聯立方程式求解機について

所員　佐々木達治郎
元技師　志賀　亮
技手　藤井　明

目次

1 はしがき

技術的の研究にあたり我々は多くの數學的解法を行ふ．然るに一般解が分つてゐるにも係はらず，多くの場合その數値計算に大なる手數を要する．

最近の如く計算が複雜化され，且その速度が要求される時代にあたつては特殊の計算機械即ち，微分方程式求解機，聯立方程式求解機或は高次方程式求解機が大いに重要視されて來た．その中聯立方程式は翼の强度計算や構造物の計算に於て現はれるがその解法なるものは理論的に完成せられた部門であり，その數値解法も遂行出來るのではあるが，しかし元の增えるに從つて如何にその手間が大變であるかと云ふ事は實際に行つた人は良く理解されてゐる事と思ふ．

現在多元の聯立方程式を解くには逐次に消去して行く方法が用ひられてゐるがこれは誤差の蓄積が起る關係上所要の桁數より多くの桁を取らねばならぬ．又誤差が起きても何處から來たのか不明である．

以下に述べんとする聯立方程式求解機は斯る手數を一掃して且速度を遙かに早くして解く

實驗關係者．　長谷川信之，八子直，大森純子，今井チエ子，村木縫子，田中久子，片岡美枝．

事が出來る．係數の桁數は機構的の制限から 4 桁位に限られるが元の方は 9 元或はそれ以上擴張出來るし，速度も 9 元位で約 1 時間位で解ける豫定である．

又係數が自由に機械に入るから計算が終つてから修正を要する場合に係數の値を變へて解の傾向を見る事により適當なる解が得られる樣な係數を得る事も可能である．

且現在適當なる計算が無いと思はれる固有値における行列式方程式の計算や行列式の計算にも應用することが出來る．

現在試作せる 2 元の機械は 4 桁位になると手で行ふより數倍早く，又機構的に云つて 9 元位に擴張出來る可能性を我々に與へてくれた．

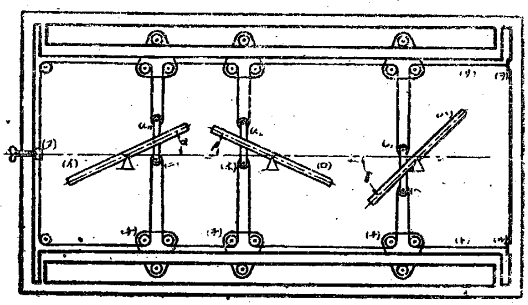
斯る計算機が資材的に充分なる支持を得て多量に作り各研究所におく事を得るならば現今の如きスピード時代に於てすこぶる有用であると思はれる．

原理的に言つてこの機械は非常に簡單であるがやゝ大型に失すると云ふ非難を折々聞くがそれは機構的に言つて止むを得ざる所であり，又移動を要せざる機械である事を思へば大した問題となり得ない．

2 機　　構

2 元の場合を述べる．

第 1 圖の如く，この機械は大體“傾斜板”と“鋼帶”と“枠”とより成つてゐる．



第 1 圖

(イ)(ロ)(ハ)なる傾斜板は中央で支へられ左右に輕く廻る事が出來る．その上には各各(ニ)(ホ)(ヘ)なる滑子がついており左右に自由に動かす事が出來る．

滑子の車を通つて圖の如く(ト)なる鋼帶が通つてゐて(ル)にて枠にとめられてゐる．(チ)なる轉子は枠に沿つて自由に移動し滑子との間の鋼帶を常に垂直にする．(リ)なる鋼帶は單に滑子が自由に上下に動く事を避ける爲めのもので(ヲ)にて枠にとめられてある．

(リ)と(ト)の鋼帶は(ヌ)なる所でクランプ出來る樣になつてゐる．

今(イ)(ロ)(ハ)の内 2 枚をある角度だけ傾けるとすると最後の板の角度も定まつてくる．

今　　(イ) の傾き ～ α
　　　(ロ) の傾き ～ β
　　　(ハ) の傾き ～ γ　　とし

滑子(ニ)(ホ)(ヘ)の中心からの動きを a_{11}, a_{12}, c_1 (但符號は中心からの左右によつて定まる)とし，鋼帶を最初すべての板を水平にした時の長さにしてクランプしてゐるとすると傾けた後にも鋼帶の長さが變らぬと云ふ條件から次の式が成立する．

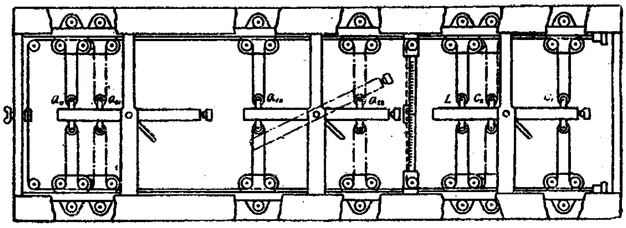
$$2a_{11}\sin\alpha + 2a_{12}\sin\beta + 2c_1\sin\gamma = 0$$

$$a_{11}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+a_{12}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+c_1=0$$

