \omega/2\pi = 3.17$ (sec.$^{-1}$) is critical frequency. The amplitudes of forced and free vibrations are then both infinite. Fig. 3 shows the graph of r_2' only, because in our case r_2' only contributes to flutter. Fig. 4 shows the real parts (damping coefficients) and imaginary parts (frequencies of free vibration) of the characteristic equation.

From interpretations of theoretical results of (7), (8) and Fig. 2, Fig. 3 we see that the study of forced vibration is important for flexural-torsional vibrations of a wing in flutter condition. Precise interpretations are contained in section 6 of our paper and we gave merely their abbreviation here. Moreover the importance of forced vibration is known from Fig. 2 and Fig. 4 and its interpretation has already given by Prof. K. Sezewa in his paper published in 1939.

No. 234

（昭和十七年七月發行）

行列並びに演算子法に依る翼の屈曲－振り振動及び其の翼振れの研究

特別研究員 *林　　五　　郎

目　　次

1. 緒　　論

本論文の目的は先づ一般なる外力に依つて强制されるn個の自由度を有する系の力學的方程式を行列及びラプラス變換の理論を用ひて解き次ぎに外力が週期的な特別の場合に就いて特に考慮し、更らに其等の結果を飛行機の翼の屈曲振り振動及び其の翼振れの問題へ應用する事である。行列の理論を用ひて聯立微分方程式を表はし且つこれを解く時は其の表示の簡潔なる事及び其の計算の容易なる事は良く知られて居る[1]。又翼の振動問題を[2]行列の理論と關聯せしめて論ずる事は既に Frazer, Dunkan, Collar 及び Jones 等に依つて企てられた所である。次に線型微分方程式を解くのにラプラス變換の理論を用ひる時は可成り嚴密に且つ容易に解く事が出來

* 妹澤研究室（妹澤所員紹介）
(1) R. A. Frazer, W. J. Dunkan and A. R. Collar: Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations (1938), 第五章より第七章まで參照。
(2) (1) の著書第九章以下並びに 399 頁～401 頁の參考論文參照。

る。特に與へられた微分方程式が定數係數を持つ常微分方程式なるか又は二つの獨立變數を持つ二次元の偏微分方程式なる時には簡單である。而して偏微分方程式なる時には其の獨立變數の一つが正で且つ其の境界條件が線型なる時に用ひて最も有用である。[1] 尤も我々が實際上の問題を取り扱ふ場合には問題を形式的に解くのみであるが適當なる假定の下に數學的に嚴密なる解を求める事が出來る。即ち形式的に求められた解が實際に與へられた境界値問題の解である事及び解が單一なる事を示す事が出來る。

ラプラス變換の理論を用ひて微分方程式を解く際の鍵は次の補助定理を用ひるにある。即ち一つの函數 $f(t)$ が始めの $(\nu-1)$ 個の導函數を $t>0$ に對して持ち $(\nu\geqq 1)$, $f^{(\nu-1)}(t)$ は $t=0$ で連續で $t>0$ に對して ν 次の導函數が存在する。而して $f^{(\nu)}(t)$ に對して其のラプラス變換

$$F^{(\nu)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}f^{(\nu)}(t)dt=L(f^{(\nu)}(t)) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot1)$$

が存在するものとする然る時は $f(t)$ も亦ラプラス變換を持つ函數であり、且つ

$$L(f^{(\nu)})=s^\nu L(f)-\{f(0)s^{\nu-1}+f'(0)s^{\nu-2}+\cdots\cdots+f^{(\nu-2)}(0)s+f^{(\nu-1)}(0)\}\cdots(1\cdot2)$$

なる關係が成立する。[2] ここに L は括弧の中の函數に $e^{-st}dt$ を乘じて 0 から ∞ まで t について積分するラプラス變換を表はす記號である。この補助定理を用ひる時は二次元偏微分方程式は常微分方程式に而して常微分方程式は代數方程式に變換される。從つて變換された方程式は比較的容易に解く事が出來る。次ぎに所謂ラプラスの逆公式 (Mellin の定理) に依つて始めの微分方程式の解を求める事が出來る。即ち逆公式と云ふのは次の定理である。若しも

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3)$$

ならば適當な假定の下に

(1) G. Doetsch : Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (1937) 及び R. V. Churchill : The Solution of Linear Boundary-Value Problems in Physics by Means of the Laplace Transformation, Part I and Part II, Mathematische Annalen, 114 (1937) 及び Bd. 115 (1938) 參照

(2) この補助定理は G. Doetsch に依つて求められた。G. Doetsch : Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation, Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 4 (1935) 參照。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)ds \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot4)$$

である。[1]

一般にラプラス變換の理論を用ひて微分方程式を解かうとすれば考へる函數がラプラス變換を有する事(即ち Doetsch の云ふ l-函數なる事)が必要であり、又前に述べた補助定理の滿足すべき條件、更らに逆公式の適用される爲めの條件及び積分の順序の交換可能の條件等が滿足されねばならない。これ等の條件を精しく吟味する事は數學的には興味の深い事であり又最も必要な事である。併しながら其等の研究の結果通常物理的若しくは工學的に應用される場合にはこれ等の條件は常に滿足されて居ると考へて大して誤りでない。從つてこれ等の條件は物理的乃至工學的意味を減ぜしめはしない。

次にこれ等の理論を用ひて飛行機の翼の屈曲-振り振動及び其の翼振れを研究する。先づ翼の屈曲-振り强制振動を考へるのに强制力は週期的であると假定する。而して强制振動の振幅を求める方法も從來幾つかの方法が考へられて居るが、ここでは上の如き方法を用ひる。我々の方法を用ひれば自由振動と强制振動とを同時に取り扱ふ事が出來る。從つて自由振動の不安定的狀態である翼振れを研究するのに强制振動をさせて考へる事の妥當性が容易に見出される。翼の屈曲-振り振動及び其の翼振れを考へるのに强制振動をさせて考へる事は既に妹澤先生[2]及び Frazer-Jones[3] 等に依つて考へられて居る。

本論文の第二節に於いてはn個の自由度を有する系の力學的方程式を行列及びラプラス變換の理論に依つて解いて見る。この結果は何等新しいものを含まないが理論の統一と前に述べた强制及び自由の兩振動が同時に取り扱はれる所以を示すのに都合がよい。第三節に於いては强制力が週期的なる特別の場合に就いて强制振幅の一般を公式を導かう。本節の方法に依れば前節の方法と違つて强制振動の問題を取り扱ふのには所謂特性方程式の根を考へる必要のない事が分る。次に第四節に於いては二個の自由度を有する特別の問題を取扱ひ强制力は週期的とする。ここでは强

(1) この適當なる條件に就いては(3)の G. Doetech の著書及び R. V. Churchill の論文を參照。

(2) 妹澤-向井：彈性的片持翼の屈曲-振りフラッターの研究、航研彙報第百七十號、昭和十三年；妹澤-內田：同第百八十號、昭和十四年及び妹澤-西野：模型彈性翼の三元フラッターに關する强制振動實驗、航研彙報第百七十八號、昭和十四年等。

(3) R. A. Frazer and W. P. Jones: Forced Oscillations of Aeroplanes, with Special Reference to von Schlippe's Method of Predicting Critical Speeds for Flutter, R.& M. No. 1795 (1937).

制振幅を求めるのに留數の考へを用ひて居るが、結局第三節の一般公式の特別の場合として强制振幅が得られる。更らに第五節には問題を一層特別化して上に述べて來た方法を翼の屈曲-捩り振動へ應用する。この際の考へ方はここでは Frazer-Jones の(1)方法を採用する。最後に第六節に於いては得られた種々の結果に就いて數値計算を行ひ、その意義を明らかにしやう。

2.　n 個の自由度を有する線型力學的方程式の解

一般座標を $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ とし與へられた强制外力を $f_1(t), f_2(t), \cdots\cdots, f_n(t)$ とすれば減衰の項を伴つた一般な線型力學的方程式は行列の形で書き表はせば次の様になる。即ち

$$[A]\{\ddot{q}\}+[B]\{\dot{q}\}+[C]\{q\}=\{f(t)\}. \qquad \cdots\cdots(2\cdot1)$$

