

The coupling of the propeller blade bending vibration with the crankshaft twisting vibration of a V type engine

By

K. TANAKA, *Kogakuhakusi*,
Member of the Institute

and

T. OHINO,
Assistant of the Institute

Abstract.

The natural frequency of a crankshaft twisting vibration is usually calculated by assuming the attached propeller to be a rigid body. The propeller, however, instead of being rigid, is elastic, the vibration of the blades being due to their bending and twisting. The problem of coupling the propeller blade bending vibration with the crankshaft twisting vibration was recently treated, theoretically by J. Meyer in Germany and B. C. Carter in England. They treated the problem by assuming the blade to be homogeneous in section and ascertained their results by model experiments. Further J. Meyer treated briefly the problem in general assuming the area of the blade and its moments of inertia in potential relations with the length of the blade.

An example of the areas and their moments of inertia of sections of a three-blade duralmin adjustable pitch propeller are shown in Fig. 1. The areas of sections of the blade are approximately in linear relation to its length, but the moments of inertia of areas J^h and J^l , the former being with respect to the minor axis and the latter to the major axis, are not linearly related. The moment of inertia J^h is approximately in linear relation to the initial part, and after reaching maximum gradually decreases, whereas the latter J^l increases from tip to boss in the fourth or fifth power with its length. In the boss they are equalized, because the section there is a circle.

The theoretical solution of propeller blade bending vibration of such changes as in J^h and J^l , with its length, is not easy; and by considering the root of the blade, it will be seen that they differ greatly from the characteristic propeller blade section form, so that it may be regarded as part of the propeller boss. We may then

assume that the propeller boss forms 29% of the root of the propeller blade, and that it is rigid, and that the elastic propeller blade forms the remaining 71%; and further that in these parts, the areas of the sections and their moments of inertia J^h and J^t are in linear relation to the length of the blade.

With these assumptions, namely, that the sectional area and moments of inertia of the blade are in linear relation with its length, the authors examined this problem theoretically and numerical calculations were made with actual datum of an 800 HP V type engine and its propeller.

In the reports of J. Meyer and B. C. Carter, the area of the blade is assumed homogeneous, the propeller boss neglected, and the blade assumed to extend up to the propeller shaft. The authors calculated also the case in which the blade is assumed to be homogeneous in section, and the propeller boss taken into account, using the actual datum just mentioned.

The results of these two cases, namely that of the homogeneous section and that of linear relation to its length, are compared.

The report consists of the following chapters.

1. Introduction.
2. Differential equations that apply generally to problems of coupling the blade bending vibration with the crankshaft twisting vibration.
 - (1) Differential equations, assuming the propeller blade to be rigid, for the case of a V type 12 cylinder engine.
 - (2) Numerical calculation of the natural frequency of twisting vibration of the crankshaft of a V type 12 cylinder engine, with actual datum.
 - (3) General differential equation in connection with problems of the coupling of blade bending vibration with the crankshaft twisting vibration of a V type 12 cylinder engine.
3. Solutions of the differential equations when the area and the moment of inertia of the area of the propeller blade are in linear relation to its length.
4. Solutions of the differential equations when the area of the propeller blade is homogeneous in section.
5. Numerical calculation of the natural frequencies and their amplitudes of bending and twisting of the case of chapter 4 from actual datum.
6. Numerical calculation of the natural frequencies and their amplitudes of bending and twisting of the case of chapter 3 from actual datum.
7. Conclusion.
8. Appendix. Calculation of the polar moment of inertia of the root of a propeller blade. Tables and Diagrams.

In this investigation we obtained the first five natural frequencies in the coupling of the propeller blade bending vibration with the crankshaft twisting vibration for both cases, namely, when the propeller blade section is homogeneous and when the section and its moments of inertia are in linear relation to its length. Two of them are due to the crankshaft twisting vibration of one node and of two nodes, these values being quite equal to that case in which we calculated them by assuming the propeller to be a rigid body. These values moreover do not differ with respect to the above two cases.

The remainder are due to the propeller blade bending vibration, that is, due to one node and two node vibrations in y^z direction and one node vibration in y^h direction. The frequencies for the case of homogeneous section are lower than those of the case of linear relation to its length, their ratios being approximately 1.4 (2.0 in only one case). These ratios are reasonable, if we calculate the propeller blade bending vibration only, assuming the root to be rigidly clamped.

From these results, we find that in an actual case, with these couplings of the propeller with the crankshaft, there are natural frequencies not only due to the crankshaft twisting vibration but also to the propeller bending vibration, the former being the same as that in which the propeller blade is assumed to be a rigid body.

No. 212

(昭和十六年八月發行)

V型發動機の曲軸の振り振動とプロペラの曲げ振動との聯立に依る系の固有振動数の算定

所員 工學博士 田 中 敬 吉
技手 大 日 野 豊 明

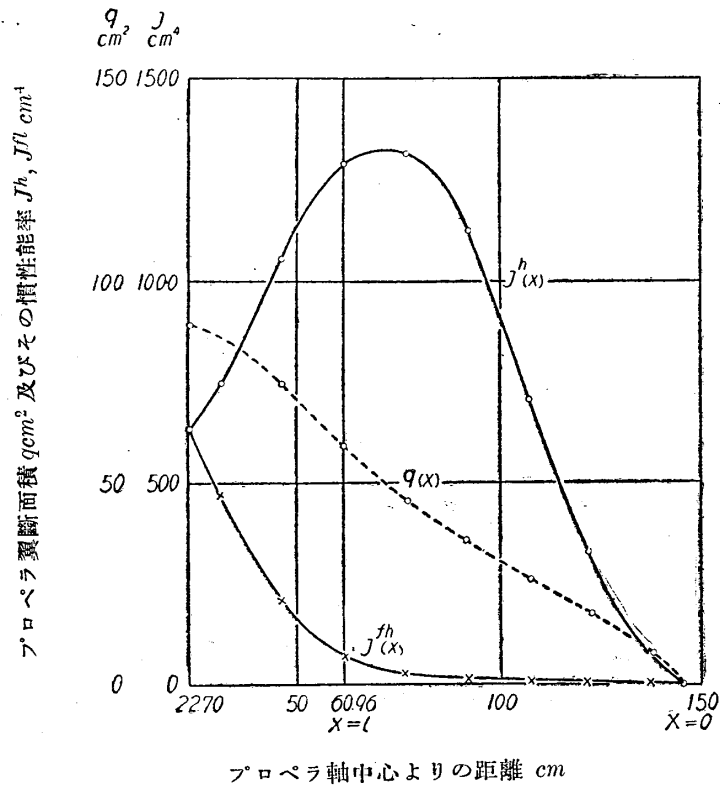
目 次

1. 序 言.....	6
2. 6個のクランクの場合の曲軸の振り振動とプロペラの曲げ振動との聯立に對する微分方程式.....	7
(1) プロペラを剛體と見做せる場合の微分方程式.....	7
(2) プロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の振り固有振動数の算定.....	13
(3) プロペラを彈性體としてその曲げ振動を考へた場合の一般振動方程式.....	14
3. プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて一次の變化をなす場合の解法.....	17
4. プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて變らず一様と假定した場合の解法.....	21
5. プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率を長さに添つて一様と假定した場合の計算例.....	21
6. プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて一次の變化をなす場合の計算例.....	29
7. 結 言.....	34
8. 附 録.....	36
(1) プロペラ翼の根元の部分の極慣性能率の計算.....	36
(2) 發動機函數 $F_m(k')$ 及びプロペラ函數 $F_p(k')$ の數值計算結果の表.....	38
(3) プロペラ翼の曲げ振動の振幅の附圖.....	

1 序 言

航空發動機の曲軸の振動とプロペラ翼の振動との聯成になる振動が原因となり、この系の故障及び破斷を惹起せる實例が、最近外國に於ても亦我國に於ても少なく無く、この原因並に之が防止に對する研究が重要視されて居る。

これまで曲軸の振り振動を考察する場合、プロペラを一つの剛體と見做すのが一般の方法であつたが、事實プロペラは剛體で無く彈性體であつて、その翼は曲げの振動及び振り振動を惹起す。このプロペラ翼の曲げ振動と曲軸の振り振動との聯成振動に就て、最近獨逸の Meyer⁽¹⁾ 及び英國の Carter⁽²⁾ の論文がある。兩氏はプロペラ翼の斷面積を一様と假定して、その聯成振動を理論的に解き之をモデルの實驗で



第 I 圖 プロペラ翼斷面積及びその慣性能率の實例

- (1) J. Meyer Die Kopplung der Luftschrauben-Biegeschwingungen mit den Kurbelwellen-Drehschwingungen. Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung
 (2) B. C. Carter The Vibration of Airscrew Blades with particular reference to their Response to Harmonic Torque Impulses in the Drive. R. & M. No 1758

確めたものである。而して Meyer は更にプロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて乗幕の變化をなす場合の一般解法に就て略述して居る。

デュラルシン三翼調整ピッチ、プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率の一つの實測値は第一圖に示される如きもので、その斷面積 $q(x)$ は大體一次の變化をなすが、斷面積の慣性能率はその長軸方向の $J^h_{(x)}$ と短軸方の $J^l_{(x)}$ (第4圖(a)参照) とに就て見るに、前者は始め大體一次に近い變化をなし、或る最高値以上は漸次減少し、後者は翼端より根元まで長さに添つて四乗乃至五乗の乗幕を以て増加し、根元に於て兩者が一致することとなる。之は根元に於て斷面が圓形となるからである。

プロペラ翼の斷面積の慣性能率 J^h 及び J^l にかくの如き變化をなさしめる場合の理論的な解法は可なり困難と考へられるし、プロペラ翼の根元近くは其の固有の斷面の形に遠く、ボスの一部分と見做し得るを以て(附録(1)第25圖参照)この考察を幾分過大にして、プロペラ翼の根元の斷面積が圓形となる部分よりの約29%をボスと一體と見做し、それより先の約71%をプロペラ翼と考へ、その部分が長さに添つて先づ一次の變化をするものと見做し、翼の振動を考へるのも聯成振動の理論的解法の一つの方法である。

著者はこの方法に依り曲軸はV型12氣筒の場合に就て、800馬力級の實發動機及びそのプロペラのデータを利用し、その理論的の固有振動数の計算を試みた。

上述の Meyer 及び Carter のプロペラ翼の斷面積を一様とした場合の聯成振動に就ての論文はプロペラボスを見做し、プロペラ軸までプロペラ翼があるものとし、又曲軸は星型單列の場合に就て Meyer は解き、Carter は星型復列の場合の計算値を代入したものであるが後者はその代入の方法を明にして居ない。故に著者は上述の計算に先立ち、先づプロペラ翼の斷面積の一様な場合に就て上述の實データで計算し、この場合に就て充分の検討を試み、それより一次の變化の場合を計算し、一様な場合と一次の變化をさせる場合との計算結果を比較した。

2. 6個のクランクの場合の曲軸の振り振動とプロペラの曲げ振動との聯立に對する微分方程式

2.1 プロペラを剛體と見做せる場合の微分方程式

先づプロペラを剛體と見做す普通の解法に就て略述する。6個のクランク及びプロペラを等値圓板に置き換へる。この場合の振動方程式は第2圖を参照して

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ を曲軸の等値圓板の極慣性能率 $kg \text{ cm sec}^2$

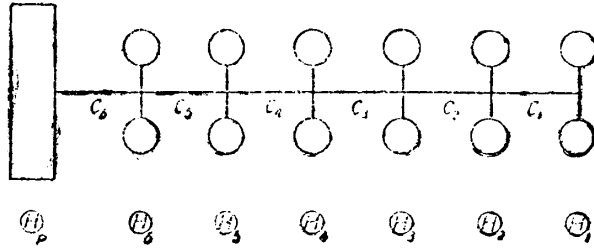
θ_p をプロペラの極慣性能率 $kg \text{ cm sec}^2$

c_1, c_2, \dots, c_6 を軸の振りに對する彈性係數 $kg \text{ cm /rad}$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6, \varphi_n$ を $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6, \theta_p$ の角変位 *rad.* とすれば

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ \theta_2 \ddot{\varphi}_2 + c_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - c_1 (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ \theta_6 \ddot{\varphi}_6 + c_6 (\varphi_6 - \varphi_n) - c_5 (\varphi_5 - \varphi_6) &= 0 \\ \theta_p \ddot{\varphi}_n - c_6 (\varphi_6 - \varphi_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

の振動方程式となり $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, c_1, c_2, \dots, c_6$ は既知の曲軸及びプロペラであれば既知の値となる。



第 2 圖 プロペラを剛體と見做せる場合のV型12気筒發動機の曲軸系の等値の圖

今 ω を振動數 *rad/sec* とし、 θ を振りの振幅 *rad* とすれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1 \sin \omega t \\ \varphi_2 &= \theta_2 \sin \omega t \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_6 &= \theta_6 \sin \omega t \\ \varphi_n &= \theta_n \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

と置くことを得 (1) 式に之を代入して

$$\left. \begin{aligned} -\theta_1 \omega^2 \theta_1 + c_1 (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ -\theta_2 \omega^2 \theta_2 + c_2 (\theta_2 - \theta_3) - c_1 (\theta_1 - \theta_2) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\theta_6 \omega^2 \theta_6 + c_6 (\theta_6 - \theta_n) - c_5 (\theta_5 - \theta_6) &= 0 \\ -\theta_p \omega^2 \theta_n - c_6 (\theta_6 - \theta_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

を得る。(3) 式に於て未知の値は ω 及び $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ である。

(3) 式に於て θ_1 を基準として $\theta_1 = 1$ と置き $\theta_2/\theta_1 = \theta_2, \theta_3/\theta_1 = \theta_3, \dots, \theta_n/\theta_1 = \theta_n$ として表すこととすれば (3) 式の第 1 式より

