

# 航空研究所彙報

## 第四十九號

昭和三年八月

### 翼の風洞試験に於ける風洞壁の影響<sup>(1)</sup>

所員 寺澤 寛一

#### 序 論

§ 1. 翼の風洞試験に對する風洞壁の影響を最初に論じたのは Prandtl であつて、彼は圓形の切口を有する風洞に就いて抗力に施すべき補正を計算して出した。<sup>(2)</sup> 後に Glauert<sup>(3)</sup> は Prandtl の考へ方を四角な切口を有する風洞に應用して議論してゐる。

共に風洞内の流れを、翼の後に引く渦の流域境界に關する像を適當に配置して、無限に廣い流れとして取り扱ふのである。然るに Glauert は翼の span を風洞の幅に比較して小さいものとして無視してゐる。そのためか彼の結果が實驗と合はないといふ評判になつてゐる。此論文は Glauert の論じた問題を最も一般的に研究したものである。

§ 2. 本問題に入る前に水力学に關する一問題の解答を記述する。

四角な切口を有する無限に長い擡形の中に液體があつて、その中に  $\mu$  なる強さの渦糸が擡壁に平行してあるとする。一つの切口を  $xy$  座標面に選び、 $x=0, x=k; y=0, y=h$  を夫々切口の水平及び鉛直の邊とする(第1圖)。渦  $\mu$  のある點の座標を  $(x_0, y_0)$ 、或は複素數を用ゐて

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

とする。此場合の流れの工合は與へられた渦の外に次の三つの渦

$$-\mu \text{ を } z_1 = (2k - x_0) + iy_0 \text{ に,}$$

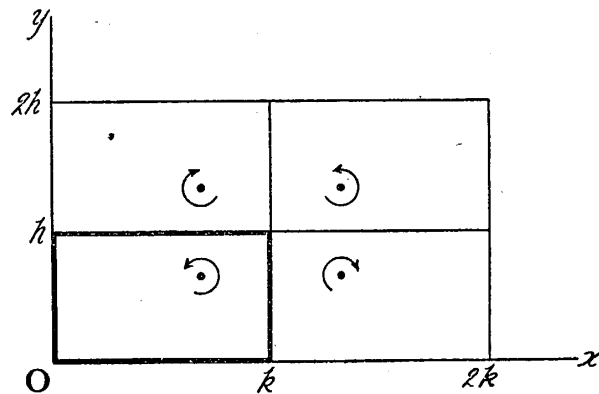
$$-\mu \text{ を } z_2 = x_0 + i(2h - y_0) \text{ に,}$$

$$+\mu \text{ を } z_3 = (2k - x_0) + i(2h - y_0) \text{ に}$$

(1) 此論文は航空研究所報告第四十四號(1923)及び其の概要は Proc. Imp. Acad. Tokyo 第4卷(1928)第4號に掲載せり。

(2) Göttinger Nachrichten, 1919 頁 123.

(3) R. & M. (1923~24) 第1卷, 頁 118.



第 1 圖

配置し、

$$2\omega = 2k, 2\omega' = 2ih$$

なる週期を有する適当な複週期函数を使用することによつて解き得る。

今複速度ポテンシャル函数を

$$\phi = \frac{\pi}{2\pi i} \log \frac{\sigma(z-z_0)\sigma(z-z_3)}{\sigma(z-z_1)\sigma(z-z_2)} \quad (1)$$

と置けば、渦に因る流れの速度の成分  $u$  及び  $v$  は此式を微分して

$$u - iv = \frac{\pi}{2\pi i} \left\{ \zeta(z-z_0) - \zeta(z-z_1) - \zeta(z-z_2) + \zeta(z-z_3) \right\}$$

より得られる、實値と虚値を分けて

$$u = -\frac{\pi}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{\wp}'(y-y_0)}{\wp(x-x_0) + \bar{\wp}(y-y_0)} - \frac{\bar{\wp}'(y-y_0)}{\wp(x+x_0) + \bar{\wp}(y-y_0)} - \frac{\bar{\wp}'(y+y_0)}{\wp(x-x_0) + \bar{\wp}(y+y_0)} + \frac{\bar{\wp}'(y+y_0)}{\wp(x+x_0) + \bar{\wp}(y+y_0)} \right\}, \quad (1)$$

$$v = \frac{\pi}{4\pi} \left\{ \frac{\wp'(x-x_0)}{\wp(x-x_0) + \bar{\wp}(y-y_0)} - \frac{\wp'(x+x_0)}{\wp(x+x_0) + \bar{\wp}(y-y_0)} - \frac{\wp'(x-x_0)}{\wp(x-x_0) + \bar{\wp}(y+y_0)} + \frac{\wp'(x+x_0)}{\wp(x+x_0) + \bar{\wp}(y+y_0)} \right\}, \quad (2)$$