ここに $[A]$, $[B]$ 及び $[C]$ は夫々 Aij, Bij 及び Cij $(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$ を要素とする n 次の正方行列で $\{q\}$ 及び $\{f(t)\}$ 等は列行列である。次にこの微分方程式を一般なる初期條件

$$t=0: \qquad \{q(t)\}=\{q(0)\},\ \{\dot{q}(t)\}=\{\dot{q}(0)\}$$

の下に解こう。

$\{q(t)\}$ 及び $\{f(t)\}$ のラプラス變換が存在するものとし其等を夫々 $\{Q(s)\}$ 及び $\{F(s)\}$ とする。即ち

$$\{Q(s)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{q(t)\}\,dt, \qquad R(s)>0, \qquad \cdots\cdots(2\cdot2)$$

$$\{F(s)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{f(t)\}\,dt, \qquad R(s)>0, \qquad \cdots\cdots(2\cdot3)$$

然る時は補助定理（1・2）に依つて

$$s\{Q(s)\}-\{q(0)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{\dot{q}(t)\}\,dt, \qquad \cdots\cdots(2\cdot4)$$

$$s^2\{Q(s)\}-s\{q(0)\}-\{\dot{q}(0)\}=\int_0^\infty e^{-st}\{\ddot{q}(t)\}dt. \qquad \cdots\cdots(2\cdot5)$$

（1）前掲　の Frazer-Jones の論文參照。

(2・1) の兩邊にラプラス變換を施して (2・2)、(2・3)、(2・4) 及び (2・5) を代入すれば、

$$[p(s)]\{Q(s)\}=\{F(s)\}+([A]s+[B])\{q(o)\}+[A]\{\dot{q}(o)\},$$

但し

$$[p(s)]=[A]s^2+[B]s+[C]$$

今 $[p(s)]$ の逆行列を $[p(s)]^{-1}$ とし、これを兩邊の左に乘ずれば

$$\{Q(s)\}=[p(s)]^{-1}(\{F(s)\}+([A]s+[B])\{q(o)\}+[A]\{\dot{q}(o)\}).$$

次に $[p(s)]$ の餘分行列 (adjoint matrix) を $[P(s)]$ とし $[p(s)]$ の行列式を $\Delta(s)$ とすれば、

$$[p(s)]^{-1}=\frac{[P(s)]}{\Delta(s)}.$$

故に

$$\{Q(s)\}=\frac{[P(s)]}{\Delta(s)}(\{F(s)\}+([A]s+[B])\{q(o)\}+[A]\{\dot{q}(o)\}). \quad \cdots\cdots(2\cdot6)$$

さて $[P(s)]/\Delta(s)$ を部分分數の形に分解するのであるが、それは通常の代數學の法則に從つて行ふ事が出來る。而してその展開の形は $\Delta(s)=0$ の根の性質に關係する事も代數學に於けると同樣である。實際問題特に振動問題に於いて最も屢〻現はれ且つ最も重要な場合は $\Delta(s)=0$ の根が互ひに相異る場合である。然るに $\Delta(s)=0$ なる方程式は s に就いて $2n$ 次であるから一般に $2n$ 個の根を持つ、而して行列 $[P(s)]$ は s に就いて 2 次である。故に一般に其の餘分行列 $[P(s)]$ は s に就いて $2(n-1)$ 次である。即ち一般には $[P(s)]$ の s に就いての次數は $\Delta(s)$ のそれよりも低い。我々はここには應用の必要上この場合のみに就いて考へる。[(1)] 然る時は

(1) $[P(s)]/\Delta(s)$ を部分分數の形に展開するには全部で次の場合を考へねばならない。
(a) $\Delta(s)=0$ の根がすべて相異なる場合。
(b) $\Delta(s)=0$ の根に相等しいもののある場合。
而して
1° $\Delta(s)=0$ の根がすべて相異なり且つ $[P(s)]$ の次數が $\Delta(s)$ の次數よりも低い場合
2° $\Delta(s)=0$ の根がすべて相異なり且つ $[P(s)]$ の次數が $\Delta(s)$ の次數と相等しい場合
3° $\Delta(s)=0$ の根がすべて相異なり且つ $[P(s)]$ の次數が $\Delta(s)$ の次數よりも高い場合
4° $\Delta(s)=0$ が重根を持つ場合。
2°, 3° 及び 4° の場合も稀には起るけれども實際問題に於いては 1° だけで十分であるからここでは省略するこれ等に就いては (1) の Frazer-Dunkan-Collar の著書及び Louis A. Pipes: A. Matrix Generalization of Hearlside's Expansion Theorem, Journ. Franklin Institute (1940) 參照。

$$\frac{[P(s)]}{\varDelta(s)}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[A_\nu]}{s-a_\nu}$$

とすれば通常の法則に從つて

$$[A_\nu]=\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)}$$

となる。ここに $\varDelta^{(1)}(a_\nu)$ は $\left(\frac{d}{ds}\varDelta(s)\right)_{s=a_\nu}$ の事である。從つて (2·6) より

$$\{Q(s)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)(s-a_\nu)}(\{F(s)\}+([A]s+[B])\{q(o)\}+[A]\{q(o)\}).$$

$$=\{Q_a(s)\}+\{Q_b(s)\}+\{Q_c(s)\}.$$

先づ

$$\{Q_a(s)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)(s-a_\nu)}\{F(s)\}$$

に逆公式を適用すれば "Faltung" の定理[(1)]に依り

$$\{q_a(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)}\int_o^t e^{a_\nu(t-\tau)}\{f(\tau)\}d\tau.$$

次ぎに

$$\{Q_b(s)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}_{(a_\nu)}(s-a^\nu)}([A]s+[B])\{q(o)\}$$

$$=\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)}[A]+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)(s-a_\nu)}([A]a_\nu+[B])\right)\{q(o)\}.$$

これに逆公式を適用すれば右邊の第一項は $t>o$ に對して o となるから

$$\{q_b(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)}([A]a_\nu+[B])\{q(o)\}e^{a_\nu t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot8)$$

(1) "Faltung" の定理に就いては (3) の Doetsch の著書、又は K. W. Wagner: Operatorenrechnung nebot Anwendungen in Physik and Technik (1940) 等參照。

最後に

$$\{Q_c(s)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P'(a_\nu)]}{\Delta^{(1)}(a_\nu)(s-a_\nu)}[A]\{\dot{q}(o)\}$$

に逆公式を適用して

$$\{q_c(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}[A]\{\dot{q}(o)\}e^{\alpha_\nu t}$$

從つて (2·7), (2·8) 及び (2·9) を加へ合せて求める $\{q(t)\}$ は次の様になる。

$$\{q(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}[A]\{\dot{q}(o)\}e^{\alpha_\nu t}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}([A]a_\nu+[B])\{q(o)\}e^{\alpha_\nu t}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(a_\nu)]}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\int_o^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\{f(\tau)\}d\tau \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10)$$

斯くして我々の場合は完全に解けたわけである。從つて通常實際問題に起つて來る場合は、この公式に依つて求める事が出來る。今問題を振動問題と考へれば(2·10)の第一項及び第二項は初期條件に關係する自由振動の項を與へ第三項は强制振動と强制力に關係する自由振動とを與へる。このやうに我々の方法は振動問題に應用すれば自由、强制の兩振動が自然に同時に考へられる强制振動のみを考へるにはこのやうに $\Delta(s)=0$ の根を考へなくとも後に述べるやうに $\{F(s)\}$ の留數を考へて直接に逆公式より計算した方が都合がよい。

3. 週期的强制力を持つ n 個の自由度を有する系の力學的方程式の解

先づ前節の應用として强制力が週期的なる場合を考へる。本節以下に於いては初期條件は簡單の爲めに

$$t=o:\quad \{q(t)\}=o,\qquad \{\dot{q}(t)\}=o$$

とする。一般なる初期條件の場合には (2・10) の右邊の第一項及び第二項を本節の結果に加へればよい。我々の場合には (2・10) より

$$\{q(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\int_0^t \frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\{f(\tau)\}d\tau \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot1)$$

である今强制力を

$$\{f(t)\}=\{\varphi\sin(\omega t+\varepsilon)\}$$
$$=\{\psi\sin\omega t+\rho\cos\omega t\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot2)$$

とすれば (3・1) より

$$\{q(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\{\varphi\sin(\omega\tau+\varepsilon)\}d\tau$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\{\psi\sin\omega\tau+\rho\cos\omega\tau\}d\tau.$$

然るに

$$\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\sin\omega\tau d\tau=\frac{1}{\alpha_\nu^2+\omega^2}(-\alpha_\nu\sin\omega t-\omega\cos\omega t)+\frac{\omega e^{\alpha_\nu t}}{\alpha_\nu^2+\omega^2},$$

$$\int_0^t e^{\alpha_\nu(t-\tau)}\cos\omega\tau\, d\tau=\frac{1}{\alpha_\nu^2+\omega^2}(-\alpha_\nu\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+\frac{\alpha_\nu e^{\alpha_\nu t}}{\alpha_\nu^2+\omega^2}.$$