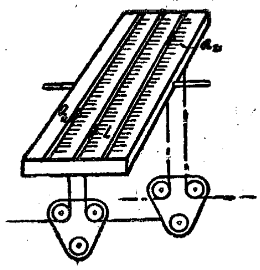
今 $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=x_1,\quad \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=x_2$ とおけば

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+c_1=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

今第2の鋼帶を第1の鋼帶と平行に且奥の方に第2圖の如く裝置したとすると，更に一つの自由度が無くなるわけであるから1枚の傾斜板の角度を定める事によつて完全に殘りの2枚の角度が定まる.



第2圖 (1) 二元組立圖



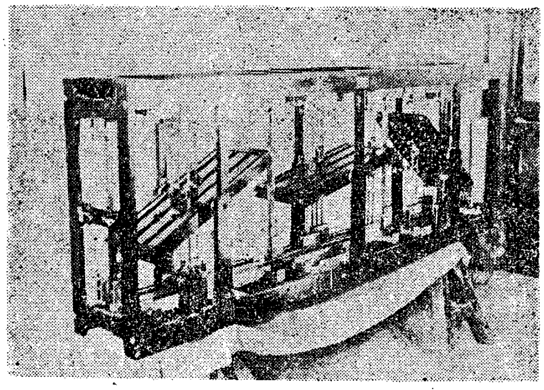
第2圖 (2) 傾斜板

今 a_{21}, a_{22}, c_2 を第二の滑子の中心からの距離とすると，上と同様にして

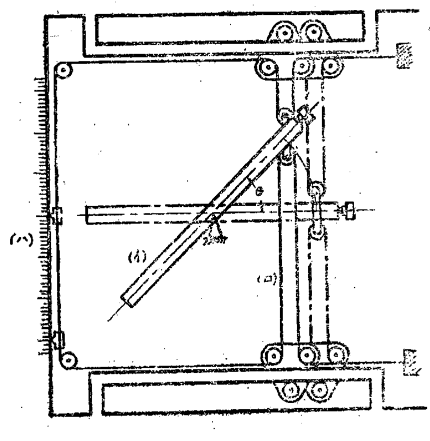
$$a_{12}x_1+a_{22}x_2+c_2=0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

(1), (2) を聯立方程式とし，$\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ を測定する事により方程式が完全に解けるわけである.

第3圖はかくの如き原理から試作された2元求解機の全體寫眞である.



第3圖 二元試作機



第4圖 正弦讀取裝置

多元になつても全く同じ理由で解ける. 9元ならば10枚の傾斜板（9枚の係數板と1枚の常數板）と各々の板に10箇の滑子10本の鋼帶（1本は sin 讀取裝置）が必要である.

上に述べた如く方程式の解は傾斜板の傾きの角度の正弦によつて與へられるが角度の正弦を讀む事に手數を要するから正弦値を直接讀む裝置が附けてある.

これは第4圖の如く（イ）なる傾斜板が θ だけ傾いてゐたとすると（ロ）なる鋼帶に附

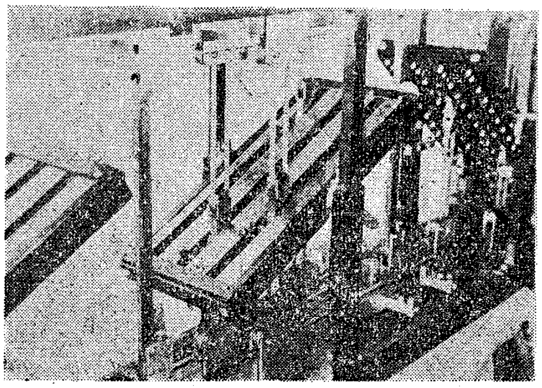
した指標（ハ）が動く．今（イ）なる傾斜板の傾角を θ，滑子と中心間の距離を L，（ハ）の指標の水平位置からの動きを d とすると

$$\sin\theta=\frac{d}{2L}$$

すべての傾斜板の L を一定にしておき，常數板の指標の動きを d 及び d' とすると

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{\dfrac{d}{2L}}{\dfrac{d'}{2L}}=\frac{d}{d'}$$

であるから單に（ハ）なる指標の目盛は極等で目盛つておけば良い．



第５圖　傾斜板

第５圖は傾斜板を斜より見た所であつて正弦讀取装置は板の中央にとりつけられてある．尙根の符號は d と d' との比が正であれば正，負であれば負であるから，d, d' が同符號即ち x_1－ 板と c－ 板とが同じ方向に傾いてゐれば正 d, d' が異符號即ち x_1－ 板と c－ 板とが異つた方向に傾いてゐれば負である．