$$\theta_2 = 1 - \omega^2 \frac{\theta_1}{c_1}$$

更に順次

$$\begin{aligned} \theta_3 &= 1 - \omega^2 \left[\theta_1 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) + \theta_2 \frac{1}{c_2} \right] + \omega^4 \frac{\theta_1 \theta_2}{c_1 c_2} \\ \theta_4 &= 1 - \omega^2 \left[\theta_1 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) + \theta_3 \frac{1}{c_3} \right] \\ &\quad + \omega^4 \left[\theta_1 \theta_2 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) + \theta_1 \theta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{1}{c_3} + \theta_2 \theta_3 \frac{1}{c_2} \frac{1}{c_3} \right] + \omega^6 \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{c_1 c_2 c_3} \\ \theta_5 &= 1 - \omega^2 \left[\theta_1 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_3 \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_4 \frac{1}{c_4} \right] \\ &\quad + \omega^4 \left[\theta_1 \theta_2 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_1 \theta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_1 \theta_4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \frac{1}{c_4} \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 \theta_3 \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_2 \theta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \frac{1}{c_4} + \theta_3 \theta_4 \frac{1}{c_3} \frac{1}{c_4} \right] \\ &\quad - \omega^6 \left[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \frac{1}{c_1 c_2} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) + \theta_1 \theta_2 \theta_4 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \frac{1}{c_4} + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{1}{c_3} \frac{1}{c_4} \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \frac{1}{c_2 c_3 c_4} \right] + \omega^8 \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4}{c_1 c_2 c_3 c_4} \\ \theta_6 &= 1 - \omega^2 \left[\theta_1 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_2 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_3 \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_4 \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_5 \frac{1}{c_5} \right] \\ &\quad + \omega^4 \left[\theta_1 \theta_2 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_1 \theta_3 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_1 \theta_4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_1 \theta_5 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 \theta_3 \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_2 \theta_4 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 \theta_5 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} + \theta_3 \theta_4 \frac{1}{c_3} \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_3 \theta_5 \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} \right. \\ &\quad \left. + \theta_4 \theta_5 \frac{1}{c_4} \frac{1}{c_5} \right] \\ &\quad - \omega^6 \left[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \frac{1}{c_1} \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_1 \theta_2 \theta_4 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_1 \theta_2 \theta_5 \frac{1}{c_1} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \frac{1}{c_3} \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \theta_1 \theta_3 \theta_5 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} + \theta_1 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \frac{1}{c_4} \frac{1}{c_5} \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \frac{1}{c_2} \frac{1}{c_3} \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \right) + \theta_2 \theta_3 \theta_5 \frac{1}{c_2} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{1}{c_5} + \theta_2 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) \frac{1}{c_4} \frac{1}{c_5} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_3 \theta_4 \theta_5 \frac{I}{c_3 c_4 c_5} \Big] \\
& + \omega^8 \left[\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4}{c_1 c_2 c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_5}{c_1 c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_4 \theta_5}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \right. \\
& \quad \left. + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3} \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \frac{I}{c_2 c_3 c_4 c_5} \right] \\
& - \omega^{10} \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5} \\
\theta_n = & I - \omega^2 \left[\theta_2 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_2 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \right. \\
& \quad \left. + \theta_3 \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_4 \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_5 \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_6 \frac{I}{c_6} \right] \\
& + \omega^4 \left[\theta_1 \theta_2 \frac{I}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_1 \theta_3 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \right. \\
& \quad + \theta_1 \theta_4 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_1 \theta_5 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_1 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_2 \theta_3 \frac{I}{c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_2 \theta_4 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_2 \theta_5 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_2 \theta_6 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_3 \theta_4 \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_3 \theta_5 \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_3 \theta_6 \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} \\
& \quad + \theta_4 \theta_5 \frac{I}{c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_4 \theta_6 \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \Big] \\
& + \omega^6 \left[\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3}{c_1 c_2} \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_4}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \right. \\
& \quad + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_5}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_6}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} \\
& \quad + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_1 \theta_3 \theta_5 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_1 \theta_3 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_1 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \left(\frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \theta_1 \theta_4 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_1 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
& \quad + \frac{\theta_2 \theta_3 \theta_4}{c_2} \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \frac{\theta_2 \theta_3 \theta_5}{c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
& \quad + \frac{\theta_2 \theta_3 \theta_6}{c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_2 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \theta_2 \theta_4 \theta_6 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \theta_2 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \\
 & + \frac{\theta_3 \theta_4 \theta_5}{c_3} \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \left(\frac{I}{c_6} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{\theta_3 \theta_4 \theta_6}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_3 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) + \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} + \theta_4 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_4 c_5 c_6} \Big] \\
 & + \omega^8 \left[\frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4}{c_1 c_2} \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_5}{c_1 c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \right. \\
 & + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_6}{c_1 c_2} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_6} \right) \frac{I}{c_6} + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_4 \theta_5}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) \\
 & + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_4 \theta_6}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} + \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_5 \theta_6}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3} \frac{I}{c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_1 \theta_3 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} + \theta_1 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \frac{I}{c_2 c_3 c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_2 \theta_3 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} + \theta_2 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
 & \left. + \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_3 c_4 c_5 c_6} \right] \\
 & - \omega^{10} \left[\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \frac{I}{c_1 c_2 c_3 c_4} \left(\frac{I}{c_5} + \frac{I}{c_6} \right) + \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_6 \frac{I}{c_1 c_2 c_3} \left(\frac{I}{c_4} + \frac{I}{c_5} \right) \frac{I}{c_6} \right. \\
 & + \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_1 c_2} \left(\frac{I}{c_3} + \frac{I}{c_4} \right) \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} + \theta_1 \theta_2 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_1} \left(\frac{I}{c_2} + \frac{I}{c_3} \right) \frac{I}{c_4} \frac{I}{c_5} \frac{I}{c_6} \\
 & + \theta_1 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3 c_4 c_5 c_6} + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \left(\frac{I}{c_1} + \frac{I}{c_2} \right) \frac{I}{c_3 c_4 c_5 c_6} \\
 & \left. + \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6 \frac{I}{c_2 c_3 c_4 c_5 c_6} \right] + \omega^{12} \frac{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5 \theta_6}{c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6} \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

を得る。かくして最後部のクランクの振りの振幅 $\theta_1 = I$ を基準として $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ が振動数 ω の函数として求められる。

然し實際の場合には上の極慣性能率 θ 及び曲軸の振り強さ c はその構造上各々相異なるものでなく

$$\left. \begin{aligned}
 & \theta_1 = \theta_6 \\
 & \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta \\
 & \theta_p \\
 & c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c \\
 & c_6
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

と置くことを得る。即ち最後部のクランクには油ポンプ、水ポンプ等の傳導齒輪を見込み、最前部のクランクには曲軸の殘部及び弁の傳導齒輪、プロペラ軸の一部を見込み、兩者を略等しと見做す。

斯く假定することに依り (4) 式は遙に簡單となり

$$\begin{aligned}
 \theta_2 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} \theta_1 \\
 \theta_3 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} [2\theta_1 + \theta] + \frac{\omega^4}{c^2} \theta_1 \theta \\
 \theta_4 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} [3\theta_1 + 3\theta] + \frac{\omega^4}{c^2} \theta [4\theta_1 + \theta] - \frac{\omega^6}{c^3} \theta_1 \theta^2 \\
 \theta_5 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} [4\theta_1 + 6\theta] + \frac{\omega^4}{c^2} \theta [10\theta_1 + 5\theta] - \frac{\omega^6}{c^3} \theta_2 [6\theta_1 + \theta] + \frac{\omega^8}{c^4} \theta_1 \theta^3 \\
 \theta_6 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} [5\theta_1 + 10\theta] + \frac{\omega^4}{c^2} \theta [20\theta_1 + 15\theta] - \frac{\omega^6}{c^3} \theta^2 [21\theta_1 + 7\theta] \\
 &\quad + \frac{\omega^8}{c^4} \theta^3 [8\theta_1 + \theta] - \frac{\omega^{10}}{c^5} \theta_1 \theta_4 \\
 \theta_n &= 1 - \frac{\omega^2}{c} \left[\frac{5\theta_1 + 10\theta}{c} + \frac{2\theta_1 + 4\theta}{c_6} \right] \\
 &\quad + \frac{\omega^4}{c} \left[\theta \frac{20\theta_1 + 15\theta}{c} + \frac{5\theta_1^2 + 20\theta_1\theta + 10\theta^2}{c_6} \right] \\
 &\quad - \frac{\omega^6}{c^2} \theta \left[\theta \frac{21\theta_1 + 7\theta}{c} + \frac{20\theta_1^2 + 30\theta_1\theta + 6\theta^2}{c_6} \right] \\
 &\quad + \frac{\omega^8}{c^3} \theta^2 \left[\theta \frac{8\theta_1 + \theta}{c} + \frac{21\theta_1^2 + 14\theta_1\theta + \theta^2}{c_6} \right] \\
 &\quad - \frac{\omega^{10}}{c^4} \theta^3 \left[\theta \frac{\theta_1}{c} + \frac{8\theta^2 + 2\theta_1\theta}{c_6} \right] + \frac{\omega^{12}}{c^5} \theta_4 \frac{\theta_1^2}{c_6}
 \end{aligned} \tag{6}$$

を得る。

この (6) 式で求めた θ_6 及び θ_n を前述の (3) 式の最後の式

$$-\theta_p \omega^2 \theta_n - c_6 (\theta_6 - \theta_n) = 0 \dots\dots\dots (3)'$$

に代入することに依り

$$\begin{aligned}
 \theta_p \left\{ 1 - \omega^2 \left[\frac{5\theta_1 + 10\theta}{c} + \frac{2\theta_1 + 4\theta}{c_6} \right] \right. \\
 + \frac{\omega^4}{c} \theta \left[\frac{20\theta_1 + 15\theta}{c} + \frac{5\theta_1^2 + 20\theta_1\theta + 10\theta^2}{c_6} \right] \\
 - \frac{\omega^6}{c^2} \theta \left[\theta \frac{21\theta_1 + 7\theta}{c} + \frac{20\theta_1^2 + 30\theta_1\theta + 6\theta^2}{c_6} \right] \\
 + \frac{\omega^8}{c^3} \theta^2 \left[\theta \frac{8\theta_1 + \theta}{c} + \frac{21\theta_1^2 + 14\theta_1\theta + \theta^2}{c_6} \right] \\
 \left. - \frac{\omega^{10}}{c^4} \theta^3 \left[\frac{\theta_1\theta}{c} + \frac{8\theta^2 + 2\theta_1\theta}{c_6} \right] + \frac{\omega^{12}}{c^5} \theta^4 \frac{\theta_1^2}{c_6} \right\}
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & + [2\theta_1 + 4\theta] - \frac{\omega^2}{c} [5\theta^2 + 20\theta_1\theta + 10\theta^2] \\
 & + \frac{\omega^4}{c^2} \theta [20\theta_1^2 + 30\theta_1\theta + 6\theta^2] \\
 & - \frac{\omega^6}{c^3} \theta^2 [21\theta_1^2 + 14\theta_1\theta + \theta^2] + \frac{\omega^8}{c^4} \theta^3 [8\theta_1^2 + 2\theta_1\theta] \\
 & - \frac{\omega^{10}}{c^5} \theta^4 \theta_1^2 = 0
 \end{aligned}$$

を得る。この(7)式がプロペラを剛體と見做せる場合の6クランクの曲軸の固有振動数 ω を求める方程式であつて、圖式解法により容易に ω を計算し得る。固有振動数 ω を求め得ればその値を(6)式に代入して $\theta_1=1$ を基準として各クランクの振りの振幅 $\theta_2, \theta_1, \dots, \theta_n$ を算出することを得る。一方(3)式に(5)式の關係を入れて

$$\begin{aligned}
 \theta_2 &= 1 - \frac{\omega^2}{c} \theta_1 \\
 \theta_3 &= \theta_2 - \frac{\omega^2}{c} [\theta_1 + \theta \theta_2] \\
 \theta_4 &= \theta_3 - \frac{\omega^2}{c} [\theta_1 + \theta(\theta_2 + \theta_3)] \\
 \theta_5 &= \theta_4 - \frac{\omega^2}{c} [\theta_1 + \theta(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4)] \\
 \theta_6 &= \theta_5 - \frac{\omega^2}{c} [\theta_1 + \theta(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)] \\
 \theta_n &= \theta_6 - \frac{\omega^2}{c_6} [\theta_1(1 + \theta_6) + \theta(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5)]
 \end{aligned} \tag{8}$$

の關係が得られ $\theta_1=1$ 基準とし逐次 $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ の値を計算し得る。この(8)式の方が振幅の計算は簡單である。

2.2 プロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の振りの固有振動数の算定

V型12氣第800馬力級の發動機の實測値より上述の(5)式の數値

$$\theta_1 = \theta_6 = 1.2 \text{ kg cm sec}^2$$

$$\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta = 1.0 \text{ kg cm sec}^2$$

$$\theta_p = 233.5 \text{ kg cm sec}^2$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = c = 16.15 \times 10^6 \text{ kg cm/rad}$$

$$c_6 = 9.73 \times 10^6 \text{ kg cm/rad}$$

を得た。プロペラはデュラルミン三翼調整ピッチのものでその極慣性能率 θ_p は上述の値となる。

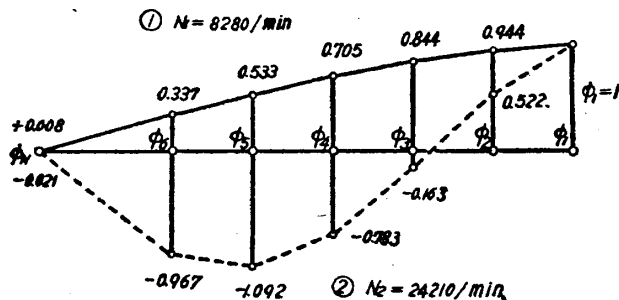
この数値を(7)式に代入すれば

$$233.5 \left\{ 1 - \omega^2 \times 1.64847 \times 10^{-6} + \omega^4 \times 4.11715 \times 10^{-13} - \omega^6 \times 3.55456 \times 10^{-20} \right. \\ \left. + \omega^8 \times 1.32803 \times 10^{-27} - \omega^{10} \times 2.21258 \times 10^{-35} + \omega^{12} \times 1.34733 \times 10^{-43} \right\} \\ + \left\{ 6.4 - \omega^2 \times 2.55108 \times 10^{-6} + \omega^4 \times 2.71449 \times 10^{-13} - \omega^6 \times 1.14047 \times 10^{-20} \right. \\ \left. + \omega^8 \times 2.04620 \times 10^{-28} - \omega^{10} \times 1.31069 \times 10^{-35} \right\} = 0 \dots\dots\dots(7')$$

となり、圖式計算を行ふことに依り、その一節及び二節の固有振動数は

$$\omega_1 = 867 \quad \text{rad/sec} \quad f_1 = 138/\text{sec} \quad N_1 = 8280/\text{min} \\ \omega_2 = 2535 \quad \text{rad/sec} \quad f_2 = 403.5/\text{sec} \quad N_2 = 24210/\text{min}$$

と算定せられ各クランクの振幅は $\phi_1 = 1$ を基準として(8)式により第3圖に示す如く計算される。



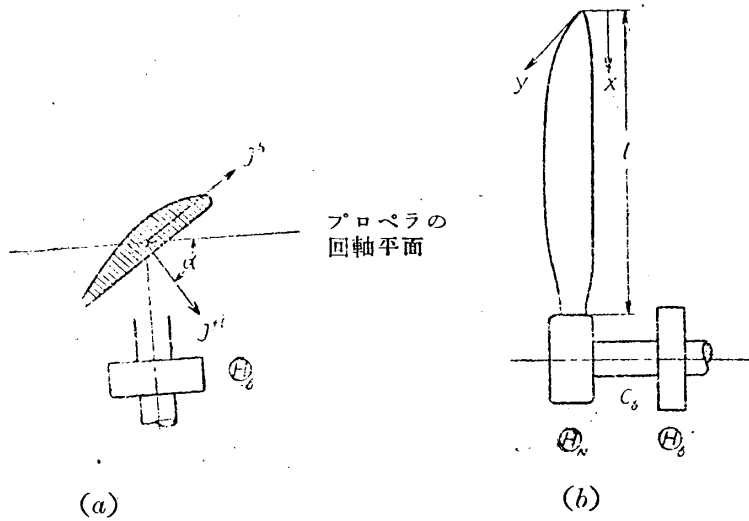
第3圖 プロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の一節及び二節の振動の振幅

2.3 プロペラを弾性體としその曲げ振動を考へた場合の一般振動方程式

次にプロペラを弾性體として、その曲げ振動を考へ、之と曲軸の振り振動とが聯成される場合の一般振動方程式を求めらる。この場合曲軸より來るプロペラボスのモーメントが、プロペラ翼より來るボスの位置($x=l$, 第4圖(b)参照)に於てのプロペラ翼のモーメントのその回轉平面への成分とが等しくなる條件に於て系の固有振動數値が求められる。

プロペラ翼の斷面は慣性能率の二つの主軸を有する。短軸方向の斷面積の慣性能率を J^l , 長軸方向の慣性能率を J^h とし $y=f(x, t)$ を翼の振動の式とする。 E をプロペラ翼の弾性係數とすればボス $x=l$ に於ける短軸方向のモーメントは

$$EJ^l \left(\frac{\partial^2 y^l}{\partial x^2} \right)_{x=l}, \quad \text{長軸方向のモーメントは } EJ^h \left(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^2} \right)_{x=l} \quad \text{となる。この兩者}$$



第4圖 プロペラを弾性體と見做せる場合の
V型12氣筒發動機の曲軸系の等値の圖

のプロペラの回轉平面へのモーメントの成分は a を短軸方向と回轉平面との角とし、(第4圖(a)参照) S をプロペラの翼數とするは $SE \left[J_{x=l}^{fl} \left(\frac{\partial^2 y^f}{\partial x^2} \right)_{x=l} \cos a + J_{x=l}^h \times \left(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^2} \right)_{x=l} \sin a \right]$ となる。このモーメントが曲軸より來るプロペラボスのモーメントと等しくならなければならない。即ち本章第I節(1)式の最後の式の右邊が零でなく上の値と等しくなければならない。即ち

$$\theta_n \ddot{\varphi}_n - c_6 (\varphi_6 - \varphi_n) = SE \left\{ J_{x=l}^{fl} \left(\frac{\partial^2 y^{fl}}{\partial x^2} \right)_{x=l} \cos a + J_{x=l}^h \left(\frac{\partial^2 y^h}{\partial x^2} \right)_{x=l} \sin a \right\} \quad (9)$$

を得る。但し左邊の θ_n はプロペラボスの極慣性能率 $kg \text{ cm sec}^2$ を表し(1)式の場合のプロペラ全體の極慣性能率 θ_p ではない。