故に

$$\{q(t)\}=\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\frac{e^{\alpha_\nu t}}{\alpha_\nu^2+\omega^2}\{\psi\omega+\alpha_\nu\rho\}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{[P(\alpha_\nu)]}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\frac{1}{\alpha_\nu^2+\omega^2}(-\alpha_\nu\{\psi\sin\omega t+\rho\cos\omega t\}$$

$$+\omega\{\rho\sin\omega t-\psi\cos\omega t\})$$

然るに又

$$\psi \sin \omega t + \rho \cos \omega t = \varphi \sin(\omega t + \varepsilon)$$

であるから

$$-\psi \cos \omega t + \rho \sin \omega t = -\varphi \cos(\omega t + \varepsilon).$$

従つて

$$\{q(t)\} = \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)} \frac{e^{a_\nu t}}{a_\nu^2+\omega^2} \{\psi\omega + a_\nu\rho\}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)} \frac{1}{a_\nu^2+\omega^2} (-a_\nu\{\varphi \sin(\omega t+\varepsilon)\} - \omega\{\varphi \cos(\omega t+\varepsilon)\})$$

$$=\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)} \frac{e^{a_\nu t}}{a_\nu^2+\omega^2} \{\psi\omega + a_\nu\rho\}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{[P(a_\nu)]}{\varDelta^{(1)}(a_\nu)} \frac{1}{\sqrt{a_\nu^2+\omega^2}} \{\varphi \sin(\omega t+\varepsilon+\eta)\}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot3)$$

ここに

$$\eta = \tan^{-1}\frac{\omega}{a_\nu}.$$

強制力が週期的で (3·2) に依つて與へられる時はこの公式を以て問題は解けたわけである。(3·3) の右邊の第一項は所謂自由振動を表はす項であり、第二項は強制振動を表はす項である。

以上は强制力を (3·2) の如く週期的であるとし、前節の公式 (2·10) を應用しただけであるが強制振動を重要視するならば前節の終りに述べた如く公式 (2·10) に依らず (2·6) に着目して直接に留數計算を行へば一層簡單である。次にこれを述べよう。

我々は初期條件を零と置いて考へて居るのであるから (2·6) の第一項のみを取つて考へればよい。即ち

$$\{Q(s)\} = [p(s)]^{-1}\{F(s)\} = \frac{[P(s)]}{\varDelta(s)}\{F(s)\}.$$

或ひは

$$[p(s)]\{Q(s)\}=\{F(s)\}.$$

を考へる。これは n 個の未知函數 $\{Q(s)\}$ を含む聯立一次方程式であるから、これを各々の $Q(s)$ に就いて解けば

$$Q_r(s)=\frac{E_r(s)}{\varDelta(s)}\ ,\qquad (r=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n).$$

但し $E_r(s)$ は $\varDelta(s)$ の第 r-列を $\{F(s)\}$ で置き換へた行列式である。故にこれに逆公式を適用すれば

$$q_r(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c+i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\frac{E_r(s)}{\varDelta(s)}ds,\qquad (r=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot4)$$

前の如く週期的外力を (3·2) で與へればそのラプラス變換は

$$\{F(s)\}=\frac{1}{s^2+\omega^2}\{\varphi(\omega\cos\ \varepsilon+s\sin\varepsilon)\}$$

$$=\frac{1}{s^2+\omega^2}\{\psi\omega+s\rho\}$$

である。故に (3·4) にこれを代入して $s=\pm i\omega$ の留數を計算して、それ等を加へ合せれば强制振動の項が得られ $\varDelta(s)=0$ の $2n$ 個の根 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots a_{2n}$ の留數を加へ合せれば自由振動の項が得られる。但し $s=\pm i\omega$ は $\varDelta(s)=0$ の根ではないとする。而してこれ等の和が $q_r(t)$ を表はす。自由振動の項を計算するには $\varDelta(s)=0$ の根を是非考へねばならないのであるから、これは前に述べた方法に依るより仕方がない。而して今の方法でも全く同様である。故に次に强制振動の項のみを考へる。(3·4) 及び (3·5) より $s=\pm iw$ の留數を求めて加へ合せれば

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}\frac{E_r}{\varDelta(i\omega)}-e^{-i\omega t}\frac{\bar{E}_r}{\varDelta(-i\omega)}\right).\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot6)$$

ここに E_r は $\varDelta(i\omega)$ の第 r-列を $\psi+i\rho$ で置き換へた行列式であり $\bar{E}_r$ はその共軛複素數である。(3·6) に於いて

$$E_r=C+Di\ ,\qquad \varDelta(i\omega)=A-Bi\quad .$$

とすれば　$\overline{E}_r=C-Di,\quad \varDelta(-i\omega)=A+Bi.$

故に (3・6) は

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}\frac{E_r}{\varDelta(i\omega)}-e^{-i\omega t}\frac{\overline{E}_r}{\varDelta(-i\omega)}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t}\frac{C+Di}{A-Bi}e^{-i\omega t}\frac{C-Di}{A-Bi}\right)$$

$$=\frac{1}{A^2+B^2}\,\frac{1}{2i}\left\{(AC-BD)e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})+(AD+BC)i(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\right\}$$

$$=\frac{1}{A^2+B^2}\left\{(AC-BD)\sin\omega t+(AD+BC)\cos\omega t\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{C^2+D^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t+a).$$

ここに
$$a=\tan^{-1}\frac{AD+BC}{AC-BD}.$$

これ即ち強制振動の項であり、その強制振幅は $\sqrt{C^2+D^2}/\sqrt{A^2+B^2}$ である。従つて $q_r(t)$ の強制振動の振幅を R_r とすれば

$$R_r=\text{絕對値}\,(E_r/\varDelta(i\omega))$$

で與へられる。換言すれば、

$$R_r{}^2=\frac{E_r\overline{E}_r}{\varDelta(i\omega)\varDelta(-i\omega)}\ ^{(1)}$$

である。これが週期的強制力を持つ n 個の自由度を有する系の强制振幅の一般公式である。

上に得られた強制振幅を實際問題に應用するのに都合がよいやうに明瞭に表はさうとするならば次のやうにすればよい。$\varDelta(s)$ は s に就いて $2n$ 次の式であるからそれを展開したとすれば、

$$\varDelta(s)=p_0s^{2n}+p_1s^{2n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_{2n-1}s+p_{2n}.$$

(1) 前揭の Frazer, Dunkan 及び Coller の著書 303—305 頁, 及び Frazer-Jones の論文參照

然る時は

$$\Delta(i\omega)\Delta(-i\omega)=P_0\Omega^{2n}-P_1\Omega^{2n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots-P_{2n-1}\Omega+P_{2n}.$$

ここに $\Omega=\omega^2$ である。而して

$$P_0=p_0^2$$
$$P_1=[p_0,p_2]\{p_2,p_0\}-p_1^2$$
$$P_2=[p_0,p_2,p_4]\{p_4,p_2,p_0\}-[p_1,p_3]\{p_1,p_3\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

同様にして

$$E_r\overline{E}_r=e_0\Omega^{2n-2}-e_1\Omega^{2n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots-e_{2n-3}\Omega+e_{2n-2}.$$

故に

$$R_r^2=\frac{E_r\overline{E}_r}{\Delta(i\omega)\Delta(-i\omega)}$$

$$=\frac{e_0\Omega^{2n-2}-e_1\Omega^{2n-3}+\cdots\cdots-e_{2n-3}\Omega+e_{2n-2}}{P_0\Omega^{2n}-P_1\Omega^{2n-1}+\cdots\cdots-P_{2n-1}\Omega+P_{2n}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot7)$$

又 $\Delta(s)=0$ の根 $a_1, a_2,\cdots\cdots, a_{2n}$ が分つて居る場合には

$$R_r^2=E_r\overline{E}_r/P_0\prod_{\nu=1}^{2n}(\omega^2+a_\nu^2).$$

或ひはこれを部分分數に分解して

$$R_r^2=\frac{1}{P_0}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\beta_\nu}{\omega^2+a_\nu^2}.$$

ここに

$$\beta_\nu=\frac{e_0(a_\nu^2)^{2n-2}+e_1(a_\nu^2)^{2n-3}+\cdots\cdots+e_{2n-3}(a_\nu^2)+e_{2n-2}}{\prod\limits_{\mu\neq\nu}(a_\mu^2-a_\nu^2)}$$

