

No. 211.

(Published August, 1941.)

On the Theory of Turbulent Boundary Layer on a Flat Plate.

By

Tatudirô SASAKI,

Member of the Institute.

Abstract.

There are some theories on turbulent flow, such as momentum transfer theory, vorticity transfer theory and similarity theory. I propose here a mean vortex theory, in which the turbulence is considered to be composed of very fine vortices. These vortices decay or grow, but in a very small region their mean strength is not altered, and it is a function of space. The velocity distribution in a turbulent boundary layer is governed by the distribution of mean vortices.

The equation of boundary layer on a flat plate is expressed by

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

This is transformed by introducing the vorticity ζ as follows:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] + \rho v \zeta = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2)$$

The first term of this equation means the variation of kinetic energy in the x direction, the second term means the Magnus effect acting on the vortex at a point considered. Starting from these considerations, and considering the mean vortex in an elementary area the following equation is derived,

$$a x \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + b \omega^2 = -c \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (3)$$

in which a , b and c are constants and ω is the strength of a mean vortex.

The general solution of (3) is

$$f\left(\frac{1}{b\omega} - \frac{y}{c}, \log \omega x^{\frac{b}{a}}\right) = 0. \quad (4)$$

u is derived from this equation, remembering $\omega = \frac{\partial u}{\partial y}$.

I take two particular cases of (4). The one is expressed by the equation (7) on page 486, from which local friction coefficient is derived as shown in (9). This equation is transformed as the equation (11).

By using F. Schultz-Grunow's experimental results, I calculated the constants as shown in (14).

The mean velocity is calculated from (8), which is expressed in (12). The velocity distribution is shown in Fig. 2.

The other particular case is expressed by the equation (15), from which (17) is derived. This equation is the same as that derived by von Kármán if $\alpha = 1$. From F. Schultz-Grunow's experimental results, I calculated the constants as follows:

$$\alpha = 0.25, \quad A = 51.1, \quad B = 64.8.$$

平板上の亂流限界層に就て

所 員 佐々木 達治郎

目 次

1. 假 説.....	485
2. 微分方程式の解.....	486
3. 速 度 分 布.....	490

1. 假 説

從來亂流に關しては momentum transfer theory, vorticity transfer theory, similarity theory 等があつて種々の實驗と對照されてゐる。然しこれらは假説であつて決定的のものではなく、實驗の説明が最もよく出来るものが真相に近い譯である。私はここに一つの假説を作りこれを平板の亂流限界層の計算に用ひて見たい。

私の提出する假説は mean vortex theory とでも名づけ得るもので亂流内では澤山な微細な渦が不規則に配置され、これらの渦は或は decay し或は grow して居るが平均的には或大さと強さとを有して居るものとする。このやうに考へると亂流中の速度分布は渦分布に關係する。

平板の限界層の方程式は、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

である。これを變形して vorticity ζ を導入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) \right] + \rho v \zeta = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

となる。この第一項は運動エネルギーの x 方向の變化、第二項は Magnus effect と考へられる。Taylor はこの項を vorticity transfer と考へて居るが、この方程式の各項は x 方向の力を表して居るのであるから第二項を Magnus effect と考へても不合理はない。但しそのやうに考へる場合には v は ζ に關連したものと考へるより他の渦の強さ及び分布の刻々の變化のため、考へて居る ζ の所に於て速度

の y 方向の變化が起り、その爲めに Magnus effect が生ずるものと考へるべきである。このやうに考へる時は一つの渦に對しては隣の渦の作用が最も大であつて、この mean distance を l とすれば l は平板の前縁では小で後に至るに従つて次第に増加する。故に $\frac{1}{x}$ に比例するものと假定する。

次に $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ も vortex の y 方向の變化と考へられる。 ω を mean vortex とすれば $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ は ω が $dx dy$ の矩形の中に入出入りする probability によつて大に異る。而してこの probability も隣の渦の作所によるものが最大で渦の mean distance l に逆比例する。故に $\frac{1}{x}$ に比例する。

