層流剝離點の簡易計算法に就いて

——藤本教授の計算法に關する覺書——

所員 谷 一 郎

§ 1. 層流境界層の計算は，和田教授の新しい解法 [本所報告 196 號 (1940)] によつて著しく簡單にされた．その最後の形は，境界層外の速度とその微係數とを含む簡單な積分として表はされ，從來行はれてゐる Pohlhausen [Z. A. M. M. 1 (1921), 252] 或は Howarth [Proc. Roy. Soc. 164 (1938), 547] の解法が微分方程式を數値的に解く必要があるに比べて，實用上格段の長所が窺はれる．最近計算の途中に現はれる楕圓函數の取扱が初歩の人々に難解であらうといふ理由から，Pohlhausen の解法を基として初等的な近似計算を行ひ，最後の形に於て和田教授のものと同様の形に導く試みが藤本教授によつて示された [航空學會誌 8 (1941), 279]．尤もこの試みの重點は誘導過程にあつて，結果の精度を高める工夫は度外視されたものゝ如く，例へばその結果は Pohlhausen の解法に固有な缺陷をその儘保有する．併しこれは本質的な難點ではなく，若し Pohlhausen の解法の代りに Howarth の解法から出發すれば避け得られる事であり，而もその様にしても最後の形式は殆ど變らぬものである．斯様な試みは筆者もかねて行つてゐたので，以下それに就いて具體的に述べたい．

§ 2. 物體表面に沿うて x を採り，境界層の排除厚を δ^*，運動量厚を θ，境界層外の速度を U，物體表面に働く摩擦應力を τ_0 とすると，境界層の運動量の法則は

$$\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\theta+\delta^*)=\frac{\tau_0}{\rho U^2} \qquad (1)$$

と表はされる．この式は δ^*/θ が一定で c に等しく，且 $(\tau_0/\rho U^2)(U\theta/\nu)$ が

$$\sigma=\frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU}{dx} \qquad (2)$$

の一次式 $b_1+b_2\sigma$ で表はされる場合には，簡單に積分されて

$$U^k\frac{\theta^2}{\nu}=\left[U^k\frac{\theta^2}{\nu}\right]_{x=x_0}+2b_1\int_{x0}^{x}U^{k-1}dx \qquad (3)$$

となる．但し $k=4+2c-2b_2$，又 x_0 はこの解法を使ひ始める位置を表はす．第 1 圖の曲線は Pohlhausen 並に Howarth の解法から導いた δ^*/θ 及び $(\tau_0/\rho U^2)(U\theta/\nu)$ と σ との關係を示すものであるが，これを $\sigma>0$ の場合には Pohlhausen のものに，又 $\sigma<0$ の場合には Howarth のものに重きを置いて階段線 abb′cc′d 及び屈折線 A B C D で置換へることにすると，次の結果が得られる：

	b_1	b_2	c	k
$0.077>\sigma>0$	0.22	1.40	2.40	6
$0>\sigma>-0.060$	0.22	1.85	2.85	6
$-0.060>\sigma>-0.084$	0.38	4.52	3.52	2

爰に $\sigma=0.077$ は澱點に，$\sigma=-0.084$ は剝離點に相當する．澱點を $x=0$ とし，且 $\sigma=-0.060$ に相當する點を $x=x_1$ とすれば，澱點からこの點までの間では

$$U^6\frac{\theta^2}{\nu}=0.44\int_0^x U^5dx,$$

從つて

$$\sigma=\frac{0.44}{U^6}\frac{dU}{dx}\int_0^x U^5dx. \tag{4}$$

又 $x=x_1$ から剝離點 $x=x_s$ までの間では

$$U^2\frac{\theta^2}{\nu}=\left[U^2\frac{\theta^2}{\nu}\right]_{x=x1}+0.76\int_{x1}^x Udx,$$

從つて

$$\sigma=-\frac{0.060}{U^2}\frac{dU}{dx}\left[\frac{U^2}{\frac{dU}{dx}}\right]_{x=x1}+\frac{0.76}{U^2}\frac{dU}{dx}\int_{x1}^x Udx \tag{5}$$

