

梁及び板に傳はる衝撃の或問題

(航空研究所報告第四十五號抄録)

所員 妹 澤 克 惟

研究の目的 構造材料に傳播する衝撃の問題が最近の航空機設計に重要⁽¹⁾である事は、既に航空研究所彙報第五十二號⁽²⁾に簡単に記して置いた。實際問題として極めて切迫しつゝある事柄であるから尙一度重要な理由を述べよう。今迄の構造設計は大體靜力學的外力に對する抵抗力に安全率として幾倍かをかけてこれを其設計上の抵抗値として取るのが普通である。しかしよく考へて見ると安全率は決して無意味なものではなくて、衝撃の様な動的外力が働く場合に構造素の受ける應力が靜的の場合の二倍乃至三倍になる事は理論上にも實際上にも確からしいから、安全率が充分理由ある事は明かである。又荷重係数は特定な場合の外力を指定しては居るものゝ衝撃の様な動的外力が働く場合を直接に加味して居る事も想像される。しかし此は筆者の想像だけで實際は斯くの如き重要な係数が從來極めて長年月に涉り、且つ極めて廣汎に採用せられて居るにも拘らず、其充分な理由や又は深い研究が今もつて閑却されて居る様な嫌ひはなからうか。尤も飛行機構造素の安全率は別々の荷重係数を直接に推定し得る部分に就ては調節して居る事もあるが、安全率其物の理由ある調節とは思はれぬ節がある。何となれば荷重係数は如何に解析的に考へても荷重の靜的分配であり且つ荷重の特定状態に過ぎぬ。然るに安全率は以上の如き考慮も多少必要かも知れぬが大體に於て動的受力和且つ材料中の動的歪の傳播にある。而して動的歪の傳播を考へる時は當然材料の粘弾性力學が必要となる。而もこれは受撃状態の傳播であるから單に振動體の漸減振動を考へるだけでは何等の意味をもなさぬ事になる。即ち漸減前進波動の性質を考へる必要がある。この粘弾性力學は從來餘り行はれなかつた様であるから安全率の理由や分配などに人々の注意を引かなかつたのは無理からぬ事かも知れぬ。この粘弾性力學の具體的な場合やこの論文にある棒や板の曲波動の根本式は筆者⁽³⁾が恐らく始めであらう。この力學による時は構造の一部には特別な應力が加はる代りに他の部分では今迄考へて居た程の應力が働かぬ様になるから從來の餘計な構造素がとれて他の部分へ移せる事になり、全體として強度が大きくなり、重量は反て輕減される可能性がある。

衝撃だけの問題としては從來材料學者や冶金學者が種々の實驗や理論を示して居るが、稍もすると表面衝突による永久歪や有限棒の反覆振動の研究に陥つたりして居る様に思はれる。又思索學

(1) 岩本教授、横田技師等の 1923 年の海防機に關しての意見、實行。

(2) 筆者、「棒に傳はる縦衝撃波(序報)」航空研究所彙報第五十二號(1928)。

(3) 筆者、地震研究所彙報第三號(1927)第五號(1928)。

者は其スペキュラチブ、ソートを餘りに活用する結果、筆者のこの解析的な研究とは相容れぬ場合も起るかも知れぬが、斯る力學上の問題は出来る限り分析的に解く方が確實であらう。尙、永久歪や破壊の説明⁽¹⁾に對してさへ近來は解析的方法が行はれて來た様に見える。

さて梁や板の力學は其基礎式や根本の考方だけは極めて容易であるが、衝撃波動の問題及び斯る波動によつて起る諸現象の解析は餘り容易とは謂ふ事が出来ぬ。而もこの梁や板の問題は構造材料の重要な一部をなすものであるからこの問題が特別に取扱はるべきはいふまでもない。勿論計算に於て粘弾性力學をどこまでも押して行く事が甚だ煩はしいから、筆者は波動の生成や波動中の簡単な作用だけ粘弾性力學を應用し、他の複雑な現象は完全な弾性力學問題として取扱つた。論文の中に含まれて居る様な斯る現象は弾性力學のみで充分説明がつくし、又斯る複雑な場合は普通の弾性力學でも未だやつてない様に思はれるからである。尙又構造材料の問題として、梁や板の様な特別な部分でなく、一般の連続弾性體に衝撃が働く場合も大切かも知れぬが、其等は筆者の別の論文⁽²⁾にある諸弾性波の計算が目的こそ違つて居るものゝ方法が其儘役立つ様に考へられる。

論文は大體二部に分け、始めの部には梁の問題、後の部には板の場合が書いてある。勿論報告第四十五號の全部を抄すことは紙面を多く費すことになるから、こゝには其概要を説明するだけに止める。尙この論文では主として諸現象の説明をしてあり、直接の應用には多少困難な點もあらうが、筆者の目的は寧ろ現在研究中にある組立構造に於ける衝撃傳播の問題であり、其には種々の豫備計算が必要であるから其意味に於ける締めくゝりに過ぎぬ事を注意して置く。

強制振動と自由波動とに就て 衝撃や強制振動の問題で多くの場合に

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + c\phi = \Phi \quad [\phi, \Phi \text{ 場所と時の函數}]$$

の如き型の基本式を用ひる習慣があるが、これを解くには種々の定理を應用しても猶完全に行かぬ。然るに固體に加はる衝撃では恰も無限に擴がる媒體の如き波動が可能であり、たとひ所々不連続箇所があつても其部分の反射、屈折の如き現象を考へて行くからやはり波動として差支へない、外力の接する部分の他は全部自由波動の形式をとる事が明かである。故に

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + c\phi = 0. \quad [\text{摩擦等を省く}]$$

