航空研究所彙報

第二百十號

昭和十七年二月

旋回初期に於けるスペリ式人工水平儀の誤差に就て

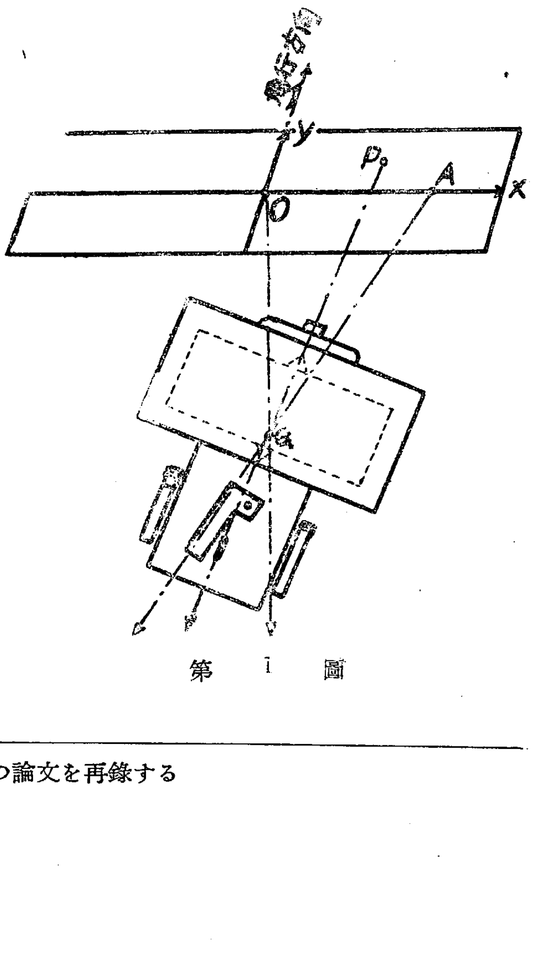
所員　佐々木達治郎
岩名義文
宮坂五一郎

緒言

スペリ式人工水平儀の旋回誤差に就ては已に根岸宏二[1], 武田晋一郎[2]の兩君により研究せられて居るが, これ等は定常旋回に入つて後の問題を多く取扱つて居る. こゝには旋回初期に於て如何になるかを少し調べて見た. 水平儀の調整の條件は兩君の研究を利用し 30° 傾斜よりの起立時間を 2 分間とし飛行機の速度は 300km/h とした. 又旋回の初期に於ては旋回角速度は時間に比例して増加するものであると假定した.

運動方程式[3]

座標軸. 水平儀の支點より上方に飛行機と共に旋回する水平面を考へ左右及び前後方向に夫々 x 軸及び y 軸を取り, 第1圖に示す如く右方及び進行方向を正の方向としヂャイロ軸の方向はこの水平面との支點を以て表した. 水平旋回の場合は見かけの重力は右又は左に偏する故, その方向は x 軸上の A 點によつて表はされる.



第 1 圖

飛行機が旋回を始めると初めに眞の鉛直線 0 にあつたヂャイロ軸 P は A に向つて擺動するが, 座標軸が飛行機と共に廻轉するため, P は見かけ上 0 を中心として逆に廻轉する. この運動の方程式は右旋回では

$$\dot{x}=J_x/M-\dot{\mu}y,$$
$$\dot{y}=-J_y/M+\dot{\mu}x$$

である. x, y は座標上の距離とするより寧ろ傾斜角度を示すものとする. こゝに

J_x, J_y : 噴氣力によるトルク
M : ヂャイロの角運動量
$\dot{\mu}$: 飛行機の旋回角速度

又更に

α : 噴氣孔全開角

(1) 航研彙報第 168 號　(2) 同號　(3) 根岸の論文を再録する

$\varepsilon\alpha$ ：噴氣孔全開時の起立速度
Θ ：バンク角 $\overline{OA}$

とすれば

$$J_x/M=\begin{cases}\varepsilon\alpha & \Theta-x\geqq\alpha \text{ の場合}\\ \varepsilon(\Theta-x) & \Theta-x<\alpha \text{ の場合}\end{cases}$$

$$J_y/M=\begin{cases}\varepsilon\alpha & y\geqq\alpha \text{ の場合}\\ \varepsilon y & y<\alpha \text{ の場合}\end{cases}$$