而してプロペラ翼の曲げの振動を表す微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[J_x^{fl} \frac{\partial^2 y^{fl}}{\partial x^2} \right] + \mu(x) \frac{\partial^2 y^{fl}}{\partial t^2} &= 0 \\ E \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[J_x^h \frac{\partial^2 y^h}{\partial x^2} \right] + \mu(x) \frac{\partial^2 y^h}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

但し $\mu(x) = \rho \cdot q_x$ で ρ はプロペラ翼の質量 $kg \text{ sec}^2/\text{cm}^4$ q_x はプロペラ翼の斷面積 cm^2 を表す。

この(10)式に對する限界條件は

$$\left. \begin{aligned} (i) \text{ 翼端 } x=0 \text{ に於て } \text{モーメントが零} & \text{ 即ち } \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0 \\ (ii) \text{ 翼端 } x=0 \text{ に於て } \text{剪斷力が零} & \text{ 即ち } \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{(iii) ボス } x=l \text{ に於ける撓み} \\
 & \qquad y_{x=l}^{fl} = r\varphi_n \cos\alpha, \qquad y_{x=l}^h = r\varphi_n \sin\alpha \\
 & \text{(iv) ボス } x=l \text{ に於ける角變位} \\
 & \qquad \left(\frac{\partial y^{fl}}{\partial x}\right)_{x=l} = -\varphi_n \cos\alpha, \qquad \left(\frac{\partial y^h}{\partial x}\right)_{x=l} = -\varphi_n \sin\alpha
 \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

である。但し r はボスの半径 cm を表す*。

(10) 式に於ける J 及び μ を

$$J_x = J_{x=1} \cdot P(x) \quad \mu(x) = \mu(l) \cdot Q(x) \dots (12)$$

の形に置き換へ、又振動の式を

$$y(x,t) = y(x) \sin \omega t \dots (13)$$

の形に置き換へることにより (10) 式の部分微分方程式は

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dx^2} \left[P^{fl}(x) \cdot \frac{d^2 y^{fl}}{dx^2} \right] - k^4 Q(x) y^{fl}(x) = 0 \\
 & \frac{d^2}{dx^2} \left[P^h(x) \cdot \frac{d^2 y^h}{dx^2} \right] - i^4 Q(x) y^h(x) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

但し $k^4 = \frac{\mu(l)\omega^2}{EJ_{x=1}^{fl}} \quad i^4 = \frac{\mu(l)\omega^2}{EJ_{x=1}^h}$

なる完全微分の方程式で表し得ることとなる。

一方曲軸の振り振動の式に於て本章第 I 節の (2) 式の関係式

$$\varphi = \Phi \sin \omega t$$

をとることに依り、プロペラ翼の曲げ振動と曲軸の振り振動との聯成の一般振動方程式は

$$\left. \begin{aligned}
 & -\Theta_1 \omega^2 \Phi_1 + (\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \\
 & -\Theta_2 \omega^2 \Phi_2 + c_2(\Phi_2 - \Phi_3) - c_1(\Phi_1 - \Phi_2) = 0 \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -\Theta_6 \omega^2 \Phi_6 + c_6(\Phi_6 - \Phi_n) - c_5(\Phi_5 - \Phi_6) = 0 \\
 & -\Theta_n \omega^2 \Phi_n - c_6(\Phi_6 - \Phi_n) = SE \left\{ J_{x=l}^{fl} \left(\frac{d^2 y^{fl}}{dx^2} \right)_{x=l} \cos\alpha + J_{x=l}^h \left(\frac{d^2 y^h}{dx^2} \right)_{x=l} \sin\alpha \right\} \\
 & \frac{d^2}{dx^2} \left[P^{fl}(x) \cdot \frac{d^2 y^{fl}}{dx^2} \right] - k^4 Q(x) y^{fl}(x) = 0 \\
 & \frac{d^2}{dx^2} \left[P^h(x) \cdot \frac{d^2 y^h}{dx^2} \right] - i^4 Q(x) y^h(x) = 0
 \end{aligned} \right\} (15)$$

* Meyer は (9) 式のプロペラ翼のモーメントの正負及び (11) 式の角變位の正負を誤つて居る。

となる。

これの解法は最後の二つの式の四次の微分方程式の解法にかゝる。プロペラ翼の断面積の長さ上添つての變化 $Q(x)$ は略長さに正比例するものとしてよきも、断面積の慣性能率の變化 $P^{fl}(x)$ 及び $P^h(x)$ はしかし簡單で無い(第I圖参照)。これ等のものを凡て長さ上添つて變化せず $Q(x)=1, P(x)=1$ として一様な断面積及び慣性能率と假定した場合の解を前述の如く Meyer 及び Carter が出して居る。但し兩者ともにボスの半径 $r=0$ として之を更に簡單にしたものである。而して Meyer は更に長さ上添つてこれ等のものが一次の變化をする場合の解を略述して居る。

3. プロペラ翼の断面積及びその慣性能率が長さ上添つて一次の變化をなす場合の解法

(12) 式のプロペラ翼の断面積及びその慣性能率の長さ上添つての變化 $P(x)$ 及び $Q(x)$ を

$$P(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^p \quad Q(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^q \quad \dots\dots\dots(16)$$

の形と假定し

$$p=1 \quad q=1$$

と置いた場合がその断面積及び慣性能率を長さ上添つて一次の變化とする場合に當る。之を前節の(15)式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 y^{fl}}{dx^4} + 2 \frac{1}{x} \frac{d^3 y^{fl}}{dx^3} - k^4 y^{fl} &= 0 \\ \frac{d^4 y^h}{dx^4} + 2 \frac{1}{x} \frac{d^3 y^h}{dx^3} - i^4 y^h &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

を得る。この兩式は全く相似の形であるから先づ第Iの式を考へる。これ等の式の解は y を x の乗幕の級數として求め得べく、第I式の解は

$$\left. \begin{aligned} y^{fl} &= a_0 \Psi_0(kx) + a_1 \Psi_1(kx) \\ \Psi_0(kx) &= 1 + \frac{k^4 x^4}{3 \cdot 4!} + \frac{k^8 x^8}{1.5 \cdot 8!} + \frac{k^{12} x^{12}}{1.5 \cdot 9 \cdot 12!} + \frac{k^{16} x^{16}}{1 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 16!} + \dots\dots\dots \\ \Psi_1(kx) &= kx + \frac{k^5 x^5}{2 \cdot 5!} + \frac{k^9 x^9}{2.6 \cdot 9!} + \frac{k^{13} x^{13}}{2.6 \cdot 10 \cdot 13!} + \frac{k^{17} x^{17}}{2.6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 17!} + \dots \end{aligned} \right\} (18)$$

となり、 a_0 及び a_1 は限界條件より求められる積分常數である。(11)式で示された限界條件の第I及び第2の $y''(0)=0, y'''(0)=0$ は上の(17)式の級數の内に既に取入れてあつて x^2 及び x^3 の項は零となつて居る。即ち第3及び第4の限界條件

より a_0 及び a_0 を求むればよい。この限界条件より

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\Phi_n \cos a}{k} \frac{rk \Psi_1'(k') + \Psi_1(k')}{\Psi_0(k') \Psi_1'(k) - \Psi_0'(k') \Psi_1(k')} \\ a_1 &= -\frac{\Phi_n \cos a}{k} \frac{rk \Psi_0'(k') + \Psi_0(k')}{\Psi_0(k') \Psi_1'(k) - \Psi_0'(k') \Psi_1(k')} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

但し $k' = kl$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0'(k') &= \frac{k'^3}{\frac{3}{1} 3!} + \frac{k'^7}{\frac{3 \cdot 7}{1.5} 7!} + \frac{k'^{11}}{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{1.5 \cdot 9} 11!} + \frac{k'^{15}}{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{1.5 \cdot 9 \cdot 13} 15!} + \dots \\ \Psi_1'(k') &= 1 + \frac{k'^4}{\frac{4}{2} 4!} + \frac{k'^8}{\frac{4 \cdot 8}{2.6} 8!} + \frac{k'^{12}}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{2.6 \cdot 10} 12!} + \frac{k'^{16}}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}{2.6 \cdot 10 \cdot 14} 16!} + \dots \end{aligned} \right\} (20)$$

を得る。

故に (18) 式及び (19) 式より

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 y^{f l}}{dx^2} \right)_{x=1} &= \Phi_n \cos a \cdot k \\ &\times \frac{\left[\Psi_0''(k') \Psi_1(k') - \Psi_0(k') \Psi_1''(k') - rk \left\{ \Psi_0'(k') \Psi_1''(k') - \Psi_0''(k') \Psi_1'(k') \right\} \right]}{\Psi_0(k') \Psi_1'(k') - \Psi_0'(k') \Psi_1(k')} \\ &= \Phi_n \cos a \cdot k G(k') \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

を得る。但し

$$\left. \begin{aligned} \Psi_0''(k') &= \frac{k'^2}{\frac{3}{1} 2!} + \frac{k'^6}{\frac{3 \cdot 7}{1.5} 6!} + \frac{k'^{10}}{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{1.5 \cdot 9} 10!} + \frac{k'^{14}}{\frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15}{1.5 \cdot 9 \cdot 13} 14!} + \dots \\ \Psi_1''(k') &= \frac{k'^3}{\frac{4}{2} 3!} + \frac{k'^7}{\frac{4 \cdot 8}{2.6} 7!} + \frac{k'^{11}}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{2.6 \cdot 10} 11!} + \frac{k'^{15}}{\frac{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16}{2.6 \cdot 10 \cdot 14} 15!} + \dots \end{aligned} \right\} (22)$$

y^h に対しても全く同様の関係式があり $i' = i'$ として

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 y^h}{dx^2} \right)_{x=1} &= \Phi_n \sin a \cdot i \\ &\times \frac{\left[\Psi_0''(i') \Psi_1(i') - \Psi_0(i') \Psi_1''(i') - ri \left\{ \Psi_0'(i') \Psi_1''(i') - \Psi_0''(i') \Psi_1'(i') \right\} \right]}{\Psi_0(i') \Psi_1'(i') - \Psi_0'(i') \Psi_1(i')} \\ &= \Phi_n \sin a \cdot i H(i') \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

を得る。

故に (15) 式の下より三番目の式の右邊に (21) 式及び (23) 式を代入し

$$\begin{aligned} SE \left\{ J_{x=1}^{f l} \left(\frac{d^2 y^{f l}}{dx^2} \right)_{x=1} \cos a + J_{x=1}^h \left(\frac{d^2 y^h}{dx^2} \right)_{x=1} \sin a \right\} \\ = SE J_{x=1}^{f l} \Phi_n \cos^2 a \cdot k \left\{ G(k') + \frac{J_{x=1}^h}{J_{x=1}^{f l}} \frac{i}{k} \tan^2 a H(i') \right\} \end{aligned}$$

となり、その左邊と合せて

$$-\Theta_n \omega^2 \Phi_n - c_6 (\Phi_6 - \Phi_n) = SEJ_{x=l}^{fl} \Phi_n \cos^2 a k \left\{ G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i}{k} \tan^2 a H(i') \right\} \dots\dots\dots(24)$$

を得る (24) 式を變化して

$$-SEJ_{x=l}^{fl} \frac{1}{\omega^2} \frac{\Phi_n}{\Theta_n \Phi_n + \frac{c_6}{\omega^2} (\Phi_6 - \Phi_n)} = \frac{1}{k \cos^2 a \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i}{k} \tan^2 a H(i') \right]} \dots\dots\dots(24')$$

とすれば左邊は (4) 式或は (6) 式より ω の函数であること明かにして、右邊は

$$\frac{i'}{k'} = \frac{i}{k} = 4 \sqrt{\frac{J_{x=l}^{fl}}{J_{x=l}^h}} \quad k' = kl = 4 \sqrt{\frac{\mu(l)\omega^2}{EJ_{x=l}^{fl}}} \frac{l}{l}$$

の關係より k' の函数と見做し得べく、 k' は ω の函数であるから左右兩邊共に ω 或は k' の函数である。而して (14) 式の關係より

$$EJ_{x=l}^{fl} k \frac{1}{\omega^2} = \frac{\mu(l)\omega^2}{k^4} \times k \times \frac{1}{\omega^2} = \frac{\mu(l)}{k^3} = \frac{\mu(l)l^3}{k'^3}$$

を得るから (24') 式即ち (24) 式は

$$-S\mu(l) \frac{l^3}{k'^3} \frac{\Phi_n}{\Theta_n \Phi_n + c_6 \frac{\Phi_6 - \Phi_n}{\omega^2}} = \frac{1}{\cos^2 a \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i'}{k'} \tan^2 a H(i') \right]} \dots\dots\dots(24'')$$

となる。之を

$$\left. \begin{aligned} F_m(k') &= F_s(k') \\ F_m(k') &\equiv -S\mu(l) \frac{l^3}{k'^3} \frac{\Phi_n}{\Theta_n \Phi_n + c_6 \frac{\Phi_6 - \Phi_n}{\omega^2}} \\ F_s(k') &\equiv \frac{1}{\cos a \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i'}{k'} \tan^2 a H(i') \right]} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

として表す。

$F_s(k')$ は専らプロペラ翼の形より計算される數式であつて之をプロペラ函数と呼び、 $F_m(k')$ の $\Phi_n \left\{ \Theta_n \Phi_n + \frac{c_6}{\omega^2} (\Phi_6 - \Phi_n) \right\}$ は發動機の曲軸の形及びプロペラボスの極慣性能率より計算され、之にプロペラ翼より來められる數値 $-S\mu(l) \frac{l^3}{k'^3}$ をかけだもので之を發動機函数と呼ぶ。

この $F_s(k')$ 及び $F_m(k')$ の兩函数を k' を横軸として表し、この兩曲線の交る

點がプロペラ翼の曲げ振動と曲軸の振り振動とか聯成される系全體の固有振動數を決定する。

プロペラ翼の曲げ振動に依る短軸方向の撓みの振幅 y^{fl} は (18) 式の常數 a_0, a_1 及び $\Psi_0(kx)\Psi_1(kx)$ の k 及び k' に上述の如くして求めた $k'=kl$ の値を代入して

$$y_{x=l}^{fl} = \frac{\Phi_n \cos a}{k} \frac{\left[rk\Psi_1'(k') + \Psi_1(k') \right] \Psi_0(kx) - \left[rk\Psi_0'(k') + \Psi_0(k') \right] \Psi_1(kx)}{\Psi_0(k')\Psi_1'(k') - \Psi_0'(k')\Psi_1(k')} \quad \dots\dots\dots(26)$$

として求められる。翼端 $x=0$ に於ては $\Psi_0(kx) = \Psi_0(0) = 1$, $\Psi_1(kx) = \Psi_1(0) = 0$ となるから

$$y_{x=0}^{fl} = \frac{\Phi_n \cos a}{k} \frac{rk\Psi_1'(k') + \Psi_1(k')}{\Psi_0(k')\Psi_1'(k') - \Psi_0'(k')\Psi_1(k')} \quad \dots\dots\dots(26)$$

となり、翼の根元 $x=l$ に於ては限界條件より

$$y_{x=l}^{fl} = r\Phi_n \cos a$$

となる。故に翼の根元の振幅を基準として $y_{x=l}^{fl} = 1$ と置き、それと翼の任意の位置及び翼端との振幅の比は

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_x^{fl}}{y_{x=l}^{fl}} &= \frac{1}{rk} \frac{\left[rk\Psi_1'(k') + \Psi_1(k') \right] \Psi_0(kx) - \left[rk\Psi_0'(k') + \Psi_0(k') \right] \Psi_1(kx)}{\Psi_0(k')\Psi_1'(k') - \Psi_0'(k')\Psi_1(k')} \\ \frac{y_{x=0}^{fl}}{y_{x=l}^{fl}} &= \frac{1}{rk} \frac{rk\Psi_1'(k') + \Psi_1(k')}{\Psi_0(k')\Psi_1'(k') - \Psi_0'(k')\Psi_1(k')} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

として與へられる。

y^h に對しても全く相似の關係式が成立し y^{fl} 及び y^h のプロペラの回轉平面に對する成分は

$$\begin{aligned} y_x &= y_x^{fl} \cos a + y_x^h \sin a \\ y_{x=l} &= y_{x=l}^{fl} \cos a + y_{x=l}^h \sin a = r\Phi_n \end{aligned}$$