滑子の動きは傾斜板上に 1.5 mm を 1 として ±110 更にマイクロメーターで 2 桁合計 4 桁入れる事が出來正弦讀取装置はバーニヤで 4 桁迄讀める．

猶解が不定になつた場合には 2 元の場合で云ふと c-板の角度を一定にしても x_1－ 板，x_2－ 板は聯動して自由に動くのである．但その比は一定である．

もし解が不能になると x_1－ 板，x_2－ 板は聯動するが c 板は動かない．

方程式が不定もしくは不能の形に近づくと根の精度が惡くなる．それについては後で述べる．この機械を實用にする爲には充分なる設計上の注意が必要である．主に次の如き點が擧げられる．

〔1〕 傾斜板と滑子，轉子は輕く廻らねばならぬ關係上廻轉部分にはすべて球軸受が用ひられてゐる．

N. S. K.	R. A. B	12 箇
N. S. K.	R 0−8	27 箇
N. S. K.	R 0−6	64 箇

もし 9 元の機械であるならば 1000 箇位の球軸受が必要である．

〔2〕 傾斜板の中の滑子は正負を通じて動くから傾斜板の中央に軸を通す事が出來ない．それ故に傾斜板の枠を大にしてこれで持たせなければならぬ．從つて傾斜板は堅固なるものとなる．2 元の試作機では（520×225×45 mm）である．

〔3〕 大きな重量の傾斜板を支へる關係上全體の外枠は大なるものとなる．2 元の試作機では（2000×740×295 mm）であり，9 元の場合では相當に大となる豫定である．

〔4〕 鋼帶は屈撓自由で且延びのないものを撰ばねばならぬ. 現在では（10×0.2×6358 mm）のものを用ひてゐる. 且その張力は自由に加減出來るやうになつてゐる.

〔5〕 傾斜板はよくバランスが取れてゐなければならぬ. 9 元の機械ではこの爲, マイクロメーターを5個づゝ左右にとりつけられてゐる. なほ滑子移動とのバランスのため, 或はテープが全部左によつたりするのをさけるため, 正弦の讀取裝置の L を他と同樣に動かす事が出來, これによつて式の形に依り適當に L を變へてバランスを得る事が出來る.

〔6〕 機械の摩擦誤差を防ぐため, 機械に微小なる振動を與へる事が必要である. 現在の機械に於いては, 斯る裝置が附いてゐないが將來斯る事が必要となるであらう.

〔7〕 鋼帶の夫々の張力が等しい事が必要である. このため簡單なる張力測定法が望まれる.

3 操　　作　　法

（A） 機械的操作法

この機械を早く精度良く用ふる爲には次の如き使用法が良いであらう.

（イ） 先づ鋼帶のクランプをはずす, すると凡ての傾斜板が自由に動く.

（ロ） 次に凡ての傾斜板が大體水平になる樣にする. 次に傾斜板にクランプが附いてゐるからそれを締める.

（ハ） 係數を間違ひのない樣に入れる.

（ニ） 鋼帶のクランプを締める.

（ホ） 傾斜板のクランプをはずす.

（ヘ） この傾斜板の中最も樂に動き得るものを探し出し, これを約 40° 傾ける. そして小さく上下に振動を與へて機械の摩擦誤差を除くのである.

（ト） この時 c― 板の正弦値が簡單になる樣にするのが後の計算に便利である.

（チ） 正弦讀取裝置から正弦の値を讀む.

（リ） 反對側に約 40° 傾けて正弦値を讀む.

（ヌ） 答は未知數を表はす傾斜板の傾きの正弦値の代數的差を c― 板の傾きの正弦値の代數的差で割つたものである.

（ヌ）の說明. これは最初の傾斜板の水平から外れた誤差を無くする爲行はれる. 今最初の正弦の讀取の摺れを p, q, r とし l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2 を 1 回目或は 2 回目に於ける正弦の讀とすると

$$\begin{cases} a_{11}(l_1-p)+a_{12}(m_1-q)+c_1(n_1-r)=0 \\ a_{21}(l_1-p)+a_{22}(m_1-q)+c_2(n_1-r)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}(l_2-p)+a_{12}(m_2-q)+c_1(n_2-r)=0 \\ a_{21}(l_2-p)+a_{22}(m_2-q)+c_2(n_2-r)=0 \end{cases}$$

2 回の代數差をとれば

$$\begin{cases} a_{11}(l_1-l_2)+a_{12}(m_1-m_2)+c_1(n_1-n_2)=0 \\ a_{21}(l-l_2)+a_{22}\,(m_1-m_2)+c_2(n_1-n_2)=0 \end{cases}$$

依つて p, q, r に關係なく x_1, x_2 を求める事が出來る.