である．これ等の組合により次の四つの場合が生ずる．

第 1 表

範圍			運動方程式	
名稱	$\Theta-x$	y	x 方向	y 方向
I	$<\alpha$	$<\alpha$	$\dot{x}=\varepsilon(\Theta-x)-\dot{\mu}y$	$\dot{y}=-\varepsilon y+\dot{\mu}x$
II	$<\alpha$	$\geqq\alpha$	〃	$\dot{y}=-\varepsilon\alpha+\dot{\mu}x$
III	$\geqq\alpha$	$\geqq\alpha$	$\dot{x}=\varepsilon\alpha-\dot{\mu}y$	〃
IV	$\geqq\alpha$	$<\alpha$	〃	$\dot{y}=-\varepsilon y+\dot{\mu}x$

旋回の初期に於ては角速度 $\dot{\mu}$ は時間に比例すると假定したのであるから

$$\dot{\mu}=ct$$

である．

バンク角と時間との關係

V＝航路に沿う速度
R＝旋回半徑
Θ＝バンク角
$\dot{\mu}$＝角速度
W＝飛行機の全備重量
L＝揚力

とすれば

$$L\sin\Theta=\frac{W}{g}\,\frac{V^2}{R},$$

$$L\cos\Theta=W$$

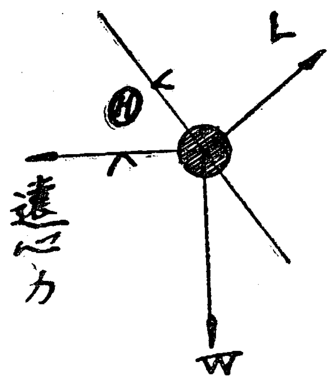
となる．故に

$$\tan\Theta=\frac{1}{g}\,\frac{V^2}{R}$$

である．然るに

$$\dot{\mu}=\frac{V}{R}$$

であるから



第 2 圖

$$\tan\Theta=\frac{1}{g}V\dot{\mu}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

となる.

こゝに二つの場合が考へられる.

a) 飛行機が水平直線飛行をして居るときと同じ迎角を以て旋回に入る時.

この場合には水平飛行中の速度を V, 旋回飛行の速度を V_1 とすれば

$$W=\frac{1}{2}\rho V^2 SC_z = L\cos\Theta = \frac{1}{2}\rho {V_1}^2 SC_z\cos\Theta$$

$$\therefore \quad V_1 = V/\sqrt{\cos\Theta} \quad \cdots\cdots(2)$$

又

$$\dot{\mu}=ct \quad \cdots\cdots(3)$$

なる故に (1), (2), (3) 式より

$$ct=\frac{g}{V}\sqrt{\cos\Theta}\tan\Theta \quad \cdots\cdots(4)$$

となる.

これより $\cos\Theta>0$ なることを考慮し

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}\left\{-\frac{c^2V^2}{g^2}t^2+\sqrt{\frac{c^4V^4}{g^4}t^4+4}\right. \quad \cdots\cdots(5)$$

となる.

b) 飛行機が水平直線飛行をして居る時と同じ速度で旋回に入る時.

この場合には

$$\tan\Theta=\frac{V}{g}ct \quad \cdots\cdots(6)$$

となる.

c の決定

初め水平直線飛行をして居た飛行機が旋回を始めバング角 25° に達する迄に1秒を要したとすれば

$\tan 25°=0.4663$

$\cos 25°=0.9063$

なる故に a) の場合には

$c=0.0522$

b) の場合には

$c=0.0548$

となる.

又1秒でバング角 20° に達するものとすれば

$c\fallingdotseq 0.0402$

となる.

故にこの二つの場合に近い c の値を定めて計算を行つて見る. 即ち

1) $c=0.04$

2) $c=0.05$

と假定する.

