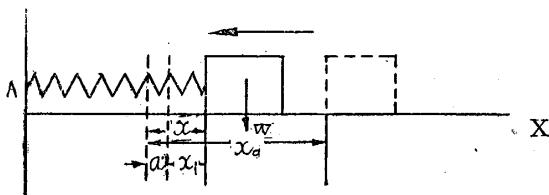


Coulomb の減衰及び粘性減衰を 伴つた強制振動に就いて

研究 生 林 五 郎

1. 緒 論

一つの自由度を有する系の不變減衰を伴つた自由振動に就いては良く知られて居る。今その一例として第一圖の如き場合を考へる。固定點 A にばねに依つて取り付けられた物體 W が乾いた水平面上を滑りながら振動するものとする。運動の方程式を作る爲めに物體を右方の極限位置に持つて行き然る後に放したものとする。然る時はばねの引張力の作用に依つて物體は圖示する如く左方に向つて運動を始める。ばね定數を k としばねの伸びが 0 である



第 1 圖

位置より測つた物體の變位を x で表はし又 x 軸の正の方向を圖に示す様に取ればばねの力は $-kx$ に依つて表はされ乾いた面の場合には摩擦力は不變である。而してそれは運動とは反對の方向即ちこの場合には x 軸の正の方向に作用する。この摩擦力を F を以て表はせば運動力程式は次の様になる。

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + kx - F = 0.$$

運動方向が上の場合と反対なる時には明らかに運動方程式は

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + kx + F = 0.$$

さてこの方程式より分る如く不變摩擦力 F の方向の變化を處置するために振動の各半サイクルを別々に考へる必要がある。この事實が我々の場合の強制振動の取り扱ひを困難ならしめたのである。強制振動の場合の厳密な解を始めて與へたのは J. P. Den Hartog である。

今 Coulomb の減衰のみを伴ふ強制振動の方程式を書けば前述せる事に依つて

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + kx \pm F = P \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

である。但し外力を $P \cos(\omega t + \varphi)$ としパラメター φ は後後に決定するものである。又ここに (+) なる記號が取られるのは運動が右方に向ふ場合 ($x > 0$) であり (-) なる記號は運

1) S. Timoschenko, Vibration Problems in Engineering. (1937.) 第1章第11節参照

2) S. Timoschenko, 前掲の著書第1章第12節参照

3) J. P. Den Hartog, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Vol. 53, p. 107 (1931) 及び Phil. Mag., Vol. 9, 801, 1930.

動が左方に向ふ場合 ($x < 0$) である。全く同様にして Coulomb の減衰及び粘性減衰を伴つた強制振動の方程式は

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + cx + kx \pm F = P \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

である。符號 (±) の意味及びパラメター φ は前と同様である。

本論文の目的はこれ等の微分方程式を厳密に解いて解を求め更に強制振動の振幅に就いて考へる事である。微分方程式 (1) 及び (2) を解くに當つて理論の厳密性のために Laplace 変換及び Fourier 変換の理論を適用するがこれは (1), (2) の如き二階線形常微分方程式の場合には鶴を割くに牛力を以てするの感じがないではないか近頃これらの理論の應用範囲が次第に擴まりつつあり特に偏微分方程式の解を求めるのに重要な役割を演するを以て應用の一例として使つて見るのである。

2. Coulomb の減衰を伴つた強制振動

前節に述べたやうにこの場合の運動方程式は (1) に依つて與へられる。今第一圖の如き場合即ち運動が左方に向ふ場合 ($x < 0$) を考へる。従つて外力の週期は $\frac{2\pi}{\omega}$ であるからその半サイクル即ち $0 < \omega t < \pi$ なる範囲で考へるのである。故に微分方程式は

$$\frac{W}{g} \ddot{x} + kx - F = P \cos(\omega t + \varphi).$$

今

$$\frac{gk}{W} = p^2, \quad \frac{F}{k} = a, \quad \frac{P}{k} = b$$

と置けば

$$\ddot{x} + p^2 x - p^2 a = b p^2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

振動が途中で止まらず周期的になる様に次のやうな境界條件を置く。

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \quad \text{に對して} \quad x(t)=x(0), \quad \dot{x}(t)=0 \\ t=\frac{\pi}{\omega} \quad \text{に對して} \quad x(t)=-x(0), \quad \dot{x}(t)=0. \end{array} \right\} \quad (4)$$

(4) なる條件の下に (3) を解くのであるが二つの積分定數及び $\varphi, x(0)$ にある値を與へる事によつて (4) の四つの條件は満足される。

微分方程式 (3) を解くのに Laplace 変換の理論を用ひて見やう。従つて $x(t), \dot{x}(t)$ 及び $\ddot{x}(t)$ の Laplace transform は存在するものとする。

さて $x(t)$ の Laplace transform を $X(s)$ とする。即ち

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt. \quad (5)$$

これに二回部分積分を施して (4) を用ひれば

$$X(s) = \frac{x(0)}{s} + \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-st} \ddot{x}(t) dt. \quad (1)$$

故に

$$\int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = s^2 X(s) - sx(0). \quad (6)$$

(3) の両邊に Laplace transformation を施して (5) 及び (6) を用ひれば

$$\begin{aligned} (s^2 + p^2) X(s) - sx(0) - p^2 a \frac{1}{s} &= bp^2 \int_0^\infty e^{-st} \cos(\omega t + \varphi) dt \\ &= bp^2 \left\{ \cos \varphi \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \sin \varphi \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\}. \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} X(s) &= bp^2 \frac{s}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} \cos \varphi - bp^2 \frac{\omega}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} \sin \varphi \\ &\quad + x(0) \frac{s}{s^2 + p^2} + p^2 a \frac{1}{s(s^2 + p^2)}. \end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned} X(s) &= bp^2 \frac{\cos \varphi}{p^2 - \omega^2} \left(\frac{s}{(s^2 + \omega^2)} - \frac{s}{(s^2 + p^2)} \right) - bp^2 \frac{\sin \varphi}{p^2 - \omega^2} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &\quad + bp \frac{\omega \sin \varphi}{p^2 - \omega^2} \frac{p}{s^2 + p^2} + x(0) \frac{s}{s^2 + p^2} + a \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + p^2} \right). \end{aligned}$$

