翼桁に傳はる衝撃に就いて

所員　妹澤克惟

緒論　この前の機會[1]に筆者は梁材に衝撃が傳播する有様の理論を提出した．其場合に於ける衝撃とは普通工學上で考へる様な意味の衝撃であつて，昔ヘルツなどが研究した完全なる彈性體にイムパルスが加はる様な事柄ではない．工學上で考へて居る衝撃は衝撃の程度と固體の變動部分の分布狀態等を審かにする事が主要であるのは動かす事が出來ぬ．それにはどうしても昔風の純彈性體では解決がつかぬ．幸にして筆者は地球の固體に衝撃が傳はる場合の研究の經驗があつたので，これを押し縮めて工學材料の衝撃を考究する事が出來た積りである．しかし若し地球の場合の衝撃が其時間的フラクテユエーションの週期が數秒乃至數分であつて，工業材料の衝撃では一秒の何百分の一であると提言したとすれば多くの人は其を問題にせぬかも知れぬが，衝撃の意味を少しく解する人は寧ろ其方が正しい事に氣がつくであらう．衝撃に依て材料の構造や結晶狀態に變化を與へる事は材料組織學の問題であつて靜外力の働く場合のそれと同様に別に論ずべき事であるから，一般の材料力學的には衝撃とは外力の働く事に時間的の要素が入るだけの違ひに過ぎぬ．從て衝撃現象とは衝撃を受ける材料の應力や變位の狀態が靜力學的の場合と如何に異なるかを意味するものらしく思はれる．而してこの現象が明瞭に現はれる爲には，地球の様に大なるものでは外力の經過時間は可なり長く續くものでもよいが，工學材料では極めて瞬時的なるを要する次第である．これ等の事から始め筆者の提言した事柄が決して無謀でなかつた事がわかるであらう．

次に地球の固體や工學材料の性質を粘彈性的と考へる事は最も適當らしいといへる．靜力學的には彈性のみを考へても差支がないが動力學的には粘性の影響を入れるのが普通であり，又一般的である．プラスチツク性は變位の小なる動力學的には捨てる方が便利であり，又反て適當である事も多くの研究の結果から明かである．さて粘性を考へればよいとしても，その粘性の働き方が地球の場合と材料の場合とでは，一方の方が緩漫であり他の方が急激なだけそれだけ違つて居る様に見えるかも知れぬが，要は反射的の波動が現はれぬ前に衝撃波の勢力が消滅すれば一般の衝撃作用の目的に合致する譯であるから，地球の様な大きな媒體では緩く，材料片では急激である必要が自ら判る筈である．

この考は前の報告に於て充分採用して置いたのであるけれども，この論文の場合でも同じ筆法で進むことにして置く．

單翼の架構構造に於て多少共滿足出來る様な研究は殆ど不可能であるといつても差支がない．

1)　航空研究所報告第四十五號 (1928)

桁材の小骨と小骨との間の部分が彈性及び斷面が均一であるとし，又一つの桁材と他の同方向の縱通材との間の小骨が同樣に均一性を持つとしても，其等の運動方程式は粘性を除いて考へる場合

$$\left.\begin{aligned}\rho_m\frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2}&=-E_m k_m{}^2\frac{\partial^4 w_m}{\partial s_m{}^4},\\ \rho_m k''_m{}^2\frac{\partial^2\theta_m}{\partial t^2}&=N_m k'_m{}^2\frac{\partial^2\theta_m}{\partial s_m{}^2},\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{aligned}\rho_n\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}&=-E_n k_n{}^2\frac{\partial^4 w_n}{\partial s_n{}^4},\\ \rho_n k''_n{}^2\frac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2}&=N_n k'_n{}^2\frac{\partial^2\theta_n}{\partial s_n{}^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

