

# 航空研究所彙報

## 第五十二號

昭和三年十一月

### 風洞の壁が模型の揚力係数に及ぼす影響に就て

(航空研究所報告第四十六號抄錄)

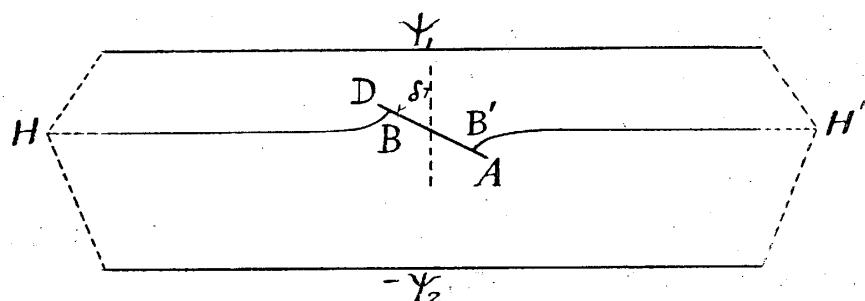
所員 佐々木達治郎

#### 緒 言

揚力係数は風洞の中に於て變化しないものとして、Prandtl は抗力係数の變化を計算したけれども實際には揚力係数も變化されるものである。揚力係数の變化に関する研究は未だない様である。此問題を三次元に於て取扱ふのは大變困難であるけれども平面の問題として取扱ふ時は複雑ながら解け得るから以下 N. P. L. 型風洞及 Göttingen 及 Eiffel 型の風洞に就て計算した。

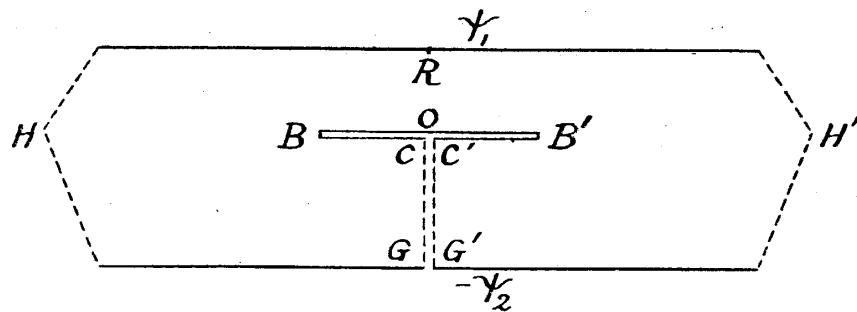
#### I

(a) 二つの平行な板の間に斜めに置かれた板の揚力係数に就て。



第一圖

Circulation のない時の流れは第一圖の通りである。此圖を  $z$  面とする。complex potential function  $f (= \phi + i\psi)$  は第二圖に示す様になる。



第二圖

之を二邊が  $2\omega$  及  $\frac{\omega_3}{i}$  なる  $s$  面内の矩形に變換すると  $f$  は  $s$  の函數として表される。即ち

$$f = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\pi} \left\{ [\zeta(\mu+\nu) - \zeta(\mu-\nu)](s-\mu) - \log \frac{\sigma(s+\nu)\sigma(\mu-\nu)}{\sigma(s-\nu)\sigma(\mu+\nu)} \right\}$$

茲で  $s=\mu$  は  $B$  點に  $s=\nu$  は  $H$  點に相當する。

$s$  面内の矩形は

$$s = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z$$

なる關係によつて  $Z$  面内の半徑が 1 と  $q (= e^{\frac{i\pi w_3}{\omega_1}})$  との間の ring region に變換される。

今無限に遠い所の流れの速さを 1 とし

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}$$

と置けば  $\Omega$  は Villat の式によつて計算される。即ち

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta$$

$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^2 \Psi(\theta) \zeta \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \theta \right) d\theta,$$

$$\text{及 } \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \Psi(\theta) d\theta.$$