故に Laplace inversion formula 依つて

$$\begin{aligned} x(t) &= bp^2 \frac{\cos \varphi}{p^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos pt) - bp^2 \frac{\sin \varphi}{p^2 - \omega^2} \sin \omega t \\ &\quad + bp \frac{\omega \sin \varphi}{p^2 - \omega^2} \sin pt + x(0) \cos pt + a(1 - \cos pt) \\ &= x(0) \cos pt + a(1 - \cos pt) + b \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} [\cos \varphi (\cos \omega t - \cos pt) \\ &\quad + \sin \varphi (\frac{\omega}{p} \sin pt - \sin \omega t)]. \end{aligned}$$

ここに於いて

$$\beta = \frac{p}{\omega}, \quad V = \frac{p^2}{p^2 - \omega^2} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \quad (7)$$

と置けば

-
- 1) $x(t)$ の Laplace transform が存在するといふ條件より $\left[\frac{e^{-st}}{-s} x(t) \right]_{t=\infty} = 0$ となる。 $\dot{x}(t)$ Laplace transform のが存在するといふ條件より $\left[\frac{e^{-st}}{-s} \dot{x}(t) \right]_{t=\infty} = 0$ となる。又條件 (4) によつて $\dot{x}(0) = 0$ であるからこの式が得られる。
 - 2) G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation (1937) 第6章第5節 及び附錄参照

$$\begin{aligned} x(t) = & x(0)\cos pt + a(1 - \cos pt) + bV[\cos\varphi(\cos\omega t - \cos pt) \\ & + \sin\varphi(-\frac{1}{\beta}\sin pt - \sin\omega t)]. \end{aligned} \quad (8)$$

故に

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -px(0)\sin pt + ap\sin pt + bV[\cos\varphi(-\omega\sin\omega t + p\sin pt) \\ & + \sin\varphi(-\frac{1}{\beta}p\cos pt - \omega\cos\omega t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (8) \text{ 及び } (9) \text{ に於いて } t = \frac{\pi}{\omega} \text{ を置き (4) を用ひれば} \\ -x(0)(1 + \cos\beta\pi) = & a(1 - \cos\beta\pi) + bV[\cos\varphi(-1 - \cos\beta\pi) \\ & + \frac{1}{\beta}\sin\varphi\sin\beta\pi], \end{aligned} \quad (10)$$

$$x(0)\sin\beta\pi = a\sin\beta\pi + bV[\cos\varphi\sin\beta\pi + \frac{1}{\beta}\sin\varphi(1 + \cos\beta\pi)]. \quad (11)$$

(11) の兩邊を $\sin\beta\pi$ で割り

$$\frac{1}{\beta} - \frac{\cos\beta\pi + 1}{\sin\beta\pi} = \frac{1}{U} \quad (12)$$

と置けば (11) は

$$x(0) = a + bV(\cos\varphi + \frac{\sin\varphi}{U}) \quad (13)$$

となる。又 (10) の兩邊を $1 + \cos\beta\pi$ で割り U の式を用ひれば

$$-x(0) = a - \frac{U^2}{\beta^2} + bV(-\cos\varphi + \frac{U}{\beta^2}\sin\varphi). \quad (14)$$

(13) と (14) を加へて

$$(1 + \frac{U^2}{\beta^2})(a + \frac{bV}{U}\sin\varphi) = 0.$$

従つて

$$\sin\varphi = -\frac{a}{b} - \frac{U}{V}.$$

故に

$$\cos\varphi = \frac{1}{bV}\sqrt{b^2V^2 - a^2U^2}$$

従つて (13) より

$$\begin{aligned} x(0) = & a + bV(\frac{1}{bV}\sqrt{b^2V^2 - a^2U^2} - \frac{a}{b} - \frac{1}{V}) \\ = & b\sqrt{V^2 - \frac{a^2}{b^2}U^2}. \end{aligned}$$

然るに

$$\frac{a}{b} = \frac{F}{k} / \frac{P}{k} = F/P.$$

故に

$$x(0) = b \sqrt{V^2 - \left(\frac{F}{P}\right)^2 U^2}. \quad (15)$$

以上の結果を総合すると次の如くなる。

$$\ddot{x} + p^2 x - p^2 a = bp^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad (\dot{x} < 0)$$

に於いて途中で振動が止まらぬ條件として

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0; & x(t) &= x(0), & \dot{x}(t) &= 0, \\ t &= \frac{\pi}{\omega}; & x(t) &= -x(0), & \dot{x}(t) &= 0, \end{aligned}$$

なる如き強制振動があつたとする。然る時は $0 < \omega t < \pi$ に對して

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cos pt + a(1 - \cos pt) + bV[\cos \varphi (\cos \omega t - \cos pt) \\ &\quad + \sin \varphi (\frac{1}{\beta} \sin pt - \sin \omega t)], \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} x(0) &= b \sqrt{V^2 - \left(\frac{F}{P}\right)^2 U^2}, & V &= \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}, & U &= \frac{\beta \sin \beta \pi}{1 + \cos \beta \pi}, \\ \cos \varphi &= x(0)/bV, & \sin \varphi &= -\frac{a}{b} - \frac{U}{V}, & \beta &= \frac{p}{\omega} \end{aligned}$$

である。

以上の解は $0 < \omega t < \pi$ に於いて $\dot{x} < 0$ なる條件の下に求めたものである。 $\dot{x} < 0$ なる條件は次の様にも書ける。(9) より

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -px(0)\sin pt + ap\sin pt + bV[\cos \varphi (-\omega \sin \omega t + p \sin pt) \\ &\quad + \sin \varphi (\frac{1}{\beta} p \cos pt - \omega \cos \omega t)] < 0 \end{aligned}$$