等で代表される．(1) 式は桁材に屬し，(2) 式は小骨に相當する．s_m, w_m, θ_m, E_m, N_m, ρ_m, k_m, k'_m, k''_m は夫れ夫れ桁材の m 番目の部分の中の一點の座標，撓み變位，捩り角變位，ヤング率，剛性率，密度，撓みに對する斷面のジャイレーション半徑，捩りに對する質量分布のジャイレーション半徑，捩りに對する斷面の同樣半徑とする．n の符號のものは小骨に對する夫れ夫れのものである．これ等の式の解は (1), (2) に對して夫れ夫れ 6 個の任意常數を含む．そこで境界條件として兩系統が互に交錯する所では

$$w_m=w_{m+1}=w_n=w_{n+1},$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial s_m}=\frac{\partial w_{m+1}}{\partial s_{m+1}}=\theta_n=\theta_{n+1},$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial s_n}=\frac{\partial w_{n+1}}{\partial s_{n+1}}=\theta_m=\theta_{m+1},$$

$$E_m k_m{}^2\frac{\partial^2 w_m}{\partial s_m{}^2}-E_{m+1}k_{m+1}\frac{\partial^2 w_{m+1}}{\partial s_{m+1}{}^2}=N_n k'_n{}^2\frac{\partial\theta_n}{\partial s_n}-N_{n+1}k'_{n+1}{}^2\frac{\partial\theta_{n+1}}{\partial s_{n+1}},$$

$$E_n k_n{}^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial s_n{}^2}-E_{n+1}k_{n+1}{}^2\frac{\partial^2 w_{n+1}}{\partial s_{n+1}{}^2}=N_m k'_m{}^2\frac{\partial\theta_m}{\partial s_m}-N_{m+1}k'_{m+1}{}^2\frac{\partial\theta_{m+1}}{\partial s_{m+1}},$$

$$E_m k_m{}^2\frac{\partial^3 w_m}{\partial s_m{}^3}-E_{m+1}k_{m+1}\frac{\partial^3 w_{m+1}}{\partial s_{m+1}{}^3}=E_n k_n{}^2\frac{\partial^3 w_n}{\partial s_n{}^3}-E_{n+1}k_{n+1}{}^2\frac{\partial^3 w_{n+1}}{\partial s_{n+1}{}^3},\quad(3)$$

の境界條件が成立する必要がある．この 12 個の條件式に對してこの點が分擔すべき任意常數は恰度 12 個ある．同樣にして一方の系統の中程に他の系統の一端が接する時は，9 個の條件式と 9 個の任意常數が存在し，兩方の系統の端同志が接する點では 6 個の條件式と 6 個の任意常數が存在する．又一系統の端が單獨に境界となる點では 3 個の任意常數と 3 個の條件式が出來る．この樣にして正直に計算を施す時は翼の正しい振動の式が得られる．又翼の撓み振動と捩り振動とが組合ふ場合[2)]なども自然に得られる．しかしこの一般の方法で解く事は餘り複雜である爲，何か特別の場合に特

2) H. Blenk & F. Liebers, Z.F.M. (1923, 1924, 1925, 1926); Luftfahrtforschung, 4 (1929), Heft 3.

別な簡便法を採用するのでなければ解答は殆ど不可能といつてよい．其様な特別な例はこの論文では述べぬが何かの機會に試みる積りである．

衝撃の特種計算法 今翼桁はすべて均一であるとし，之に交錯する小骨は別に又均一性を持つと假定する事は實際問題として大して誤りがないと思ふ．一本の桁材の中の m 番目の張間と $m+1$ 番目の張間の境目及び一本の小骨の n 番目と $n+1$ 番との境目に當る交錯點が受持つ質量を $M_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}$ とし，其交錯點の撓み變位を $w_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}$ とする．桁材のヤング率を E_1，斷面慣性率を I_1 とし，又小骨の夫れ等を E_2，I_2 とする．桁材の方向と小骨の方向の座標を夫れ夫れ x，y とし，小骨と小骨との間の距離を l_1 桁材の各部分間の平均距離を l_2 とする．然る時は翼平面中の l_1 と l_2 で包む部分の運動方程式は粘性が働かぬとして

$$M_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 w_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}}{\partial t^2}=E_1I_1\left[\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 w_{m+\frac{1}{2}}}{\partial x^3}\right]+E_2I_2\left[\frac{\partial^3 w_n}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 w_{n+1}}{\partial y^3}\right]\cdots(4)$$