このやうに速度は渦によつて支配されて居るものとすれば、運動のエネルギーは mean vortex の二乗に比例し、Magnus effect は mean vortex の二乗に比例する。又渦による x 方向の shearing force は mean vortex の y による變化に比例する。

上記の如く考へると (2) 式より統計的の考によつて導かれる微分方程式は、

$$-a\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{b}{x} \omega^2 = \frac{c}{x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (3)$$

の形になる。ここで第一項の係数の負になるは運動のエネルギーは同じ y に對しては x の大なる方が小なる爲めである。又第二項の係数の負になるは c が正で v が正なる時は $\rho v \zeta$ は負なる爲めである。

2. 微分方程式の解

(3) 式を書直して、

$$ax\omega \frac{\partial \omega}{\partial x} + b\omega^2 = -c \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (4)$$

これを積分すれば一般解は、

$$f\left(\frac{1}{b\omega} - \frac{y}{c}, \log \omega x^{\frac{b}{a}}\right) = 0 \quad (5)$$

となる。 $\omega = \frac{\partial u}{\partial y}$ としてよいからこれより u を求めることが出来る。(5) 式より ω を求めるには色々の組合せがあるが、ここに二つの場合を取つて見る。

$$(1) \quad \frac{1}{b\omega} - \frac{y}{c} = -\frac{m}{\omega} x^{-\frac{b}{a}} + n \quad (7)$$

茲に m 及び n は常數である。(7) 式より

$$\omega = \frac{c}{y+nc} \left(xm^{-\frac{b}{a}} + \frac{1}{b} \right) \quad (8)$$

$y=0$ のときの ω を ω_0 とし

$$\omega_0 = \frac{1}{n} \left(mx^{-\frac{b}{a}} + \frac{1}{b} \right).$$

これより局所摩擦係数 C_f' は

$$C_f' = \frac{c\omega_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\bar{c}}{\rho n U^2} \left(mx^{-\frac{b}{a}} + \frac{1}{n} \right) \dots\dots\dots (9)$$

となる。

今 $\frac{c}{\rho}$ を \bar{c} で表はし之を kinematic eddy viscosity と考へれば

$$C_f' = \frac{2\bar{c}}{n U^2} \left(mx^{-\frac{b}{a}} + \frac{1}{n} \right) \dots\dots\dots (10)$$

となる。又

$$\left(\frac{\nu}{U} \right)^{-\alpha} \frac{2m\bar{c}}{n U^2} = A, \quad \frac{2\bar{c}}{n U^2 b} = B, \quad \frac{b}{a} = \alpha,$$

$$R_x = \frac{Ux}{\nu} \quad \text{とすれば}$$

$$C_f' = A R_x^{-\alpha} + B \dots\dots\dots (11)$$

となる。

次に (8) 式より

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\bar{c}}{y + \bar{c}n} \left(mx^{-\alpha} + \frac{1}{b} \right).$$

$$\therefore u = \bar{c} \left(mx^{-\alpha} + \frac{1}{b} \right) \log(y + \bar{c}n) + f(x).$$

$y=0$ に於て $u=0$ とし

$$u = \bar{c} \left(mx^{-\alpha} + \frac{1}{b} \right) \log \frac{y + \bar{c}n}{\bar{c}n} \dots\dots\dots (12)$$

となる。これより

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\bar{c} m \alpha \log \frac{y + \bar{c}n}{\bar{c}n} \cdot x^{-(1+\alpha)} \dots\dots\dots (13)$$

これより F. Schultz-Grunow が發表した平板の亂流限界層の實驗と比較して常⁽¹⁾

(1) F. Schultz-Grunow: Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Lufo 20/8/40 239/246. 頁