然るに

$$\cos \varphi = x(0)/bV, \quad \sin \varphi = -\frac{a}{b} - \frac{U}{V}$$

であるからこれ等を代入して兩邊を割れば

$$\begin{aligned} x(0)\sin pt &> a\sin pt + x(0)(-\frac{1}{\beta} \sin \omega t + \sin pt) \\ &\quad - aU(\frac{1}{\beta} \cos pt - \frac{1}{\beta} \beta \cos \omega t). \end{aligned}$$

β を兩邊に乘じて

$$x(0)\sin \omega t > \beta a \sin pt + aU(\cos \omega t - \cos pt).$$

$0 < \omega t < \pi$ であるから $\sin \omega t > 0$ 。故に上式の兩邊を $a \sin \omega t$ で割つて

$$\frac{x(0)}{a} > \frac{\beta \sin pt + U(\cos \omega t - \cos pt)}{\sin \omega t}$$

或ひは

$$\frac{x(0)}{a} > \beta^2 \left[\frac{\beta \sin pt + U(\cos \omega t - \cos pt)}{\beta^2 \sin \omega t} \right]. \quad (16)$$

今上式の [] の最大値を S とすれば

$$\frac{x(0)}{b} > \beta^2 S. \quad (17)$$

然るに (15) より

$$\frac{x(0)}{b} = \sqrt{V^2 - \frac{a^2}{b^2} U^2}$$

であるから

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 = \left\{ V^2 - \left(\frac{x(0)}{b} \right)^2 \right\} / U^2.$$

故に (17) より

$$\frac{x(0)}{b} > \frac{a}{b} \beta^2 S$$

であるからこれに代入して計算すれば

$$\frac{x(0)}{b} > \sqrt{\frac{V^2}{1 + (U/S\beta^2)^2}}. \quad (18)$$

(17) 及び (18) より

$$\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{V^2}{(S\beta^2)^2 + U^2}}. \quad (19)$$

(15) の式より種々なる $\frac{1}{\beta} = \frac{\omega}{p}$ に對して $\frac{x(0)}{b}$ の値を計算する事が出来る。但し $\frac{F}{P} = \frac{a}{b}$ は最初に與へられるものとする。斯くて Hartog¹⁾ は前掲の論文に於いて $a/b = (0.8, 0.7, 0.6, 0.5, 0)$ に對して (15) の graph 畫いて居る。又 $\dot{x} < 0$ なる條件は (18) で表はされるからこれを圖示する事によつてこの曲線より下に於いては途中で止まるやうな運動が起る事が分る。Hartog はこれを點線を以て表はして居る。圖より $a/b < \pi/4$ なる摩擦に對しては resonance の振幅は無限大となる事が分る。次ぎに (19) を $\beta = \frac{p}{\omega}$ に對して圖示する時はこの曲線より下の摩擦に對して解が正しい事になり振動は途中で止まらぬ事になる。摩擦が大となつてこの曲線より上にある時は振動は途中で止まる。精しい事は原論文に譲る事にする。(第二圖を參照せよ。)

又

$$\sin \varphi = -\frac{a}{b} \frac{U}{V}, \cos \varphi = x(0)/bV$$

より種々なる a/b に對して φ と $\beta = p/\omega$ との關係を圖示する事が出来る。

1) 前掲の論文以外に尚 Hartag の論文 Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Vol. 53, p. 107 (1931) 及び Proc. 3-Int. Congr. f. Appl. Mech. (Stockholm; 1930), 181-189 を參照,

3. 粘性減衰を伴つた一般的な強制振動の Fourier transform による解¹⁾

粘性減衰を伴つた一般的な強制振動の方程式は次の様に書ける。

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \phi(t).$$

今これを $t=0$ に於いて $x(t)=x(0), \dot{x}(t)=\dot{x}(0)$ なる条件の下に解く事を考へよう。Fourier transform の理論を用ひるのであるから考へる函数の Fourier transform は存在するものと假定する。 $\phi(t)$ 及び $x(t)$ の Fourier transform を夫々 $\Phi(w)$ 及び $X(w)$ とする。

$$X(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x(t) e^{iwt} dt. \quad (20)$$

これに部分積分を施して

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} X(w) &= \left[\frac{e^{iwt}}{iw} x(t) \right]_0^\infty - \frac{1}{iw} \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{iwt} dt \\ &= -\frac{1}{iw} x(0) - \frac{1}{iw} \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{iwt} dt. \end{aligned}$$

即ち

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \dot{x}(t) e^{iwt} dt = -iwX(w) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x(0). \quad (21)$$

同様に (20) に部分積分を二回施して

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \ddot{x}(t) e^{iwt} dt = -w^2 X(w) + \frac{iw}{\sqrt{2\pi}} x(0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \dot{x}(0). \quad (22)$$

故に與へられた微分方程式の兩邊に Fourier transformation を施して (20), (21), (22) を代入すれば

$$\Phi(w) = (p^2 - 2inw - w^2)X(w) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{(iw - 2n)x(0) - \dot{x}(0)\}.$$

故に

$$X(w) = \frac{\Phi(w)}{p^2 - 2inw - w^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(iw - 2n)x(0) - \dot{x}(0)}{p^2 - 2inw - w^2}.$$

従つて Fourier inversion formula³⁾ に依つて

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{\Phi(w)}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{(iw - 2n)x(0) - \dot{x}(0)}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw \\ &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

とおく。

- 1) この場合の解を求める方法は他にも種々あるがここでは緒論に述べたやうに Fourier transform を使って見ただけである。
- 2) $x(t)$ の Fourier transform が存在するといふ假定より $\left[\frac{e^{iwt}}{iw} x(t) \right]_{t=\infty} = 0$ である。
- 3) E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integral, (1937) 参照。特に Fourier Integral の微分方程式への應用の章を参照せよ。(第10章)

さて

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{\Phi(w)}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \phi(x) dx \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-iw(t-x)}}{p^2 - 2inw - w^2} dw. \end{aligned}$$

最後の式の第二の積分は

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-iw(t-x)}}{p^2 - 2inw - w^2} dw = 2\pi e^{-t(t-x)} \frac{1}{p_1} \sin p_1(t-x)$$

である。ここに $p_1^2 = p^2 - n^2$ である。故に

$$x_1(t) = \frac{1}{p_1} \int_0^t e^{-n(t-x)} \sin p_1(t-x) \phi(x) dx. \quad (23)$$