として差支がない．この式に於て右邊の第一番目の項は桁材の一つの張間の中央點の剪斷力と其隣りの張間の中央點の剪斷力の差引であり，第二番目の項は小骨についての同種のものとする．Pohlhausen[3] が橋桁の振動の場合に行つたのと同様な筆法で一つの張間の中央點と隣の部分の中央點との間に剪應力が直線的に増加すると假定しても大して誤りがないから，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^3 w_{m+1}}{\partial x^3}&=\frac{\partial^3 w_m}{\partial x^3}+l_1\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4},\\ \frac{\partial^3 w_{n+1}}{\partial y^3}&=\frac{\partial^3 w_n}{\partial y^3}+l_2\frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5)$$

の如く取る事が出來る．即ち

$$M_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}\frac{\partial^2 w_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}}{\partial t^2}=-E_1I_1\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4}-E_2I_2\frac{\partial^4 w_n}{\partial y^4}\quad\cdots\cdots(6)$$

いふまでもなく抗力張線が屈曲振動に及ぼす直接の影響はないものである．さて

$$w_m\doteqdot w_n\doteqdot w_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}\doteqdot w,\ \cdots\cdots(7)$$

$$M_{m+\frac{1}{2},\,n+\frac{1}{2}}=M\,(\text{一定})\ \cdots\cdots(8)$$

として，

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-E_1I_1l_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-E_2I_2l_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\ \cdots\cdots(9)$$

粘性の影響を同様にして附加へる時は

$$M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+E_1I_1l_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+E_2I_2l_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\xi_1I_1l_1\frac{\partial^5 w}{\partial t\partial x^4}+\xi_2I_1l_2\frac{\partial^5 w}{\partial t\partial y^4}=0\cdots\cdots(10)$$

となる．但し ξ_1，ξ_2 は桁材及び小骨に相當する直接粘性係數である．

3) Pohlhausen. Z.A.M.M., 1 (1921), 28—42.

(10) 式を解く爲に

$$w=e^{ipt+fx}\left[A\begin{Bmatrix}\cosh\\\sinh\end{Bmatrix}ay+B\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}ay\right] \quad\cdots\cdots(11)$$

こ置く. $\cosh ay$, $\cos ay$ は翼の中心線に對して對稱をなす時, $\sinh ay$, $\sin ay$ は然らざる時を意味する. 然る時は

$$Mp^2-ip(\xi_1I_1l_1f^4+\xi_2I_2l_2a^4)-(E_1I_1l_1f^4+E_2I_2l_2a^4)=0. \quad\cdots\cdots(12)$$

從て ξ_1, ξ_2 が比較的に小であるこ假定して

$$p\fallingdotseq\frac{i(\xi_1I_1l_1f^4+\xi_2I_2l_2a^4)}{2M}\pm\sqrt{\frac{E_1I_1l_1f^4+E_2I_2l_2a^4}{M}}. \quad\cdots\cdots(13)$$

b なる幅を持つ翼の兩縁が自由こすれば

$$y=\pm\frac{b}{2},\qquad \frac{\partial^2w}{\partial y^2}=\frac{\partial^3w}{\partial y^3}=0. \quad\cdots\cdots(14)$$

こ置いても大して誤りがない. この條件によつて翼が中心線に就いて對稱の撓みを持つ時. 即ち翼が捩れぬ時は

$$a=\frac{1{\cdot}50562\pi}{b},\qquad \frac{B}{A}=-7{\cdot}52. \quad\cdots\cdots(15)$$

翼が中心線に就き對照をなさぬ時, 即ち翼が捩れる場合には

$$a=\frac{2{\cdot}49976\pi}{b},\qquad \frac{B}{A}=-7{\cdot}45. \quad\cdots\cdots(16)$$

翼の撓みの代表式は

$$w\fallingdotseq e^{-\frac{\xi_1I_1l_1f^4+\xi_2I_2l_2a^4}{2M}t+i\left(fx\pm\sqrt{\frac{E_1I_1l_1f^4+E_2I_2l_2a^4}{M}}t\right)}. \quad\cdots\cdots(17)$$

この式は對稱撓みに對しては中軸線の撓みを表はし, 非對稱撓みに對しては翼の兩縁の撓みを意味する.