数を定めて見よう。この論文の第14圖と(3)式とを比較して

$$1+a=1.25,$$

$$\therefore a=0.25$$

とする。又第9圖の曲線Iと(11)式とを比較して

$$A=9.05 \times 10^{-2}, \quad B=8.00 \times 10^{-4} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

(II) 他の特解として

$$\sqrt{\frac{1}{\omega} - \frac{b}{c}} y = m \log_{10} \omega x^{\frac{b}{a}} + n \quad \dots\dots\dots (15)$$

の形にする。故に $y=0$ に於ては

$$\sqrt{\frac{1}{\omega_0}} = m \log_{10} \omega_0 x^{\frac{b}{a}} + n \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。

$$C_f' = \frac{c\omega_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2c}{U^2} \omega_0,$$

$$\therefore \omega_0 = \frac{U^2}{2c} C_f', \quad \text{又 } x = \frac{\nu}{U} R_x$$

として

$$\frac{1}{\sqrt{C_f'}} \sqrt{\frac{2c}{U^2}} = m \log_{10} C_f' R_x^a + n + m \log_{10} \frac{U^2}{2c} \left(\frac{\nu}{U} \right)^a$$

となる。故に

$$A = m \sqrt{\frac{U^2}{2c}}, \quad B = \sqrt{\frac{U^2}{2c}} \left\{ n + m \log_{10} \frac{U^2}{2c} \left(\frac{\nu}{U} \right)^a \right\}$$

として

$$\frac{1}{\sqrt{C_f'}} = A \log_{10} C_f' R_x^a + B \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。 $a=1$ とすれば Kármán が出した式と一致する。⁽¹⁾ 又前記の $a=0.25$ を採用し Sceultz-Grunow の論文第9圖 Iの曲線と比較して係数を定めると