次ぎに

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{(iw-2n)x(0)-\dot{x}(0)}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw \\ &= -\frac{x(0)}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{iw-2n}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw \\ &\quad + \frac{\dot{x}(0)}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} \frac{e^{-iwt}}{p^2 - 2inw - w^2} dw. \end{aligned}$$

然るに

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{iw-2n}{p^2 - 2inw - w^2} e^{-iwt} dw = -2\pi e^{-nt} (\cos p_1 t + \frac{n}{p_1} \sin p_1 t).$$

又

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-iwt}}{p^2 - w^2 - 2inw} dw = 2\pi e^{-nt} \frac{1}{p_1} \sin p_1 t.$$

故に

$$x_2(t) = e^{-nt} \left\{ x(0) \cos p_1 t + \frac{\dot{x}(0) + nx(0)}{p_1} \sin p_1 t \right\} \quad (24)$$

を得る。従つて (23) 及び (24) を加へて

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p_1} \int_0^t e^{-n(t-x)} \sin p_1(t-x) \phi(x) dx \\ &\quad + e^{-nt} \left\{ x(0) \cos p_1 t + \frac{\dot{x}(0) + nx(0)}{p_1} \sin p_1 t \right\}. \end{aligned}$$

ここに $p_1^2 = p^2 - n^2$ である。

4. Coulomb の減衰及び粘性減衰を伴つた強制振動

この場合の微分方程式は

$$\frac{W}{g} x + c\dot{x} + kx \pm F = p \cos(wt + \varphi),$$

1) 積分は absolutely convergent であるから。

2) 第4節にこの公式を應用するがその時には境界條件で $\dot{x}(0)=0$ である。

今 $\dot{x} < 0$ なる場合 $0 < \omega t < \pi$ の間だけを考へれば負号を取ればよい。前と同様に

$$\frac{gk}{W} = p^2, \quad \frac{cg}{W} = 2n, \quad \frac{F}{k} = a, \quad \frac{p}{k} = b$$

と置けば

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x - p^2a = bp^2\cos(\omega t + \varphi). \quad (25)$$

この微分方程式を振動が途中で止まらぬ条件として前と同様な境界条件の下に解くのである Coulomb の減衰を示す項 p^2a を右邊に移し前節の場合に於ける $\phi(t)$ を

$$\phi(t) = bp^2\cos(\omega t + \varphi) + p^2a$$

に取る。然る時は

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{p_1} \int_0^t e^{-n(t-x)} \sin p_1(t-x) \phi(x) dx \\ &= \frac{bp^2}{p_1} \int_0^t e^{-n(t-x)} \sin p_1(t-x) \left\{ \cos(\omega x + \varphi) + \frac{a}{b} \right\} dx \\ &= \frac{bp^2}{p_1} \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x \cos(\omega t + \varphi - \omega x) dx + \frac{p^2a}{p_1} \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x dx \\ &= \frac{bp^2}{p_1} \cos(\omega t + \varphi) \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x \cos \omega x dx \\ &\quad + \frac{bp^2}{p_1} \sin(\omega t + \varphi) \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x \sin \omega x dx \\ &\quad + \frac{p^2a}{p_1} \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x dx \\ &= x_2(t) + x_3(t) + x_4(t). \end{aligned}$$

先づ $x_2(t)$ を計算すれば

$$x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{bp^2}{p_1} \cos(\omega t + \varphi) \left\{ \frac{e^{-nt} \{-n\sin(p_1 + \omega)t - (p_1 + \omega)\cos(p_1 + \omega)t\} + (p_1 + \omega)}{n^2 + (p_1 + \omega)^2} \right. \\ \left. + \frac{e^{-nt} \{-n\sin(p_1 - \omega)t - (p_1 - \omega)\cos(p_1 - \omega)t\} + (p_1 - \omega)}{n^2 + (p_1 - \omega)^2} \right\}.$$

次ぎに $x_3(t)$ を計算すれば

$$x_3(t) = \frac{1}{2} \frac{bp^2}{p_1} \sin(\omega t + \varphi) \left\{ \frac{e^{-nt} \{-n\cos(p_1 - \omega)t + (p_1 - \omega)\sin(p_1 - \omega)t\} + n}{n^2 + (p_1 - \omega)^2} \right. \\ \left. - \frac{e^{-nt} \{-n\cos(p_1 + \omega)t + (p_1 + \omega)\sin(p_1 + \omega)t\} + n}{n^2 + (p_1 + \omega)^2} \right\}.$$

これ等を加へ合せて整理すれば

$$\begin{aligned} x_2(t) + x_3(t) &= \frac{bp^2}{p_1} \left[\left\{ \frac{p_1(p^2 - \omega^2)\cos\varphi + 2np_1\omega\sin\varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \cos\omega t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{p_1(p^2 - \omega^2)\sin\varphi - 2np_1\omega\cos\varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sin\omega t \right\} \right. \\ &\quad \left. + e^{-nt} \left\{ \frac{-2np_1\omega\sin\varphi - p_1(p^2 - \omega^2)\cos\varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \cosh p_1 t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-n(p^2 + \omega^2)\cos\varphi + \omega(p^2 - 2n^2 - \omega^2)\sin\varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sin p_1 t \right\} \right]. \end{aligned}$$

最後に

$$x_1(t) = \frac{p^2 a}{p_1} \int_0^t e^{-nx} \sin p_1 x dx = -e^{-nt} a \cos p_1 t - e^{-nt} \frac{an}{p_1} \sin p_1 t + a.$$

然るに

$$x(t) = x_1(t) + e^{-nt} \{x(0) \cos p_1 t + \frac{x(0)}{p_1} \sin p_1 t\}$$

であるから以上を総合して簡単にすれば

$$\begin{aligned} x(t) &= bp^2 \left\{ \frac{(p^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2n\omega \sin \varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} \cos \omega t - \frac{(p^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2n\omega \cos \varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} \sin \omega t \right\} \\ &+ e^{-nt} \left\{ \left\{ bp^2 \frac{-2n\omega \sin \varphi - (p^2 - \omega^2) \cos \varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} - a + x(0) \right\} \cos p_1 t \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{bp^2}{p_1} \frac{-n(p^2 + \omega^2) \cos \varphi + \omega(p^2 - 2n^2 - \omega^2) \sin \varphi}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} - \frac{an}{p_1} + \frac{nx(0)}{p_1} \right\} \sin p_1 t \right\} + a. \end{aligned}$$