之れより直に

$$x=0 \text{ 及び } x=\omega=k \text{ のとき } u=0,$$

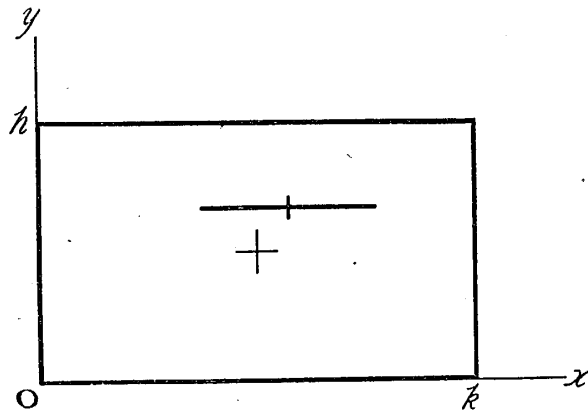
(1) 楕圓函数に關する記號は Halphen の “Traité des fonctions elliptiques” に據る。

$$y=0 \text{ 及び } y=\frac{\omega'}{i}=h \text{ のとき } v=0$$

なる境界条件が満足されることが証明できる。

## 本 論

§3. 前の § で解いた問題は直に現在の問題の解答に應用することができる。切口の大きさが  $h \times k$  なる英國流四角風洞内に span が  $l$  なる翼が水平に置いてあるとする (第2圖)。 $\Gamma$  を以て



第 2 圖

此翼に関する circulation とすれば、 $\Gamma$  は一般に翼上の點の座標  $(x_0, y_0)$  の函数である。

Prandtl に従つて式 (1) 及び (2) の  $u$  を  $-\frac{d\Gamma}{dx_0}$  で置き換へ、翼の全 span に沿つて積分し、且つ後曳きの渦が半無限の長さであると考えるにより之を二分すれば 風洞内の任意の點に於ける速度が得られる。故に風洞外に配置した渦の像だけに因る翼上の任意の點に於ける鉛直成分を  $v'(x)$  とすれば

$$v'(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{x_c - \frac{1}{2}l}^{x_c + \frac{1}{2}l} \frac{d\Gamma}{dx_0} \left\{ \frac{\wp'(x-x_0)}{\wp(x-x_0) + \wp(2y_0)} - \frac{\wp'(x+x_0)}{\wp(x+x_0) + \wp(2y_0)} + \frac{2}{x-x_0} \right\} dx_0, \quad (3)$$

但し  $x_c$  は翼の中央の横座標である。

此成分に因る翼の抗力を  $W'$  とすれば

$$W' = -\rho \int_{x_c - \frac{1}{2}l}^{x_c + \frac{1}{2}l} \Gamma(x) v'(x) dx, \quad (4)$$

こゝで  $\rho$  は空気の密度である。(4) は翼の抗力に対する風洞壁の影響を表はす最も一般的な式である。

§ 4. 翼が風洞の中央にあるときには (3) 及び (4) の中に

$$x_e = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\omega, \quad y_0 = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2i}\omega',$$

と置けばよい。又この時には

$$\overline{\varphi}(2y_0) = \overline{\varphi}\left(\frac{\omega'}{i}\right) = -\varphi(\omega') = -e_3$$

であるから (3) 及び (4) は幾分簡単になつて

$$v'(x) = \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{2}(\omega-l)}^{\frac{1}{2}(\omega+l)} \frac{d\Gamma}{dx_0} \left\{ \frac{\varphi'(x-x_0)}{\varphi(x-x_0)-e_3} - \frac{\varphi'(x+x_0)}{\varphi(x+x_0)-e_3} + \frac{2}{x-x_0} \right\} dx_0, \quad (5)$$

$$W' = -\frac{\rho}{8\pi} \int_{\frac{1}{2}(\omega-l)}^{\frac{1}{2}(\omega+l)} \int_{\frac{1}{2}(\omega-l)}^{\frac{1}{2}(\omega+l)} \Gamma'(x) \frac{d\Gamma}{dx_0} \left\{ \frac{\varphi'(x-x_0)}{\varphi'(x-x_0)-e_3} - \frac{\varphi'(x+x_0)}{\varphi(x+x_0)-e_3} + \frac{2}{x-x_0} \right\} dx dx_0 \quad (6)$$