（B） 數學的操作法

この機械は方程式の形により精度が大部異つて來る. 精度が惡くなるのは次の如き場合である.

〔i〕 滑子が中心に近すぎてゐるとき

〔ii〕 根が不定, 不能に近いとき

次になるべく精度を得る爲に以下の如き方法がとられる.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+c_1=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+c_2=0 \end{cases} \quad \text{に於て}$$

〔i〕 今 a_{11}, a_{12}, c, 或は a_{21}, a_{22}, c_2 が同じ位數で小さいか大きい時

$$\begin{cases} k\,a_{11}x+k\,a_{12}y+k\,c_1=0 \\ k'a_{21}x+k'a_{22}y+k'c_2=0 \end{cases}$$

として $(k\,a_{11})$ $(k\,a_{12})$………等をなるべく傾斜板を一杯に使ふやうな値にする.

〔ii〕 a_{11} と a_{21}, a_{12} と a_{22} が同じ位數で大きいか小さい時

$$\begin{cases} k\,a_{11}\dfrac{x}{k}+k'\,a_{12}\dfrac{y}{k'}+c_1=0 \\ k\,a_{21}\dfrac{x}{k}+k'\,a_{22}\dfrac{y}{k'}+c_2=0 \end{cases}$$

とし $\left(\dfrac{x}{k}\right)\cdot\left(\dfrac{y}{k'}\right)$ を根として考へる.

〔iii〕 c のみ小さい時（これは次に述べる）逐次近似法に使ふ手である.

$$\begin{cases} a_{11}kx+a_{12}ky+kc_1=0 \\ a_{21}kx+a_{22}ky+kc_2=0 \end{cases}$$

とし, $(k\,x)$, $(k\,y)$ を根として考へる.

（iv）
$$a_{11}(x-a)+a_{12}(y-b)+(c_1+a_{11}a+a_{12}b)=0$$
$$a_{21}(x-a)+a_{22}(y-b)+(c_2+a_{21}a+a_{22}b)=0$$

として常數項を加減する.

（v） 又以上の方法の組合せ

（vi） 逐次近似法

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+c_1=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+c_2=0 \end{cases}$$

第 1 回目ので得た値 x に $\triangle x$, y に $\triangle y$ の誤差があるとする.

$$\begin{cases} a_{11}(x_1+\triangle x)+a_{12}(y_1+\triangle y)+c_1=0 \\ a_{12}(x_1+\triangle x)+a_{22}(y+\triangle y)+c_2=0 \end{cases}$$

今
$$\begin{cases} \triangle c_1=a_{11}x_1+a_{12}y+c_1 \\ \triangle c_2=a_{21}x+a_{22}y_1+c_2 \end{cases} \quad \text{とすると}$$

$$\begin{cases} a_{11}\triangle x+a_{12}\triangle y+\triangle c_1=0 \\ a_{21}\triangle x+a_{22}\triangle y+\triangle c_2=0 \end{cases}$$

これを前に述べた〔iii〕の方法で (kx), (ky) を根として $\triangle c_1$, $\triangle c_2$ を k 倍したものを機械に入れてをく，この場合に於て $\triangle x$, $\triangle y$ の係數は x_1, y_1 の係數と變らないから滑子は動かす必要はない.

これは例へ元が多くなつても同じ事である．即ち常數項の板のみの滑子を動かす事によつて第二近似，第三近似を求める事が容易に出來るのである.

$\triangle c_1$, $\triangle c_2$ の位數があまり違ふとこの逐次計算はやゝ困難となるのは勿論である.

4 精　　　度

今
$$\begin{cases} a_1 x+b_1 y+c_1=0 \\ a_2 x+b_2 y+c_2=0 \end{cases}$$
に於て x— 板, y— 板, c— 板の傾きを $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, とする.

$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = b_1c_2-b_2c_1 : a_2c_1-a_1c_2 : a_1b_2-a_2b_1$ であるから $a_1b_2-a_2b_1$ が小になると，c— 板の動きが小となり精度が惡くなる．即ち不定，不能に近づくと精度が惡くなる.

$S=\dfrac{a_2b_1}{a_1b_2}$ をその不定度として種々の S に關する實驗の結果は下の如くである.