今

$$\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} = p^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{2n\omega}{p^2}\right)^2} = p^2 q$$

と置けば

$$q = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{2n\omega}{p^2}\right)^2} \quad (26)$$

である。又

$$\left. \begin{aligned} \frac{(p^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2n\omega \sin \varphi}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} &= \cos \alpha \\ \frac{(p^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2n\omega \cos \varphi}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} &= \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

と置く。然る時は

$$\begin{aligned} &\frac{-n(p^2 + \omega^2) \cos \varphi + \omega(p^2 - 2n^2 - \omega^2) \sin \varphi}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \\ &= \frac{-n\{(p^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2n\omega \sin \varphi\} + \omega\{(p^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2n\omega \cos \varphi\}}{\sqrt{(p^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}} \\ &= \omega \sin \alpha - n \cos \alpha. \end{aligned}$$

故に

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{q} \cos(\omega t + \alpha) + e^{-nt} \left[(x(0) - a - \frac{b}{q} \cos \alpha) \cos p_1 t \right. \\ &\quad \left. + \{nx(0) - an + \frac{b}{q} (\omega \sin \alpha - n \cos \alpha)\} \frac{1}{p_1} \sin p_1 t \right] + a. \\ C &= x(0) - a - \frac{b}{q} \cos \alpha \\ C_2 &= nx(0) - an + \frac{b}{q} (\omega \sin \alpha - n \cos \alpha) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (28)$$

と置けば

$$x(t) = \frac{b}{q} \cos(\omega t + \alpha) + e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \frac{1}{p_1} \sin p_1 t) + a. \quad (29)$$

故に

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\omega \frac{b}{q} \sin(\omega t + \alpha) + e^{-nt} \left\{ (-p_1 C_1 - \frac{n}{p_1} C_2) \sin p_1 t \right. \\ &\quad \left. + (C_2 - n C_1) \cos p_1 t \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

然るに條件 (4) より $t = -\frac{\pi}{\omega}$ なる時 $x(t) = -x(0)$, $\dot{x}(t) = 0$ であるから

$$-x(0) = -\frac{b}{q} \cos \alpha + e^{-n \frac{\pi}{\omega}} (C_1 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega} + \frac{C_2}{p_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}) + a. \quad (31)$$

$$0 = \omega \frac{b}{q} \sin \alpha + e^{-n \frac{\pi}{\omega}} \left\{ (C_2 - n C_1) \cos p_1 \frac{\pi}{\omega} - (p_1 C_1 + \frac{n}{p_1} C_2) \sin p_1 \frac{\pi}{\omega} \right\}. \quad (32)$$

然るに (28) より

$$-\frac{b}{q} \cos \alpha = C_1 + a - x(0).$$

これを (31) に代入すれば

$$C_2 = \frac{-C_1 p_1 e^{-n \frac{\pi}{\omega}} \cos p_1 \frac{\pi}{\omega} - C_1 p_1 - 2 a p_1}{e^{-n \frac{\pi}{\omega}} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}. \quad (33)$$

然るに又 (28) より

$$\omega \frac{b}{q} \sin \alpha = C_2 - n C_1.$$

これを (32) に代入して計算すれば

$$\frac{p_1 C_1 + \frac{n}{p_1} C_2}{C_2 - n C_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega} = e^{n \frac{\pi}{\omega}} + \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}. \quad (34)$$

さて (33) を $(p_1 C_1 + \frac{n}{p_1} C_2) / (C_2 - n C_1)$ に代入し (34) に低つて C_1 を求めれば

$$C_1 = \frac{2 a (n \sin p_1 \frac{\pi}{\omega} - p_1 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega} - p_1 e^{n \frac{\pi}{\omega}})}{p_1 (e^{-n \frac{\pi}{\omega}} + e^{n \frac{\pi}{\omega}}) + 2 p_1 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}. \quad (35)$$

この C_1 の値を (28) に代入すれば

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\frac{q}{b} (x(0) - a - C_1) \\ &= q \left[\frac{x(0)}{b} + \frac{a}{b} G \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

但し

1) Hartag の前掲の論文 Phil. Mag., Vol. 9, 1930 ではここに相當する所を $\sin(\omega t + \alpha)$ と誤記されて居る。

$$G = -1 - \frac{C_1}{a}$$

$$= \frac{e^{n\frac{\pi}{\omega}} - e^{-n\frac{\pi}{\omega}} - \frac{2n}{p_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{e^{n\frac{\pi}{\omega}} + e^{-n\frac{\pi}{\omega}} + 2 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}$$

又 (35) の C_1 を (33) に代入して C_2 を計算すれば

$$C_2 = \frac{-2a \left(ne^{n\frac{\pi}{\omega}} + n \cos p_1 \frac{\pi}{\omega} + p_1 \sin p_1 \frac{\pi}{\omega} \right)}{e^{n\frac{\pi}{\omega}} + e^{-n\frac{\pi}{\omega}} + 2 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}} \quad (37)$$

然るに (28) より

$$C_2 - nC_1 = \omega \frac{b}{q} \sin \alpha$$

であるから (35) 及び (37) を代入して

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{q}{b\omega} \left(-\frac{2ap^2}{p_1} \right) \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{e^{n\frac{\pi}{\omega}} + e^{-n\frac{\pi}{\omega}} + 2 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}} \\ &= -\frac{qa}{b} H. \end{aligned} \quad (38)$$

但し

$$H = \frac{2p^2}{\omega p_1} \frac{\sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{e^{n\frac{\pi}{\omega}} + e^{-n\frac{\pi}{\omega}} + 2 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}$$

故に又 (36) 及び (38) より

$$\frac{q^2 a^2}{b^2} H^2 + q^2 \left(\frac{x(0)}{b} + \frac{a}{b} G \right)^2 = 1$$

