圓對稱型異方彈性板の撓みに就て

所員 木村鍊一

空盒に使用する波形彈性板が壓力を受けて生ずる撓みの大いさを計算する爲に，其の第一階程として，此に關連した他の極めて簡單な問題を解いて見る。即ち波形板の撓み剛性率が測定をする方向によつて異つて居るのは斷る迄も無い。此を，厚さ(h)は一樣であるが，半徑の方向にそつて測つた彈性率と其れに直角の方向に測つた彈性率とが異る樣な材料で出來た圓板で，置換へて考へる。波形板の彈性率と斯樣な置換へをした圓板の彈性率とがどんな關係にあるかは別の機會に詳しく論ずる事として，此處では彈性率が與へられた時に生ずる撓みの計算のみを行ふ。實際の板では撓み剛性(flexural rigidity)が場所によつて異る筈であるが，平均の値とでも云ふべきものをとつたと考へ，圓板の彈性率は到る處一樣であると假定する。

撓みを生じない前に圓板（半徑 a）の中心が占めて居た位置を座標の原點に選び，圓板の中心面上の一點 A との距離を r で記號する。圓板に垂直な方向に z 軸をとり，下向きの變位を w と記號する。A に於ける主曲率の一つは z 軸と A を含む平面内にあつて其の大いさは

$$\frac{1}{\rho_n}=-\frac{d^2w}{dr^2}=\frac{d\varphi}{dr}$$

である。但し，φ と記號したのは A 點に於ける法線（z 軸と交はる）が z 軸となす角を表はす。今一つの主曲率は A に於ける法線を含んで，rz 面に垂直な切口で與へられ，其の大いさは

$$\frac{1}{\rho_t}=-\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=\frac{\varphi}{r}$$

となる。

圓板から二つの半徑と二つの同心圓に沿つて切出した小さい素片をとつて其の平衡條件を調べる。z 及び r に垂直（圓周に沿つた方向）に θ 軸をとる。歪力及び歪の分布の對稱性から判斷して分る通り，此等の座標軸方向が彈性の主軸になつて居る。r 軸と z 軸とを含む平面が對稱面であるのは斷る迄もない。r 軸と θ 軸とを含む平面も對稱面と考へる。すると，今此處に切り出した素片は斜方晶系の半面體の對稱要素をもつた結晶と見る事が出來る。從つて歪力と歪との關係は9個の彈性率 C_{ij} を用ひて

$$
\begin{cases}
R_r = C_{11}\, r_r + C_{12}\, \theta_\theta + C_{13}\, z_z, \\
\Theta_\theta = C_{12}\, r_r + C_{22}\, \theta_\theta + C_{23}\, z_z, \\
Z_z = C_{13}\, r_r + C_{23}\, \theta_\theta + C_{33}\, z_z, \\
\Theta_z = C_{44}\, \theta_z, \\
Z_r = C_{55}\, z_r, \\
R_\theta = C_{66}\, r_\theta.
\end{cases}
$$

と表はされる[1]。取扱ひを簡單にする爲に板が非常に薄くて z 方向の成分を含んだ歪は考へる必要がない事を假定する。其れには

$$C_{13} = C_{23} = C_{33} = C_{44} = C_{55} = 0$$

とすればよい。對稱性から R_θ も零となるので，第一近似では

$$R_r = C_{11}\, r_r + C_{12}\, \theta_\theta,$$
$$\Theta_\theta = C_{12}\, r_r + C_{22}\, \theta_\theta$$

の二つが基礎の關係式となる。

單純な撓みの場合には

$$r_r = \frac{z}{\rho_n}, \quad \theta_\theta = \frac{z}{\rho_t}.$$

他方此素片の周緣に作用し，斯樣な歪を生ずる原因となつて居る偶力の大いさは

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_r z dz \quad 及び \quad M_\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta_\theta z dz$$

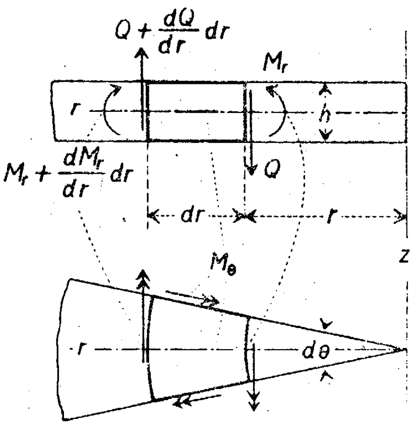
によつて勘定出來る．積分を實行し，

$$\frac{h^3 C_{11}}{12} = D_1, \quad \frac{h^3 C_{22}}{12} = D_2, \quad \frac{h^3 C_{12}}{12} = D'$$

と記號すれば，

$$M_r = D_1 \frac{d\varphi}{dr} + D' \frac{\varphi}{r}$$

$$M_\theta = D' \frac{d\varphi}{dr} + D_2 \frac{\varphi}{r}$$



第 1 圖

次に切出した素片に作用して居る力の θ 軸のまはりの能率の總和を求め[2]，其を零に等と置いて（平衡條件）整頓すれば，

$$M_r + r\frac{dM_r}{dr} - M_\theta + Qr = 0$$

（1） r, θ の代りに夫々 x, y と書けば通常の式になる．

（2） 第一圖參照．

を得る．此に上の式を代入すれば，

$$D_1\frac{d^2\varphi}{dr^2}+D_1\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-D_2\frac{\varphi}{r^2}+Q=0.$$

圓板に作用して居る力は一様な強さ p の壓力であるので，半徑 r の圓板を截出して z 方向の力の釣合を考へれば容易に解る様に，

$$Q=\frac{pr}{2}$$

でなくてはならない．從つて

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{D_2}{D_1}\frac{\varphi}{r^2}+\frac{pr}{2D_1}=0$$

を解けばよい事になる．

此の微分方程式の一般解は

$$\varphi=C_1r^{\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}+C_2r^{-\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}-\frac{pr^3}{2(9D_1-D_2)}$$

と書ける．積分常數の値は $r=a$ 及び $r=0$ の時，$\varphi=0$ となる條件によつて決まる．

即ち

$$\varphi=\frac{pr^{\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}}{2(9D_1-D_2)}\left(a^{3-\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}-r^{3-\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}\right)$$

然るに $\varphi=-\dfrac{dw}{dr}$ であるので，今一度積分し，$r=a$ の時に $w=0$ となる條件を採用すれば

$$w=\frac{pa^4}{8(3\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})}-\frac{p}{2(9D_1-D_2)}\left(\frac{a^{3-\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}r^{1+\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}}{1+\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}}-\frac{r^4}{4}\right)$$

を得る．從つて圓板の中心 $r=0$ に於ける變位が

$$(w)_{r=0}=\frac{pa^4}{8(3\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})}$$

によつて計算出來る．