となる。

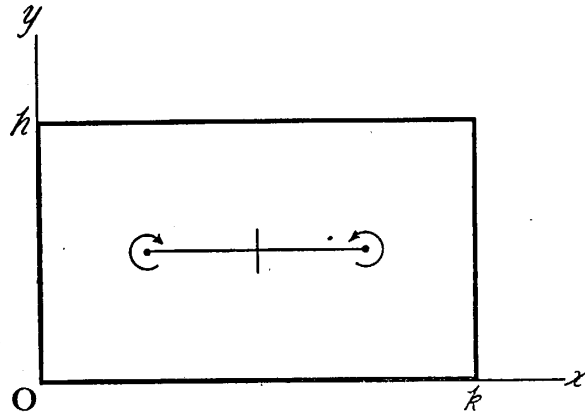
## 馬 蹄 渦

§ 5. 前節に於いて英國流風洞の風洞壁の翼の空気力學的性能に對する影響を一般に論じたけれども、結果は可なり複雑で、假令  $\Gamma$  の配置が如何に簡單でも、實驗室用計算士のよく運轉し得ないものであつて、折角の一般議論も机上の空論となつて反古籠入りの運命に満足しなければならぬいかも知れない。それで最も簡単な渦の配置として例の馬蹄渦が風洞の中央にあるものとして結果を示してみよう。Glauert の論じたのも之である。

此場合を前の特別のものとして論ずるより直接に論じても大して手数が違はないから、此處では  $\Gamma$  及び  $-\Gamma$  なる半無限長の渦が夫々

$$\left( \frac{1}{2}(\omega+l), \frac{1}{2i}\omega' \right), \quad \left( \frac{1}{2}(\omega-l), \frac{1}{2i}\omega' \right)$$

なる點にあるものとして考へを進めて行く(第 3 圖)。



第 3 圖

序論で述べたと同様な計算で任意の點に於ける速度成分 ( $u, v$ ) が求め得る。それ等の式から、渦の像だけに因る翼上の任意の點に於ける鉛直成分を求めれば

$$v'(x) = \frac{\Gamma}{8\pi} \left\{ \frac{\wp'(x + \frac{\omega+l}{2})}{\wp(x + \frac{\omega+l}{2}) - e_3} - \frac{\wp'(x - \frac{\omega+l}{2})}{\wp(x - \frac{\omega+l}{2}) - e_3} - \frac{2}{x - \frac{\omega+l}{2}} - \frac{\wp'(x + \frac{\omega-l}{2})}{\wp(x + \frac{\omega-l}{2}) - e_3} + \frac{\wp'(x - \frac{\omega-l}{2})}{\wp(x - \frac{\omega-l}{2}) - e_3} + \frac{2}{x - \frac{\omega-l}{2}} \right\} \quad (7)$$

となる。

§ 6. 式 (7) で得た  $v'(x)$  の値は翼上の點の座標の函数であるから、その平均値を次の式

$$\bar{v}' = \frac{1}{l} \int_{\frac{1}{2}\omega}^{\frac{1}{2}(\omega+l)} v'(x) dx \quad (8)$$

で定義し、迎角に對する壁の影響による補正

$$\Delta\alpha = -\frac{\bar{v}'}{V} \quad (9)$$

の計算に資せんとする。 $V$  は風洞内の風の速さである。

上の積分は楕圓函数に關する種々の公式を利用して計算すれば

$$\bar{v}' = -\frac{\Gamma}{2\pi l} \log \frac{l \sigma_2(l) \sigma_3(l)}{\sigma_1(l) \sigma(l)}$$

となる。又は

$$\nu = \frac{l}{2\omega} = \frac{1}{2k}$$

と置けば

$$\bar{v}' = \frac{\Gamma}{2\pi l} \log \frac{\nu \vartheta_0(\nu) \vartheta_3(\nu) \vartheta_1'(0) \vartheta_2(0)}{\vartheta_1(\nu) \vartheta_2(\nu) \vartheta_3(0) \vartheta_0(0)} \quad (10)$$

となる。此結果もまだ取り扱いが不便であるから Jacobi の  $q$  級数を使つて表はしてみる。即ち

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{ih}{k}, \quad q = e^{i\pi\tau} = e^{-\pi \frac{h}{k}}$$

と置けば

$$\bar{v}' = \frac{\Gamma}{2\pi l} K(\nu, q) \quad (11)$$

なる形となる。但し

$$K(\nu, q) = \log \frac{2\nu\pi}{\sin 2\nu\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1-q^{4n}}{1-q^{4n-2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{(1-2q^{2n-1} \cos 2\nu\pi + q^{4n-2})(1+2q^{2n-1} \cos 2\nu\pi + q^{4n-2})}{(1-2q^{2n} \cos 2\nu\pi + q^{4n})(1+2q^{2n} \cos 2\nu\pi + q^{4n})} \quad (12)$$

§ 7. 抗力に対する影響としては

$$W' = -\rho \Gamma \int_{\frac{1}{2}(\omega-l)}^{\frac{1}{2}(\omega+l)} v'(x) dx$$