而して $\sum_{\nu=1}^{2n}\beta_\nu=0$ である。

さて $a_\nu=0$ は $\Delta(s)=0$ なる s に就いての $2n$ 次の方程式の根であるから一般には複素數であり、從つて其の共軛複素數も亦根となる。從つて a_j と a_{j+1} とが互ひに共軛複素數とすれば

$$a_j=\lambda_j+\mu_j i,\quad a_{j+1}=\lambda_j-\mu_j i,\quad (i=1,3,\cdots\cdots,2n-1) \qquad \cdots\cdots(3\cdot9)$$

となる。然る時は (3·8) は次の様に書ける。

$$R_r{}^2=\frac{1}{P_0}\left\{\sum_{\nu=1}^{2n-1}{}'\frac{\beta_\nu}{\omega^2+a_\nu{}^2}+\sum_{\nu=2}^{2n}{}''\frac{\beta_\nu}{\omega^2+a_\nu{}^2}\right\}.$$

ここに Σ' は $\nu=1,3,5,\cdots\cdots,2n-1$ の如く ν の奇數なる時の總和を表はし Σ'' は $\nu=2,4,\cdots\cdots,2n$ の如く ν の偶數なる時の總和を表はす。從つて Σ' と Σ'' との相對應する項を加へ合せると (3·9) に依つて

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{L_\nu\omega+M_\nu}{(\omega^2-\mu_\nu{}^2+\lambda_\nu{}^2)^2+4\mu_\nu{}^2\lambda_\nu{}^2}$$

なる形に書き表はされる。ここに L_ν, M_ν は ω には獨立であるが λ_ν, μ_ν に關係する事は勿論である。これを見出すのには前に述べた β_ν の公式に於いて βj と $\beta j+1$ $(j=1,3,\cdots\cdots,2n-1)$ とが共軛であり $e_\nu(0,1,2,\cdots\cdots2n-2)$ が實數なる事を用ひた。從つて

$$R_r{}^2=\frac{1}{p_0{}^2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{L_\nu\omega+M_\nu}{(\omega^2-\mu_\nu{}^2+\lambda_\nu{}^2)^2+4\mu_\nu{}^2\lambda_\nu{}^2}$$

と書ける。然るに $a_\nu=\lambda_\nu+\mu_\nu i$ は特性方程式の根であるから、その實數部分 λ_ν は減衰係數を表はし虚數部分 μ_ν は振動數を表はす。從つて減衰係數 λ_ν が 0 でない限り R_r はある一定の大さを持つた强制振幅を表はすわけである。(それは λ_ν の正負には關係しない。) 併し減衰係數が負から正に變はる所謂限界點に於いては分母は $\omega=\mu_\nu$ なる時に 0 となり、從つてそこに於いて强制振幅は無限大となる。即ち特性方程式 $\Delta(s)=0$ の $2n$ 個の根の中少く共どれか一つの實數部分 (減衰係數) が 0 となればその虚數部分 (振動數) に强制振動數が一致する時振幅は無限大となる。このやうな振動數 $\mu_\nu/2\pi$ が所謂限界振動數である。

4. 週期的强制力を持つ二自由度を有する系の力學的方程式の解

以上の各節に於いて n 個の自由度を有する系の方程式に就いて述べたが本節に於いては應用の必要上問題を二自由度の場合に局限して論じよう。從つて我々の問題

は極めて簡易化されるが、又一方に於いては具體化される。我々は初期條件

$$t=0: \quad \{q(t)\}=0, \quad \{\dot{q}(t)=0\}$$

の下に微分方程式

$$[A]\{\ddot{q}\}+[B]\{\dot{q}\}+[C]\{q\}=\{f(t)\}$$

を考へる。ここに $[A]$, $[B]$ 及び $[C]$ は二次の正方行列で $\{f(t)\}$ は週期的函數の列行列

$$\{f(t)\}=\begin{bmatrix} \varphi_1 \sin(\omega t+\varepsilon_1) \\ \varphi_2 \sin(\omega t+\varepsilon_2) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(4\cdot 2)$$

である。然る時は (2·6) に依つて

$$\{Q(s)\}=\frac{[P(s)]}{\Delta(s)}\{F(s)\}.$$

從つて逆公式に依つて

$$\{q(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\frac{[P(s)]}{\Delta(s)}\{F(s)\}ds. \quad \cdots\cdots\cdots(4\cdot 3)$$

我々は二自由度の場合を取り扱つて居るのであるから (4·3) に於いて

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} A_{11}s^2+B_{11}s+C_{11}, & A_{12}s^2+B_{12}s+C_{12} \\ A_{21}s^2+B_{21}s+C^{21}, & A_{22}s^2+B_{22}s+C_{22} \end{vmatrix},$$

$$[P(s)]=\begin{pmatrix} A_{22}s^2+B_{22}s+C_{22}, & -(A_{12}s^2+B_{12}s+C_{12}) \\ -(A_{21}s^2+B_{21}s+C_{21}), & A_{11}s^2+B_{11}s+C_{11} \end{pmatrix},$$

又 (4·2) より

$$F_1(s)=\frac{\varphi_1}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_1+s\sin\varepsilon_1)$$

$$F_2(s)=\frac{\varphi_2}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_2+s\sin\varepsilon_2)$$

これ等を (4·3) に代入して簡單にすれば

$$q_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\frac{1}{\Delta(s)}[(A_{22}s^2+B_{22}s+C_{22})\frac{\varphi_1}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_1+s\sin\varepsilon_1)$$

$$-(A_{12}s^2+B_{12}s^2+C_{12})\frac{\varphi_2}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_2+s\sin\varepsilon_2)]ds$$

$$=r_1(t)-r_2(t),$$

$$q_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\frac{1}{\varDelta(s)}[-(A_{21}s^2+B_{21}s+C_{21})\frac{\varphi_1}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_1+s\sin\varepsilon_1)].$$

$$+(A_{11}s^2+B_{11}s+C_{11})\frac{\varphi_2}{s^2+\omega^2}(\omega\cos\varepsilon_2+s\sin\varepsilon_2)]ds.$$

$$=-r_3(t)+r_4(t).$$

先づ $s=\pm i\omega$ に於ける留數を計算する事に依つて强制振動の項を求める事が出來る。而して $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$ 及び $r_4(t)$ は皆同じ形であるから $r_1(t)$ に就いてのみ考へればよい。即ち

$$r_1(t)=\frac{\varphi_1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}\frac{1}{\varDelta(s)}\frac{1}{s^2+\omega^2}(A_{22}s^2+B_{22}s+C_{22})(\omega\cos\varepsilon_1+s\sin\varepsilon_1)ds$$

を考へる。然る時は

$$Res_{i\omega}=\varphi_1e^{i\omega t}\frac{-A_{22}\omega^2+B_{22}\omega i+C_{22}}{p_0\omega^4-p_1\omega^3i-p_2\omega^2+p_3\omega i+p_4}\frac{\omega\cos\varepsilon_1+i\omega\sin\varepsilon_1}{2i\omega}$$

$$=\varphi_1\frac{1}{2i}e^{i\omega t}\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})-B_{22}\omega i}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)-\omega(p_1\omega^2-p_3)i}e^{i\varepsilon_1},$$

但し

$$\varDelta(s)=p_0s^4+p_1s^3+p_2s^2+p_3s+p_4.$$

同様に

$$Res_{-i\omega}=-\varphi_1\frac{1}{2i}e^{-i\omega t}\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})-B_{22}\omega i}{(p_0\omega_4-p_2\omega^2+p_4)+\omega(p_1\omega^2-p_3)i}e^{-i\varepsilon_1}.$$

故に

$$Res_{\pm i\omega}=\varphi_1\frac{1}{2i}\left\{e^{i\omega t}\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})+B_{22}\omega i}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)-\omega(p_1\omega^2-p_3)i}e^{i\varepsilon_1}\right.$$

$$\left.-e^{-i\omega t}\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})-B_{22}\omega i}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)+\omega(p_1\omega^2-p_3)i}e^{-i\varepsilon_1}\right\}.$$

これを簡単にすれば

$$Res_{\pm i\omega}=\varphi_1\frac{\sqrt{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2B_{22}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_1+a)$$

但し

$$a=\tan^{-1}\frac{AD+BC}{AC-BD},$$

ここに

$$A=p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4, \qquad B=\omega(p_1\omega^2-p_3),$$

$$C=-A_{22}\omega^2+C_{22}, \qquad D=\omega B_{22}.$$

次ぎに $r_2(t)$ に就いて考へると全く同様にして

$$Res_{\pm i\omega}=\varphi_2\frac{\sqrt{(-A_{12}\omega^2+C_{12})^2+\omega^2B_{12}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_2+\beta).$$