の如き自由振動の基本式を應用して唯其解を自由波動の形で以て表はせば充分である。この場合に其解法が極めて容易なことは周知の事柄である。又普通の自由振動の場合の如く其個有週期などは殆ど不必要であるし、共鳴振動も何等直接の意味を持たぬ。即ちこの方法によつて極めて容易に而

(1) 筆者等「球窩又は充填球を有する弾性體の應力分布」航空研究所彙報第五十二號 (1928)。

(2) 筆者、地震研究所彙報第二、三、四、五、六號等 (1927-1929)。

も強制振動の方法よりも寧ろ適切な意味をもつて解が得られる事を特別に注意した譯である。尙この意味で行けば衝撃は普通の波動の多少急激に行はれるものに過ぎぬ事になるし、又強制振動も固體が波動物體である限りやはり波動の問題である事が知られる。唯所謂衝撃は波動型が急激な傾斜を持つ爲に彈性體の場合でも粘性が同時に働くといふ事が異なる位で種々の現象に對しては彈性波と大體同じ傾向を示すものである。衝撃を外力の時間に對する力積とのみ考へる事は衝撃の意味を誤つて居る⁽¹⁾様に思ふ。

梁に於ける衝撃の擴散 梁の粘彈性力學には下記の式が最も適當であらう。但し廻轉慣性を考慮に入れる議論があるかも知れぬが其等は働かぬとする力學を論じ得る事は深海波に於て水面張力を看過するのと同じい。又廻轉慣性が働くとしても斯る場合には後に述べる高周波動の特別な取扱ひを要するから斯る議論は大體無意味と考へられる。さて運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi k^2 \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} = 0. \quad (2)$$

こゝに ρ は密度、 E はヤング率、 k は棒の斷面の慣性半徑、 ξ ⁽³⁾ は棒の直接粘性係數である。

$t=0$ で梁の横振が $\varphi(x)$ とし其横振速度が $\psi(x)$ で表はされる時横振は一般に

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi k^2 f^4}{2\rho}} \cos \sqrt{\frac{Ek^2}{\rho}} f^2 t df \int_{-\infty}^\infty \varphi(\lambda) \cos f(x-\lambda) d\lambda \\ + \int_0^\infty \frac{1}{f^2} \sqrt{\frac{\rho}{Ek^2}} e^{-\frac{\xi k^2 f^4}{2\rho} t} \sin \sqrt{\frac{Ek^2}{\rho}} f^2 t df \int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda) \cos f(x-\lambda) d\lambda$$

で示される。こゝで

$$\varphi(\lambda) = \frac{Aa^2}{b^2 + \lambda^2}, \quad \psi(\lambda) = \frac{Cc^2}{d^2 + \lambda^2}$$

と置けば結局

$$y = \frac{Aa^2}{b} \left[\frac{b}{b^2 + x^2} - \left\{ \frac{\xi t}{2\rho} + \frac{1}{2} \frac{Et^2}{\rho} \right\} \frac{4! k^2}{(b^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \cos \left(5 \tan^{-1} \frac{x}{b} \right) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\xi t}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\xi Et^3}{2\rho^2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{Et^2}{\rho} \right)^2 \right\} \frac{8! k^4}{(b^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}} \cos \left(9 \tan^{-1} \frac{x}{b} \right) - \dots \right]$$

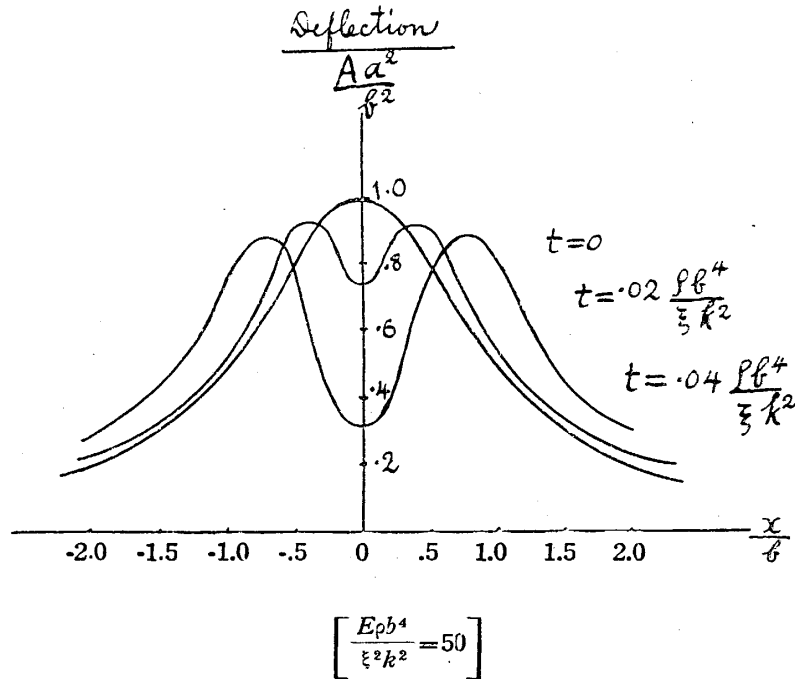
(1) 寺澤博士、"On Deep-Sea Water Waves.....," *Proc. Roy. Soc.*, 92 (1916).