を計算すればよい。是は (8) の計算と全く同様であつて結果は

$$W' = -\frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} K(\nu, q) \quad (13)$$

となる。

若し風洞の切口は正方形 ( $h=k$ ) のときには

$$q = e^{-\pi} = 0.0432139,$$

若し幅は高さの 2 倍ならば ( $k=2h$ ),

$$q = e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.2078796,$$

若し高さは幅の 2 倍ならば ( $h=2k$ ),

$$q = e^{-2\pi} = 0.0018674.$$

實用上有用な是等の場合には  $q$  の値は可なり小さいから、 $K(\nu, q)$  といふ函數の第一項だけを採れば大略の推測には充分である。

### 補 正 公 式

§ 8. 此節では馬蹄渦の假定によつて得た結果が應用できるものとして、迎角及び抗力に對する補正公式を導く。

$c_a$  で揚力係數 (英國流の係數  $k_l$  の 2 倍)  $c_w$  で抗力係數 ( $k_d$  の 2 倍) を表はし、 $\alpha$  で迎角を表はせば、風洞壁のある爲めの補正として實驗値に加へべき數を (9), (11), (12) (13) を使つて出せば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{c_a}{4\pi s} K(\nu, q), \\ \Delta c_w &= \frac{c_a^2}{4\pi s} K(\nu, q) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

である。 $s$  は翼の aspect ratio を表はす。之を Grauert. の書き方に倣つて、 $S$  で翼の面積、 $C$  で風洞切口の面積を表はせば、

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \varepsilon \frac{S}{C} c_a, \\ \Delta c_w &= \varepsilon \frac{S}{C} c_a^2. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

又は英國流に書けば

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= \delta \frac{S}{C} k_l, \\ \Delta k_d &= \delta \frac{S}{C} k_l^2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

で、 $\delta = 2\varepsilon$  なる係數は

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} = \frac{kh}{4\pi l^2} K(\nu, q) \quad (17)$$

で與へられる。係數  $\varepsilon$  は風洞切口の大きさの割合 ( $q$  で與へられる) によつて變るのみならず、翼の span と風洞切口の邊の長さとの比 ( $\nu$  で與へらる) によつて大に左右されるのである。之は Glauert の結果に比して大差ある所である。

## 例

§ 9. 我國には此處で論じてゐる様な風洞がないから、止むなく外國の實驗を例示する。

茲では英國航空研究委員會の提案に基き諸國の専門家の賛成によつて成立してゐる風洞試験の國際事業に使ふ翼に就いて例示しやう。之は目下我國に於いて實驗中である。

翼として選ばれたものは R. A. F. No. 15 といふ切口で、aspect ratio が 6:1 で弦は 6 吋である。英國に於ける實驗は既に済んで其結果は發表されてゐる。(1) 用ゐた風洞は 4 呎平方及び 7 呎平方の切口を有するものゝ二種である。(17) によつて係數  $\varepsilon$  又は  $\delta$  を求め、(15)、(16) によつて補正值を出せば

$$i) \quad k=h=4, \quad l=3, \quad s=6:—$$

$$q=0.0432139,$$

$$\nu=3/8,$$

$$K(\nu, q)=1.20737,$$

$$\varepsilon=0.170806,$$

$$\Delta\alpha^\circ=0.92 \quad c_a=1.83 \quad k_l,$$

$$\Delta c_w=0.016013 \quad c_a^2,$$

$$\Delta k_a=0.032036 \quad k_l^2.$$

$$ii) \quad k=h=7, \quad l=3, \quad s=6:—$$

$$q=0.0432139,$$

$$\nu=3/14,$$

$$K(\nu, q)=0.329967,$$

$$\varepsilon=0.14296,$$

$$\Delta\alpha^\circ=0.25 \quad c_a=0.50 \quad k_l,$$

$$\Delta c_w=0.004376 \quad c_a^2,$$

$$\Delta k_a=0.008753 \quad k_l^2.$$

比較のため Glauert の得た結果を挙げれば (i) の場合に對して

$$\Delta\alpha^\circ=1.47 \quad k_l,$$

$$\Delta k_a=0.0256 \quad k_l^2$$

で、(ii) の場合に對しては

(1) R. & M. (1925) No. 954.



$$\Delta a^\circ = 0.48 k_i,$$

$$\Delta k_a = 0.00838 k_i^2$$

であつて、特に初めの場合に對する値が此處で得たものと比較して著しい差がある。

初めから豫想し得る通り、翼の span と風洞切口の一邊との比が大きくなるにつれて風洞壁による補正が益々大きくなる。故に係數  $\epsilon$  又は  $\delta$  が  $k, h$  及び  $l$  に對して如何に變るかを示す表を計算して置く方が便利であらうが我國では餘り用がないから作表の仕事は外國人に譲ることとする。