従つて $q_1(t)$ の中の强制振動の項のみを考へれば

$$q_1(t)_{(f)}=\varphi_1\frac{\sqrt{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2B_{22}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_1+a)$$

$$-\varphi_2\frac{\sqrt{(-A_{12}\omega^2+C_{12})^2+\omega^2B_{12}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4+p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_2+\beta). \quad (4\cdot6)$$

ここに $q_1(t)_{(f)}$ は $q_1(t)$ の中の强制振動の項を意味する。全く同様にして

$$q_2(t)_{(f)}=-\varphi_1\frac{\sqrt{(-A_{21}\omega^2+C_{21})^2+\omega^2B_{21}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_1+\gamma)$$

$$+\varphi_2\frac{\sqrt{(-A_{11}\omega^2+C_{11})^2+\omega^2B_{11}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_2+\delta). \quad (4\cdot7)$$

次ぎに $q_1(t)$, $q_2(t)$ の自由振動の項を求めよう。その爲めに $\Delta(s)=0$ の四根を a_1, a_2, a_3 及び a_4 とする。即ち

$$\Delta(s)=p_0s^4+p_1s^3+p_2s^2+p_3s+p_4$$

$$=p_0(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4)$$

とする。(4・4) に於いて $s=a_\nu\,(\nu=1, 2, 3, 4)$ に於ける留數を計算すれば $r_1(t)$ 及び $r_2(t)$ より夫々

$$\varphi_1\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{22}a_\nu^2+B_{22}a_\nu+C_{22})(\omega\cos\varepsilon_1+a_\nu\sin\varepsilon_1)$$

及び (4・8)

$$\varphi_2\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{12}a_\nu^2+B_{12}a_\nu+C_{12})(\omega\cos\varepsilon_2+a_\nu\sin\varepsilon_2)$$

が得られる。全く同様にして $r_3(t)$ 及び $r_4(t)$ より夫々

$$\varphi_1\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{21}a_\nu^2+B_{21}a_\nu+C_{21})(\omega\cos\varepsilon_1+a_\nu\sin\varepsilon_1)$$

及び (4・9)

$$\varphi_2\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{11}a_\nu^2+B_{11}a_\nu+C_{11})(\omega\cos\varepsilon_2+a_\nu\sin\varepsilon_2)$$

を得る。

(4・8) の第一式と第二式との差が $q_1(t)$ の自由振動を表はし (4・9) の第二式と第一式との差が $q_2(t)$ の自由振動を表はす。この結果を見れば自由振動を求める只今の方法に依つて得られたものと (3・3) に依つて得られた結果とは完全に一致して居るが、これは當然の事である。尚強制振動の振幅が (4・6) 及び (4・7) に依つて求められるが、この結果は前節に述べた一般公式 (3・6), (3・7) 又は (3・8) よりも直接に導かれる事も明らかである。

以上を綜合すれば結局次の結果が得られたことになる。即ち

$$q_1(t)=\varphi_1\left\{\frac{\sqrt{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2B_{22}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_1+a)\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{22}a_\nu^2+B_{22}a_\nu+C_{22})(\omega\cos\varepsilon_1+a_\nu\sin\varepsilon_1)\right\}$$
$$-\varphi_2\left\{\frac{\sqrt{(-A_{12}\omega^2+C_{12})^2+\omega^2B_{12}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_2+\beta)\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{1}{a_\nu^2+\omega^2}\,(A_{12}a_\nu^2+B_{12}a_\nu+C_{12})(\omega\cos\varepsilon_2+a_\nu\sin\varepsilon_2)\right\}, \quad (4\cdot10)$$

$$q_2(t)=-\varphi_1\left\{\frac{\sqrt{(-A_{21}\omega^2+C_{21})^2+\omega^2B_{21}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_1+\gamma)\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\,\frac{1}{\alpha_\nu{}^2+\omega^2}(A_{21}\alpha_\nu{}^2+B_{21}\alpha_\nu+C_{21})(\omega\cos\varepsilon_1+\alpha_\nu\sin\varepsilon_1)\right\}$$

$$+\varphi_2\left\{\frac{\sqrt{(-A_{11}\omega^2+C_{11})^2+\omega^2B_{11}{}^2}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\varepsilon_2+\delta)\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{1}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\,\frac{1}{\alpha_\nu{}^2+\omega^2}(A_{11}\alpha_\nu{}^2+B_{11}\alpha_\nu+C_{11})(\omega\cos\varepsilon_2+\alpha_\nu\sin\varepsilon_2)\right\}$$

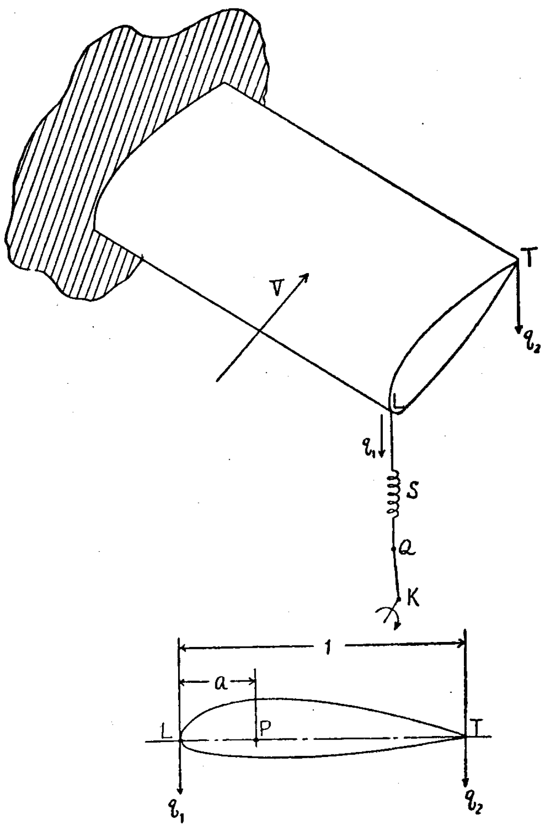
............(4・11)

これ等の式に現はれる強制振動の項及び自由振動の項に就いては次節の翼の屈曲-振り振動への應用の所で詳論しよう。

5. 翼の屈曲-振り振動への應用

本節に於いては Frazer-Jones[(1)] の考へ方を適用して前節迄に述べた理論を翼の屈曲-振り振動へ應用する。

二個の自由度を有する半剛體の翼を考へそれが V なる空氣の流れの中に置かれて居るものとする。又翼端の與へられた點―ここでは翼前縁とする―にバネ s を附けこれは催振器 K に結び付けられて居る。この催振器に依つて強制振動が起されるものとする(第一圖参照)。二つの一般座標 q_1 及び q_2



第一圖 模型翼圖

(1) 前揭の Frazer-Jones の論文參照。

は任意に取つて考へられるが、ここでは翼端に於ける前縁及び後縁である點 L 及び T の下向きの直線的變位を一般座標に取る。Sの剛性率を σ_0 とし圖に於ける Q に課せられる單弦運動を $d\sin wt$ とすれば力學的方程式は次の如くなる。即ち

$$[A]\{\ddot{q}\}+[B]\{\dot{q}\}+[C]\{q\}=\{f(t)\}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot1)$$

ここに $[A]$, $[B]$ 及び $[C]$ は二次の行列で $\{f(t)\}$ は

$$\{f(t)\}=\begin{bmatrix} d\sigma_0\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot2)$$

である。今初期條件

$$t=0: \qquad \{q(t)\}=0, \qquad \{\dot{q}(t)\}=0$$

の下にこれを解けば (4・10) 及び (4・11) に依つて

$$q_1(t)=d\sigma_0\left\{\frac{\sqrt{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2B_{22}^{\ 2}}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+a)\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{A_{22}\alpha_\nu^2+B_{22}\alpha_\nu+C_{22}}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\frac{\omega}{\alpha_\nu^2+\omega^2}\right\}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot3)$$

$$q_2(t)=-d\sigma_0\left\{\frac{\sqrt{(-A_{21}\omega^2+C_{21})^2+\omega^2B_{21}^{\ 2}}}{\sqrt{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}}\sin(\omega t+\gamma)\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\frac{A_{21}\alpha_\nu^2+B_{21}\alpha_\nu+C_{21}}{\Delta^{(1)}(\alpha_\nu)}\frac{\omega}{\alpha_\nu^2+\omega^2}\right\}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot4)$$