(2) 筆者、地震研究所彙報第三號 (1927)。

(3) 本多博士、*Phil. Mag.*, 42 (1921)

$$\begin{aligned}
& + \frac{C c^2 t}{d} \left[\frac{d}{d^2+x^2} - \left\{ \frac{\xi t}{2\rho} + \frac{1}{3!} \frac{E t^2}{\rho} \right\} \frac{4! k^2}{(d^2+x^2)^{\frac{5}{2}}} \cos\left(5 \tan^{-1} \frac{x}{b}\right) \right. \\
& \left. + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\xi t}{2\rho}\right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\xi E t^3}{2\rho^2} + \frac{1}{5!} \left(\frac{E t^2}{\rho}\right)^2 \right\} \frac{8! k^4}{(d^2+x^2)^{\frac{9}{2}}} \cos\left(9 \tan^{-1} \frac{x}{b}\right) - \dots \right]
\end{aligned}$$

が得られ、特種な場合即ち $\phi(x)=0$ の如きものゝ一例を圖示すれば下の如くなる。



衝撃の原点で

$$x=0, \quad y=a \cos pt, \quad \frac{dy}{dx}=0$$

の如き調和振動が與へられる時に起る波動は

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{pc_1} x} \cos\left(pt - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{a}{\sqrt{2}} e^{-p^{\frac{3}{2}} c_2 x} \cos\left(pt - \sqrt{pc_1} x + \frac{\pi}{4}\right)$$

で示される様に二種の運動が考へられる。一種は前進波動であり、他は原点の近所だけの永久往復振動である。ここに

$$c_1 = \left(\frac{\rho}{Ek^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad c_2 = \frac{\xi}{4E} \left(\frac{\rho}{Ek^2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

この様にして種々の原点の型が表はし得る。

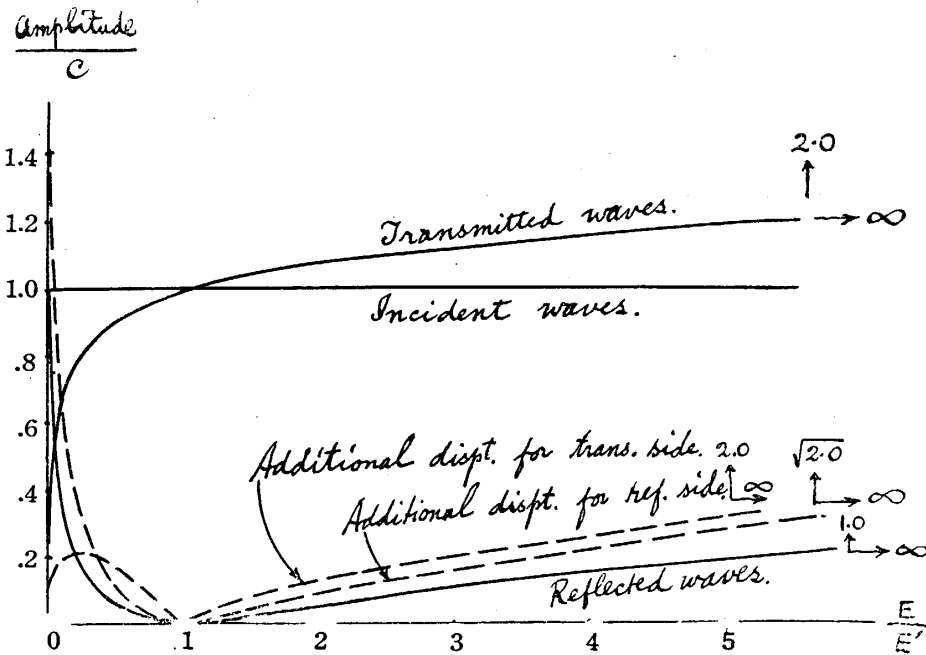
不連続箇所での反射屈折 梁に傳はる波動

$$y_1 = ce^{-t^{\frac{3}{2}} c_2 x} \cos(pt - \sqrt{pc_1} x)$$

が自由端 $x=0$ で反射する時に生ずる波は

$$y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} ce^{\sqrt{pc_1} x} \cos\left(pt - \frac{\pi}{4}\right) + ce^{t^{\frac{3}{2}} c_2 x} \cos\left(pt + \sqrt{pc_1} x - \frac{\pi}{2}\right)$$

で與へられる。他の不連続箇所でも同様な式が作れる。しかし不連続箇所の外方に始めの梁と同じ位の梁又は非常に異なる質の梁が只断面を等しうして續く時は反射波と超進波との兩方が成立する。其結果だけ圖示すれば下の如くなる（位相角は省略した）。

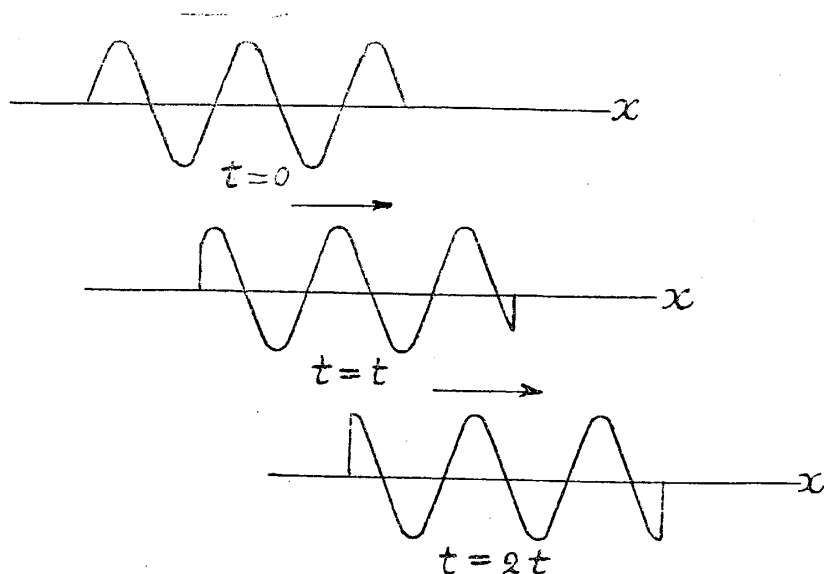


高周調和衝撃の異常分散

梁に傳はる波動速度は普通考へて居る様に波長に逆比例するとは限らず最大速度の局限が存在しレーレー彈性波の速度を超える事を許さぬ。その説明は論文の後の方で記載することにして、こゝに其最大速度を v_0 と置けば高周波動の速度は短波長に對して次式で表はしても差支がない (a は恒數)。