5 實 驗 結 果

（1）

正確解

$$\begin{cases} 7x+2y+3=0 \\ 4x+6y-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$$

$S=0.19$

實驗解	誤　差
$x=-1.012$	(1.2%)
$y=1.987$	(0.6%)
$x=-1.001$	(0.1%)
$y=1.994$	(0.3%)

逐次近似法

第一近似……………… x—1.2 %, y—0.6 %

第二近似……………… x—0.1%, y—0.0%

$$\begin{cases} x_1=-1.012 \\ y_1=1.987 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\varDelta x_1+2\varDelta y_1+7x_1+2y_1+3=0 \\ 4\varDelta x_1+6\varDelta y_1+4x_1+6y_1-8=0 \end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases} 7\varDelta x_1+2\varDelta y-0.11=0 \\ 4\varDelta x_1+6\varDelta y-0.126=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varDelta x_1=0.012 \\ \varDelta y_1=0.013 \end{cases}$$

實驗解	誤　差
$\triangle x=0.011$	(8.3%)
$\triangle y=0.013$	(0.0%)

$x_1+\triangle x=1.012+0.011=1.001$ (0.1%)

$y_1+\triangle y=1.987+0.013=2$ (0.0%)

(2) 正確解

$$\begin{cases}7x+3y+3=0\\4x+6y-8=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1.4\\y=2.267\end{cases}$$

$S=0.286$ 實驗解 誤 差

$$\begin{cases}x=-1.387 & (0.93\%)\\y=2.256 & (0.49\%)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1.398 & (0.14\%)\\y-2.173 & (4.1\ \%)\end{cases}$$

逐次近似法

第一近似…………… $x-0.93\%$ $y-0.49\%$ 第二近似…………… $x-0\ \%$ $y-0\ \%$

$$\begin{cases}x_1=-1.387\\y_1=2.256\end{cases}\qquad\begin{cases}7\triangle x+3\triangle y+7x_1+3y_1+3=0\\4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0\end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases}7\triangle x+3\triangle y+0.059=0\\4\triangle x+6\triangle y+0.012=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\triangle x=-0.013\\\triangle y=0.011\end{cases}$$

實驗解 誤 差

$$\begin{cases}\triangle x=-0.013 & (0.0\%)\\\triangle y=0.011 & (0.0\%)\end{cases}$$

$x_1+\triangle x=-1.387+(-0.013)=-1.4$ (0.0%)

$y_1+\triangle y=2.256+0.011=2.267$ (0.0%)

(3) 正確解

$$\begin{cases}7x+4y+3=0\\4x+6y-8=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1.923\\y=2.615\end{cases}$$

$S=0.381$ 實驗解 誤 差

$$\begin{cases}x=-1.906 & (0.9\ \%)\\y=2.597 & (0.7\ \%)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1.917 & (0.31\%)\\y=2.528 & (3.4\ \%)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-1.913 & (0.52\%)\\y=2.591 & (0.92\%)\end{cases}$$

逐次近似法

第一近似…………… $x-0.9\ \%$ $y-0.7\ \%$ 第二近似…………… $x-0.05\%$ $y-0.04\%$

$$\begin{cases}x_1=-1.906\\y_1=2.597\end{cases}\qquad\begin{matrix}7\triangle x+4\triangle y+7x_1+4y_1+3=0\\4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0\end{matrix}$$

正確解

$$\begin{cases}7\triangle x+4\triangle y+0.046=0\\4\triangle x+6\triangle y-0.042=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\triangle_x=-0.017\\\triangle_y=0.073\end{cases}$$

實驗解 誤差

$$\begin{cases}\triangle x=-0.018 & (5.9\ \%)\\\triangle y=0.019 & (7.4\ \%)\end{cases}$$

$x_1+\triangle x=-1.906+(-0.018)=-1.924$ (0.05%)

$y_1+\triangle y=2.597+0.019=2.616$ (0.04%)

(4) 正確解

$$\begin{cases}7x+5y+3=0\\4x+6y-8=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-2.636\\y=3.091\end{cases}$$

$S=0.476$ 實驗解 誤差

$$\begin{cases}x=-2.611 & (0.95\%)\\y=3.058 & (1.08\%)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2.6 & (1.3\ \%)\\y=3.053 & (1.1\ \%)\end{cases}$$

逐次近似法

第一近似…………… $x-0.95\%$ $y-1.08\%$ 第二近似…………… $x-0\ \%$ $y-0.03\%$

$$\begin{cases}x_1=-2.611\\y_1=3.058\end{cases}\qquad\begin{cases}7\triangle x+5\triangle y+7x_1+5y_1+3=0\\4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0\end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases}7\triangle x+5\triangle y+0.013=0\\4\triangle x+6\triangle y-0.096=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\triangle x=-0.025\\\triangle y=0.033\end{cases}$$

實驗解 誤差

$$\begin{cases}\triangle x=-0.025 & (0.0\ \%)\\\triangle y=0.032 & (3.3\ \%)\end{cases}$$

$x_1+\triangle x=-2.611+(-0.025)=-2.636$ (0.0 %)

$y_1+\triangle y=3.058+0.032=3.09$ (0.03%)