故に $q_1(t)$ 及び $q_2(t)$ の強制振幅を夫々 R_1 及び R_2 とすれば

$$\frac{1}{\sigma_0^{\ 2}}\left(\frac{R_2}{d}\right)^2=\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2B_{22}^{\ 2}}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p^3)^2}, \qquad \cdots\cdots(5\cdot5)$$

$$\frac{1}{\sigma_0^{\ 2}}\left(\frac{R_2}{d}\right)^2=\frac{(-A_{21}\omega^2+C_{21})^2+\omega^2B_{21}^{\ 2}}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}. \qquad \cdots\cdots(5\cdot6)$$

上に求めた強制振幅は夫々 L 及び T に於ける振幅であるが、強制に依つて生ぜしめられる運動が直線的であると假定すれば翼端に於ける任意の點 P の振幅は近

似的に次の如くなる。

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{R}{d}\right)=\frac{[-\{(1-a)A_{22}-aA_{21}\}\omega^2+\{(1-a)C_{22}-aC_{21}\}]^2+\omega^2[(1-a)B_{22}-aB_{21}]^2}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}$$

但し翼弦を 1 とし $LP=a$ とする。

次に强制振幅を $\varDelta(s)=0$ の根で表はす事を考へよう。簡單の爲めに (5·5) を取つて考へるとこの式の分母は前に示した樣に $\varDelta(s)$ の s の代はりに $\pm i\omega$ と置いて求めたものである。即ち

$$(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2=\varDelta(i\omega)\varDelta(-i\omega).$$

然るに $a_\nu(\nu=1,2,3,4)$ は $\varDelta(s)=0$ の根であるから

$$\varDelta(s)=p_0(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)(s-a_4).$$

故にこの s の代はりに $\pm i\omega$ を置いて掛け合せれば

$$\varDelta(i\omega)\varDelta(-i\omega)=p_0^2\prod_{\nu=1}^{4}(\omega^2+a_\nu^2).$$

從つて (5·5) より

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{R_1}{d}\right)^2=\frac{1}{p_0^2}\,\frac{A_{22}\omega^4-2A_{22}C_{22}\omega^2+B_{22}^2\omega^2+C_{22}^2}{\prod_{\nu=1}^{4}(\omega^2+a_\nu^2)}$$

$$=\frac{1}{p_0^2}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{A_\nu}{\omega^2+a_\nu^2}.$$

ここに A_ν は ω に無關係な定數で $\sum_{\nu=1}^{4}A_\nu=0$ である。この式が前に述べた n 個の自由度を有する場合の (3·8) の公式の特別なる場合 ($n=2$) に相當する事は勿論である。一般式 (5·7) より出發すれば A_ν は明らかに a に關係する。更らに又

$$\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\}=\lambda_1\pm\mu_1 i,\qquad\qquad \left.\begin{matrix}a_3\\a_4\end{matrix}\right\}=\lambda_2\pm\mu_2 i$$

とすれば

$$\frac{1}{\sigma_0^2}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2=\frac{1}{p_0^2}\left\{\frac{L_1\omega^2+M_1}{(\omega^2+\lambda_1^2-\mu_1^2)^2+4\lambda_1^2\mu_1^2}+\frac{L_2\omega^2+M_2}{(\omega^2+\lambda_2^2-\mu_2^2)^2+4\lambda_2^2\mu_2^2}\right\}\cdots(5\cdot8)$$

ここに L 及び M は定數であり

$$L_1=A_1+A_2\,,\qquad L_2=A_3+A_4\,,\qquad L_1+L_2=0$$

である。

さて前の計算より明かな如く (5•8) の分母は $\pm i\omega$ が $\Delta(s)=0$ の根でない限り 0 にはならない。實際第三節に於いてはこの假定の下に强制振動を考へたのである。第三節の終りに述べたやうに減衰係数 λ_1 及び λ_2 が 0 でない限り (5•8) はある一定の大さを持つ强制振幅を表はす。併し減衰係數が負から正に變る限界點に於いては $\omega=\mu_\nu$ $(\nu=1,2)$ なる時に分母は 0 となり、從つて强制振幅は無限大となるこの時の μ_ν が限界振動數 $\nu=\mu_\nu/2\pi$ を與へる。

次に (5•3) 及び (5•4) の自由振動の項を考へよう。即ちそれ等を夫々 $q_1'(t)$, $q_2'(t)$ とすれば

$$q_1'(t)=d\sigma_0\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\,\frac{A_{22}a_\nu^2+B_{22}a_\nu+C_{22}}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{\omega}{a_\nu^2+\omega^2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5•9)$$

$$q_2'(t)=-d\sigma_0\sum_{\nu=1}^{4}e^{\alpha_\nu t}\,\frac{A_{21}a_\nu^2+B_{21}a_\nu+C_{21}}{\Delta^{(1)}(a_\nu)}\,\frac{\omega}{a_\nu^2+\omega^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5•10)$$

$$\left.\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}\right\}=\lambda_1\pm\mu_1 i\,,\qquad\left.\begin{matrix}a_3\\a_4\end{matrix}\right\}=\lambda_1\pm\mu_2 i$$

と置いて $q_1'(t)$ を簡單にすれば

$$q_1'(t)=d\sigma_0\,\frac{\omega}{p_0}\left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\mu_1(C^2+D^2)(E^2+F^2)}e^{\lambda_1 t}\sin(\mu_1 t+\eta_1)\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{P'^2+Q'^2}}{\mu_2(C'^2+D'^2)(E'^2+F'^2)}e^{\lambda_2 t}\sin(\mu_2 t+\eta_2)\right]. \quad\cdots\cdots(5•11)$$

ここに

$$C=(\lambda_1-\lambda_2)^2-(\mu_1^2-\mu_2^2)\,,\qquad D=2\mu_1(\lambda_1-\lambda_2)\,,$$
$$E=\lambda_1^2=\mu_1^2+\omega^2\,,\qquad F=2\lambda_1\mu_1\,,$$
$$P=(AC+BD)E+(BC-AD)F\,,$$
$$Q=(BC-AD)E-(AC+BD)F\,,$$
$$A=A_{22}(\lambda_1^2-\mu_1^2)+B_{22}\lambda_1+C_{22},$$
$$B=2A_{22}\lambda_1\mu_1+B_{22}\mu_1\,.$$

而して又

$$C'=(\lambda_2-\lambda_1)^2-(\mu_2^2-\mu_1^2)\,,\qquad D'=2\mu_2(\lambda_2-\lambda_1)\,,$$

$$E'=\lambda_2^2-\mu_2^2+\omega^2\,, \qquad F'=2\lambda_2\mu_2\,,$$
$$P'=(A'C'+B'D')E'+(B'C'-A'D')F'\,,$$
$$Q'=(B'C'-A'D')E'-(A'C'+B'D')F'\,,$$
$$A'=A_{22}(\lambda_2^2-\mu_2^2)+B_{22}\lambda_2+C_{22}\,,$$
$$B'=2A_{22}\lambda_2\mu_2+B_{22}\mu_2\,.$$

全く同様にして $q_2'(t)$ を (5·11) の形に書く事が出來る。その形は (5·11) と同様で唯全體に負號の付く事と A_{22}, B_{22} 及び C_{22} が夫々 A_{21}, B_{21} 及び C_{21} で置き換へられるだけである。

(5·11) に於ける自由振動の振幅を夫々 r_1', r_2' とすれば

$$q_1'(t)=r_1'e^{\lambda_1 t}\sin(\mu_1 t+\gamma_1)+r_2'e^{\lambda_2 t}\sin(\mu_2 t+\gamma_2)\,.$$

ここに

$$r_1'=d\sigma_0\frac{\omega}{p_0}\left[\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{\mu_1(C^2+D^2)(E^2+F^2)}\right],$$

$$r_2'=d\sigma_0\frac{\omega}{p_0}\left[\frac{\sqrt{P'^2+Q'^2}}{\mu_2(C'^2+D'^2)(E'^2+F'^2)}\right]. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5\cdot12)$$

前に述べたやうに $\Delta(s)=0$ の根の實數部分即ち λ_1 及び λ_2 は減衰係數を表はすものであり、虚數部分 μ_1 及び μ_2 は振動數を表はすものである若しも今 λ_1 及び λ_2 が共に負ならば (5·11) に依つて與へられる振動は安定であり、λ_1 及 λ_2 の中の何れか一方又は兩方が正ならば不安定でさる。又 λ_1 或ひは λ_2 の何れか一方が負から正に變る所では自由振動は不安定的狀態にあり、そこで所謂翼振れの狀態に入る。例へば $\lambda_1<0$ で $\lambda_2=0$ なる時は (5·11) の右邊の第一項は安定的であるが第二項は不安定的になり、又

$$E'=\lambda_3^2-\mu_2^2+\omega^2=-\mu_2^2+\omega^2$$

であるから振動數 μ_2 が强制振動數 ω に等しい時この項は無限大となる。即ち强制振動數が限界振動數に一致する時は自由振動の振幅は無限大となる。故に我々の場合には强制振幅の所で述べた事に依つて $\omega=\mu_2$ に於いて强制振幅も自由振動の振幅も共に無限大となる事が分る。