が得られる．

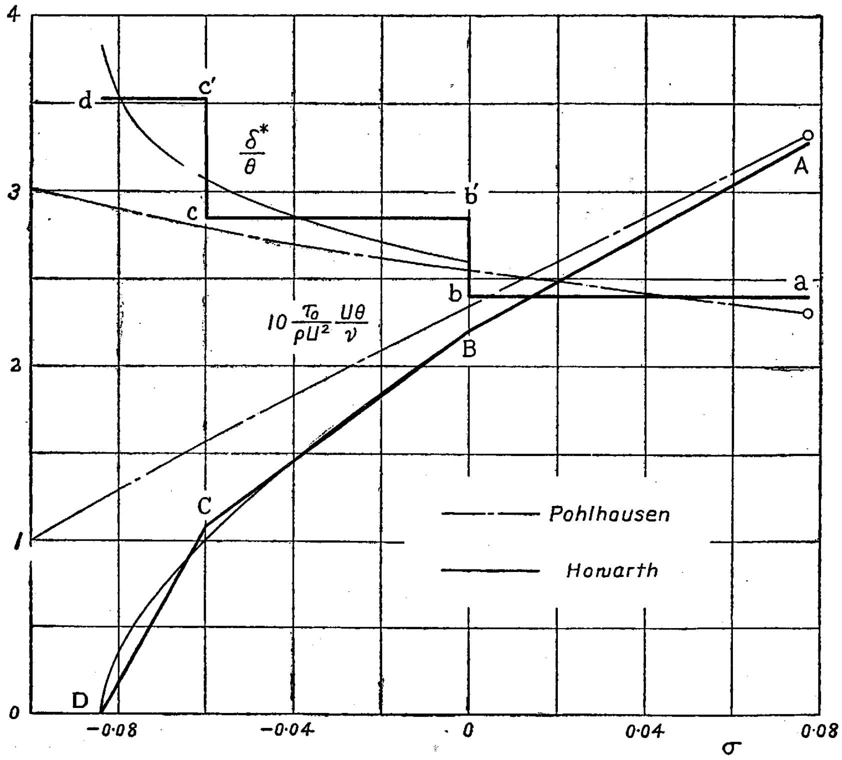
§ 3. 以上の計算法の具體的な例として，先づ迎角零の對稱翼型 LB−24 の層流剝離點を求める．U を知るには理想流體としての計算を行ひ，實際に附表に示すやうな數値を採用した．但し U は一般流速を單位とし，x は翼弦長を單位として表はす．計算の結果は第 2 圖に示す通りで，曲線は(4)式から求めた σ ($\sigma=-0.060$ 以後も續けて計算してある)，又白圓は (5) 式から求めた σ である．$\sigma=-0.084$ に相當する剝離點は $x_s=0.79$ (78%弦長點) となり，野田中尉により Howarth の方法で計算された $x_s=0.80$ と大體に於て一致する．次に，全く同樣の計算を迎角零の對稱翼型 NACA−0012 に就いて行ひ，第 3 圖に示す如く，剝離點として $x_s=0.62$ を得た．實際に使用した U の値は附表に掲げてある．尙第 3 圖には和田教授の

$$\lambda=\frac{19.66}{U^{2\cdot91}}\frac{dU}{dx}\int_0^x U^{1\cdot91}dx$$

を鎖線で，藤本教授の

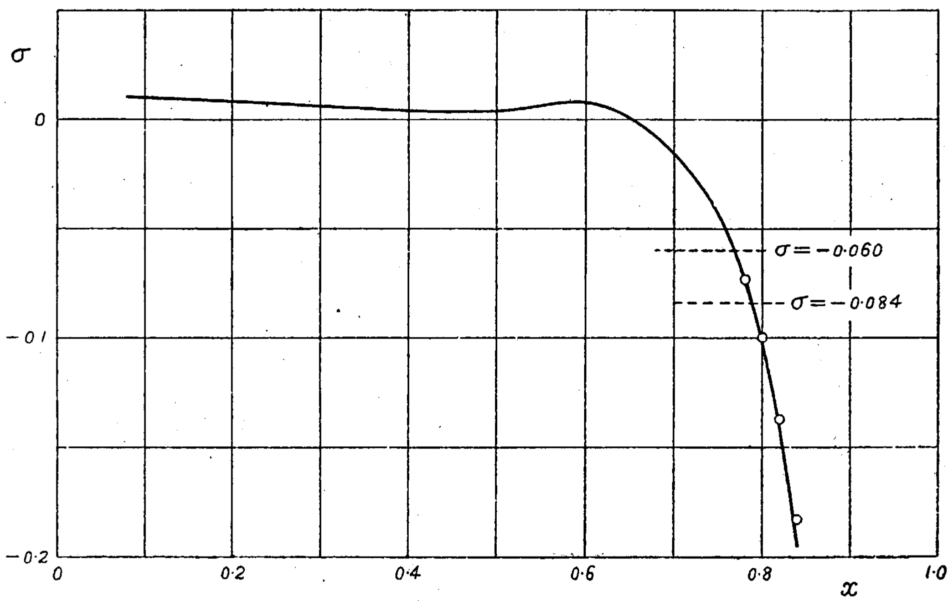
$$\lambda_0=\frac{4.89}{U^6}\frac{dU}{dx}\int_0^x U^5dx$$