となる。故に

$$\begin{aligned} \frac{y_x}{y_{x=l}} &= \frac{y_x^{fl} \cos a}{r\Phi_n} + \frac{y_x^h \sin a}{r\Phi_n} \\ &= \frac{\cos^2 a}{rk} \frac{\left[rk\Psi_1'(k') + \Psi_1(k') \right] \Psi_0(kx) - \left[rk\Psi_0'(k') + \Psi_0(k') \right] \Psi_1(kx)}{\Psi_0(k')\Psi_1'(k') - \Psi_0'(k')\Psi_1(k')} \\ &\quad + \frac{\sin^2 a}{ri} \frac{\left[ri\Psi_1'(i') + \Psi_1(i') \right] \Psi_0(ix) - \left[ri\Psi_0'(i') + \Psi_0(i') \right] \Psi_1(ix)}{\Psi_0(i')\Psi_1'(i') - \Psi_0'(i')\Psi_1(i')} \end{aligned}$$

$$= \frac{y_x^{fl}}{y_{x=l}^{fl}} \cos^2 a + \frac{y_x^h}{y_{x=l}^h} \sin^2 a \dots\dots\dots(28)$$

となり、プロペラ翼の根元の撓みの振幅 $y_{x=l} = r\Phi_n$ を基準として翼の長さに添つての撓みの振幅を求め得る。

4. プロペラ翼の断面積及びその慣性能率が長さに添つて變らず一様と假定した場合の解法

この場合は (16) 式の $p=0, q=0$ 或は $P(x)=1, Q(x)=1$ となり、その解は Meyer の與へて居るものを多少變形し、又その正負の誤りを正して

$$F_n(k') = \frac{1}{\cos^2 a \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i'}{k'} \tan^2 a H(i') \right]}$$

但し

$$\left. \begin{aligned} G(k') &= \frac{\left[\cos k' \sin k' - \sin k' \cos k' \right] + r \frac{k'}{l} \sin k' \sin k'}{1 + \cos k' \cos k'} \\ H(i') &= \frac{\left[\cos i' \sin i' - \sin i' \cos i' \right] + r \frac{i'}{l} \sin i' \sin i'}{1 + \cos i' \cos i'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

として與へられ、 $G(k')$ 及び $H(i')$ は三角函数及び双曲線線數で表され、計算が數表で簡単に求められる。 $F_n(k')$ 函数は勿論第3章の場合を同一で變らない。

この場合のプロペラ翼の撓みの振幅は

$$\begin{aligned} y_x^{fl} &= \frac{\Phi_n \cos a}{2k(1 + \cos k' \cos k')} \left\{ \left[rk(\cos k' + \cos k') + (\sin k' + \sin k') \right] \right. \\ &\quad \left. \times (\cos kx + \cos kx) - \left[rk(\sin k' - \sin k') + (\cos k' + \cos k') \right] (\sin kx + \sin kx) \right\} \\ y_{x=0}^{fl} &= \frac{\Phi_n \cos a}{k(1 + \cos k' \cos k')} \left\{ rk(\cos k' + \cos k') + (\sin k' + \sin k') \right\} \\ y_{x=l}^{fl} &= r\Phi_n \cos a \end{aligned}$$

で表され、 y^h に對しても全く相似の關係が成立する。この場合も

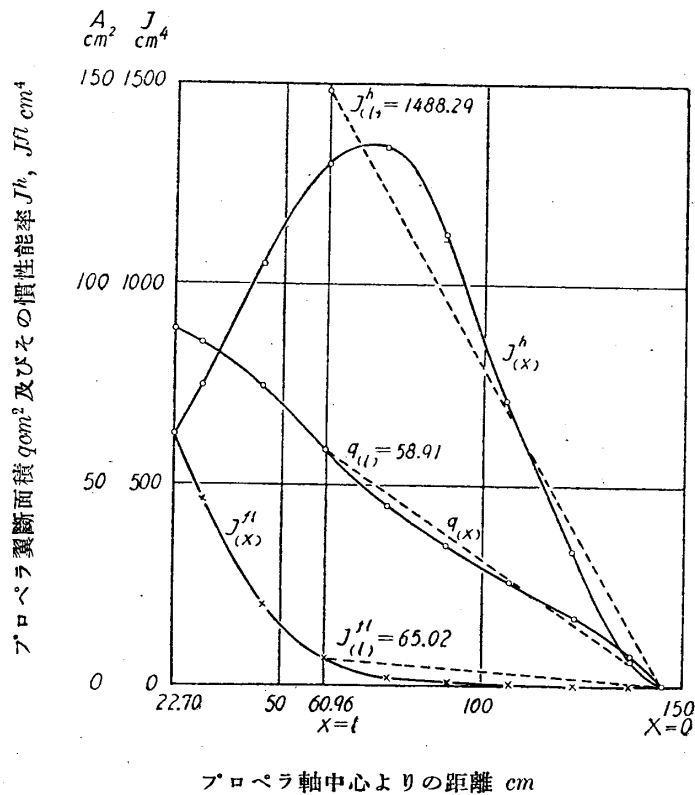
$$\frac{y_x}{y_{x=l}} = \frac{y_x^{fl}}{y_{x=l}^{fl}} \cos^2 a + \frac{y_x^h}{y_{x=l}^h} \sin^2 a \dots\dots\dots(28)$$

の關係が成立することは勿論である。

5. プロペラ翼の断面積及びその慣性能率を長さに添つて一様と假定した場合の計算例

序言に於て述べた如く、プロペラ翼の断面積及びその慣性能率の長さに添つての變化は第一圖に示す如きものとなる。即ちその断面積は翼の根元まで略一次の變化で増加するが、その慣性能率 J^h は翼の長さの約70%まで大體直線的に増加しそれより減少し、 J^{fl} は先端より根元まで x/l の4乗乃至5乗の關係で増加する。然し J^h 及び J^{fl} をかくの如く實測値通りの關係として振動の方程式を立て之を解くことは相當困難であるから、第五圖に示す如く先端より約71%まで J^h 及び J^{fl} を直線的に増加するものと假定し、それより後方はプロペラボスと一體の剛體と考へ、それだけプロペラボスの極慣性能率が增大したものと假定する。

かく假定した場合プロペラボスの極慣性能率は前述のデュラルミン三翼調整ピツ



第5圖 プロペラ翼断面積及びその慣性能率の實例

チの實プロペラの例では

$$\theta_n = 52.383 \quad \text{kg cm sec}^2$$

と算定される(附録(1)参照)、之はプロペラ全體を剛體と考へた場合の $\theta_p = 233.5 \text{ kg cm sec}^2$ の約 22.43% に當り 77.57% が彈性體と考へられることとなる。

この場合のボスの半径 r 及びプロペラ翼の長さ l は

$$r = 60.96 \text{ cm} \quad l = 145 - 60.96 = 84.04 \text{ cm}$$

と計算される。その位置に於ける

$$\text{翼の断面積} \quad q_{x=l} = 58.91 \text{ cm}^2$$

$$\text{翼断面の慣性能率} \quad J_{x=l}^{fl} = 62.021 \text{ cm}^4$$

である。 $J_{x=l}^h$ は J_x^h の曲線の大體の平均となる直線を引き

$$\text{翼断面の慣性能率} \quad J_{x=l}^h = 1488.29 \text{ cm}^4$$

と假定する。(第5圖参照)

故に以下の計算に必要な數値は下の如く

$$\mu(l) = \rho \times q_{x=l} = \frac{2.84 \times 58.91}{980} \times 10^{-3} = 0.17072 \times 10^{-3} \text{ kg sec}^2 \text{ cm}^{-2}$$

$$S\mu(l)l^3 = 3 \times 0.17072 \times 10^{-3} \times 84.04^3 = 304.00 \text{ kg cm sec}^2$$

$$\frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} = \frac{1488.29}{65.021} = 22.8262$$

$$i' = \frac{k'}{\sqrt[4]{22.8262}} = .457500 k'$$

$$rk = \frac{rk'}{l} = \frac{60.96}{84.04} k' = 0.725369 k'$$

$$k' = kl = \sqrt[4]{\frac{\mu(l) \omega^2}{EJ_{x=l}^{fl}}} l = \sqrt[4]{\frac{0.17072 \times 10^{-3}}{700,000 \times 65,021}} \times 84.04 \times \sqrt{\omega}$$

$$= 0.116955 \sqrt{\omega}$$

と求められる。

かくして發動機函数 $F_m(k')$ は (25) 式より

$$F_m(k') = - \frac{304.00}{(0.116955 \sqrt{\omega})^3} \frac{\Theta_n}{\Theta_n \Theta_n + c_6 \frac{\Theta_6 - \Theta_n}{\omega^2}}$$

となり曲軸より來る數値は第2章第2節のものから

$$\Theta_n = 1 - \omega^2 \times 1.64847 \times 10^{-6} + \omega^4 \times 4.11715 \times 10^{-13} - \omega^6 \times 3.55459 \times 10^{-20}$$

$$+ \omega^8 \times 1.32803 \times 10^{-27} - \omega^{10} \times 2.21258 \times 10^{-35} + \omega^{12} \times 1.34723 \times 10^{-43}$$

$$c_6 \frac{\Theta_6 - \Theta_n}{\omega^2} = 6.4 - \omega^2 \times 2.55110 \times 10^{-6} + \omega^4 \times 0.27148 \times 10^{-13}$$

$$- \omega^6 \times 1.1405 \times 10^{-20} + \omega^8 \times 2.0462 \times 10^{-28} - \omega^{10} \times 1.31069 \times 10^{-35}$$

となり $\Theta_n = 52.383 \text{ kg cm sec}^2$ を入れて上式を先づ ω の函数として求め

$$k' = 0.116955 \sqrt{\omega}$$

の関係より k' を横軸として場合の曲線が求められる。

プロペラ函数は (25) 式より

$$F_s(k') = \frac{I}{\cos^2 \alpha \left[G(k') + \frac{J_{x-1}^l}{J_{x-1}^h} \frac{i'}{k'} \tan^2 \alpha H(i') \right]}$$

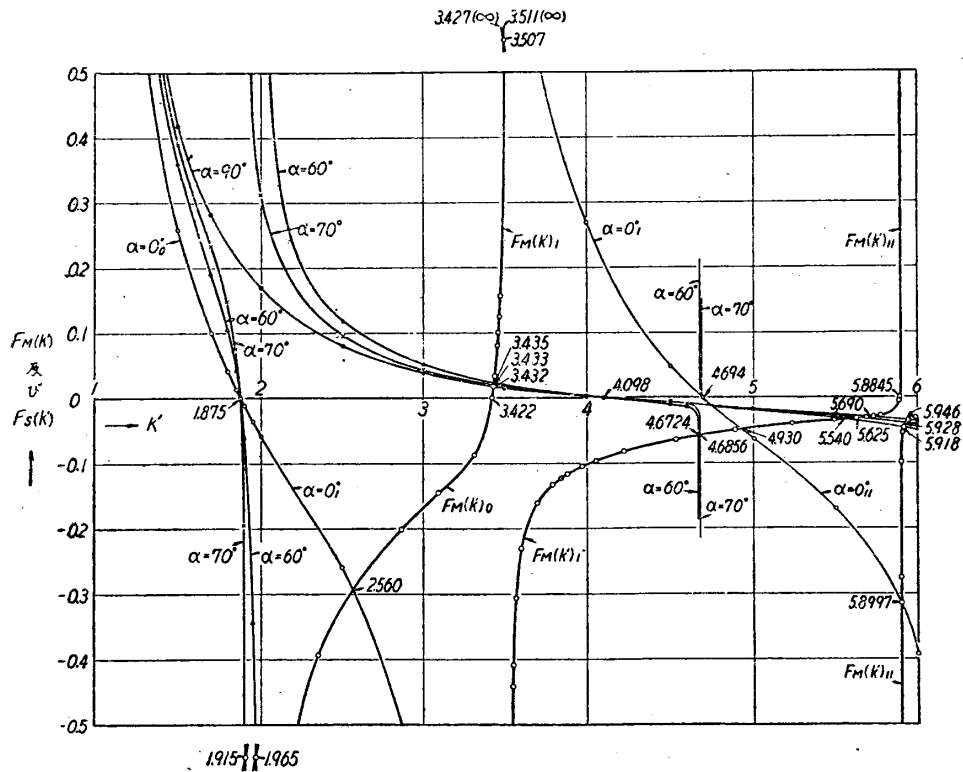
で與へられ $G(k')$ 及び $H(i')$ は k' 及び i' の函数として計算され

$$i' = .4575 k'$$

の関係より $H(i')$ は k' の函数に換算される。故にプロペラ函数も亦 k' を横軸とした曲線として求められる。

この報告の目的はプロペラ翼の斷面積及びその慣性能率を長さに添つて一次の變化をなす場合の計算であるが、先づそれ等のものが長さに添つて變らず一様の場合の計算を試みる。この場合の計算は遙に簡単でその計算結果も正確を期し得るを以つてこの場合に就て先づその一般的の考察を行ふ。

發動機函数 $F_m(k')$ は兩者ともに全く同一であつて、プロペラ函数 $F_s(k')$ の $G(k')$ 及び $H(i')$ がこの場合は (29) 式で表される通り三角函数及び双曲線函数として簡単な形で表される。



第6圖 プロペラ翼斷面積を一様とした場合の發動機函数 $F_m(k')$ 及びプロペラ函数 $F_s(k')$

計算結果を第六圖に示す。(詳しい數値計算は附録(2)の表に示す。)横軸に k' をとり縦軸に $F_m(k')$ 及び $F(k')$ の値をとりその兩函數を曲線といふ表したものである。 $F_s(k')$ は $\alpha=0^\circ$ 即ち翼の振り(ピッチ) 90° の場合と $\alpha=90^\circ$ 即ち翼の振り 0° の場合と、實際の場合に近い翼の振り 3° 及び 20° の $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ の四つの場合に就て表す。

先づ發動機函數 $F_m(k')$ の曲線を見るに、之は負の値より零の値を通過して $\pm\infty$ となり、それより先は相似の経過をとる。この $F_m(k')$ は (25) 式を参照して

$F_m(k')=0$ の位置は $\phi_n=0$ 即ちボスの處の振りの角が零となる場合に相當しその値は上述の曲線に於ては

$$k' = 3.422 \quad k' = 5.8845 \quad k' = 7.534$$

となる。而して $k' = 3.422$ までは曲軸全般に互り振り振動の節の出來ない場合で

$$3.422 < k' < 5.8845 \quad \text{の場合は } F_m(k') \text{ 即ち曲軸が一節}$$

$$5.8845 < k' < 7.534 \quad \text{の場合は } F_m(k') \text{ 即ち曲軸が二節}$$

の振動をなすことを意味する。之は ϕ_n の數位計算より明である。

次に $F_m(k') = \pm\infty$ は (25) 式及び (15) 式より $\theta_n \phi_n + \frac{c_6}{\omega^2} (\phi_6 - \phi_n) = 0$ の場合を示し、プロペラボスに外部より與くられるモーメントが零の場合である。この θ_n を θ_p とすればプロペラを剛體と見做せる場合の振り振動の方程式となる。

プロペラ函數 $F(k')$ の曲線に就て、先づその振りの角が 90° 即ち $\alpha=0^\circ$ の場合を考ふれば (29) 式より

$$F_s(k')_{\alpha=0} = \frac{1}{G(k')} = \frac{1 + \text{Cos } k' \text{ cos } k'}{\left[\text{Cos } k' \text{ sin } k' - \text{Sin } k' \text{ cos } k' \right] + r \frac{k'}{l} \text{Sin } k' \text{ sin } k'}$$

となり、正の値より零の値を通過して $\mp\infty$ となりそれより先も又相似の経過をとる。

この $F_s(k')_{\alpha=0} = 0$ は

$$1 + \text{Cos } k' \text{ cos } k' = 0$$

の場合で、之はプロペラボスに於て、プロペラ翼の撓み $y_{x=l}^l = 0$ 及び角變位

$\left(\frac{dy^l}{dx}\right)_{x=l} = 0$ の場合に相當し、プロペラ翼がボスに固定された場合を表す。

又 $F_s(k')_{\alpha=0} = \pm\infty$ は

$$G(k') = 0$$

の場合で (2.) 式より考へてプロペラボスに於てモーメントが零となる場合を表す。

プロペラ翼の曲げ振動の振幅はボスの處を基準として、その先端は (30) 式を参照して

$$\frac{y_{x=0}^{fl}}{y_{x=l}^{fl}} = \frac{1}{\frac{rk'}{l}(1 + \text{Cos}k' \text{cos}k')} \left\{ \frac{rk'}{l}(\text{Cos}k' + \text{cos}k') + (\text{Sink}' + \text{sink}') \right\} \dots (31)$$