$$a=0.25, \quad A=51.1, \quad B=64.8$$

(1) Golstein: Modern Developments in Fluid Dynamics. 頁 364 (77) 式

となる。

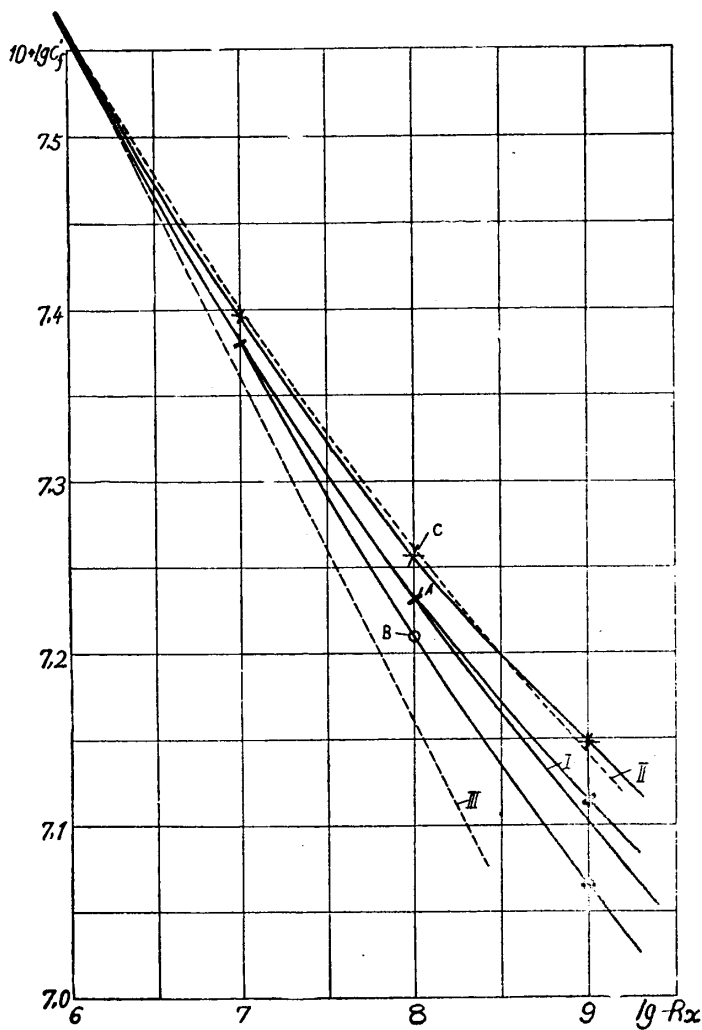
(III) (II) 式より C_f を計算すると

$$C_f = \int_0^x C_f' \frac{dx}{x} = \frac{A}{1-a} R_x^{-a} + B$$

$$= 0.1205 R_x^{-0.25} + 8.00 \times 10^{-4} \dots\dots\dots (18)$$

となり實驗結果とよく一致する。

(IV) (II) 式を Schultz-Gruenow の論文第9圖の曲線 II と比較して常數を定めると



- I Schultz-Gruenow の式
- II Schoenherrの實驗式
- III $R_x^{-\frac{1}{5}}$ の式

第 I 圖

$$A = 9.06 \times 10^{-2}, \quad B = 9.00 \times 10^{-4}$$

となる。

(I) (II) (IV) に於ける結果を圖示すれば第1圖の通りである。Schultz-Grumow の實驗は $R_x = 10^6$ から $R_x = 10^7$ の間で行はれたものであるから計算式と比較する場合には R_x のこの範圍の値で兩者を一致させたのである。圖に於て

$$(A) \quad \text{---|---|---|---|---} \quad C'_f = 9.05 \times 10^{-2} R_x^{-0.25} + 8.00 \times 10^{-4}$$

$$(B) \quad \text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---}\bigcirc\text{---} \quad \frac{1}{\sqrt{C'_f}} = 51.1 \log_{10} C'_f R_x^{-0.25} + 64.8$$

$$(C) \quad \text{---}\bigwedge\text{---}\bigwedge\text{---}\bigwedge\text{---} \quad C'_f = 9.06 \times 10^{-2} R_x^{-0.25} + 9.00 \times 10^{-4}$$

3. 速度分布

(13) 式を變形すると

$$u = \frac{nU^2}{2} (AR_x^{-\alpha} + B) \log \frac{y + n\bar{c}}{n\bar{c}} \dots\dots\dots (19)$$

となる。この式を Schultz-Grumow の實驗と比較して常數を定めると

$$\bar{c} = 2.98 \times 10^{-6} \left(\frac{m^2}{s} \right), \quad n = 3.93 \left(\frac{s}{m} \right) \dots\dots\dots (20)$$