を破線で示す．これらの解法に依れば，剝離點は夫々 $x_s=0.80$ 及び 0.76 となる．尙この翼型に就いて Kármán-Millikan の方法で計算した剝離點は $x_s=0.55$，同方法を基とした



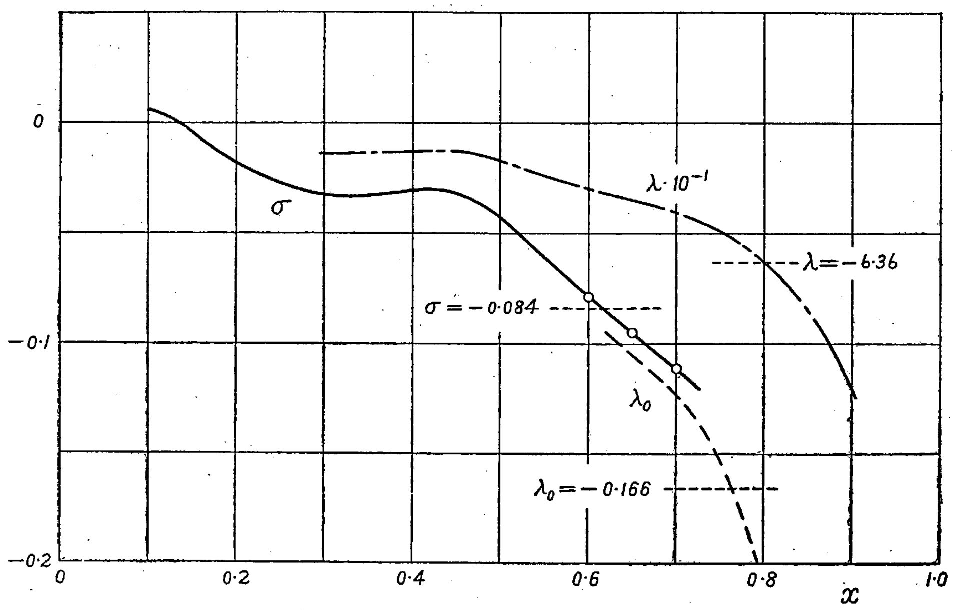
d
c′
c
b′
b
a
A
B
C
D
$\frac{\delta^*}{\theta}$
$10\frac{\tau_0}{\rho U^2}\frac{U\theta}{\nu}$
Pohlhausen
Howarth
4
3
2
1
0
−0·08
−0·04
0
0·04
0·08
σ

第 1 圖

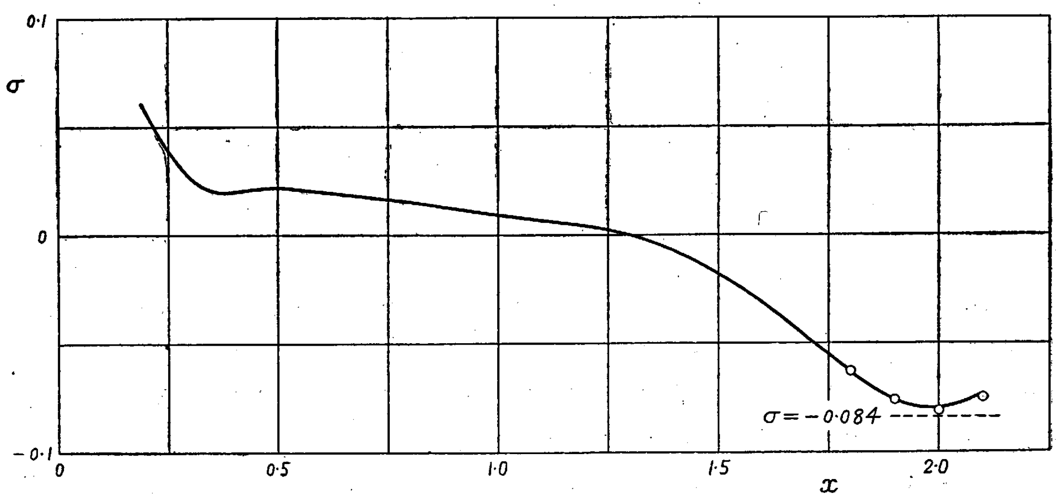


σ
0
−0·1
−0·2
$\sigma=-0{\cdot}060$
$\sigma=-0{\cdot}084$
0
0·2
0·4
0·6
0·8
1·0
x