茲で  $\Phi(\theta)$  は斜めな板の面に沿ふた流れが  $x$  軸の正の方向となす角を  $Z$  面の中心角で表したもの。

$\Psi(\theta)$  は二板の平行な板のそれで茲では  $O$  である。

此様にして  $f$  及  $\Omega$  を計算すれば  $z$  は

$$z = \int e^{i\Omega} df$$

で計算出来る。即ち

$$\begin{aligned}
& z = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\pi} e^{i(\delta + \frac{\pi}{2})} - 2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\theta_1 + \theta_2}{\pi} - 1 \right) \left( \frac{\delta}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \\
& \times \frac{2\omega_1}{\pi} \left[ e^{i\delta} + q e^{-i\delta} \right] \frac{\sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_4 - \theta_2) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_3 - \theta_2) \right]}{\sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) \right]} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4 \cos \delta} \left( \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{n+1} (-1)^n q^n \frac{\omega_1 i}{\pi} \cdot \frac{Z e^{-i\frac{n\pi\nu}{\omega_1}} (e^{i\delta} + q e^{-i\delta}) Z e^{-i\frac{n\pi\nu}{\omega_1}} (e^{-i\delta} + q e^{i\delta})}{2^n \left[ 1 - 2q \cos 2\left(\frac{\delta}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \pi + q \right]} \right. \\
& - e^{-2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi} - 1 \right) \left( \frac{\delta}{\pi} - \frac{1}{2} \right)} \times \frac{\sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_2 + \theta_4) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_2 + \theta_3) \right]}{\sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) \right]} \\
& \times \left\{ \frac{1}{4 \cos \delta} \left( \omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) \right. \\
& \left. - \sum_{n=1}^{n+1} (-1)^n q^n \frac{\omega_1 i}{\pi} \cdot \frac{Z e^{-i\frac{n\pi\nu}{\omega_1}} (e^{i\delta} + q e^{-i\delta}) - Z e^{-i\frac{n\pi\nu}{\omega_1}} (e^{-i\delta} + q e^{i\delta})}{2^n \left[ 1 - 2q \cos 2\left(\frac{\delta}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \pi + q \right]} \right\}
\end{aligned}$$

茲で  $\theta_3 = \pi - \delta$ ,  $\theta_4 = -\delta$ .

circulation を  $\Gamma$  とし

$$f_1 = i\Gamma \log Z$$

なる complex potential function を添加し斜めな板の下端 C で流が一致する様に  $\Gamma$  を定めると

$$\Gamma = (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \cdot \frac{\sigma_3 \left( 2 \frac{\omega_1 \theta_2}{\pi} \right) \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_4) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 + \theta_4) \right]}{\sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_2 + \theta_4) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_2 - \theta_4) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 + \theta_2) \right] \sigma_3 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) \right]}$$

となる。

板に働く力は

$$P = -\frac{i\rho}{2} \int \left( \frac{df}{dz} + \frac{df_1}{dz} \right)^2 dz$$

で計算出来る。即ち

$$\int \left( \frac{df}{dz} + \frac{df_1}{dz} \right)^2 dz = \frac{2\pi^2 \Gamma}{\omega_1 \cos \delta} e^{2\eta_1 \omega_1 \left( \frac{\theta_1}{\pi} - 1 \right) \left( \frac{\delta}{\omega} - \frac{1}{2} \right)} \\ \times \left[ e^{2\eta_1 \omega_1 \frac{\theta_4}{\pi} \left( \frac{\delta}{\pi} - \frac{1}{2} \right)} \times \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_3 + \theta_4) \right] \sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_4) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_3 - \theta_4) \right]} \right. \\ \left. - e^{2\eta_1 \omega_1 \frac{\theta_3}{\pi} \left( \frac{\delta}{\pi} - \frac{1}{2} \right)} \times \frac{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} \theta_1 + \theta_3 \right] \sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_1 - \theta_3) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (\theta_3 - \theta_4) \right]} \right]$$

之は real であるから  $P$  は imaginary. 即ち Lift のみになる。

特別な場合。 $\psi_1 = \psi_2$  なる時。Lift を  $L_1$  平行な板の間隔を  $d$ ,  $d = \infty$  の時の  $L$  を  $L_0$ , 斜めな板の幅を  $b$  とすれば迎角  $10^\circ$  の時次の結果を得る。