で表される。

$1 + \text{Cos}k' \text{cos}k' = 0$ となる k' の値は

$$k' = 1.875 \quad k' = 4.694 \quad k' = 7.855 \quad k' = 10.996$$

となる。而して (31) 式の分子は常に正の値であつて分母は正負交互に上の零の値を通過して變化するから

$k' < 1.875$	のとき	$F_s(k')_{\alpha=0}$	即ちプロペラ翼は無節
$1.875 < k' < 4.695$	"	"	1 節
$4.694 < k' < 7.855$	"	"	2 節
$7.855 < k' < 10.996$	"	"	3 節

の振動を行ふこととなる。

$F_s(k')_{\alpha=90}$ の場合も全く同様の関係があつて (29) 式を参照して

$$F_s(k')_{\alpha=90} = \frac{1}{\frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i'}{k'} H(i')}$$

$F_s(k')_{\alpha=90} = 0$ は $H(i') = \infty$ 即ち $1 + \text{Cos}i' \text{cos}i' = 0$ の場合で $i' = .4575k'$ であるから $E_s(k')_{\alpha=90} = 0$ となる k' の値は

$$k' = \frac{1}{.4575} \times 1.875 = 4.098$$

$$k' = \frac{1}{.4575} \times 4.698 = 10.260$$

となり

$k' < 4.098$	のとき	$F_s(k')_{\alpha=90}$	即ちプロペラ翼は無節
$4.098 < k' < 10.260$	"	"	1 節

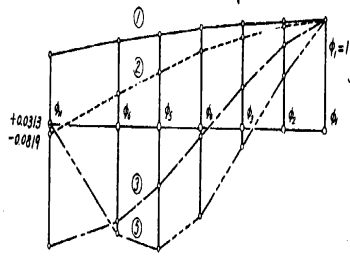
の振動をなすこととなる。

$\alpha = 0^\circ$ 及び $\alpha = 90^\circ$ 以外の一般の場合には (29) 式より

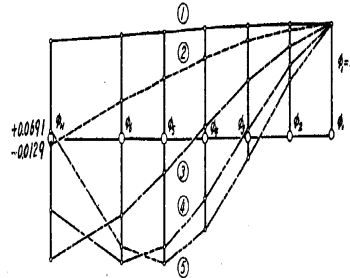
$$F_s(k') = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} \frac{i'}{k'} \tan^2 \alpha H(i') \right]}$$

であるから $F_s(k') = 0$ となる k' の値は $G(k') = \infty$ 及び $H(i') = \infty$ の k' の値即ち $F_s(k')_{\alpha=0} = 0$ 及び $F_s(k')_{\alpha=90} = 0$ の k' の値を全部とることとなり、 $\alpha = 0^\circ$ 及び $\alpha = 90^\circ$ の $F_s(k') = 0$ となる點を一般の $F_s(k')$ 曲線が通過することとなる。

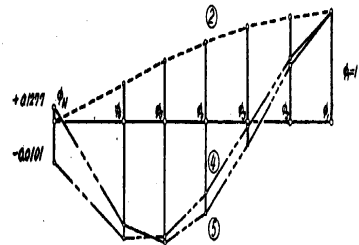
以上の如く $F_m(k')$ 及び $F_s(k')$ の兩曲線の物理的な意味を考察に置き、この兩曲線の交點を求め、プロペラ翼の曲げ振動と曲軸の振り振動との聯成になる固有振動數を求むれば下表の如くなる。



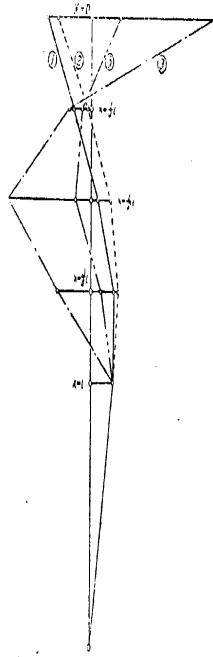
第7圖 プロペラ翼断面積を一様とした場合の
曲軸の振り振幅 ($\alpha=0^\circ$)



第8圖 プロペラ翼断面積を一様とした場合の
曲軸の振り振幅 ($\alpha=60^\circ$)

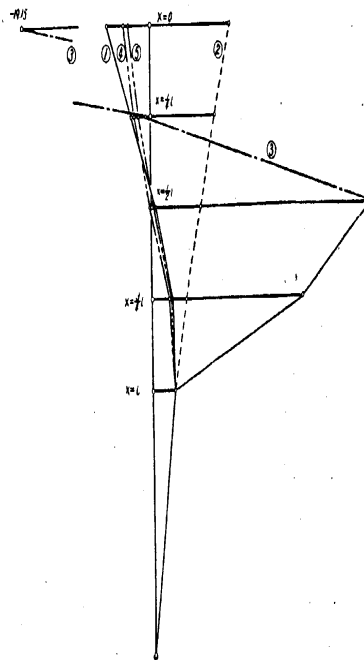


第9圖 プロペラ翼断面積を一様とした場合の
曲軸の振り振幅 ($\alpha=90^\circ$)



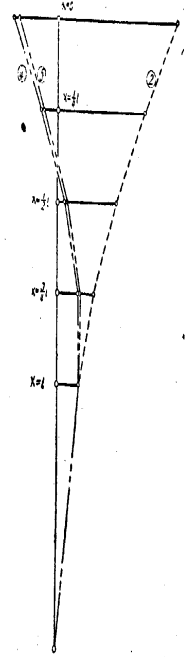
プロペラ中心

第10圖 プロペラ翼断面積を一様とした
場合のプロペラ翼の曲げ振幅
($\alpha=0^\circ$)



プロペラ中心

第11圖 プロペラ翼断面積を一様とした
場合のプロペラ翼の曲げ振幅
($\alpha=60^\circ$)



プロペラ中心

第12圖 プロペラ翼断面積を一様
とした場合のプロペラ翼
の曲げ振幅 ($\alpha=90^\circ$)

第I表 プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率を長さ
に添つて一様と假定した場合の固有振動數

	第一群 y^{fl} の一節振動	第二群 曲軸の一節振動	第三群 y^{fl} の二節振動	第四群 y^h の一節振動	第五群 曲軸の二節振動
$\alpha = 0^\circ$	$k' = 2.560$	$k' = 3.507$	$k' = 4.930$	/	$k' = 5.8997$
$\alpha = 60^\circ$	1.965	3.435	4.6724	$k' = 5.540$	5.918
$\alpha = 70^\circ$	1.915	3.433	4.6856	5.625	5.928
$\alpha = 90^\circ$	/	3.432	/	5.690	5.946
$\alpha = 0^\circ$	$n = 4575$	$n = 8586$	$n = 16968$	/	$n = 24299$
$\alpha = 60^\circ$	2696	8237	15241	$n = 24127$	24450
$\alpha = 70^\circ$	2560	8228	15327	22089	24533
$\alpha = 90^\circ$	/	8223	/	22603	24682
備考	曲動無節 yl 無節 $\alpha = 60^\circ$ 一節 $\alpha = 70^\circ$ 一節	y^{fl} 一節 y^h 無節 $\alpha = 60^\circ$ 無節 $\alpha = 70^\circ$ 無節	曲軸一節 y^h 一節 $\alpha = 60^\circ$ 一節 $\alpha = 70^\circ$ 一節	曲軸一節 y^{fl} 二節 $\alpha = 60^\circ$ 一節 $\alpha = 70^\circ$ 一節	y^{fl} 二節 y^h 一節 $\alpha = 60^\circ$ 一節 $\alpha = 70^\circ$ 一節

即ち求めた固有振動數を五つの群に分つて考へ得る。

第一群はプロペラ翼の短軸方向 y^{fl} の一節振動に基因するものであつて ($F_s(k')_{\alpha=0} = 0$ の點を通過して後に交る)、長軸方向 y^h は之に與らず、曲軸には未だ節が無い。 $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ は y^{fl} の影響を受けて一節の振動を惹起す。この場合 $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ は $\alpha = 0^\circ$ の最も撓み易き場合より遙に低い固有振動數を有して居る。

この第一群の $\alpha = 0^\circ$ 及び $\alpha = 60^\circ$ の場合の曲軸及びプロペラ翼の振動の振幅を第7圖第10圖及び第8圖第11圖の曲線①で示す。曲軸は最後部のものの振軸を基準として $\phi_1 = 1$ と置き、プロペラ翼はボスの振幅を基準として $y_{x=l} = r\phi_n = 1$ と置いたものである。即ち曲軸には未だ節がなく、プロペラ翼は一節を生ずる。この内第11圖の $\alpha = 60^\circ$ の①なる振幅曲線は(28)式に依つて y_x^{fl}/y_{x-l}^{fl} 及び y_x^h/y_{x-l}^h 即ち短軸方向と長軸方向の振幅をプロペラの回轉平面に合成したものであつて、この y_x^{fl}/y_{x-l}^{fl} 及び y_x^h/y_{x-l}^h は附録(3)の第11圖(a)に示す。即ち y^{fl} は一節 y^h は無節で之を合成したのが曲線①として一節振動をして居る。

第二群は曲軸の一節振動に基因するもので ($F_m(k') = 0$ を通過して後に交點が來

る) 短軸方向 y^{fl} も長軸方向 y^h も總ての場合が與り、 y^{fl} は一節、 y^h 及び $\alpha = 60^\circ$ 、 $\alpha = 70^\circ$ は無節である。(第7圖乃至第12圖の線圖②参照、この場合 $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ はその y^{fl} は一節 y^h は無節で、これを合成したものが無節となることを附録(3)の第11圖(b)に示す)。

プロペラを剛體と見做せる場合の一節振動の固有振動数は $N_1 = 8280/\text{分}$ であつて略この場合の値と一致する。而してこの場合は α が小さくなる程即ちプロペラ翼が撓み易い程僅かであるが、その固有振動數値が増大する。之は α の小さくなるにつれ、プロペラ翼の極慣性能率が小さくなることを考慮に入れることに依り一應の説明がつく。

第7圖乃至第9圖に示す曲軸の振り振幅の線圖②と第3圖に示すプロペラを剛體の假定した場合の曲軸の振り振幅の線圖①とが相似の形となつて居る。

第三群はプロペラ翼の短軸方向 y^{fl} の二節振動に基因するものであつて

($F_s(k')_{\alpha=0} = 0$ を再び通過して後に交る) 長軸方向 y^h は之に與らない。 $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ の曲線と $F_m(k')$ の曲線との交點は y^{fl} の二節となる手前で交り $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ の場合の翼の振動は一節となり、曲軸は全部一節の振動である。(第7圖、第8圖、及び第10圖、第11圖の線圖③及び附録(3)の第11圖(e)参照)、この場合は $\alpha = 0^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ の固有振動數は略等しく $\alpha = 0^\circ$ の最も撓み易い場合の方が、その固有振動數が高く、第一群の場合と同様の關係になる。

第四群はプロペラ翼の長軸方向 y^h の一節振動に基因するもので ($F_s(k')_{\alpha=90} = 0$ を通過して後に交點が來る) 短軸方向 y^{fl} は之に關與せず、曲軸は一節振動の範圍にある。(第8圖、第9圖、及び第11圖第12圖の線圖④参照)、この場合は α の増加と共に即ちプロペラ翼が撓み難くなるにつれてその固有振動數が増加する $\alpha = 60^\circ$ 及び $\alpha = 70^\circ$ の y^{fl} は勿論二節振動の範圍にあつてその關係を附録(3)の第11圖(d)に示す。

第五群は曲軸の二節振動に基因するものであつて ($F_m(k') = 0$ の第二の點を通過して後に交點が來る) y^{fl} も y^h も總ての場合が與り y^{fl} は二節、 y^h 、 $\alpha = 60^\circ$ 、 $\alpha = 70^\circ$ は一節(第7圖乃至第12圖の線圖⑤参照)の振動となる。

プロペラを剛體と見做せる場合の二節振動の固有振動數は $N_2 = 24210/\text{分}$ で略この場合の數値に等しい。而してこの場合は α の増加と共に即ちプロペラ翼が撓み難くなるにつれ、その固有振動數が高くなる。第7圖乃至第9圖の線圖⑤はプロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の振り振幅の經過(第3圖の線圖②)と相似となつて居る。

以上の計算結果よりプロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の一節及び二節の振動はプロペラ翼をその斷面積が一樣な彈性體と考へた場合にも現れ、これ以外にプロ

ペラ翼の断面の二つの主軸の方向 y^l 及び y^h 方向の一節及び二節の振動に基因するものが現はれる。而してプロペラを剛體と見做せる場合の曲軸の固有振動数はプロペラ翼を弾性體と考へた場合に於てもその數値が略等しい。かくして曲軸の振り振動のみを考へた場合では説明されない固有振動數のあることが明となる。

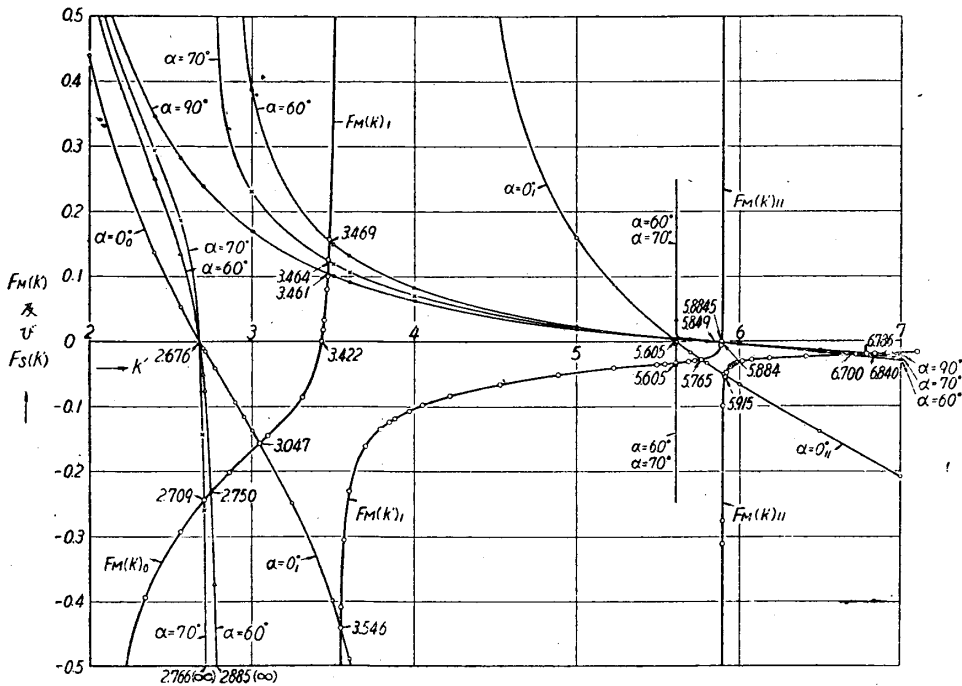
6. プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて一次の變化をなす場合の計算例

第5章の始めに述べた如く、プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率が長さに添つて一次の變化をなすものと假定し、第5圖に示す如く、プロペラ翼の先端よりその約71%をこの關係に置き、それより後方はプロペラボスと一體の剛體と見做す。

發動機函數 $E_m(k')$ は第5章の始めの計算値と全く同一であつて、プロペラ函數 $F_s(k')$ は (25) 式より

$$F_s(k') = \frac{I}{\cos^2 \alpha \left[G(k') + \frac{J_{x-l}^l i'}{J_{x-l}^h k'} \tan^2 \alpha H(i') \right]}$$

となり $G(k')$ 及び $H(k')$ は (21) 式及び (23) 式で示される如き k' 及び i' の函



第13圖 プロペラ翼斷面積及びその慣性能率を長さに添つて一次の變化をなす場合の發動機函數 $F_m(k')$ 及びプロペラ函數 $F_s(k')$

数として表され k' と i' との間には

$$i' = .4575 k'$$

の関係がある。

この場合の發動機函數 $F_m(k')$ 及びプロペラ函數 $F_s(k')$ の兩方を縦軸とし k' を横軸として示したものが第13圖であつてプロペラ函數 $F_s(k')$ は第5章の場合と同様に $\alpha=0^\circ$, $\alpha=60^\circ$, $\alpha=70^\circ$ 及び $\alpha=90^\circ$ の四つの場合を合せて示す。