微分方程式の解

旋回の初期に於ては第1表Iの範圍にあるから先づこの場合の解を求める.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\varepsilon(\Theta-x)-cty,\\ \frac{dy}{dt}&=-\varepsilon y+cty\quad.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

こゝで $x=e^{-\varepsilon t}X, y=e^{-\varepsilon t}Y$ と置き更に

$\frac{c}{2}t^2=T$ と置けば（7）式は

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{dT}+Y&=\frac{1}{ct}e^{\varepsilon t}\varepsilon\Theta,\\ \frac{dY}{dT}-X&=0\end{aligned}\right\}$$

となる. 故に X を消去すれば

$$\frac{d^2Y}{dT^2}+Y=\frac{1}{ct}e^{\varepsilon t}\varepsilon\Theta$$

となり積分可能の形になる. これを解き

$$Y=A\sin T+B\cos T+\sin T\int\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{ct}\Theta\cos T dT-\cos T\int\frac{\varepsilon e^{\varepsilon t}}{ct}\Theta\sin T dT$$

となる. これより y, 次に x を求めると

$$\begin{aligned}x=e^{-\varepsilon t}\Big\{&A\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)-B\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)\\ &+\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)\int\varepsilon e^{\varepsilon t}\Theta\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)dt\\ &+\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)\int\varepsilon e^{\varepsilon t}\Theta\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)dt\Big\},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y=e^{-\varepsilon t}\Big\{&A\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)+B\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)\\ &+\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)\int\varepsilon e^{\varepsilon t}\Theta\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)dt\\ &-\cos\left(\frac{c}{2}t^2\right)\int\varepsilon e^{\varepsilon t}\Theta\sin\left(\frac{c}{2}t^2\right)dt\Big\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)\end{aligned}$$

となる. 玆に A, B は積分常數である. これ等の式中に於ける積分は已知函數を以て表し得ないから級數に展開して求める.

初期條件は

$t=0$ にて $x=0,\quad y=0$

なる故 (8), (9) 式に代入すれば

$A=0,\quad B=0$

を得る．

故に積分を求めるに級数展開を t^4 まで取るときは

a） の場合には $\dfrac{V}{g}c=\beta$ として

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon\beta}{2}t^2\left(1+\frac{2}{3}\varepsilon t+\frac{\varepsilon^2}{4}t^2+\cdots\right),\\ y&=e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon\beta}{8}t^4+\cdots \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(10)$$

となり，

b） の場合には

$$\left.\begin{aligned} x&=e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon\beta}{2}t^2\left\{1+\frac{2}{3}\varepsilon t+\frac{t^2}{12}(3\varepsilon^2-2\beta^2)+\cdots\right\},\\ y&=e^{-\varepsilon t}\frac{\varepsilon\beta}{8}t^4+\cdots \end{aligned}\right\}\cdots(11)$$

となる．

次に旋回が進めば第1表の I の範圍より IV の範圍に入る．この場合には微分方程式は

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\varepsilon\alpha-cty,\\ \frac{dy}{dt}&=-\varepsilon y+ctx \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

この微分方程式を解き

$$\begin{aligned} x=&A\left(1+\frac{1}{8}c^2t^4-\frac{\varepsilon c^2}{30}t^5+\frac{\varepsilon^2c^2}{144}t^6-\cdots\right)\\ &+Bt^2\left\{1-\frac{2}{3}\varepsilon t+\frac{1}{4}\varepsilon^2t^2-\frac{\varepsilon^2}{15}t^3+\left(\frac{\varepsilon^4}{72}+\frac{c^2}{24}\right)t^4-\cdots\cdots\right\}\\ &+\varepsilon\alpha t+\frac{\varepsilon\alpha c^2}{15}t^5-\frac{\varepsilon^2\alpha c^2}{24}t^6+\cdots,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y=&A\left[-\frac{1}{2}ct^2+\frac{\varepsilon c}{6}t^3-\frac{\varepsilon^2c}{24}t^4+\frac{\varepsilon^3c}{120}t^5\right.\\ &\left.-\left(\frac{\varepsilon^4c}{720}+\frac{c}{48}\right)t^6+\cdots\right]\\ &+B\frac{1}{c}\left[-2+2\varepsilon t-\varepsilon^2t^2+\frac{\varepsilon^3}{3}t^3-\left(\frac{\varepsilon^4}{12}+\frac{c^2}{4}\right)t^4\right.\\ &\left.+\left(\frac{\varepsilon^4}{60}+\frac{c^2\varepsilon}{6}\right)t^4-\left(\frac{\varepsilon^5}{360}+\frac{5}{72}c^2\varepsilon^2\right)t^6+\cdots\right]\\ &-\frac{\varepsilon c\varepsilon}{3}t^3+\frac{\varepsilon^2\alpha c}{4}t^4-\frac{\varepsilon^3\alpha c}{20}t^5+\frac{\varepsilon^4\alpha c}{120}t^6-\cdots\cdots\cdots\cdots(14) \end{aligned}$$