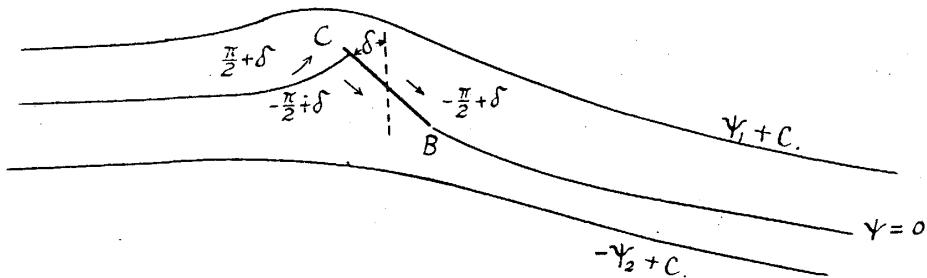
$b/d$	$L/L_0$
0	1
0.1271	0.9789
0.2055	0.9485
0.2996	0.9068

(b) Joukowsky の羽根を N. P. L 型風洞に入れたる場合。

此場合の解は前の問題の解から conformal representation によつて得られる。即ち前の(1)式によつて  $Z$  面の半径  $\approx 1$  と  $q$  との圓の間の ring region は  $z$  面では平行な二直線と其間に斜めになつた slit  $x$  に transform され同時に  $Z$  面で半径 1 と  $1/q$  との圓の間の ring region は  $z$  面では前と同しく然して Riemann surface の下側の面に transform される。それ故に内側の圓の半径が  $b$  で外側の圓は半径 1 の圓と交る様な eccentric な ring region を(1)式で transform すれば  $z$  面に於ては平行な二直線と其間に Joukowsky の羽振形の線とからなる figure になる。此場合の計算は複雑であるから報告の本文にゆづり結果のみを記すと次の如くなる。Lift は circulation の他風洞の height と羽根の chord との ratio 羽根の曲率、及び迎角とに關係する。之は Kutta Joukowsky の法則と大變異なる點である。

## II

Göttingen 型及 Eiffel 型の風洞の場合には model が空氣の jet の中に置かれた場合になるから次圖に示す如き形の流れになる。



第三圖

此場合には jet の面に於ては pressure const. であるから前の Villat の式をその儘用ひる事は出来ない。

今

$$\begin{aligned} Q(Z) = & \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \left\{ \zeta \left[ \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1 \theta}{\pi} \right) \middle| \omega_1, 2\omega_3 \right] \right. \\ & \left. - \zeta_s \left[ \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1 \theta}{\pi} \right) \middle| \omega_1, 2\omega_3 \right] \right\} d\theta \end{aligned} \quad (2)$$

とし  $\Phi(\theta)$  は Villat の式に於けると同様な意味を有するものとすれば、半徑  $a$  なる圓上では  $Q(Z)$  の imaginary part が 0 になる故に velocity const. の條件を満足する。

Complex potential function は continuous flow のものと circulation のものとの二つになるから前の場合と同様  $s$  面で表せば

$$\begin{aligned} w = f + f_1 = & \frac{\phi_1 + \phi_2}{\pi} \left\{ [\zeta(\mu + \nu) - \zeta(\mu - \nu)] (s - \mu) - \log \frac{\sigma(s + \nu) \sigma(\mu - \nu)}{\sigma(s - \nu) \sigma(\mu + \nu)} \right\} \\ & + I' \frac{\pi}{\omega_1} (s - \omega_1 - \omega_3) \end{aligned}$$

となる。 $\mu, \nu, I'$  は前の場合と同様な意味を有す。

(2) 式で  $Q$  を計算し。

$$z = \int e^{iQ} d\omega$$

で  $z$  を計算する。 $z$  は aerofoil の廻りを一週するも同一値を有する事になるから  $2\omega_1$  の period を有す。

又  $Q(\nu) = 0, Q(-\nu) = -\alpha$  なる條件から  $z$  式に入る unknown quantities を定める事が出來て間