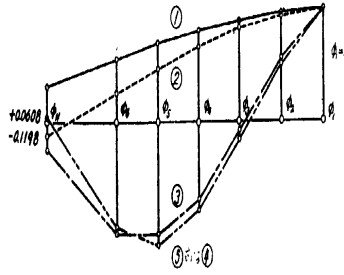
發動機函數 $F_m(k')$ 及びプロペラ函數 $F_s(k')$ の零となる點及び $\pm\infty$ となる點の意味は第5章に述べた通りで且つ發動機函數 $F_m(k)$ の數値は第5章のものと全く同一である。

第3圖より求めた聯成振動の固有振動數の値は第2表に示す通りとなり、同様に五つの群に分つて考へ得る。

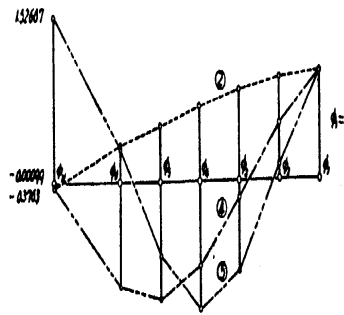
第一群はプロペラ翼の短軸方向 y^{fl} の一節振動に基因するものであつて ($F_s(k')_{\alpha=0^\circ} = 0$ の點を通經して後に交る) 長軸方向 y^h は之に與らず、曲軸には未だ節が無い。 $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ は y^{fl} の影響を受けて一節の振動を惹起す。この場合 $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ は $\alpha=0^\circ$ の最も撓み易い場合より幾分低い固有振

第2表 プロペラ翼の斷面積及びその慣性能率を長さにて添つて一次の變化と見做した場合の固有振動數 ($i = 0.4575k'$)

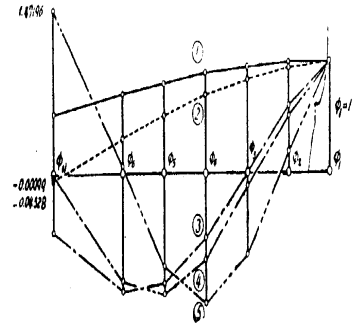
	第一群 y^{fl} の一節振動	第二群 曲轉の一節振動	第三群 y^{fl} の二節振動	第四群 曲軸の二節振動に相當するもの	第五群 y^h の一節振動
$\alpha=0^\circ$	$k'=3.047$	$k'=3.546$	$k'=5.765$	$k'=5.915$	/
60°	2.750	3.469	5.605	5.884	$k'=6.700$
70°	2.709	3.464	5.605	5.884	6.786
90°	/	3.461	/	5.884	6.840
$\alpha=0^\circ$	$\eta_1=6400$	8779	23200	24430	/
60°	5278	8401	21930	24170	31340
70°	5122	8378	21930	24170	32150
90°	/	8362	/	24170	32660
備考	曲轉無節 y^h 無節 $\alpha=60^\circ$ 一節 $\alpha=70^\circ$ 一節	y^{fl} 一節 y^h 無節 $\alpha=60^\circ$ 無節 $\alpha=70^\circ$ 無節	曲轉一節 y^h 無節 $\alpha=60^\circ$ 二節 $\alpha=70^\circ$ 二節	y^{fl} 二節 曲轉一節 $\alpha=60^\circ$ 一節 $\alpha=70^\circ$ 一節	y^{fl} 二節 y^h 一節 $\alpha=60^\circ$ 一節 $\alpha=10^\circ$ 一節



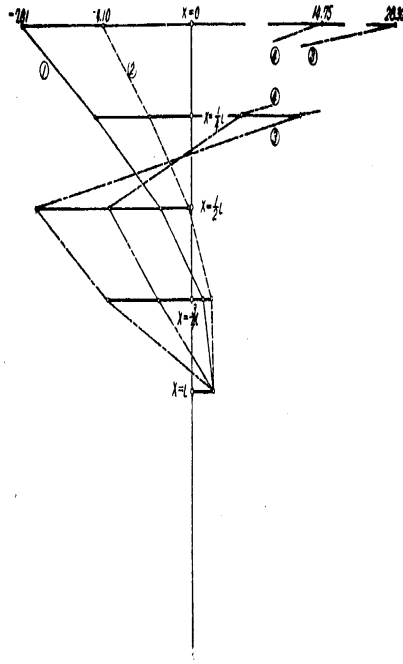
第14圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合の曲軸の捩り振幅 ($\alpha=0$)



第15圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合の曲軸の捩り振幅 ($\alpha=60^\circ$)

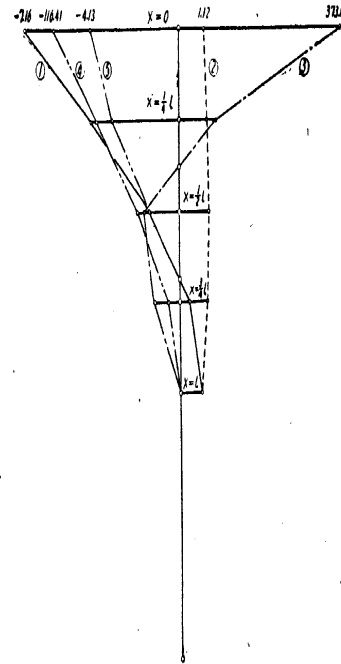


第16圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合の曲軸の捩り振幅 ($\alpha=90^\circ$)



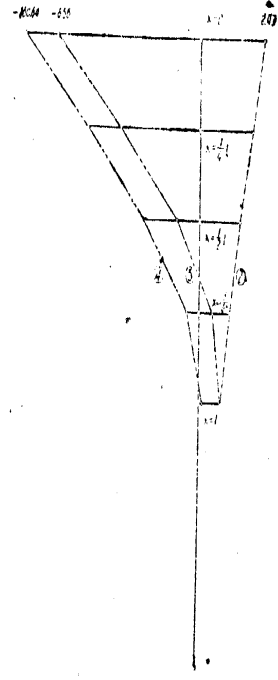
プロペラ中心

第17圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合のプロペラ翼の曲げ振幅 ($\alpha=0^\circ$)



プロペラ中心

第18圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合のプロペラ翼の曲げ振幅 ($\alpha=60^\circ$)



プロペラ中心

第19圖 プロペラ翼断面積及びその慣性効率が一次の変化をする場合のプロペラ翼の曲げ振幅 ($\alpha=90^\circ$)

動数を有して居る。

この第一群の $\alpha=0^\circ$ 及び $\alpha=60^\circ$ の場合の曲軸及びプロペラ翼の振動の振幅を第14圖第17圖及び第15圖第18圖の線圖①で示す。曲軸は最後部のものの振幅を基準として $\theta_1=1$ と置き、プロペラ翼はボスの振幅を基準として $y_{x=l}=r\theta_n=1$ と置いたものである。即ち曲軸には未だ節が無く、プロペラ翼に一節を生ずる。($\alpha=60^\circ$ の場合は附録(3)の第18圖(a)参照)

これ等第一群の固有振動数はプロペラ翼の斷面積及びその慣性能率を一様とした場合より遙に高くなり $\alpha=0^\circ$ の場合は 1.4倍 $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ の場合は 2.0 倍となる。この關係はプロペラ翼のみを考へ翼の斷面積を一様と假定した場合と斷面積及びその慣性能率が一次の變化をする場合に就て、一つの主軸に對して翼の根元を固定した場合の固有振動数が

$$1 + \text{Cosh} k' \text{cosh} k' = 0 \dots\dots\dots (A)$$

$$\Psi_0(k') \Psi_1'(k') - \Psi_0'(k') \Psi_1(k') = 0 \dots\dots\dots (B)$$

の關係式で與へられ、兩式 (A) 及び (B) を満足する基礎振動及び一節振動の k' の位が

$$k'_{A1} = 1.875 \quad k'_{A2} = 4.694$$

$$k'_{B1} = 2.676 \quad k'_{B2} = 5.605$$

となり振動数の比は

$$\frac{\omega_{A1}}{\omega_{B1}} = \left(\frac{k'_{A1}}{k'_{B1}} \right)^2 = \left(\frac{1.875}{2.676} \right)^2 = \frac{1}{2.0}$$

$$\frac{\omega_{A2}}{\omega_{B2}} = \left(\frac{k'_{A2}}{k'_{B2}} \right)^2 = \left(\frac{4.694}{5.605} \right)^2 = \frac{1}{1.4}$$

の關係で求められ、基礎振動の振動数は後者が 2 倍、一節振動は 1.4 倍となることと關連するものと考へる。

第二群は曲軸の一節振動に基因するものであつて ($F_m(k')=0$ を通過して後の交點となる) y^{fl} も y^h も總ての場合が與り、短軸方向 y^{fl} は一節、長軸方向 y^h 及び $\alpha=60^\circ$ $\alpha=70^\circ$ は無節である。(第14圖乃至第19圖の線圖②圖参照。この内第18圖の $\alpha=60^\circ$ の場合の線圖②は一見奇異の形となるが(28)に式依る計算に於て $\frac{y^{fl}}{y_{x=l}^{fl}}$ 及び $\frac{y_x^h}{y_{x=l}^h}$ 即ち短軸及び長軸方向の振幅は附録(3)の第18(b)圖に示す通りで、前者は一節後者は無節でそのプロペラ回轉面に於ける振幅が圖の如くなるのである。

これ等の固有振動数は、プロペラ翼の斷面積を一様とした場合と略々等しく 2% の程度高くなつて居る。而してプロペラを剛體と見做せる場合の値 $N_1=8280$ に α の値が大きくなるにつれて近くことも同様の傾向にあつて、この第二群の固有振動数は曲軸の一節振動に基因するものであるから、プロペラ翼の斷面積及びその慣性

能率が一樣の場合でも一次の變化をする場合でも、その固有振動數値が大して變らないことが認められる。又曲軸の振り振動の振幅の経過がプロペラを剛體と見做せる場合と相似のものとなつて居ることが第3圖の曲線①と比較して明となる。

第三群はプロペラ翼の短軸方向 y^{fl} の二節振動に基因するものびあつて ($F_s(k')_{\alpha=0^\circ}=0$ を再び通過して後に交る) 長軸方向 y^h は之に與らない。 $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ は $\alpha=0^\circ$ が二節振動となつて後に $F_m(k')$ と交りプロペラ翼斷面積の一樣な場合と異なり $\alpha=60^\circ$ も $\alpha=70^\circ$ も二節の振動をなすこととなる。曲軸は全部一節の振動である。(第14圖第15圖及び第17圖第18圖の線圖③参照) この第18圖の線圖③は(28)式に依る計算値として非常に大きくなる。即ちプロペラボスの根元の振幅 $y_{x=l}=r\theta_n=1$ と置けば、翼端の振幅は $y_{x=0}=373.14$ にも達する。この場合の k' の値は $k=5,605$ で表され、プロペラ翼の短軸方向の振動はその根元を固定せられた場合即 $\Psi_0(k')\Psi_1'(k')-\Psi_0'(k')\Psi_1(k')=0$ の場合の k' の値即ち、 $k'=5,6045$ に近く、故にこの第二群の $\alpha=60^\circ$ 及び $\alpha=70^\circ$ のプロペラ翼の振動は根元が固定した場合の振動に近いものと考へられる。)

この場合の振動數の α に対する變化の關係はプロペラ翼斷面積の一樣な場合と同様の傾向にあつて、その場合の値の1.4倍に當る。この比の値は第一群の場合で説明した値と一致することを知る。

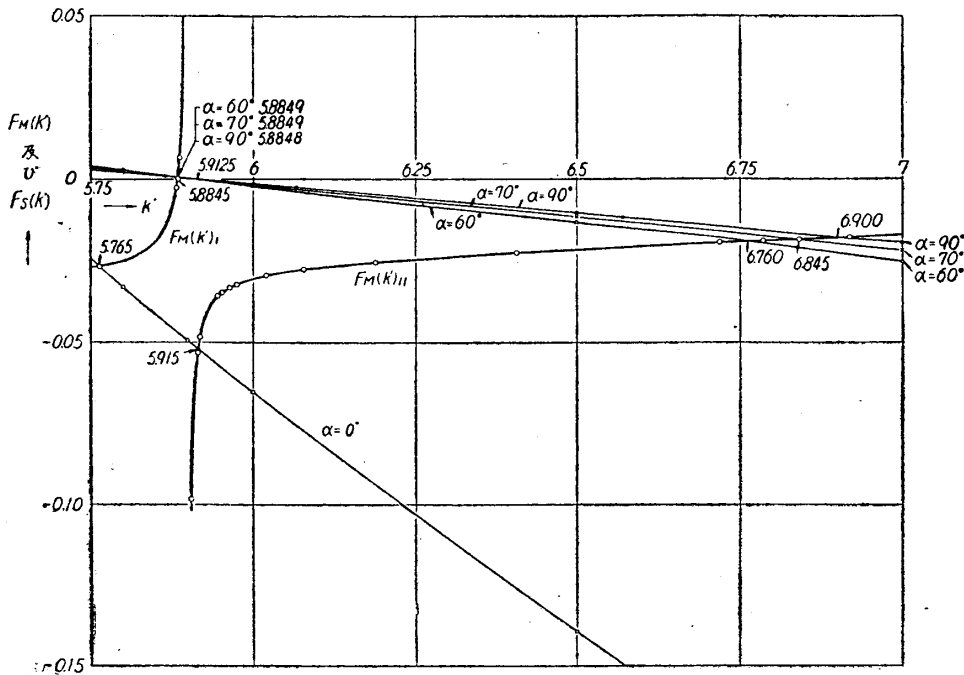
第四群は第13圖より曲軸の振動がなほ一節の處にあるが爲めに長軸方向 y^h の一節振動に起因するものと一見考へられるが、曲軸のプロペラボスの振り振動の振幅 θ_n の關係(第17圖乃至19圖の曲軸の振り振動線圖④及び⑤参照)を第3圖のプロペラを剛體と見做せる場合の二節振動の線圖②と比較して見ると、この第四群が曲軸の二節振動に近いものとなつて居る。第五群のプロペラボスの振り振動 θ_n は曲軸の二節振動と考へるには過大となる。

これ等の考察より前章及び本章で假定した $J_{x=l}^h=1488.29\text{cm}^4$ を4%増大して $J_{x=l}^h=1550.89\text{cm}^4$ とすれば

$$\frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^{fl}} = \frac{1550.89}{65.021} = 23.8521$$

$$i' = \frac{k'}{\sqrt[4]{23.8521}} = 0.4525 k'$$

の關係となり、この計算を基礎として求めた $F_s(k')$ と $F_m(k')$ の曲線を第20圖に示す。發動機函數 $F_m(k')$ 及プロペラ函數 $F_s(k')$ の内 $\alpha=0^\circ$ は變らない。 $F_m(k')=0$ となる k' の値はこれまで通り $k'=5.8845$ に對し、これまでの $F_s(k')_{\alpha=90^\circ}=0$ となる k' の位は $k'=5.849$ であつたに對して(第13圖参照)、第20圖よりこの場合には $k'=5.9125$ となり、 $\alpha=90^\circ$ の曲線が零となる點が $F_m(k')=0$ となる點の後に來



第20圖 プロペラ翼斷面積及びその慣性能率を長さに添つて一次の變化をなす場合の發動機函數 $F_m(k')$ 及びプロペラ函數 $F_s(k')$ $J_{h_{x=l}}=1550.89 \text{ cm}^4$

り、 $F_s(k')$ の曲線は $F_m(k')$ の曲線がその零となる點を經過した後に関り、これ等の交點は曲軸の二節振動に基因するものとなり、プロペラを剛體と見做せる場合とその曲軸の振り振動の振幅の經過が相似となる。(第21圖及び第22圖の線圖④圖参照)。この第20圖より求めた第四群及び第五群の固有振動数は第3表の如くなり

第3表 第2表の修正値 $i'=0.4525k'$

	第四群 曲軸の二節振動	第五群 y^h の一節振動
$\alpha=0^\circ$	$k'=5.9150$ $n=24430$	$k'=6.760$ $n=31900$
$\alpha=60^\circ$	5.8849 24180	6.845 32710
$\alpha=70^\circ$	5.8849 24180	6.900 33240
$\alpha=90^\circ$	5.8848 24180	
備考	y^{fl} 二節 y^h 無節 $\alpha=60^\circ$ 無節 $\alpha=70^\circ$ 無節	曲軸二節 y^{fl} 二節 $\alpha=60^\circ$ 二節 $\alpha=70^\circ$ 二節