一般的の衝擊, 即ち

$$t=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}=\varphi(x),\begin{bmatrix}y=0\,; & \text{對稱撓み,}\\ y=\pm b\,; & \text{非對稱撓み}\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(18)$$

が與へられる時, 翼の運動式は

$$w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\xi_1I_1l_1f^4+\xi_2I_2l_2a^4}{2M}t}\frac{\sin\sqrt{\frac{E_1I_1l_1f^4+E_2I_2l_2a^4}{M}}\,t}{\sqrt{\frac{E_1I_1l_1f^4+E_2I_2l_2a^4}{M}}}df\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)e^{if(x-\lambda)}d\lambda \quad\cdots(19)$$

で與へられる. この積分は f の絶對値の非常に大なる部分に對しては力學的に差支があるけれごも, 其影響は比較的少いこ假定して數學式の積分だけは押し進める事こする.

$$\varphi(x)=\frac{C}{c}{}^{-\frac{x^2}{c^2}} \quad\cdots\cdots(20)$$

の如く置けば，C 及び c を適當に調節する事によつて種々の强さ及び鋭さの衝撃が得られるからこれを利用する事にする．さて一度積分の後に

$$w=\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(\xi_1 I_1 l_1 f^4+\xi_2 I_2 l_2 a^4)}{2M}t-\frac{c^2 f^2}{4}}\frac{\sin\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 f^4+E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}\,t e^{ifx}}{\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 f^4+E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}}df \quad\text{......(21)}$$

$$=\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(\xi_1 I_1 l_1 f^4+\xi_2 I_2 l_2 a^4)}{2M}t-\frac{c^2 f^2}{4}}}{\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 f^4+E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}}\left\{e^{i\left(fx+\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 f^4+E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}t\right)}\right.$$

$$\left.-e^{i\left(fx-\sqrt{\frac{E_1 I_1 l f^4+E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}t\right)}\right\}df. \quad\text{............(22)}$$

この積分の中を級數に開いてから積分しても結局同じ事になるが，それよりもケルビン[4]の所謂定常値の方法，即ちデバイの鞍點[5]を求める方法によつて結果を出す方が容易である．今函數論的の議論等は全然省略して

$$w=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(f)e^{i\varphi(f)}df \quad\text{..................................(23)}$$

に於て $\chi(f)$ が週期的變動を餘り起さぬ間に $e^{i\varphi(f)}$ の方は極めて短週期の變動を繰替すとすれば

$$\phi(f)=0 \quad\text{...(24)}$$

の實根を f_1 として

$$w=\frac{\sqrt{2\pi}\,\chi(f_1)}{|\sqrt{\phi''(f_1)}|}e^{i\left\{\varphi(f_1)\pm\frac{\pi}{4}\right\}}, \quad\text{..............................(25)}$$

但し正，負號は $\phi''(f_1)$ の符號の正負に夫れ夫れ從ふ．現在の場合

$$f_1\fallingdotseq\pm\frac{x}{2t}\sqrt{\frac{M}{E_1 I_1 l_1}}\left(1+\frac{8E_1 E_2 I_1 I_2 l_1 l_2 a^4 t^4}{M^2 x^4}\right), \quad\text{....................(26)}$$

$$\phi''(f_1)\fallingdotseq\pm 2\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1}{M}}\,t. \quad\text{..................................(27)}$$

從て (25) により

4) Sir. W. Thomson, Proc. Roy. Soc., 42 (1887), 80.