となる．

IV の範圍の初めに於ては

$t=0$ にて $x=x_1,\ y=y_1$

であるから (13), (14) 式に代入すれば

$$A=x_1\ ,\qquad B=-\frac{c}{2}y_1.$$

となる. 玆に x_1, y_1 は I の範圍の最後の x 及び y の値である.

(13) (14) 式の t は IV の範圍の最初より測定する.

數値計算

I の範圍に於ては a) の場合は (10) 式 b) の場合は (11) 式により IV の範圍に於ては (13) 及び (14) 式により計算する.

ヂヤイロの調整を 30° 傾斜より起立の時間を 2 分の如くすれば

$$\varepsilon=\frac{1}{12}$$

である.

著者の一人[4]は $c=0.04$ の場合に微分方程式を Stirling の公式を用ひて直接數値計算を行ひ, 又他の一人[5]は $c=0.05$ の場合に Runge-Kutta の公式を用ひて數値計算を行つた. 前記の式で行つた計算とこれ等の計算とは殆んど一致して居る故に一纒にして記載することにする.

1) $c=0.04$ の場合

a) 迎角一定の場合

第 2 表

t 秒	x	y
I の範圍		
0	0	0
0.05	0.000036	9.3×10^{-10}
0.10	141	1.412×10^{-8}
0.15	317	7.121 〃
0.165	382	1.04×10^{-7}
IV の範圍		
0.165	382	1.04×10^{-7}
0.255	775	5.50 〃
0.355	1211	1.767×10^{-6}
0.475	1734	4.70 〃
0.555	2083	7.81 〃
0.675	2606	1.466×10^{-5}
0.755	2955	2.091 〃
0.875	3478	3.325 〃
0.955	3827	4.370 〃
1.035	4176	5.610 〃

(4) 岩名儀文　(5) 宮坂五一郎

旋回開始後1秒に於ける誤差を計算すれば

$E=4.022\times10^{-3}$ radian

$=13.50''$

である.

b) 速度一定の場合

I の範圍に於て a) の場合と差異が表れない. 故に IV の範圍に於ても同様である.

2) $c=0.05$ の場合

a) 迎角一定の場合

第 3 表

I の範圍		
t 秒	x	y
0	0	0
0.05	0.000042	1.31×10^{-9}
0.09	141	1.41×10^{-8}
0.11	212	3.17 〃
0.12	272	5.08 〃
0.124	289	5.77 〃
IV の範圍		
0.124	289	5.77×10^{-8}
0.20	621	3.56×10^{-7}
0.40	1494	3.65×10^{-6}
0.60	2366	1.388×10^{-5}
0.80	3239	3.329 〃
1.00	4110	6.570 〃

1秒後の誤差は

$E=4.111\times10^{-3}$ radian

$=14'\ 8''$

である.

b) 速度一定の場合

第 4 表

I の範圍		
t 秒	x	y
0	0	0
0.04	0.000024	5.66×10^{-19}
0.08	108	8.37×10^{-9}
0.12	249	4.42×10^{-8}
0.125	252	5.18 〃
IV の範圍		
0.125	252	5.18×10^{-8}
0.20	579	3.12×10^{-7}
0.60	2324	1.121×10^{-5}
1.00	4069	6.236 〃

1秒後の誤差は

$E=4.069\times10^{-3}$ radian

$=13'\ 59''$

結　言

前記の計算の如く旋回初期に於ける人工水平儀の誤差は甚だ小にして現在の水平儀の精度では殆んど感知出來ない程度である. 故に旋回誤差は一定の旋回角速度に達した後に表れるものと考へられる. これには前記の根岸又は武田の計算が適用されるのである.