(5) 正確解

$$\begin{cases}7x+6y+3=0\\4x+6y-8=0\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-3.667\\y=3.778\end{cases}$$

$S=0.571$ 實驗解 誤差

$$\begin{cases}x=-3.630 & (1.0\ \%)\\y=3.742 & (0.96\%)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-3.741 & (2.0\ \%)\\y=3.771 & (0.19\%)\end{cases}$$

逐次近似法

第一近似…………… $x-1\%$ 　$y-0.96\%$ 　　第二近似…………… $x-0.0\%$ 　$y-0.0\%$

$$\begin{cases} x_1=-3.630 \\ y_1=3.742 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\triangle x+6\triangle y+7x_1+6y_1+3=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0 \end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases} 7\triangle x+6\triangle y+0.042=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y-0.068=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle x=-0.037 \\ \triangle y=0.036 \end{cases}$$

實驗解	誤差
$\triangle x=-0.037$	(0.0%)
$\triangle y=0.036$	(0.0%)
$x_1+\triangle x=-3.630+(-0.037)=-3.667$	(0.0%)
$y_1+\triangle y=3.742+0.036=3.778$	(0.0%)

(6)

正確解

$$\begin{cases} 7x+7y+3=0 \\ 4x+6y-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-5.286 \\ y=4.857 \end{cases}$$

$S=0.667$

實驗解	誤差
$x=-5.193$	(1.8%)
$y=4.778$	(1.7%)
$x=-5.233$	(1 %)
$y=4.813$	(0.9%)
$x=-5.207$	(1.5%)
$y=4.787$	(1.4%)

逐次近似法

第一近似…………… $x-1.8\%$ 　$y-1.7\%$ 　　第二近似…………… $x-0.019\%$ 　$y-(0.0\%)$

$$\begin{cases} x_1=-5.193 \\ y_1=4.778 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\triangle x+7\triangle y+7x_1+7y_1+3=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0 \end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases} 7\triangle x+7\triangle y+0.095=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y-0.104=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle x=-0.08035 \\ \triangle y=0.079 \end{cases}$$

實驗解	誤差
$\triangle x=-0.0915$	(10 %)
$\triangle y=0.0788$	(0.2%)
$x_1+\triangle x=-5.193+(-0.0915)=-5.285$	(0.019%)
$y_1+\triangle y=4.778+0.0788=4.857$	(0.0%)

(7)

正確解

$$\begin{cases} 7x+8y+3=0 \\ 4x+6y-8=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-8.2 \\ y=6.8 \end{cases}$$

$S=0.762$ 實驗解 誤差

$\begin{cases} x=-8.153 \\ y=6.737 \end{cases}$ (0.6%) (0.9%)

$\begin{cases} x=-8.415 \\ y=6.900 \end{cases}$ (2.6%) (1.4%)

$\begin{cases} x=-7.772 \\ y=6.462 \end{cases}$ (5.2%) (5 %)

逐次近似法

第一近似…………… $x-0.6\%$, $y-0.9\%$

$\begin{cases} x_1=-8.153 \\ y_1=6.737 \end{cases}$

第二近似…………… $x-0.05\%$, $y-0.03\%$

$\begin{cases} 7\triangle x+8\triangle y+7x_1+8y_1+3=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0 \end{cases}$

正確解

$\begin{cases} 7\triangle x+8\triangle y+0.175=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y-0.19=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \triangle x=-0.049 \\ \triangle y=0.065 \end{cases}$

實驗解 誤差

$\begin{cases} \triangle x=-0.043 \\ \triangle y=0.065 \end{cases}$ (12.2%) (0.0 %)

$x_1+\triangle x=-8.153+(-0.043)=8.196$ (0.05%)

$y_1+\triangle y=6.737+0.065=6.802$ (0.03%)

(8)

正確解

$\begin{cases} 7x+9y+3=0 \\ 4x+6y-8=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-15 \\ y=11.333 \end{cases}$

$S=0.857$ 實驗解 誤差

$\begin{cases} x=-14.220 \\ y=11.100 \end{cases}$ (5.2%) (2.1%)

$\begin{cases} x=-14.455 \\ y=10.930 \end{cases}$ (3.6%) (3.6%)

$\begin{cases} x=-14.850 \\ y=11.230 \end{cases}$ (1 %) (0.92%)

逐次近似法

第一近似…………… $x-1\%$, $y-0.92\%$

$\begin{cases} x_1=-14.850 \\ y_1=11.280 \end{cases}$

第二近似…………… $x-0.07\%$, $y-0.06\%$

$\begin{cases} 7\triangle x+9\triangle y+7x_1+9y_1+3=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y+4x_1+6y_1-8=0 \end{cases}$