5) H. Jeffreys, Operational Method, Camb. Math. Tract. (1927).

$$w \fallingdotseq \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\left\{\frac{\xi_1 M x^4}{64 E_1{}^2 I_1 l_1 t^4} + \frac{\xi_2 I_2 l_2 a^4}{2M}\right\} t - \frac{C^2 M x^2}{16 E_1 I_1 l_1 t^2}}}{\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 t^2}{M}} \sqrt{\frac{M x^4}{23 E_1 I_1 l_1 t^4} + \frac{E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}}$$

$$\times \sin\left\{\sqrt{\frac{M x^4}{32 E_1 I_1 l_1 t^4} + \frac{E_2 I_2 l_2 a^4}{M}}\, t - \frac{x^2}{2t}\sqrt{\frac{M}{E_1 I_1 l_1}} + \frac{\pi}{4}\right\}. \quad \text{......(28)}$$

撮要 この (28) 式が (18) 式の如き衝撃による桁の變位を表はす. 對稱的衝撃の場合には中心線の撓みを示し, 捩りの衝撃の場合には翼緣の撓みを表はす. (28) 式に種々の數値を入れて圖表で結果を與へる事は實用上大切な事ではあるが, 時間其他の餘裕がない爲之を將來に殘す事にして, この論文では斯る衝撃による一般的性質又は現象を式の形狀等から說明するに止めようと思ふ.

i) 衝撃の瞬間に翼桁全般に通じて何等の變位がなく, 又原點の附近だけ一定の速度が與へられるとする.

ii) 或一定時間の後に翼桁の撓みの分布を見る時は, 原點の附近は比較的に大なる撓みを持つが, 原點の左右は撓みが振動形をなして次第に振幅が小さく, 波長は次第に短くなつて居る.

iii) 原點から少し離れた一點を, 衝撃の始めから觀察する時は, 衝撃の瞬間には何等異常がないが, 忽ちにして極めて微細な振幅の振動形が, 極めて短い週期を以て現はれ, 時間の經過すると共に振幅は次第次第に大きく, 週期も亦次第次第に長くなり, 遂には非常に大なる振幅と無限の週期になつてしまふ. この附近では最早普通の取扱ひが出來ぬ樣になる.

iv) これらの攪動が實は原點から左右に或變化する速度を以て進む傾向が充分に認められる. 即ち或る一定の時に於て x の小なる場所では極めて大なる速度を持つのに, 大なる x 即ち原點より遠い所程小なる速度となり, 可なり遠方で速度を失ふ. 大體に於て速度は x に逆比例する事が (28)式から認められる. 即ち一つの指定せる山, 或は一つの定められた谷が原點からの距離に逆比例する速度で傳播される.

v) 攪亂の勢力は上述の速度で進行するのでなく, 全く別の速度で傳播する. それは (22) に存在する項を持來し,

$$\frac{d}{df}\sqrt{\frac{E_1 I_1 l_1 f^4 + E_2 I_2 l_2 a^4}{M}} \quad \text{..................................(29)}$$

の値に f の定常値 f_1 を代入する事によつて得られる. 即ち大略

$$\frac{x}{t} \quad \text{..(30)}$$

が群速を表はす. x が大なる程, 又 t が小なる程, この群速が大きくなり, x/t の略一定の所では一定の群速を持つ. 然るに (28) 式から x/t が一定の所では波長も略一定の割合となる事がわかるので, この場合に勢力の傳播といふ事は略一定の波長を保つものが傳はる割合ともいへる.

vi) 衝撃の割合によつて材料の破壞箇所が定る事, 換言すれば斯かる破壞に導く迄の高歪力の

箇所の決定は曲試驗の場合には二種の原因があるこいへる．第一には (28) 式の e 函數の最初の項にある固體の粘性によつて，波動の原點近くが高歪力を表はす事，第二には屈曲分布が初攪亂の大さこ鋭さこによつて或一定の距離に於て，最も速かに一定の大さ以上に達するこいふ事，これ等が曲衝擊試驗に於ける衝擊の大さ鋭さこ破壞箇所この關係を決定するものらしく思はれる．

この論文では數量的の算定を省略してあるが，適當の機會を得て之を成就したいこ思ふ．終りに種々の御助言を與へられた栖原敎授，岩本敎授，小川助敎授等に謝意を捧げたいこ思ふ．

（昭和五年二日五日）