第 2 圖


0
−0·1
−0·2
0
0·2
0·4
0·6
0·8
1·0
x
σ
λ·10⁻¹
λ=−6·36
σ=−0·084
λ₀
λ₀=−0·166

第　3　圖


0·1
σ
0
−0·1
0
0·5
1·0
1·5
2·0
x
σ=−0·084

第　4　圖

Doenhoff の簡略計算では $x_s=0.54$であつて，計算法により剝離點の位置が著しく異なることが判る．何れの解法も近似的なものであつて，何れの結果が最も眞に近いかを斷定することは現在不可能であるけれども，藤本敎授の解法がその母型たる Pohlhausen のものに近く，又筆者の解法が Howarth のものに近い結果を與へることは慥かであらう．又最低壓力に引續く壓力上昇が LB-24 では比較的に峻しく， NACA-0012 では比較的に緩かであるが，その何れの場合に於ても，$\sigma=-0.060$ 以後を (5) 式で計算した結果は，引續き (4) 式で計算したものと殆ど一致することは注目すべきである．これは要するに，剝離點附近の計算には表面摩擦の影響が比較的に小さいことを示すものであり，又その結果としては，澱點から剝離點までの範圍を通じて σ を (4) 式によつて計算し，たゞ剝離の條件を $\sigma=-0.084$ で抑へればよいといふ實用上重要な簡略化を齎らすものである．

最後に，Schubauer の楕圓柱の實驗結果 [N. A. C. A. Tech. Rep. No. 527(1935)] に就いて計算したものを第4圖に示す．U の値は Schubauer の測定値を Howarth が修整したものを用ひた．Howarth はこの値を用ひて剝離點 $x_s=1.92_5$ を得て居り，又和田敎授の解法によれば $x_s=1.88$ であるが，第4圖の σ は僅か乍ら -0.084 に達せず，從つて剝離の可能性を示さない．尙實際に觀察された剝離點は $x_s=1.99\pm0.02$ であり，しかも剝離は極めて微妙な臨界狀態にあるやうに思はれる．

§ 4. 以上に述べたところから，境界層の層流剝離點を求めるには

$$\sigma=\frac{0.44}{U^6}\frac{dU}{dx}\int_0^x U^5dx$$

が -0.084 に達する位置を見出せばよいことになる．尤も -0.084 なる判定値は Howarth の解法が正しいとしてのものであり，それがどの程度に正確であるかは今後の研究に俟たねばならない．これに關聯して附記したいのは、旣に (4) 式が與へられたものとして，これを和田敎授に倣つて，(1) 式で $\tau_0=0$ と置いたものに代入して剝離の條件を求めることである．その結果 σ の判定値として

$$\sigma=-\frac{0.22}{\dfrac{\delta^*}{\theta}-1}$$

が得られるが，剝離點に於ける δ^*/θ の値を 3.50 (Pohlhausen), 3.83 (Howarth), 4.85 (和田敎授) 等と採ると，夫々 $\sigma=-0.088$, -0.078, -0.057 等が得られる．この意味に於て，剝離點に於ける δ^*/θ の値を確定することは，剝離條件の基礎を豐富にすることになるであらう．從來の實驗結果には，この點に關し殆ど據るべきものなく，僅かに Schubauer の楕圓柱に就いて $\delta^*/\theta=3.6$ なる一例を擧げ得るに過ぎない．

昭和16年3月

	LB 24		NACA 0012	
x	U	$\frac{dU}{dx}$	U	$\frac{dU}{dx}$
0	0	—	0	—
0.03	1.026	1.475	1.063	—
0.05	1.047	0.826	1.148	2.14
0.075	1.064	0.503	1.181	0.73
0.10	1.073	0.333	1.192	0.252
0.135	—	—	1.196	0
0.15	1.085	0.163	1.195	−0.105
0.20	1.092	0.117	1.184	−0.276
0.25	1.097	0.0896	1.169	−0.313
0.30	1.101	0.0610	1.154	−0.279
0.35	1.104	0.0400	1.141	−0.224
0.40	1.105	0.0257	1.131	−0.177
0.45	1.106	0.0191	1.123	−0.162
0.50	1.107	0.0240	1.114	−0.187
0.55	1.109	0.0360	1.104	−0.230
0.60	1.110	0.0356	1.091	−0.259
0.65	—	—	1.078	−0.272
0.652	1.111	0	—	—
0.70	1.110	−0.0628	1.064	−0.280
0.75	1.105	−0.159	1.049	−0.303
0.80	1.093	−0.314	1.033	−0.358
0.85	1.070	−0.570	1.013	−0.432
0.90	1.034	−0.924	0.989	−0.546
0.95	0.973	−1.60	0.959	−0.695