$$v_2 = v_0 \left(1 - \frac{a}{f}\right)$$

この場合、有限長の調和波動を考へると下圖の如く波形に相當する位相速度と擾亂部分の傳播する群波速度とが得られる。



こゝに普通の梁中の波動の分散を正常分散と考へればこの高周波動の特別な波速形式を異常分散と稱しても當然かと思へる。

應張材應壓材中の衝撃傳播 この様な構造材料中では波動の速度や波動の老衰性に著しい變異がある。其基本式は次式で示される。

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Ek^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \xi k^2 \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + \frac{T}{A} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

この式で T は軸方向の壓力、 A は棒の斷面積とする。波動形を

$$y = Ae^{i(pt - mx)}$$

とすれば容易に

$$m = \sqrt{\rho} \left(\frac{\rho}{Ek^2} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{T^2}{4A^2 Ek^2 \rho p^2}} + \frac{T}{2A \sqrt{Ek^2 \rho p}} \left(1 - \frac{i\xi p}{4E} \right)}.$$

が得られる。即ち

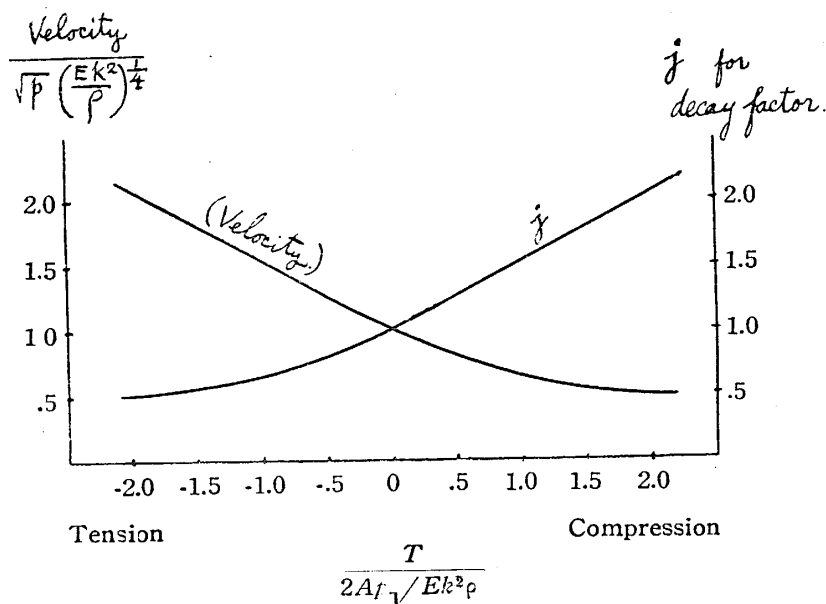
$$y = Ae^{-\rho^{\frac{3}{2}} c_2 j x} \cos(pt - \sqrt{\rho} c_1 j x).$$

但し

$$c_1 = \left(\frac{\rho}{Ek^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad c_2 = \frac{\xi}{4E} \left(\frac{\rho}{Ek^2} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$j = \sqrt{\sqrt{1 + \frac{T^2}{4A^2 Ek^2 \rho p^2}} + \frac{T}{2A \sqrt{Ek^2 \rho p}}}.$$

速度及び老衰率を圖示すれば下の如くなる



速度は應張材では著しく速かになり應壓材では遅くなる。又老衰率は應壓材で著しく増加するから、機體の著陸等の場合に著陸装置の附近に撃力が集中することがこの簡単な理論でもよく説明される。

衝撃による梁の切斷場所の推定 前記各章の示す通り衝撃による變形は粘弾性力學の法則の示す方法によつて次第に波動する事が明かとなつたが、實際の梁材衝撃試験で見られる様に衝撃の鋭鈍によつて其切斷面の位置が異なる初期的構造をも大體決定する事が出来る様に思はれる。勿論切斷其自身は物質の破壊によるからこの論文の程度の外にあるが、斯る破壊に導く高歪力の生成場所と其時間とはこの研究の範圍に屬せしめる事が出来る。一體梁材に實驗的の衝撃が加はる場合に其から傳播する波動は大體二種に分け得るが其一つは靜的歪を與へる様な歪の波動であり、他の一つは單に動的にのみ存在する普通の波動である。實驗が全く理想的に行ひ得れば動的波動のみ存在して靜的歪の波動などの存在し得べくもない。又考へ方によつては靜的歪も動的歪の中へ包含させても差支がないかも知れぬ。

種々の計算を綜合して見る時普通靜的歪と稱するものも其前驅部はやはり其材形に特有な彈性波の速度を以て波動する事がわかり、又其變形は動的歪と異なり、時と場所によつて其形態が漸次變る事が推定出来る。且つ自然に粘性も働くが結果としては粘性が働かぬ様に見える譯がある。

動的歪は普通の粘弾性波の如く傳はるが初期の状態、即ち初期の變形速度のみ存在する様な場合には衝撃が加はつた場所から少し波動して或場所に到つて高歪を與へる事もあり得る。材料試験が極めて理想的に行はれたとしても受撃場所から多少距つて高歪點の存することがある譯である。