となる。この値を用ひて (19) 式により u を計算すれば次表の通りである。
 $U = 19.4 \text{ (m/s)}$ である。

$$x = 0.5 \text{ m}$$

$y \text{ (mm)}$	1	3	5	8.5
$u \text{ (m/s)}$	13.2	16.4	17.9	19.4

$$x = 1.0 \text{ m}$$

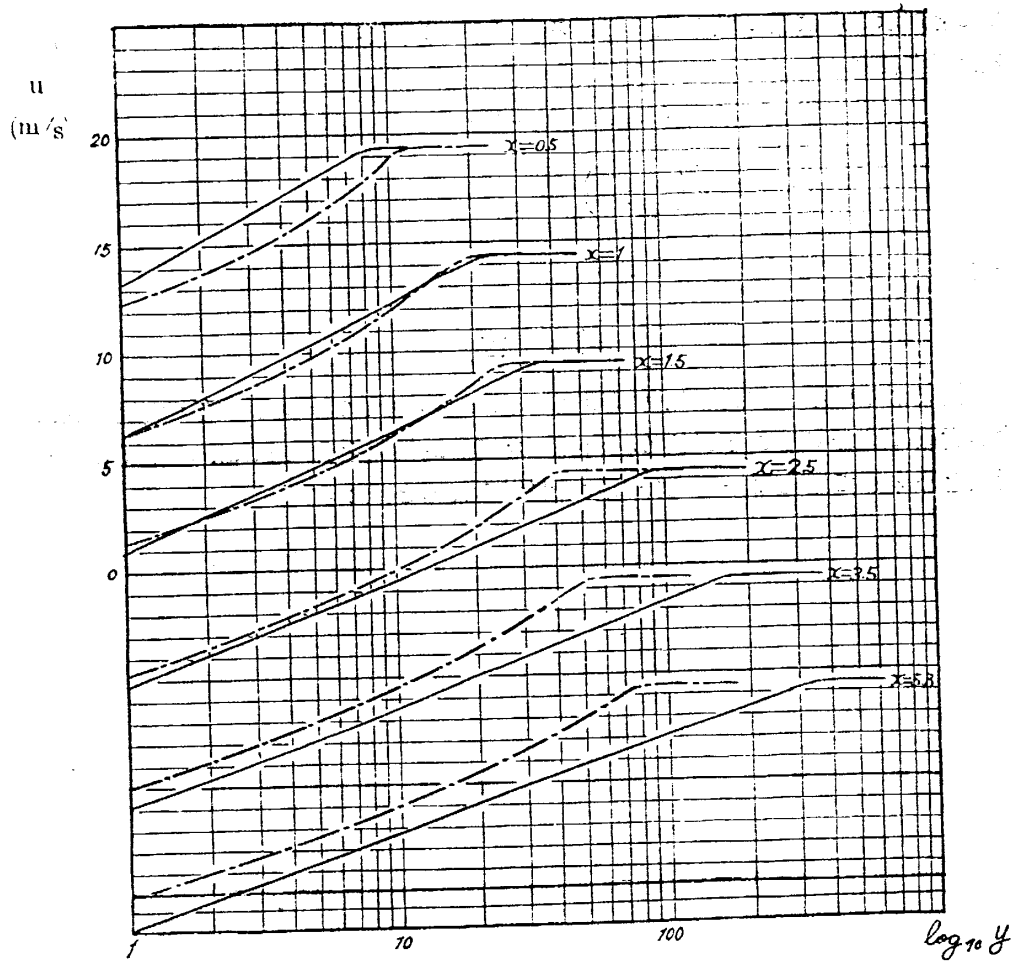
$y \text{ (mm)}$	1	3	5	10	20	22.5
$u \text{ (m/s)}$	11.4	14.2	15.5	17.2	19.2	19.4

$$x = 1.5 \text{ m}$$

$y \text{ (mm)}$	1	3	5	10	20	30	34
$u \text{ (m/s)}$	10.9	13.5	14.7	16.4	18.1	19.1	19.4

$$x = 2.5 \text{ m}$$

y (mm)	1	3	5	10	20	50	80	95
u (m/s)	9.7	12.0	13.0	14.5	16.0	18.0	19.1	19.4



第 2 圖 鎖線：實驗，實線：計算

$$x = 3.9 \text{ m}$$

y (mm)	1	5	10	20	50	100	150	170
u (m/s)	9.11	12.2	13.6	15.0	16.9	18.3	19.1	19.4

$$x = 5.3 \text{ m}$$

$y \text{ (mm)}$	1	5	10	20	50	100	200	300	340
$u \text{ (m/s)}$	8.5	18.4	12.7	14.1	15.8	17.1	18.4	19.2	19.4

これを圖示すれば第2圖の通りである。又(14)及び(20)の値より a , b , m の値を計算すれば

$$a = 2.01 \times 10^{-5} \text{ (m)}, \quad b = 5.03 \times 10^{-6} \text{ (m)},$$

$$m = 4.43 \times 10^5 \left(\frac{1}{m^{0.75}} \right)$$

となる。

結 言

以上の結果より見ると前記の如き簡単な vortex の假設によつても第1次近似的に理論が實驗に適合することが判る。尙詳細な實驗的検討をして mean vortex theory の諸項を吟味して見れば一層充分な近似が得られると思ふ。