かくして求めた第四群の固有振動数はプロペラを剛體を見做せる場合の値である $N_2=24210$ /分に近く、この場合は α が小さくなるにつれて固有振動数が増加し、曲軸の一節振動の場合と同一の傾向にある。この曲軸の二節振動の数値はプロペラ翼

断面積を一樣とした場合に略等しく、この固有振動数はプロペラ翼断面積及びその慣性能率の變化に依つて殆んど影響を受けないことが認められる。即ちこの場合短軸方向の慣性能率 $J_{x=1}^h$ を修正して説明したが第2表の第四群も曲軸の二節振動と考る可きものであるらう。

この第四群に於てはその固有振動数を表す k' の位が $F_s(k)_{\alpha=90^\circ}=0$ の k' の値に近く、故に $\alpha=60^\circ$ $\alpha=70^\circ$ のプロペラ翼の長軸方向の振動はその根元を固定せられた場合即ち $\Psi_0(i') \Psi_1'(i') - \Psi_0'(i') \Psi_1(i')=0$ の場合に近い振動となる。(第23圖及び第24圖の線圖④参照)

かくして第五群は長軸方向 y^h の一節振動に基因するものとなり、之が曲軸の二節振動の後に來り、プロペラ翼断面積の一樣な場合とその位置を交換する(第1表参照)。之は曲軸の振り振動の振動数はプロペラ翼の形に依つて變らず、プロペラ翼の曲げ振動の振動数はその翼断面積及びその慣性能率に依つて著しく變化し、断面積の一樣な場合が最も低い振動数となることから考へて當然起り得る問題である。

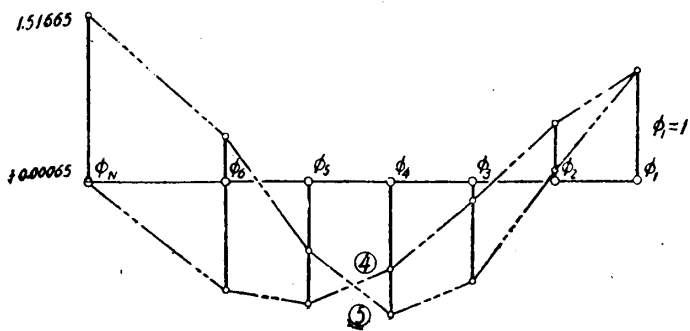
第2表の第5群と第1表の第4群は $J_{x=1}^h$ を同一の數値で計算したものであり、この第2表の第5群は曲軸の二節振動に基因するものでなく y^h の一節振動と見る可きものかであるら、この兩者を比較すれば第2表の數値は第1表の數値の約 1.4倍に當り、この固有振動数の比率が上述と同一の關係にあることが知られる。

以上の計算結果より、プロペラ翼の断面積及び慣性能率を長さに添つて一次の變化をなすものと假定した場合にも、曲軸の振り振動に起因する固有振動数が求められ、その一節及び二節振動の數値はプロペラを剛體と假定した場合の數値と略等しく、又プロペラ翼断面積を一樣として場合の値と略等しい。その他にプロペラ翼の断面積の短軸方向及び長軸方向の曲げ振動に起因する振動が現れ、これらのものはその断面積を一樣と假定場合の振動数よりも高く、一般にその 1.4 倍に當ることを知る。

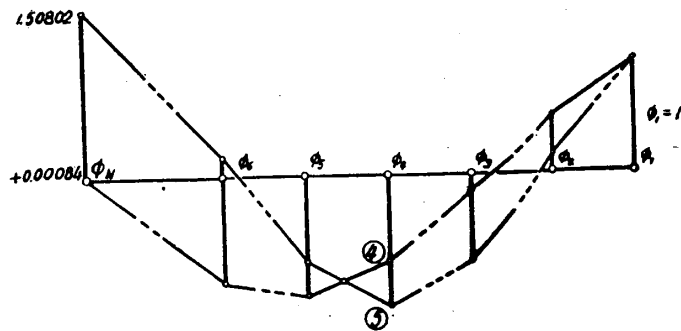
7. 結 論

以上プロペラ翼を弾性體と考へ、その断面積を一樣と假定した場合と、その断面積及びその慣性能率を長さに添つて一次の變化をなすものと假定した場合に就て、曲軸は6クランクのものに就て理論的數式を立て、800馬力數のV型12氣筒の實發動機及びそのプロペラのデータを入れて數値計算を行つた。

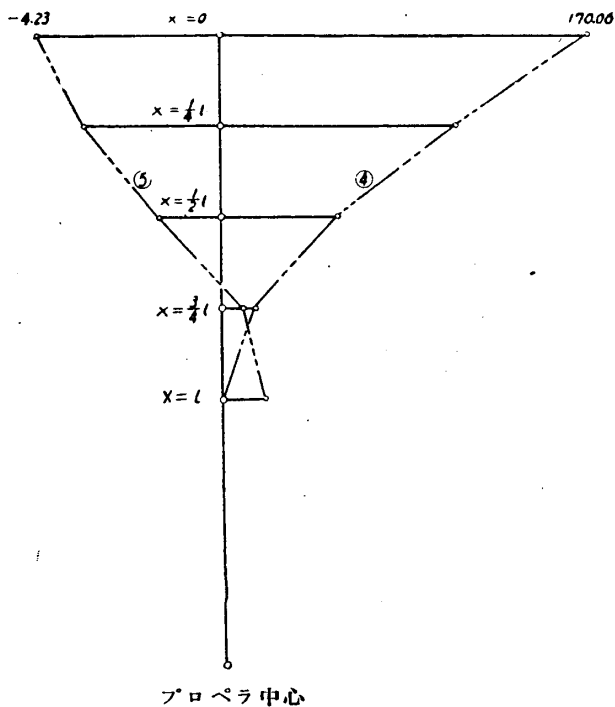
計算結果よりプロペラ翼を弾性體と考へた場合にも、曲軸の振り振動に基因するものが現れその振動数はプロペラを剛體と見做せる計算結果と略一致し、その數値はプロペラ翼の断面積を上述の様に二様に考へても殆んど變らない。



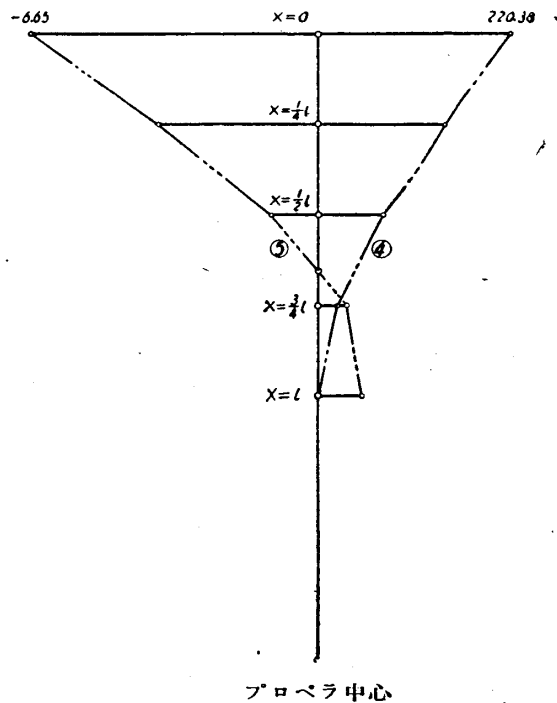
第21圖 プロペラの翼断面積及びその慣性能率が一次の
変化をなす場合の曲軸の振り振幅 ($\alpha = 0^\circ$)
 $Jh_{x=l} = 1550.89 \text{ cm}^4$



第22圖 プロペラ翼断面積及びその慣性能率が一
次の変化をする場合の曲軸の振り振幅
 $Jh_{x=l} = 1550.89 \text{ cm}^4$ ($\alpha = 90^\circ$)



第23圖 プロペラ翼断面積及びその慣性能率が一次の變化
をする場合のプロペラ翼の曲げ振幅 ($\alpha = 0^\circ$)
 $Jh_{x=l} = 1550.89 \text{ cm}^4$



第24圖 プロペラ翼断面積及びその慣性能率が一次の變化
をする場合のプロペラ翼の曲げ振幅 ($\alpha = 90^\circ$)
 $Jh_{x=l} = 1550.89 \text{ cm}^4$

プロペラ翼の曲げ振動に起因するものはその断面の二つの主軸方向に現はれこれに基因する振動数はプロペラ翼断面の形に依つて變化し、断面積を一様と假定した場合の方が低い振動数として現はれることは勿論で、長さに添つて一次の變化をするものと假定した場合は一般に前者の約 1.4 倍に當る。

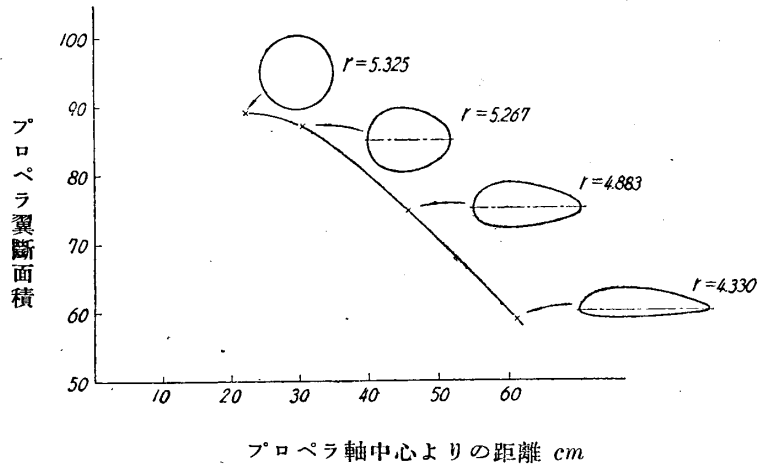
かくして曲軸の振り振動のみを考へた場合に説明されない固有振動数のあることが明に見出され、それ等の固有振動数の値はプロペラ翼の断面積及びその慣性能率を實際の場合に近けた理論的數式の樹立に依り、更に實際の値に近け得ることと考へる。

8. 附 録

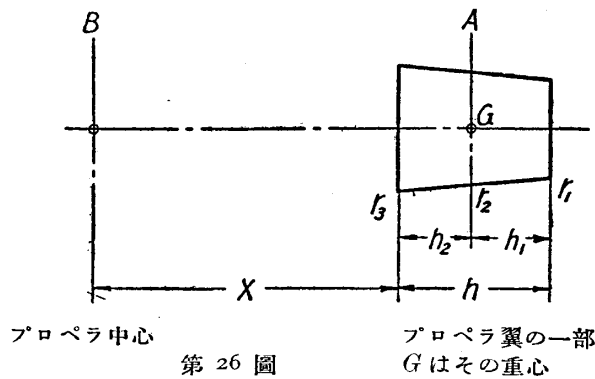
(1) プロペラ翼の根元の部分の極慣性能率の計算

プロペラ翼の根元の部分をプロペラボスと一體と假定し、それより先の部分がプロペラ翼として曲げ振動を惹起すものと假定する場合、ボスと一體と見做す部分の極慣性能率を計算しなければならない。

プロペラ翼の根元は一般に圓形の断面を有し、それより漸次プロペラ翼の固有の断面の形に近く、今このボスと一體と見做す部分の各断面をその断面積に等しい圓に置き換へ（第25圖は上述の實プロペラのボスと一體と假定する部分の断面の形及び之を圓に置き換へた場合のその半徑を表す）、之を數個の截頭圓錐と見做して、これ等の部分のプロペラ中心に對する極慣性能率を計算する。



第25圖 プロペラ翼の根元に於ける断面積の形及び等位圓の半徑



第 26 圖

今第26圖に示す h をプロペラ翼の一部と考へ r_1 及び r_3 をその兩端の等値断面の圓の半徑と r_2 を重心を通經する圓の半徑とすれば

$$r_2 = \frac{3}{4} \frac{r_3^4 - r_1^4}{r_3^3 - r_1^3}$$

となり、 h を全體の高さ、 h_1 及び h_2 を重心と兩底面との高さとするれば

$$h_1 = \frac{1}{4} \frac{3r_3^2 + 2r_3r_1 + r_1^2}{r_3^2 + r_3r_1 + r_1^2} \quad h_2 = \frac{1}{4} \frac{r_3^2 + 2r_3r_1 + 3r_1^2}{r_3^2 + r_3r_1 + r_1^2}$$

となる。而して重心 G を通る AA 軸に對する h_1 及び h_2 の部分の慣性能率を I_1 及び I_2 とすれば

$$I_1 = \frac{\gamma}{g} \left\{ \frac{1}{20} \pi h_1 \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2 - r_1} + \frac{1}{30} \pi h_1^3 \left[r_2^2 + 3r_2r_1 + 6r_1^2 \right] \right\}$$

$$I_2 = \frac{\gamma}{g} \left\{ \frac{1}{20} \pi h_2 \frac{r_3^5 - r_2^5}{r_3 - r_2} + \frac{1}{30} \pi h_2^3 \left[6r_3^2 + r_3r_2 + r_2^2 \right] \right\}$$

として求められる。但し γ は單位體積の重量を表す。

次にこの截頭圓錐の全重量が重心 G を通る AA 軸に集中されたものとしてのプロペラの中心軸 BB に對する慣性能率を I_3 とすれば

$$I_3 = \frac{\gamma}{g} (x + h_2)^2 \frac{1}{3} \pi h \left[r_3^2 + r_3r_1 + r_1^2 \right]$$

となりこの截頭圓錐の容積 V は

$$V = \frac{1}{3} \pi h \left[r_3^2 + r_3r_1 + r_1^2 \right]$$

である。

かくして截頭圓錐のプロペラの中心 BB に對する極慣性能率 θ_n は上述の三つの慣性能率の和

$$\theta_n = I_1 + I_2 + I_3$$

として計算される。

故にプロペラ翼の根元のボスと一體と假定する部分の全體の極慣性能率 θ_n は S をプロペラ翼の枚數として

$$\theta_n = S \Sigma \theta_n$$

となる。

上述のデュラルミン、調整ピッチ、三翼プロペラの根元のボスと一體と假定する部分の圖(第25圖参照)より之を三つの截頭圓錐と置き換へて之を

$$\theta_n = 52.382 \text{ kg cm sec}^2$$

と求めた。その内譯は

プロペラ軸の部分	0.075
ボス金具の部分	4.300

プロペラ翼根元の圓柱の部分	3.048
プロペラ翼根元の截頭圓錐の部分	44.959
	$\theta_n = 52.382$

である。

このプロペラ翼の根元の部分を截頭圓錐とに計算することは一見甚だ不正確の如く見えるがプロペラ翼の断面がその固有の形に近づくにつれて I_1+I_2 に比較し I_3 の値が増大し、 I_1+I_2 は $I_1+I_2+I_3$ の 1%以下となり、 I_1 及び I_2 の上述の近似計算に依る誤差は非常に小さいものであるから、實用計算として上述のものは可なり正確なものと考へてよい。

(2) 發動機函數 $F_m(k')$ 及プロペラ函數 $F_s(k')$ の數値計算結果の表

(1) 發動機函數 $F_m(k')$ ($k' = .116955\sqrt{\omega}$)

$$F_m(k') = - \frac{304.00}{(0.116955\sqrt{\omega})^3} \frac{\theta_n}{\theta_n \theta_n + C_6 \frac{\theta_6 - \theta_n}{\omega_2}}$$