以上は初期條件

$$t=0: \quad \{q(t)\}=0, \quad \{\dot{q}(t)\}=0$$

の下に二元强制振動方程式を考へ、その强制振動及びそれに伴はれる自由振動を取り扱つたのであるが (2·10) の公式に依つて明らかな如く一般なる初期條件の與へ

られる時これに關係する自由振動の項も全く同様に取り扱ふ事が出來るが、餘り面白いとも思はれないからここには省略する。

6. 數値計算及び其の解釋

第一圖に示した如くして Frazer 及び Dunkan が *R. A. F* 15 の翼型を用ひて翼振れの實驗をした。用ひられた翼は翼幅 2.743m,[1] 翼弦 0.914m のものであつた。その場合に得られた力學的係數は *R. & M.* 1155 の第二十五表に掲げられて居る。それ等は通常の屈曲-捩りの座標に就いて取られて居るが、第一圖に示した如き一般座標に變換したものが Frazer-Jones の論文[2]に示されて居る。又バネ s の剛性率 σ_0 は 59.526 gr/cm である。彼等に依つて與へられた數値を用ひて前節に述べた理論の數値計算を行はう。それに依れば

$$A_{11}=980.01215\text{ gms.},\qquad A_{12}=A_{21}=523.40535\text{ gms.},$$
$$A_{22}=853.97715\text{ gms.},\qquad (\text{gms.}=\text{gram mass})$$

$$B_{11}=2.63773V+5221.45\text{ gms./sec.},$$
$$B_{12}=4.77133V-1620.45\text{ gms./sec.},$$
$$B_{21}=-2.04177V-1620.45\text{ gms./sec.},$$
$$B_{22}=4.76412V+1620.45\text{ gms./sec.},$$

$$C_{11}=-0.12261V^2+450611.135\text{ gms./sec}^2.,$$
$$C_{12}=0.12261V^2-110676.735\text{ gms./sec}^2.,$$
$$C_{21}=-0.02791V^2-110676.735\text{ gms./sec}^2.,$$
$$C_{22}=0.02791V^2+267860.385\text{ gms./sec}^2.,$$

これ等の値より特性方程式

$$\Delta(s)=p_0s^4+p_1s^3+p_2s^2+p_3s+p_4=0$$

の係數 p_0, p_1, p_2 p_3 及び p_4 を計算し且つその根 α_1, α_2, α_3 及び α_4 を見出す事が出來る。即ち係數 p_i は次の行列式を以つて與へられる。

(1) Frazer, Dunkan : The Flutter of Aeroplane Wings. R. & M. 1155 (1928).

(2) 前掲の Frazer-Jones の論文及び Frazer-Dunkan-Collar の著書 307 頁參照。本論文に於ける模型翼の諸元及びその他の數値は Frazer-Jones の論文に於ける單位を C. G. S. 系に直したものである。

$$p_0 = \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix},$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{vmatrix},$$

$$p_2 = \begin{vmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{vmatrix},$$

$$p_3 = \begin{vmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ B_{21}, & B_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_{11}, & B_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{vmatrix},$$

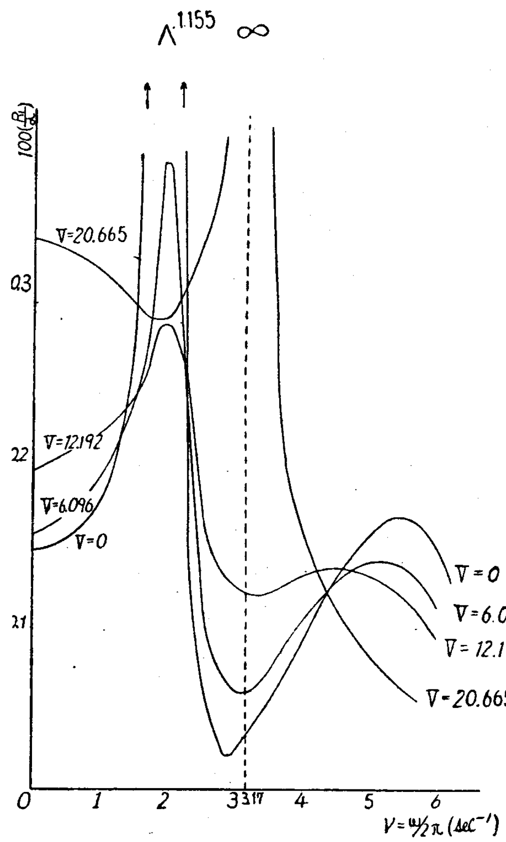
而して

$$p_4 = \begin{vmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{vmatrix}.$$

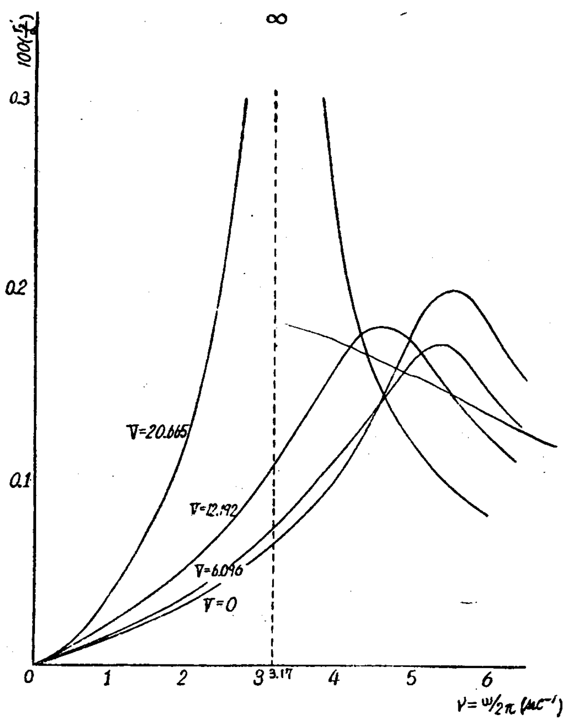
次ぎに種々の V(m/sec) に就いて計算した特性方程式の根は次表の如くなる。

V	$\lambda_1 \pm i\mu_1$			$\lambda_2 \pm i\mu_2$		
	λ_1	μ_1	$\nu_1 \equiv \mu_1/2\pi$	λ_2	μ_2	$\nu_2 \equiv \mu_2/2\pi$
0	− 0.4475	12.66	2.01	− 6.43	33.94	5.40
6.096	− 1.737	12.71	2.02	− 8.115	32.30	5.14
12.192	− 3.736	13.73	2.18	− 9.09	26.89	4.28
18.288	− 13.70	11.84	1.88	− 2.1	20.14	3.21
20.665	− 17.00	2.83	0.45	0	19.94	3.17

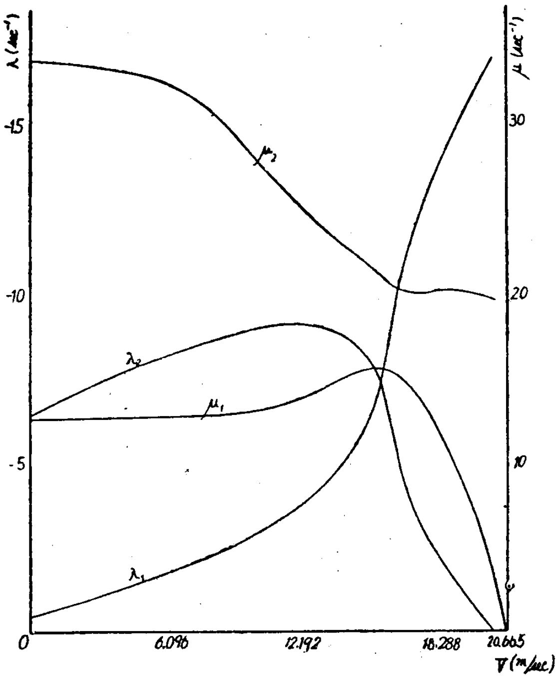
これ等の値に依り (5・5) 又は (5・8) より強制振幅を而して (5・12) より自由振動の振幅を計算する事が出來る。第二圖は横軸に强制力の振動數 $\nu=\omega/2\pi$(sec) を取り縦軸に强制振幅 R_1/d (無次元)を取つてその變化を示したものであり $\nu=3.17$ が限界振動數になつて居る。又第三圖は (5・12) の第二の式より計算した自由振動の振幅の圖である。振動數 μ_2 を含む項のみが實際に翼振れに與るのであるから簡單の爲めに第二式のみを考へたわけである。第三圖に於いても横軸に振動數を取り縦軸に自由振動の振幅 r_2'/d (無次元) を取つて居る。而して前と同様に $\nu=3.17$ が限界振動數になつて居るのは明らかである。從つて翼振れの限界速度は 20.665 m/sec である。