正確解

$\begin{cases} 7\triangle x+9\triangle y+0.12=0 \\ 4\triangle x+6\triangle y-0.02=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \triangle x=-0.15 \\ \triangle y=0.103 \end{cases}$

實驗解　　　誤差

$$\begin{cases}\triangle x=-0.14 & (6.7\%)\\ \triangle y=0.096 & (6.8\%)\end{cases}$$

$$x_1+\triangle x=-14.850+(-0.14)=-14.99 \qquad (0.07\%)$$

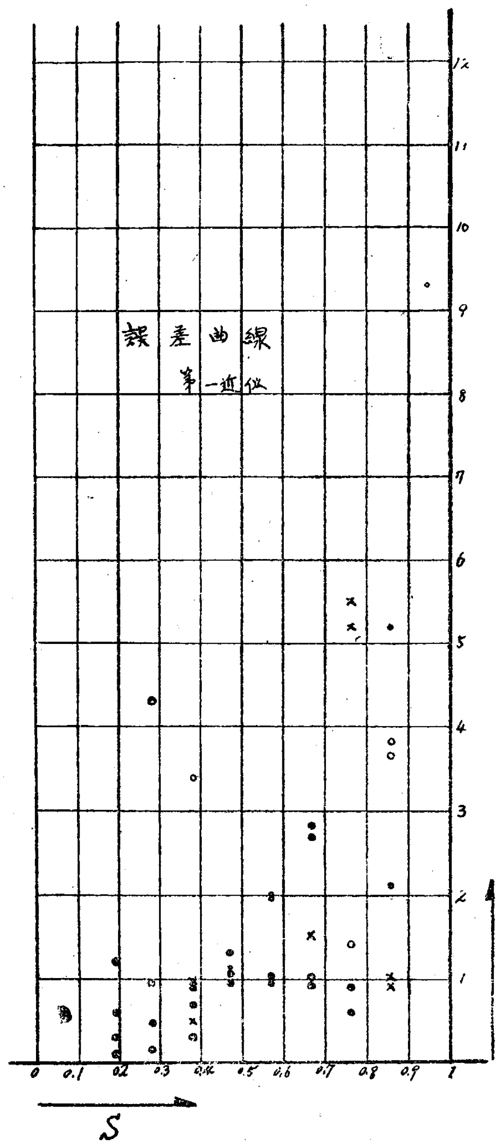
$$y_1+\triangle y=11.230+0.096=-11.326 \qquad (0.06\%)$$

（9）　正確解

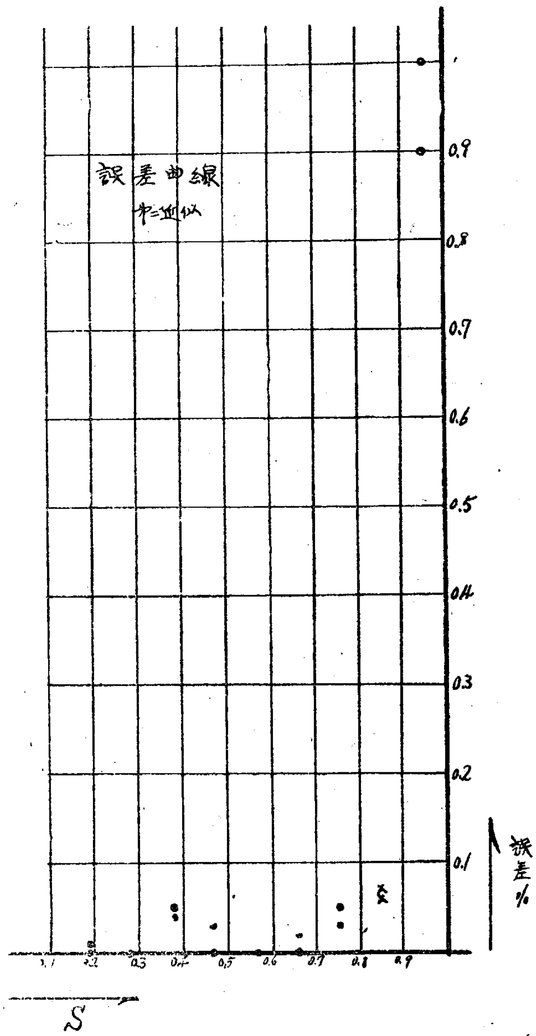
$$\begin{cases}7x+10y+3=0\\ 4x+\ 6y-8=0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-49\\ y=34\end{cases}$$