ω	k'	$F_m(k')$	ω	k'	$F_m(k')$
100	1.16955	-3.22856	899.666	3.508	3.468950
200	1.65400	-1.13610	900	3.50865	4.28445
400	2.33910	-.39407	901	3.51060	∞
479.118	2.56	-.292561	905.832	3.52	-1.41527
536.513	2.709	-.244411	919.263	3.546	-.442835
600	2.86480	-.20067	921.338	3.55	-.408571
675.631	3.04	-.158152	931.749	3.57	-.306344
700	3.09434	-.14544	950	3.60480	-.23071
800	3.30799	-.08480	1000	3.69844	-.16145
856	3.42180	0	1050	3.78977	-.13411
860.104	3.43	.00689	1080	3.84354	-.12357
861.107	3.432	.0183638	1100	3.87895	-.11782
862.111	3.434	.022325	1150	3.96613	-.10608
863.115	3.436	.026493	1200	4.05144	-.09696
864.623	3.439	.033152	1300	4.21687	-.08311
865.126	3.44	.0355111	1500	4.52964	-.06480
872.687	3.455	.080061	1750	4.89258	-.05022
875.215	3.46	.100485	1776.87	4.93	-.049097
877.746	3.465	.125220	2000	5.23039	-.04045
880.281	3.47	.155829	2200	5.48568	-.03444
895.569	3.5	.904114	2243.79	5.54	-.0332122
898.641	3.506	2.08769	2296.75	5.605	-.031752
898.949	3.5066	2.37542	2366.94	5.69	-.029701
899.154	3.507	2.61337	2400	5.72960	-.02861

ω	k'	$F_m(k')$	ω	k'	$F_m(k')$
2429.75	5.765	-.027386	2584.71	5.946	-.0358504
2530.23	5.883	-.00278606	2590	5.95207	-.03478
2531.09	5.884	-.000974	2600	5.96356	-.03332
2531.52	5.8845	0	2610	5.97502	-.03226
2531.95	5.885	.001109	2650	6.02063	-.02974
2532.81	5.886	.003519	2700	6.07716	-.02797
2533.67	5.887	.00635780	2800	6.18867	-.02573
2543	5.89783	∞	3000	6.40589	-.02270
2544.01	5.899	-.605142	3300	6.71855	-.01940
2544.10	5.8991	-.520977	3366.59	6.786	-.018835
2544.62	5.8997	-.311811	3420.38	6.840	-.018366
2544.79	5.8999	-.276611	3500	6.91915	-.01762
2544.88	5.9	-.261574	3700	7.11409	-.01605
2548.24	5.9039	-.0987288	4000	7.39689	-.01340
2556.97	5.914	-.053157	4120	7.50701	-.00949
2560	5.91750	-.04890	4150	7.53430	0
2579.50	5.94	-.037124			

(2) プロペラ翼断面積を一樣と假定した場合のプロペラ函数 $F_s(k')$

$$F_s(k') = \frac{1}{\cos^2 \alpha \left[G(k') + \frac{J_{x=l}^h}{J_{x=l}^l} \frac{i'}{k'} \tan^2 \alpha H(i') \right]}$$

k'	$G(k')$	$H(i')$	$F_s(k')$ $\alpha=0^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=60^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=70^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=90^\circ$
1	.75301	.05688	1.3280	1.40435	1.41881	1.43179
1.5	3.86385	.22891	.2587	.362470	.390188	.418321
1.7	10.03900	.33674	.09961	.194281	.233668	.284367
1.8	25.29318	.40267	.03954	.105517	.149881	.237807
1.85	78.30203	.43900	.01277	.043452	.075713	.218127
1.9	-81.51982	.47774	-.01227	-.060103	-.194910	.200440
1.95	-27.8873	.51902	-.03586	-.344027	.656208	.184498
2	-17.17468	.56301	-.05823	8.62441	.314199	.170083
2.5	-3.85480	1.19701	-.2594	.118884	.094453	.079998
3	-1.60756	2.47335	-.6218	.052715	.044219	.038716
3.5	.34810	5.87493	2.8727	.021692	.018445	.016299
3.506	.37548	—	2.6618	—	—	—
4	3.72430	4.300017	.2685	.002961	.002519	.002227
4.5	20.98158	-12.53001	.04766	-.010765	-.008842	-.007642
4.6	45.59053	-9.79740	.02193	-.015305	-.011763	-.009774
4.8	-43.78271	-7.22822	-.02284	-.014802	-.013932	-.013248
4.9	-23.14060	-6.40533	-.04322	-.017872	-.016188	-.014950
5	-15.88533	-5.75249	-.06295	-.020397	-.018213	-.016646
5.5	-5.89930	-3.75255	-.1695	-.032398	-.028333	-.025519

6 — 2.54438 — 2.60116 — .3931 — .047599 — .041179 — .036814

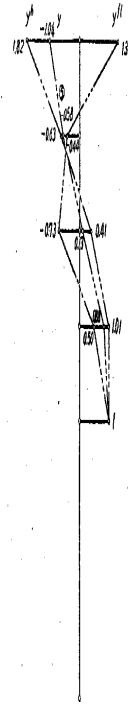
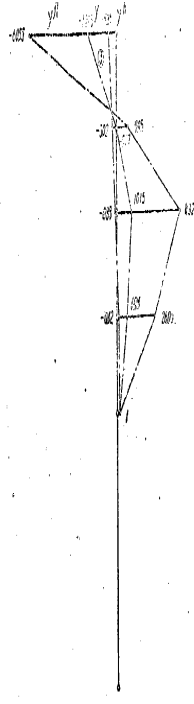
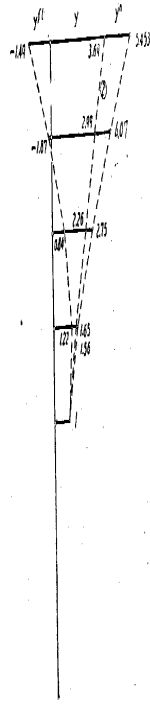
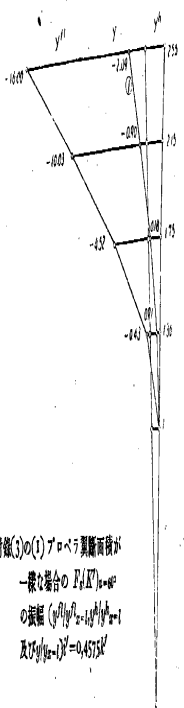
(3) プロペラ翼断面積及其の慣性能率が長さ上添つて一次の變化をなす場合のプロペラ函數 $F_s(k')$ ($i' = 0.4575 k'$)

k'	$G(k')$	$H(i')$	$F_s(k')$ $\alpha=0^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=60^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=70^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha=90^\circ$
1	.207745	.019571	4.8136	4.87279	4.88289	4.89285
1.1721	.339752	—	2.9433	—	—	—
2	2.274411	.158441	.4398	.55262	.57900	.60438
2.4	7.295736	.277177	.1371	.25032	.29331	.34548
2.562	19.11715	.339752	.05231	.13440	.18624	.28184
2.7	—91.310394	.400822	— .01095	— .05079	— .14316	.23890
2.71	—65.006280	.405465	— .01538	— .076477	— .25871	—
2.75	—30.613153	.424769	—	— .23114	.297691	—
2.77	—24.281503	.434728	— .04118	— .37517	.85586	—
2.9	—10.626993	—	— .09410	—	—	—
2.95	— 8.583691	—	— .1165	—	—	—
3	— 7.313798	.561957	— .1367	.38866	.23113	.17040
3.25	— 4.027386	—	— .2483	—	—	—
3.5	— 2.497277	.945269	— .4004	.14751	.11870	.10130
3.6	— 2.042523	1.044667	— .4896	.13035	.10645	.091663
4	— .484081	1.554931	— 2.0658	.08294	.07002	.061584
4.5	1.731186	—	.5776	—	—	—
5	6.239114	4.876294	.1603	.02516	.02188	.019637
5.6	519.140643	19.12316	.001926	.003577	.004218	.005213
5.606	—1788.8893	19.50648	— .000559	— .003396	— .034034	.004909
5.62	—537.72109	20.85388	— .001860	.03460	.007728	.004592
5.7	—54.454621	32.61356	— .01836	.004135	.003394	.002936
5.8	—30.058459	81.80442	— .03327	.001579	.001332	.001170
5.9	—20.18938	—	— .04953	—	—	—
6	—15.348026	—32.76387	— .06515	— .003839	— .002290	— .002932
6.5	— 7.16886	— 7.946054	— .13947	— .015618	— .013493	— .012051
7	— 4.81800	— 4.43738	— .20755	— .027809	— .02410	— .021580
7.5	— 5.45811	—	— .18321	—	—	—
7.7	—10.1807	—	— .09823	—	—	—
7.8	—23.5701	—	— .04243	—	—	—
8	12.5585	— 1.78971	.07962	— .09193	.06652	— .05350
9	4.77458	— .029567	.20944	1.03942	.349806	— 3.23871
10	5.48744	—	.18223	—	—	—

(4) プロペラ翼斷面積及其の慣性能率が長さに添つて一次の變化をなす場合のプロペラ函數 $F_s(k')$ ($i' = 0.4525k'$)

k'	$G(k')$	$H(i')$	$F_s(k')$ $\alpha = 60^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha = 70^\circ$	$F_s(k')$ $\alpha = 90^\circ$
5	6.23911	4.50122	.026388	.022921	.020584
5.05526	—	4.87629	—	—	.019000
5.6	519.14064	14.95868	.003938	.004919	.006194
5.62	-537.72109	16.22673	-.32491	.010899	.005710
5.66189	—	19.12316	—	—	.004847
5.66697	—	19.50649	—	—	.004750
5.68211	—	20.85388	—	—	.004443
5.7	-54.45462	22.66690	.005887	.004770	.004088
5.76311	—	32.61356	—	—	.002841
5.8	-30.05846	43.71360	.002887	.002421	.002120
5.86410	—	81.80442	—	—	.001132
5.913	—	-4183.8640	—	—	-.00002214
5.922	—	-487.39780	—	—	-.0001901
6	-15.34803	-58.04939	-.002111	-.001802	-.001596
6.06631	—	-32.76387	—	—	-.002828
6.5	-7.16886	-8.89748	-.013547	-.011677	-.010413
6.57195	—	-7.94603	—	—	-.011660
7	-4.81800	-4.78138	-.025027	-.021677	-.019373
7.07736	—	-4.43738	—	—	-.020880
8.08842	—	-1.78971	—	—	-.051769
9.09947	—	-.029567	—	—	-3.13365

(3) プロペラ翼の曲げ振動の振幅の附圖



附録(3)の(1) プロペラ翼断面が
一般の場合の $F_1/K_1 = 0.0$
の振幅 ($\psi^H/\psi^L = 1$, $\psi^H/\psi^R = 1$
及 $\psi^H/\psi^B = 1$) $V=0.4575V'$

プロペラ中心

第11(a)圖 $V=1,965$

プロペラ中心

第11(b)圖 $V=3,435$

プロペラ中心

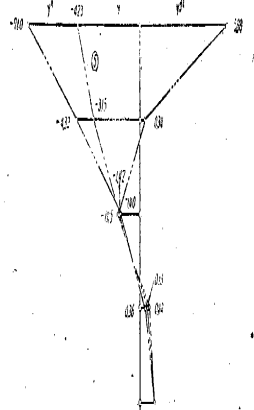
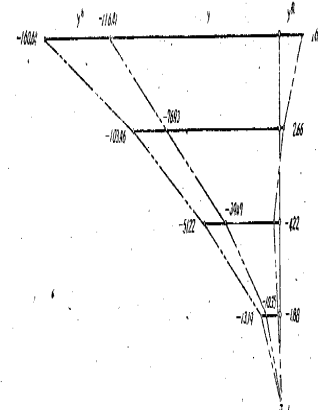
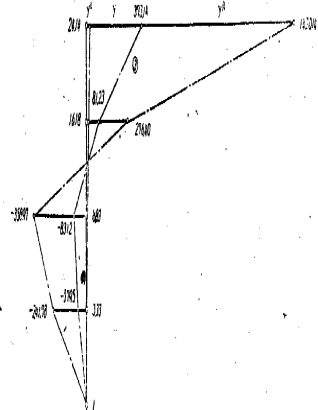
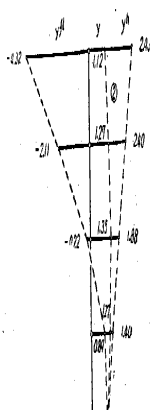
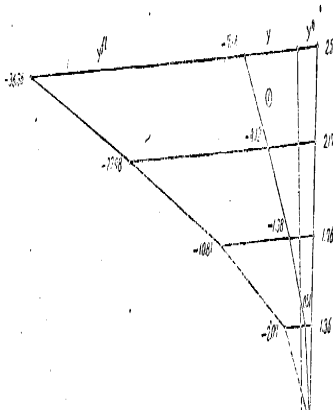
第11(c)圖 $V=4,924$

プロペラ中心

第11(d)圖 $V=5,540$

プロペラ中心

第11(e)圖 $V=5,916$



附録(3)の(2) プロペラ翼断面及びその慣性モーメントが一次の變化
とする場合の $F_1/K_1 = 0.0$ の振幅 ($\psi^H/\psi^L = 1$, $\psi^H/\psi^R = 1$ 及
 $\psi^H/\psi^B = 1$) $V=0.4575V'$

プロペラ中心

第18(a)圖 $V=2,750$

プロペラ中心

第18(b)圖 $V=3,465$

プロペラ中心

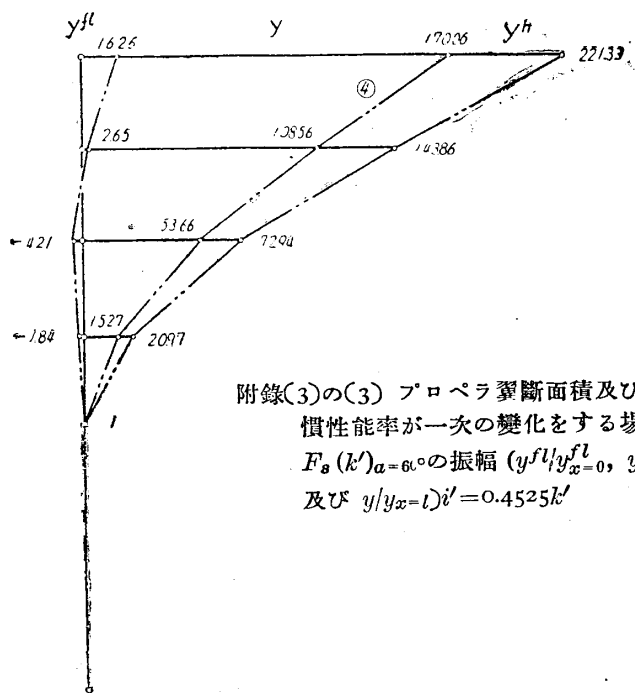
第18(c)圖 $V=5,605$

プロペラ中心

第18(d)圖 $V=5,884$

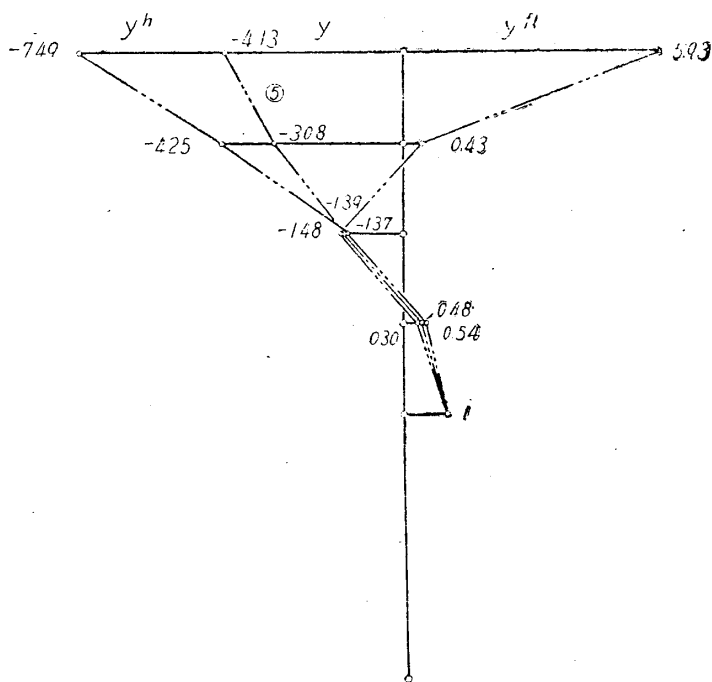
プロペラ中心

第18(e)圖 $V=6,700$



附録(3)の(3) プロペラ翼断面積及びその慣性能率が一次の變化をする場合の $F_0(k')_{\alpha=6.0^\circ}$ の振幅 ($y^{fl}/y_{x=0}^{fl}$, $y^h/h_{x=l}$ 及び $y/y_{x=l}$) $\dot{v}'=0.4525k'$

プロペラ中心
第3(a)圖 $k'=5.8849$



プロペラ中心

第23(b)圖 $k'=6.760$