普通の衝撃試験では静的にも動的にも両様に波動が起るから、両者の影響を見る必要がある。さて動的歪の波動は原点から極めて僅かの距離までは多少増大するかも知れぬが、遠方へ行くに従ひ次第に老衰するのに、静的歪の波動は時により距離と共に増大する場合が多い。而も一定の場所と謂つても時と共に増大する事がある。そこで動的波動と静的歪の波動の兩効果の合計を種々の場所と種々の時とに就て比較して見る時、材料として許し難い高歪の場所が或範圍に涉つて存在するのを見るであらう。この範圍中で時が最も早期に起り、且つ原点に最も近距離の部分が即ち破壊を起す様な高歪の場所としても大した誤はない積りである。其具體的な計算は後に必要のある時の爲に残して置く。

實際の材料の破壊等は粘性、弾性の他に種々の材料的性質の綜合上の結果であるから、一朝一夕にして決定する事を得ぬがそれには將來幾多の實驗や計算を必要とするであらう。

板に於ける衝撃の擴散⁽¹⁾ 衝撃の原点を $r=0$ とすれば基本の微分方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Ek^2}{1-\sigma^2} r^4 w + \frac{\xi k^2}{1-\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} r^4 w = 0$$

で示され、 σ はポアツソン比、又

$$r^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 w$$

の如き關係がある。始めの條件を

$$\left. \begin{aligned} w &= \varphi(r) \cos n\theta, \\ \frac{dw}{dt} &= \psi(r) \cos n\theta. \end{aligned} \right\} [t=0]$$

とすれば其一般解は次式で示される。

$$\begin{aligned} w &= \cos n\theta \int_0^\infty e^{-\frac{\xi k^2 f^4 t}{2(1-\sigma^2)\rho}} \cos \sqrt{\frac{Ek^2}{(1-\sigma^2)\rho}} f^2 t J_n(fr) f df \int_0^\infty \varphi(\lambda) J_n(f\lambda) \lambda d\lambda \\ &+ \cos n\theta \int_0^\infty e^{-\frac{\xi k^2 f^4 t}{2(1-\sigma^2)\rho}} \sqrt{\frac{\rho(1-\sigma^2)}{Ek^2}} \frac{1}{f^2} \sin \sqrt{\frac{Ek^2}{(1-\sigma^2)\rho}} f^2 t \\ &\quad \times J_n(fr) f df \int_0^\infty \psi(\lambda) J_n(f\lambda) \lambda d\lambda. \end{aligned}$$

一例として、 $t=0$ の時

(1) 報告第四十五號には不注意の爲この章内に多少誤りのある事が気がついたので、こゝには其訂正したものを示した。

$$n=0, \quad \psi(r)=0,$$

$$\varphi(r) = \frac{C}{r}$$

と置けば

$$\int_0^{\infty} \frac{C}{\lambda} J_0(f\lambda) \lambda d\lambda = \frac{C}{f}$$

によつて

$$w = C \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi k^2 f^2 t}{2(1-\sigma^2)\rho}} J_0(fr) \cos \sqrt{\frac{Ek^2}{(1-\sigma^2)\rho}} f^2 t df$$

即ち

$$w = C \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{b_1 t}{2!} \frac{2!}{r^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{b_1^2 t^2}{4!} - \frac{b_2 t}{1!} \right) \frac{4!}{r^5} + \dots \right]$$

となる。但し

$$b_1 = \sqrt{\frac{Ek^2}{(1-\sigma^2)\rho}}, \quad b_2 = \frac{\xi k^2}{2(1-\sigma^2)\rho}.$$

又別例として、 $t=0$ の時

$$n=0, \quad \psi(r)=0,$$

$$\varphi(r) = C \frac{a}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad [a > 0]$$

と置けば

$$w = C \left[\frac{P_1(\mu)}{R^2} - \frac{b_1 t 3!}{2!} \frac{P_3(\mu)}{R^4} + \left(\frac{b_1^2 t^2}{4!} - \frac{b_2 t}{1!} \right) \frac{5!}{R^6} - \dots \right],$$

$$\mu = \cos \theta, \quad R = \sqrt{a^2 + r^2}, \quad \frac{r}{a} = \tan \theta$$

となる。これ等の圖示や調和衝撃の圖示は省略した。

板の縁に傳はる衝撃波 板の場合には板の縁だけに大なる變位を起す様な波動が可能である。其基礎解は次式で示される。

$$w = [Ae^{-\alpha y} + Be^{-\beta y}] e^{i(pt-fx)}. \quad (\text{粘性を省く})$$

但し

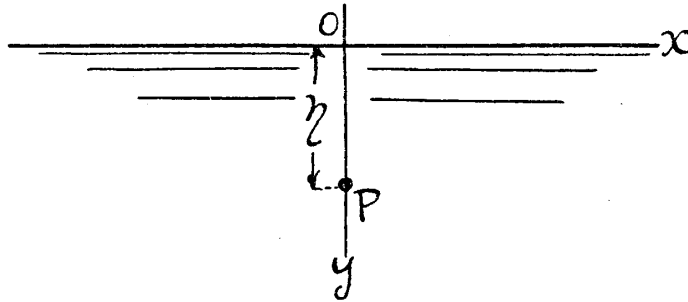
$$\alpha = \sqrt{f^2 + p \sqrt{\frac{\rho(1-\sigma^2)}{Ek^2}}}, \quad \beta = \sqrt{f^2 - p \sqrt{\frac{\rho(1-\sigma^2)}{Ek^2}}}.$$

且つ

$$\frac{p}{f} = \gamma' f \sqrt{\frac{Ek^2}{\rho}}, \quad \frac{2\pi}{f} = \text{波長} \quad \frac{2\pi}{p} = \text{週期}$$

σ	$\frac{\alpha}{f}$	$\frac{\beta}{f}$	$\frac{A}{B}$	γ'
0	1.414	0.000	0.0000	1.000
$\frac{1}{8}$	1.414	0.006	0.0667	1.009
$\frac{1}{4}$	1.413	0.023	0.1425	1.032
$\frac{3}{8}$	1.410	0.074	0.228	1.071
$\frac{1}{2}$	1.405	0.153	0.323	1.130