第二圖　各風速に於ける共振曲線
催振ばねの振幅＝d　翼前線の振幅＝R_1



第三圖　各風速に於ける強制振動數（$\nu=\omega/2\pi$）と自由振動の振幅（r_2'）



第四圖　各風速に於ける振動數（$\mu/2\pi$）及び減衰係數（λ）

第四圖は種々の風速 V（m/*sec*）に對する特性方程式の根の實數部及び虛數部即ち減衰係數 λ（sec^{-1}）と振動數 μ（sec^{-1}）との變化を圖に依つて示したものである。

次に上に得られた結果解釋を試みる。先づ本節に得られた數値計算の結果及び理論的に得られた第五節の結果に就いて考察しよう。

第二圖は（5・5）又は（5・8）に依り強制振動數と翼前線に於ける強制振幅との關係を圖示したものであるが、理論的に得られた

$$\frac{1}{\sigma_0{}^2}\left(\frac{R_1}{d}\right)^2=\frac{(-A_{22}\omega^2+C_{22})^2+\omega^2 B_{22}{}^2}{(p_0\omega^4-p_2\omega^2+p_4)^2+\omega^2(p_1\omega^2-p_3)^2}$$

$$=\frac{1}{p_0{}^2}\left\{\frac{L_1\omega^2+M_1}{(\omega^2+\lambda_1{}^2-\mu_1{}^2)^2+4\lambda_1{}^2\mu_1{}^2}+\frac{L_2\omega^2+M_2}{(\omega^2+\lambda_2{}^2-\mu_2{}^2)+4\lambda_2{}^2\mu_2}\right\} \quad (5\cdot 8)$$

を見れば前に述べた様にこの式の分母は $\pm i\omega$ が $\varDelta(s)=0$ の根でない限り 0 とはならないから V が限界速度で $\nu=\omega/2\pi$ が限界振動數に一致しない限り强制振幅は一定の大さを持つものである。若しも $\lambda_1=\lambda_2=0$ 即ち翼が靜止せる空氣の中で完全に非減衰ならば (5•8) に依つて二つの分母は夫々 $\omega=\mu_1$ 及び $\omega=\mu_2$ に於いて 0 となるから $V=0$ なる時には振幅が無限大となる點が二つは可能となる。$\omega=\mu_1$ に對するものを R_1' とし、$\omega=\mu_2$ に對するものを R_2' としよう。併し實際には完全に非減衰といふ事はあり得ないから、この二つの理想的共振は無限大とはなり得ないで二つの山が出來從つて通常の共振となる。併し V が增加して翼振れの限界速度に達すれば $\pm i\omega$ が $\varDelta(s)=0$ の根となる。故に (5•8) の分母が 0 となるのは分母のどちらか一つであり從つて唯一つの理想的共振 R_c が起るのみである。この場合にいづれの分母が 0 となるかは $\varDelta(s)=0$ の根が V が連續的に變化するに從つて變る狀態を考へれば分る。從つて $\varDelta(s)=0$ の二對の互ひに共軛な根の中の一對が $V=0$ 及び $V=V_c$ (限界速度) の兩方の限界點を與へる。今若しも $V=0$ の共振の山は R_1', R_2' であり、$V=V_c$ のそれは R_c であるから限界振動數を與へる一對の根を a_3, a_4 とすれば R_c 及び R_2' は第二の分母が 0 となる事に依つて起るものである。併し後に說明するやうに R_2' なる山が風速の增加に從つて發達して R_c となつたと考へてはいけない。風速が低い場合には二つの山が出來る事が分り、その一つは (5•8) の第一項の大なる事に他の一つは第二項が大なる事に基づくものと考へられる。併し風速が大となればこの二つは互ひに干涉し合つてその山は何れの項の大なるかに從つて生じたものであるかをはつきりいふわけには行かなくなる。而して更らに風速を增せば二つの山の一つが全くなくなる。又ある場合には共振の如き狀態を示さず傾斜の緩やかな山の狀態となる。併し限界速度に風速が近づくにつれて山は再び高くなり理想的共振の狀態となる 。

次に上に述べた事を第二圖に依つて考へよう。第二圖に於いては $\nu=3.17$, $V=20.665$ なる限界振動數、限界速度の場合以外に於いては振幅は有限であり、その場合各風速に於いて R_1'', R_2'' なる二つの山が夫々存在する、限界振動數以下の振動數に對するものを今 R_1'' とし他を R_2'' とすれば R_1'' は $V=0$ なる時に可成り大であつて、それより次第に減少し $V=17$ 位より次第に增加する。而してその極大なる位置は風速と共に限界振動數に近づいて行く、又 R_2'' の方を見ればやはり

$V=0$ より風速が增加するに從つて減少する、併しこの方は風速が增加するに從つて益々減少して行く傾向にある。又その極大の位置は矢張り風速の增加と共に限界振動數に近づく、これ等の現象は上に述べた結果と一致する。

次に第四圖の風速と減衰係數及び振動數との關係に就いて考へよう。先づ減衰係數 λ を見れば λ_1 は風速と增加に從つて急激に減少し、λ_2 は風速の增加に從つて一時減少するが限界風速に近づくに從つて增大し、限界風速に就いて 0 となりそれより更らに增大して正となる。限界風速以下に於けるこの λ の狀態は强制振幅の大さと密接な關係があると思はれる[1]。次ぎに振動數 $\nu=\mu/2\pi$ 又は μ を考へれば μ_1 は風速と共に一時增加の傾向にあるが、その增加の割合は極めて小であり殆んど一定である。併し風速が增加して限界風速に近づく時は急激に減少する。又 μ_2 は風速增加と共に減少を示す。

最後に第三圖に於ける强制振動數と自由振動の振幅との關係を見るに各風速に於ける振幅の極大値は風速が 0 より增加するに從つて一時減少しある風速以上になれば增加し始める。而して限界風速に就いて振幅は無限大となる。この事は第五節の (5・12) に於いて論じた所である。又各風速に於ける振幅の極大値は風速が增加すると共に振動數が小なる位置に於いて起り、從つて限界振動數に近づいて來る。このやうな傾向は極大値の位置及び大さの相違こそあれ强制振幅の場合にもある事は第二圖より明らかである。即ち第二圖と第三圖との間にある意味の相似性が見出される。この事は自由振動の不安定的振動である翼振れの研究に强制振動をさせて考へる事の妥當性を明瞭にするものと思はれる。尙第三圖に示す如く自由振動の振幅は振動數 0 なる時は 0 であり、それより次第に增加し始め、ある振動數に到れば振幅は極大値を取りそれより振動數が增加するに從つて減少し振動數が無限大に達すれば再び 0 となる。

以上第二及び第三圖に示したる所のものは第一圖に於ける翼前緣の强制振幅及びそれに伴なはれる自由振動の振幅に就いてであるが、第五節の所論より明らかな如く翼の後緣又は翼弦の任意の場所に於ける振幅をも實際に計算する事が出來る。

7. 結　　語

以上論じた所のものは演算子法及び行列の理論を用ひて聯立常微分方程式を解きその特別なる場合として二つの未知函數を含む場合（二つの自由度を有する系の運動方程式）を詳論しそれ等の理論を翼の屈曲振り振動に應用したものであるが、こ

（1） 前揭の妹澤先生の諸論文特に航硏彙報第百八十號參照、但しこれに於いては通常の屈曲-振り强制振動を取り扱つて居るが我々の場合は一般座標を取つて居る關係上屈曲-振りが聯成されて居るからそのままにはあてはまらない。

の様な方法を以てすれば微分方程式を解くのに簡單なのみならず應用に於いても今迄の方法よりも問題を一層擴張し一般の場合を論ずる事が出來、又他の方法よりも遙かに簡單に取り扱ふ事が出來る。

尙本論文に於いては我々の方法の應用として翼の屈曲-捩り振動及び其の翼振れの問題を取り扱つたが、多くの自由度を有する他の力學系の諸問題に對しても廣く應用し得る事は勿論である。

終りに臨み本研究に當り終始御懇篤な御指導及び御鞭撻を賜はりたる妹澤先生に深甚なる感謝の意を表する次第である。