即ち

$$\frac{x(0)}{b} = -G \left(\frac{a}{b} \right) + \sqrt{\frac{1}{q^2} - \frac{a^2}{b^2} H^2}.$$

さて (27) より

$$\frac{(p^2 - \omega^2) \sin \varphi - 2n\omega \cos \varphi}{(p^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2n\omega \sin \varphi} = \tan \alpha$$

これより容易に

$$\tan(\varphi - \alpha) = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}.$$

これの逆も明らかである。

以上を総合すれば次の結果を得る

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2 x - p^2 a = b p^2 \cos(\omega t + \varphi), \quad 0 < \omega t < \pi \quad (\dot{x} < 0)$$

に於いて途中で振動が止まらる條件として (4) なる如き強制振動があつたとする。然る時は

$$x(t) = \frac{b}{q} \cos(\omega t + \alpha) + e^{-nt} (C_1 \cos p_1 t + C_2 \frac{1}{p_1} \sin p_1 t) + a.$$

ここに

$$q = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{2n\omega}{p^2}\right)^2}, \quad \tan(\varphi - \alpha) = \frac{2n\omega}{p^2 - \omega^2}.$$

$$\sin \alpha = -\frac{qa}{b} H, \quad \cos \alpha = q \left[\frac{x(0)}{b} + \frac{a}{b} G \right].$$

$$\frac{x(0)}{b} = -G \left(\frac{a}{b} \right) + \sqrt{\frac{1}{q^2} - \frac{a^2}{b^2} H^2},$$

而して

$$G = \frac{e^{n\frac{\pi}{\omega}} - e^{-n\frac{\pi}{\omega}} - \frac{2n}{p_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{e^{n\frac{\pi}{\omega}} + e^{-n\frac{\pi}{\omega}} + 2 \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}$$

$$= \frac{\sinh n \frac{\pi}{\omega} - \frac{n}{p_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{\cosh n \frac{\pi}{\omega} + \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}.$$

同様に

$$H = \frac{\frac{p^2}{\omega p_1} \sin p_1 \frac{\pi}{\omega}}{\cosh n \frac{\pi}{\omega} + \cos p_1 \frac{\pi}{\omega}}$$

又 C_1 及び C_2 は (35) 及び (37) 又は (28) より分る。更に

$$p_1^2 = p^2 - n^2$$

である。

以上に述べた結果が Hartog の結果に等しい事は次の様にすればよい。

極限の粘性減衰率を c_{cr} とすれば

$$c_{cr} = 2 \sqrt{\frac{kW}{g}} = 2\sqrt{km}. \quad \left(m = \frac{W}{g} \right)$$

然るに

$$p^2 = \frac{kg}{W}$$

であるから

$$k = \frac{W}{g} p^2 = mp^2.$$

故に

$$c_{cr} = 2mp.$$

又

$$2n = \frac{cg}{W}$$

より

$$c = \frac{W}{g} \times 2n = 2mn.$$

故に

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{n}{p}.$$

又

$$\frac{p_1}{p} = \sqrt{\frac{p^2 - p^2}{n^2}} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{p^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}.$$

更に第二節の記号に依れば

$$\beta = \frac{p}{\omega}, V^2 = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1}.$$

これ等の記号に依れば

$$n \frac{\pi}{\omega} = \left(\frac{n}{p} / \frac{\omega}{p} \right) \pi = \left(\frac{c}{c_{cr}} \right) / \left(\frac{1}{\beta} \right) \times \pi = \beta \pi \frac{c}{c_{cr}},$$

$$p_1 \frac{\pi}{\omega} = \left(\frac{p_1}{p} / \frac{\omega}{p} \right) \pi = \beta \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}} \right)^2} \pi,$$

$$\frac{p^2}{\omega p_1} = \frac{p}{\omega} \frac{p}{p_1} = \beta \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}} \right)^2}}$$

である。故にこれ等を用ひて前の結果を書き直せば

$$q = \sqrt{\frac{1}{V^2} + \left(\frac{2}{\beta} \frac{c}{c_{cr}} \right)^2},$$

$$\tan(\varphi - \alpha) = \frac{2V}{\beta} \frac{c}{c_{cr}},$$

$$G = \frac{\sinh(\beta \pi c/c_{cr}) - \frac{c/c_{cr}}{\sqrt{1-(c/c_{cr})^2}} \sin \beta \pi V \sqrt{1-(c/c_{cr})^2}}{\cosh(\beta \pi c/c_{cr}) + \cos \beta \pi V \sqrt{1-(c/c_{cr})^2}},$$

$$H = \frac{\beta}{\sqrt{1-(c/c_{cr})^2}} - \frac{\sin \beta \pi V \sqrt{1-(c/c_{cr})^2}}{\cosh(\beta \pi c/c_{cr}) + \cos \beta \pi V \sqrt{1-(c/c_{cr})^2}}$$

となる。これ即ち Hartog の結果である。

次ぎに $\dot{x}(t) < 0$ なる條件を考へて見よう。

(30) より

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & -\omega \frac{b}{q} \sin(\omega t + \alpha) + e^{-nt} \left\{ \left(-p_1 C_1 - \frac{n}{p_1} C_2 \right) \sin p_1 t \right. \\ & \left. + (C_2 - nC_1) \cos p_1 t \right\}. \end{aligned}$$

これに於いて (28) 及び (36), (38) より

$$C_1 = x(0) - a - \frac{b}{q} \cos \alpha, \quad C_2 = nx(0) - an + \frac{b}{q} (\omega \sin \alpha - n \cos \alpha).$$

$$\sin \alpha = -\frac{qa}{b} H, \quad \cos \alpha = \frac{q}{b} (x(0) + aG)$$

を代入して計算すれば $\dot{x}(t) < 0$ は結局

$$\frac{x(0)}{a} > \frac{e^{-nt}}{\sin \omega t} \left\{ \left(\frac{p_1}{\omega} + \frac{n^2}{p_1 \omega} \right) (1+G) \sin p_1 t + H \left(\frac{n}{p_1} \sin p_1 t - \cos p_1 t \right) \right\} + H \cot \omega t - G. \quad (39)$$