等が波速や振幅を與へる。



次に上圖の如く板の縁から η だけ中の點 P から

$$w_0 = -ie^{i\eta t} H_0^{(2)}(mr) \quad \left[m^2 = \frac{\rho p^2 (1 - \sigma^2)}{Ek^2} \right]$$

の如き週期的の衝撃が働く時に板の縁を傳はつて行く波動は

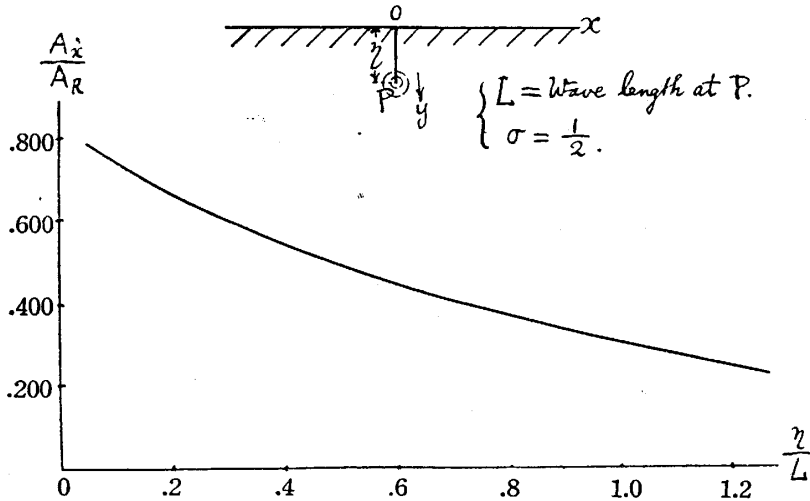
$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{8ie^{-\sqrt{f_1^2 - m^2} \eta} e^{i(t - f_1 x)}}{F'(f_1)} m^2 (f_1^2 \overline{1 - \sigma} + m^2), [x \gg \eta > 0] \\ w &= \frac{8ie^{-\sqrt{f_1^2 - m^2} \eta} e^{i(t + f_1 x)}}{F'(f_1)} m^2 (f_1^2 \overline{1 - \sigma} + m^2), [x \ll \eta < 0] \end{aligned} \right\}$$

で與へられる。こゝに

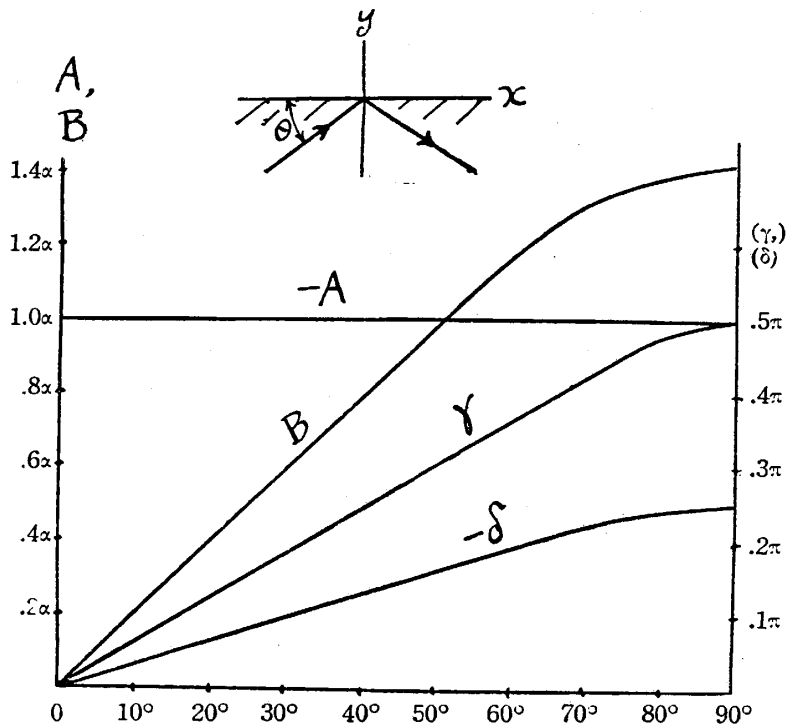
$$f_1 = \sqrt{\frac{p}{\gamma'} \sqrt{\frac{\rho}{Ek^2}}}$$

$$F'(f_1) = (f_1^2 1 - \sigma - m^2)^2 \sqrt{f_1^2 + m^2} \left[\frac{4f(1-\sigma)}{f_1^2(1-\sigma) - m^2} + \frac{f_1}{f_1 + m^2} \right] \\ - (f_1^2 1 - \sigma + m^2)^2 \sqrt{f_1^2 - m^2} \left[\frac{4f(1-\sigma)}{f_1^2(1-\sigma) + m^2} + \frac{f_1}{f_1 - m^2} \right].$$