題は解かれるのである。茲で  $\alpha$  は down wash の角である。

複雑な計算は報告の本文にゆづり aerofoil が板の場合に板に働く力を計算すると、力を  $P$  で表せば

$$\frac{P}{\rho b} = \frac{d}{b} \times (1 - \cos \alpha + i \sin \alpha).$$

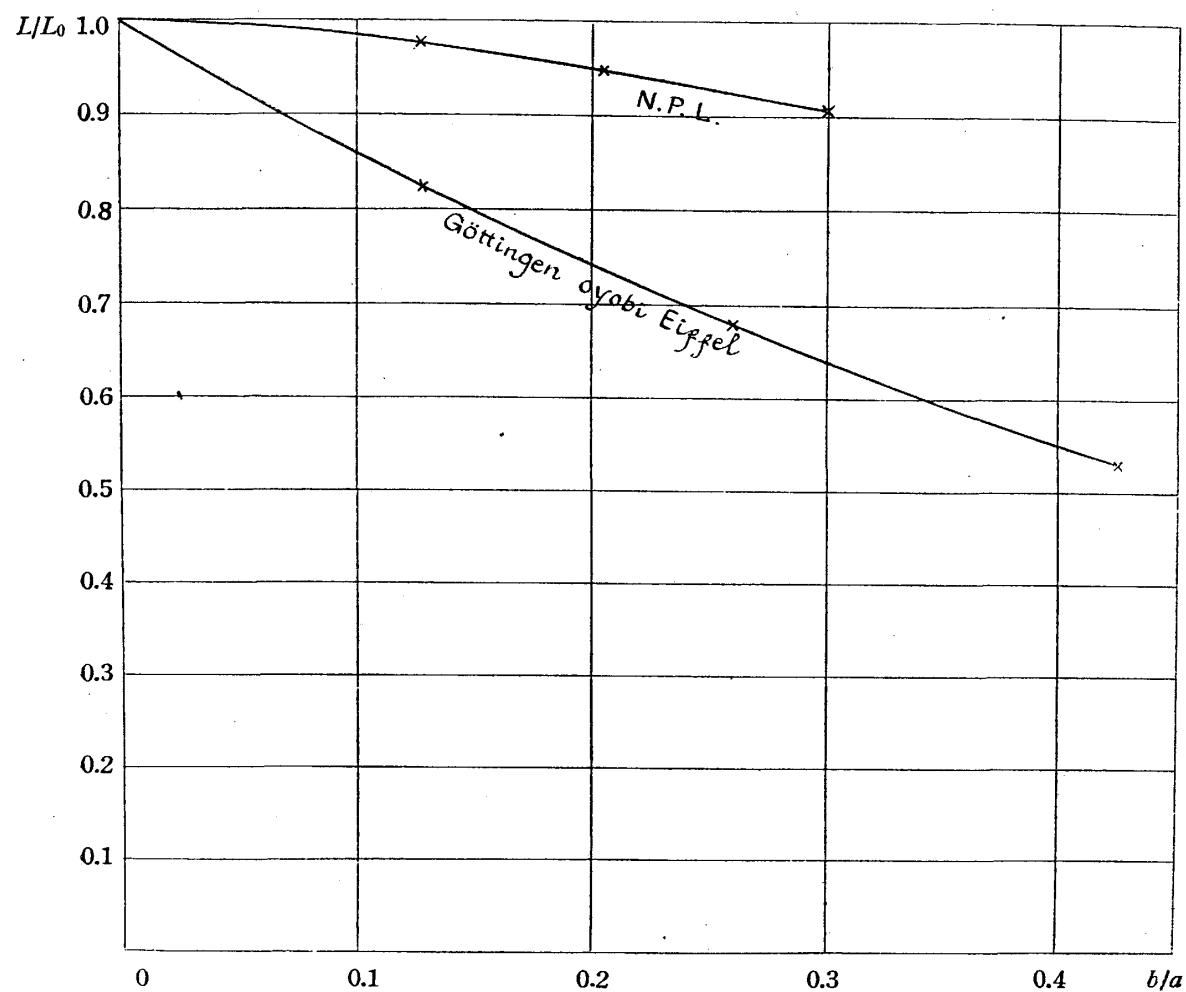
茲で  $b$  は板の幅、 $d$  は jet の幅である。

此式によつて見れば揚力と同時に抗力が働く事が解る。viscosity 以外の原因による抗力の這入る事は不利益である。

$\varphi_1 = \varphi_2$ 、迎角  $10^\circ$  の場合を計算すれば次表の通りである。

$b/d$	$L/L_0$	$\alpha$
0	1	$0^\circ$
0.1277	0.8255	$3^\circ 17' 45''$
0.2601	0.6796	$5^\circ 32' 2''$
0.4253	0.5318	$7^\circ 5' 16''$

N.P.L の場合と此場合との  $L/L_0$  を圖に示して比較すれば次圖の様である。



第四圖