とも書ける事が分る。

(39) に於いて $t \rightarrow 0$ ならしめれば

$$\frac{x(0)}{a} \geq \frac{2nH}{\omega} + \frac{p^2}{\omega^2} (1+G) - G. \quad (40)$$

(39) の右邊の最大値を M_2 とし (40) の右邊を M_3 として $M_2/M_3 = M_1$ を置けば (39) より

$$x(0) > aM_1M_3 \text{ 即ち } x(0)/b > \frac{a}{b} M_1M_3.$$

然るに

$$\frac{x(0)}{b} = -G \left(\frac{a}{b} \right) + \sqrt{\frac{1}{q^2} - \frac{a^2}{b^2} H^2}$$

であるからこれより a/b を求めて代入すれば

$$\frac{x(0)}{b} > \frac{M_1M_3}{q\sqrt{H^2 + (G + M_1M_3)^2}}.$$

今

$$I = \frac{2nH}{\omega} + \frac{p^2}{\omega^2} (1+G) = M_3 + G \quad (41)$$

と置けば

$$\frac{x(0)}{b} > \frac{M_1(I-G)}{q\sqrt{H^2 + \{M_1I + G(1-M_1)\}^2}}. \quad (42)$$

然るに

$$\frac{x(0)}{a} > M_1M_3 + M_1(I-G)$$

であるから

$$\frac{a}{b} < \frac{1}{q\sqrt{H^2 + \{M_1I + G(1-M_1)\}^2}} \quad (43)$$

前と同様にして (39), (40) 及び (41) に於いて $c/c_{cr} = p/n$, $p_1/p = \sqrt{1 - (c/c_{cr})^2}$, $\beta = p/\omega$ を置けば Hartog の結果と一致する。

さて前に得られた結果に依り

$$\frac{x(0)}{b} = -G \left(\frac{a}{b} \right) + \sqrt{\frac{1}{q^2} - \frac{a^2}{b^2} H^2}$$

である。 Coulomb の減衰を伴はない時即ち $a=0$ ならば $x(0)/b = 1/q$ となりこれは粘性減衰のみを伴ふ良く知られた結果と一致する。而して又 (38) より分る様にこの場合には $a=0$ となる。従つて $\tan \varphi = 2n\omega/(p^2 - \omega^2)$ となりこれも亦良く知られた結果と一致する。 G なる函数は $\beta=1$ なる時を除いては $c/c_{cr} = n/p = 0$ なる時に 0 となり $\beta=1$ なる時にのみ無限大となる。又 H なる函数は $c/c_{cr} = n/p = 0$ なる時には U となる。數値計算の場合に屢々有用であるから Hartog はこれ等の函数を種々なる c/c_{cr} に對して圖示して居る。又 $c/c_{cr} = (0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5)$ なる 6 個の値に對する振幅の式を計算してこれを圖で示し

て居る。更に(42)の計算を行つてこれを點線を以て書いて居る。最後に $c/c_{cr}=0.1$ なる場合に種々なる $a/b (=0.2, 0.4, 0.6)$ に對して位相角 φ の graph を示して居る。この場合には resonance の振幅が有限であるから角に不連續は起らない。resonance の角は 90° に極めて近いがそれ以外の場合には粘性感衰のみを伴ふ場合と可成り異つて居る。(第三圖を参照せよ。)

5. 近似計算との比較

前に述べたやうに我々の場合には不變摩擦力 F の方向の變化を處置する爲めに各半サイクルを別々に考へる必要がありこの故に強制振動を厳密に取り扱ふ事に困難が生ずる。併し¹⁾その近似解は大した困難なしに求める事が出来る。即ち實際上の應用に於いては主として定常強制振動の大きさに興味があり又この大きさは不變減衰力 F の場合の強制振動を粘性減衰の場合の様な單弦振動と假定し且つ不變減衰力を 1 サイクルに消散されるエネルギーの量が同一である様な等値粘性減衰に置き換へる事に依つて十分な精密さを以て求める事が出来る。斯くして振幅を計算すると前に用ひた記號を用ひて

$$\frac{x(0)}{b} = \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(\frac{a^2}{b^2}\right)}$$

を得る。平方根號の中が正なる爲めには

$$\frac{a}{b} < \frac{\pi}{4}$$

でなければならない。實際上の應用に於いては通常摩擦力は小さいからこの條件は満足されるわけである。併し $a/b > \pi/4$ なる時例へば $a/b=0.8$ なる時はこの近似式からは振幅は計算されない。これには前に述べた厳密な解(15)に依らねばならない。第二圖に於いてはこの厳密な解と近似解との比較を示して居る。横軸に $\frac{1}{\beta} = \frac{\omega}{p}$ の値を取り縦軸に $\frac{x(0)}{b}$ を取り $\frac{a}{b}$ の種々なる値に對して graph が畫かれて居る。實線は(15)に依つて計算されたものであり點線は $\dot{x}(t) < 0$ なる境界即ち(18)より計算される。次ぎに鎖線は近似解に依つて算出されたものである。これに依ると $\frac{a}{b} = 0$ なる時には明らかに實線及び鎖線は全く一致する。 $\frac{a}{b}$ が小なる時には大なる時に比して近似計算は厳密なる解に近い値を與へる。即ち近似計算の精度は高い事になる。又いづれの場合であつても $\frac{1}{\beta}$ が 1 に近い値を取る時即ち resonance の附近に於いては殆んど一致する事が分る。(點線以下に於ける振幅の graph は厳密な解によつてのみ求められる)。