P 點の變位と板に傳はつて行く波動の振幅との割合は下圖でわかる。

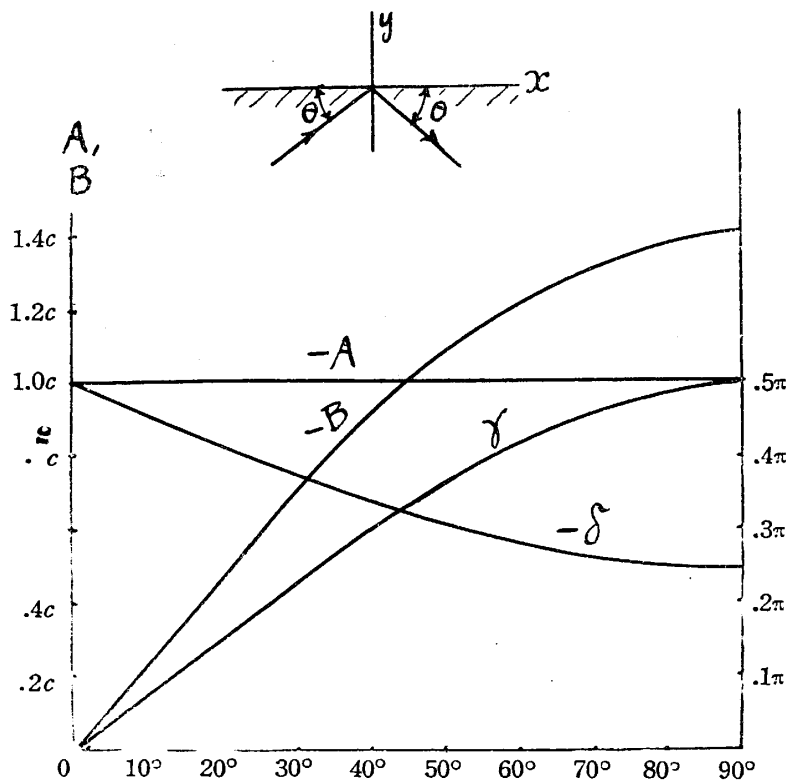


平行波の板縁での反射 平行調和波 w_1 が自由縁 $y=0$ で反射する時、反射波 w_2 と縁での特別變位 w_3 との和は次の曲線及び方程式で示される。(粘性を省く)



$$\left[\begin{aligned}
 w_1 &= a \cos [pt - \sqrt{\rho c_1} (x \cos \theta + y \sin \theta)] \\
 w_2 + w_3 &= A \cos [pt - \sqrt{\rho c_1} (x \cos \theta - y \sin \theta) + \gamma] \\
 &\quad + B e^{\sqrt{\rho c_1} \sqrt{1 + \cos^2 \theta} y} \cos [pt - \sqrt{\rho c_1} x \cos \theta + \delta] \\
 c_1 &= \left(\frac{\rho(1 - \sigma^2)}{E k^2} \right)^{\frac{1}{4}}.
 \end{aligned} \right]$$

然るに同様な波動が固定縁で反射する場合は次の如き結果となる。



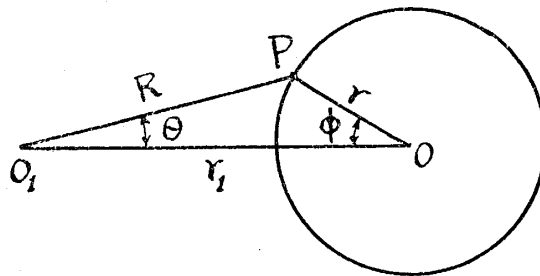
$$\left[\begin{aligned}
 w_1 &= c \cos [pt - \sqrt{\rho c_1} (x \cos \theta + y \sin \theta)] \\
 w_2 + w_3 &= A \cos [pt + \sqrt{\rho c_1} (x \cos \theta - y \sin \theta) + \gamma] \\
 &\quad + B e^{\sqrt{\rho c_1} \sqrt{1 + \cos^2 \theta} y} \cos (pt - \sqrt{\rho c_1} x \cos \theta + \delta)
 \end{aligned} \right]$$

同様にして他の板への屈折も算定出来るがこゝには省略する。

圓形障碍による衝撃波の離散現象 平行調和波が小さい圓形孔に衝突する場合には所謂離散現象を起す。其前進波 w_0 と反射波 w_1 とは次の形で表はされる。

$$w_0 = A \cos(pt - \sqrt{pc_1}x),$$

$$w_1 = \frac{\pi A (\sqrt{pc_1}R)^2}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi \sqrt{pc_1}r}} \left[-\frac{(3-\sigma)}{2-2\sigma} e^{-\sqrt{pc_1}r} \sin\left(pt - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{(1-3\sigma)}{2-2\sigma} \sin\left(pt - \sqrt{pc_1}r + \frac{\pi}{4}\right) \right].$$



同様にして上圖の O_1 の如き點から四方へ傳はる波動が O 圓上で離散する場合の前進波 w_0 と反射波 w_1 とは次式で示される。(a は O 圓の半径)

$$w_0 = A e^{ipt} H_m^{(2)}(i\sqrt{pc_1}R) \cos n\theta$$

$$w_1 = e^{ipt} [B_1 H_0^{(1)}(i\sqrt{pc_1}r) + D_0 H_0^{(2)}(\sqrt{pc_1}r)]$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{i\pi A H_m^{(2)}(\sqrt{pc_1}r_1) (\sqrt{pc_1}a)^2 (3-\sigma)}{4 \cdot 2(1-\sigma)} \\ D_0 &= \frac{i\pi A H_m^{(2)}(\sqrt{pc_1}r_1) (\sqrt{pc_1}a)^2 (3-\sigma)}{4 \cdot 2(1-\sigma)} \end{aligned} \right\} [r > r_1]$$

間隙による衝撃波の廻折現象 この部分は計算としての興味は存して居るが實用上に未だ具體的な結果が得難いから本抄録から全然省く事にした。

高周調和波の傳播 週期が極めて短い波動では前にも述べてある様に普通の梁の振動式中廻轉慣性の影響を考へる位では役に立たぬ。即ちこの場合には普通の彈性波の基本式から問題を解く必要がある。この方法で問題を研究する時、波動の勢力が板の表面に集中してニュートラル平面は何等の振動を受けぬ事となる。又普通考へて居る様に速度の無限大などは起らず、最大速度がいつでもレーレー彈性波の速度を超えぬ事が判明する。基本式を多少變形させたものを書き表はせば

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} \right], \\ \rho \frac{\partial^2 \pi_r}{\partial t^2} &= \mu \left[\frac{\partial^2 \pi_r}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \pi_r}{\partial r} + \frac{\pi_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \pi_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \pi_r}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \pi_z}{\partial r} \right], \\ \rho \frac{\partial^2 \pi_\theta}{\partial t^2} &= \mu \left[\frac{\partial^2 \pi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi_\theta}{\partial r} - \frac{\pi_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \pi_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \pi_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \pi_r}{\partial \theta} \right], \\ \rho \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial t^2} &= \mu \left[\frac{\partial^2 \pi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \pi_z}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\}$$

但し、 u, v, w は半徑的、圓周的、垂直的の變位であり、 ρ は密度、 λ, μ はラメー氏彈性恒數とし、又

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\pi_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\pi_\theta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \\ 2\pi_z &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rv)}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\}$$

の關係がある。始めの式の解を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= A_m H_m^{(2)}(kr) \operatorname{sh} \alpha z \cos m \theta e^{i \beta t}, \\ 2\pi_z &= B_m H_m^{(1)}(kr) \operatorname{sh} \beta z \sin m \theta e^{i \beta t}, \\ 2\pi_r &= \left\{ C_m \frac{H_m^{(2)}(kr)}{r} + \frac{\beta}{k^2} E_m \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \right\} \operatorname{ch} \beta z \sin m \theta e^{i \beta t}, \\ 2\pi_\theta &= \left\{ \frac{C_m}{m} \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} + \frac{\beta m}{k^2} E_m \frac{H_m^{(2)}(kr)}{r} \right\} \operatorname{ch} \beta z \sin m \theta e^{i \beta t}, \end{aligned} \right\}$$

但し

$$k^2 = a^2 + h^2 = \beta^2 + j^2,$$

$$h^2 = \frac{\rho \beta^2}{\lambda + 2\mu}, \quad j^2 = \frac{\rho \beta^2}{\mu}.$$

此等に相當する變位の適當な解二組を求めれば

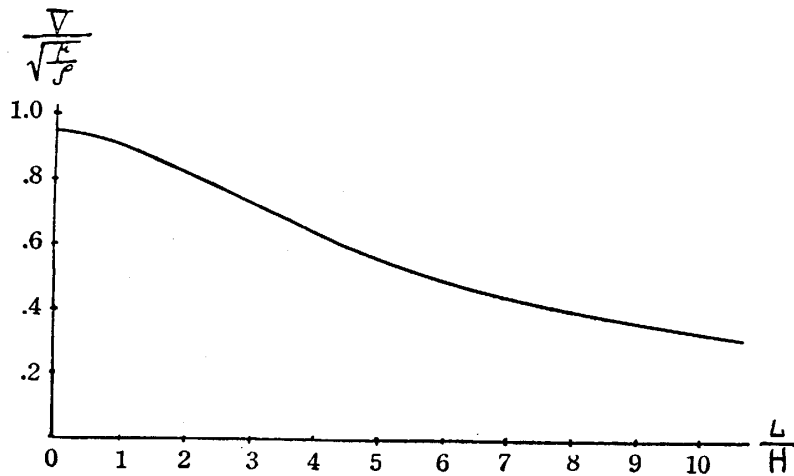
$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -A_m \frac{1}{h^2} \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \operatorname{sh} az \cos m\theta e^{ipt}, \\ v_1 &= A_m \frac{m}{h^2} \frac{H_m^{(2)}(kr)}{r} \operatorname{sh} az \sin m\theta e^{ipt}, \\ w_1 &= -A_m \frac{a}{h^2} H_m^{(2)}(kr) \operatorname{ch} az \cos m\theta e^{ipt}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= -C_m \frac{\beta}{mj^2} \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial r} \operatorname{sh} \beta z \cos m\theta e^{ipt}, \\ v_3 &= C_m \frac{\beta}{j^2} \frac{H_m^{(2)}(kr)}{r} \operatorname{sh} \beta z \sin m\theta e^{ipt}, \\ w_3 &= -C_m \frac{k^2}{mj^2} H_m^{(2)}(kr) \operatorname{ch} \beta z \cos m\theta e^{ipt}. \end{aligned} \right\}$$

板面 $z = \pm \frac{H}{2}$ で剪應力零の條件から

$$\frac{C_m}{mA_m} = \frac{2\sqrt{k^2 - h^2j^2}}{h^2(2k^2 - j^2)} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{k^2 - h^2}H}{2 \operatorname{sh}\sqrt{k^2 - j^2}H},$$

の如く振幅の關係を得又垂直應力零の條件から速度を得。其結果は速度として次の曲線で示す様に種々の波長に對する値が見出せる。



この圖は $\lambda = \infty$ の場合に行つたものでラム教授が棒の場合に出した結果と一致して居る。波長が非常に短い時に $\lambda = \mu$ として板面の變位を記號で示せば次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1.50A_m}{k} \frac{\partial H_m^{(2)}(kr)}{\partial(kr)} \cos m\theta e^{ipt}, \\ v &= \frac{1.50mA_m}{k} \frac{H_m^{(2)}(kr)}{kr} \sin m\theta e^{ipt}, \\ w &= -\frac{2.21A_m}{k} H_m^{(2)}(kr) \cos m\theta e^{ipt}, \end{aligned} \right\}$$

この式でわかる様に波長の短い時は板面の變位は板の面に直角なものゝ他に板面に平行なものを多分に含むことがわかる。尙圓周的の變位は原點から遠くなるに従つて次第に消滅する事もわかる。この問題は銃丸の如き急激なものが板にあたる場合の解析に極めて必要と考へられる。