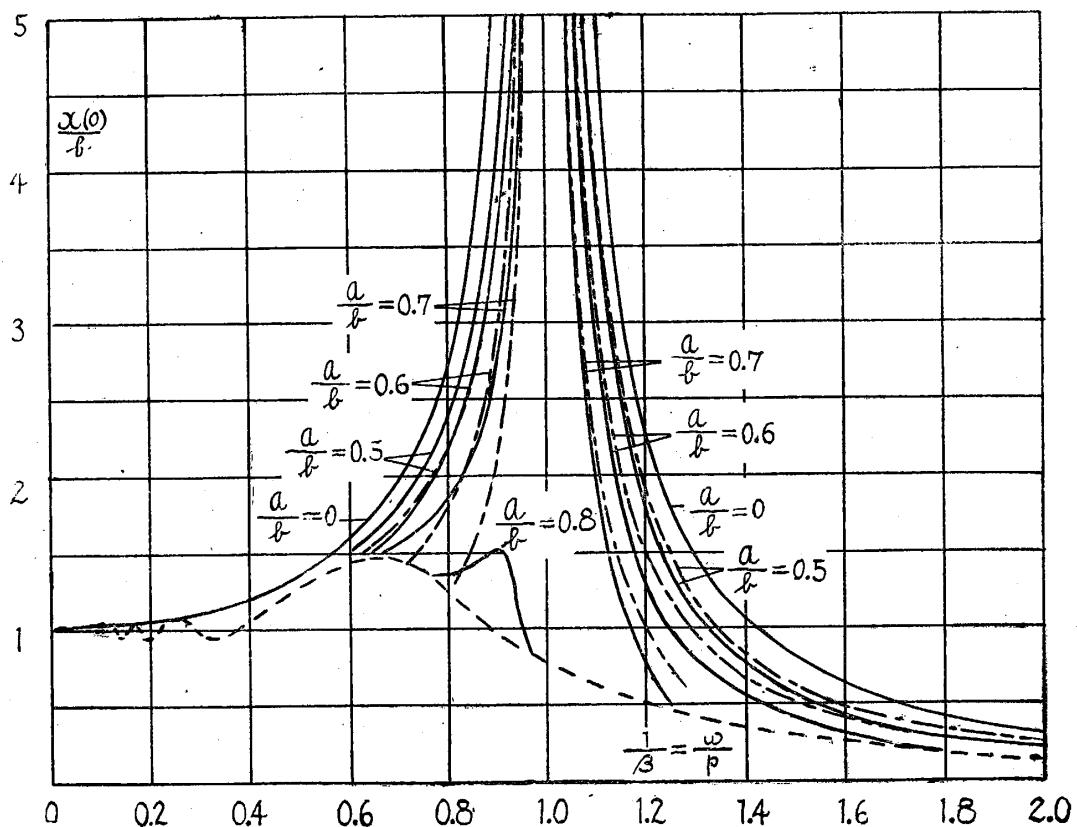
同様に粘性減衰と Coulomb の減衰とが同時に働く場合の振幅を求める近似解を求める事が出来る。これを今我々の記號を以て書けば

$$\frac{x(0)}{b} = \frac{-\frac{4}{\pi} \frac{a}{b} \frac{2}{\beta} \frac{c}{c_{cr}} + \sqrt{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{a^2}{b^2} \left(\frac{2}{\beta}\right)^2 \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2 - \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2 \frac{4}{\beta^2}\right] \left[\left(\frac{4}{\pi} \frac{a}{b}\right)^2 - 1\right]}}{\left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^2 + \frac{4}{\beta^2} \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2}$$

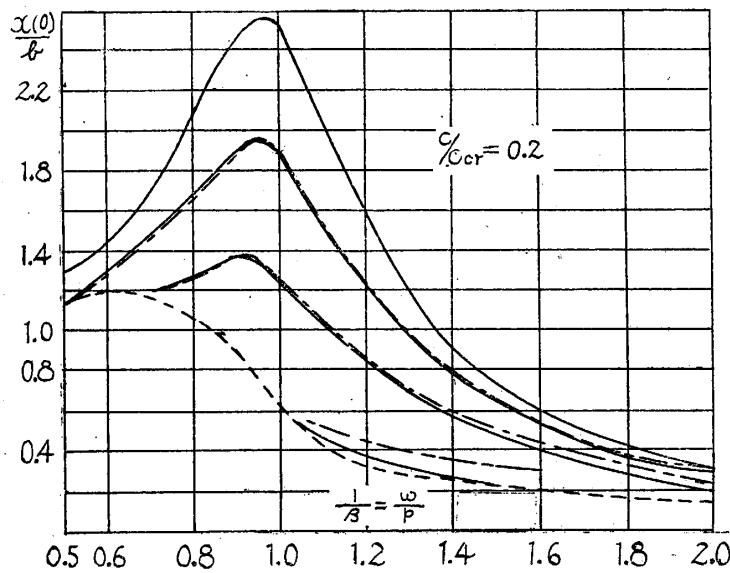
1) S. Timoshenko, Vibration Prsbleme in Engineering (1939) 第1章第12節參照。

J. P. Den Hartog, Mechanical Vibrations. (1934) 第8章第73節參照。

L. S. Jacobson, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Vol. 52, p. 162, 1930



第 2 圖 Coulomb 減衰を伴つた強制振動の振幅



第 3 圖 Coulomb 減衰及び粘性減衰を伴つた強制振動の振幅

となる。故に與へられた c/c_{cr} 及び a/b に對して β 及び $x(0)/b$ との關係を圖示する事が出来る。第三圖はこの近似計算によつて得られた graph と前に述べた嚴密な解から得られた graph を比較したものである。圖は $c/c_{cr}=0.2$, $a/b=0, 0.2, 0.4, 0.6$ の場合を示して居る。これに依ると $a/b=0$ なる時には近似計算と嚴密な計算とは全く一致する。 a/b が小なる時は近似計算の精度は高い。而して resonance の附近即ち ω/p が 1 に近い時には殆んど一致する事が分る。

最後に本論文を草するに當り種々の有益なる御指導を賜りたる妹澤先生に厚く感謝の意を表する次第である。

正 誤 表

第 197 號（昭和 16 年 1 月）「電氣火花の耐壓性に關する實驗的研究」

頁	行	誤	正
3	下より 3 行目	(第 6 圖上より Earth 第三極, 高壓)	(第 6 圖上より 高壓, 第三極, Earth)
8	下より 9 行目	一定 V_3 に對し	一定 V_s に對し
8	下より 4 行目	Paschen の法則は法則は	Paschen の法則は