$S=0.955$　實驗解　　　誤差

$$\begin{cases}x=-43.65 & (11.3\%)\\ y=30.28 & (10.9\%)\end{cases}$$



第　6　圖



第　7　圖

$$\begin{cases} x=-44.693 & (8.8\%) \\ y=31.103 & (8.8\%) \end{cases}$$

逐次近似法

第一近似…………… $x-11.3\%$ $y-10.9\%$　　第二近似…………… $x-1\ \%$ $y-0.9\%$

$$\begin{cases} x_1=-43.65 \\ y_1=30.28 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\triangle x+10\triangle y+7x_1+10y_1+3=0 \\ 4\triangle x+\ 6\triangle y+4x_1+\ 6y_1-8=0 \end{cases}$$

正確解

$$\begin{cases} 7\triangle x+10\triangle y+0.25=0 \\ 4\triangle x+\ 6\triangle y-0.92=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle x=-5.350 \\ \triangle y=3.720 \end{cases}$$

實驗解　　　　　　誤　差

$$\begin{cases} \triangle x=-5.830 & (8.9\%) \\ \triangle y=4.040 & (7.9\%) \end{cases}$$

$$x_1+\triangle x=-43.65+(-5.83)=-49.48 \qquad (1\ \%)$$

$$y_1+\triangle y=30.28+4.040=34.32 \qquad (0.9\%)$$

第 6 圖及第 7 圖は不定度と誤差との圖表で第 1 近似と第 2 近似値を示してゐる.

6 結　　論

〔a〕 根が不定に近づかぬ限りに於ては大體 2% 以下の誤差に入る.

〔b〕 第二近似をとれば 0.1% 以下となり非常に條件の悪い場合でも 1% 以下となる. この場合でも第三近似をとれば更に根の精度を上げる事が出來る.

〔c〕 この機械の機械的操作法によつて精度が左右される. とくに止める時に動かす板をこまかく振動させて止める事は必要である. これは傾斜板が重い關係上廻轉の慣性があるためである.

7 特殊計算法

〔i〕 固有値の計算

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x+a_{12}y=0 \\ a_{21}x+(a_{22}-\lambda)y=0 \end{cases}$$

に於て λ が特別の値を取つた時に即ち固有値をとつた時に $x=y=0$ 以外の根を持つ.

この機械について云へば λ が固有値を取つた時に傾斜板が動き他の場合には動かないのである.

この事を利用して對角線上の滑子を a_{11}, a_{22} の位置より等距離づゝ少しづゝ動かして傾斜板の動き得る所を探せば良いのである.

實際に於てはその點で傾斜板が急に動くわけでなく, 少し前後で動く. 今次の方程式を解けば

$$\begin{cases}(2-\lambda)x+y=0\\x+(3-\lambda)y=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\lambda_1=1.382\\\lambda_2=3.618\end{cases}$$

第 8 圖の如き結果が得られた.

〔ii〕 行列式の計算

$$\triangle=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

を求めるに先づ

$$\begin{cases}a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{12}\,z=1\\a_{21}\,x+a_{22}\,y+a_{23}\,z=0\\a_{31}\,x+a_{32}\,y+a_{33}\,z=0\end{cases}$$

を滿足する解 $x=x_1$ を機械に依つて求める.

然る時は.

$$x_1=\frac{\triangle_x}{\triangle},\qquad \triangle_x=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

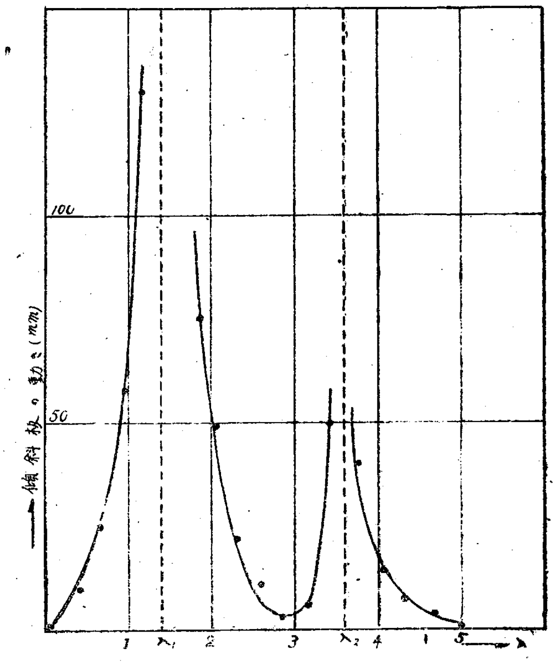
次に

$$\begin{cases}a_{22}\,y+a_{23}\,z=1\\a_{32}\,y+a_{33}\,z=0\end{cases}$$

を滿足する解 $y=y_2$ を機械に依つて求める.

然る時は.

$$y_2=\frac{\triangle_y}{\triangle},\qquad \triangle_y=a_{33}$$



第 8 圖

次に

$$a_{33}z=1$$

を滿足する解 $z=z_3$ を求めると

$$z_3=\frac{1}{a_{33}}$$

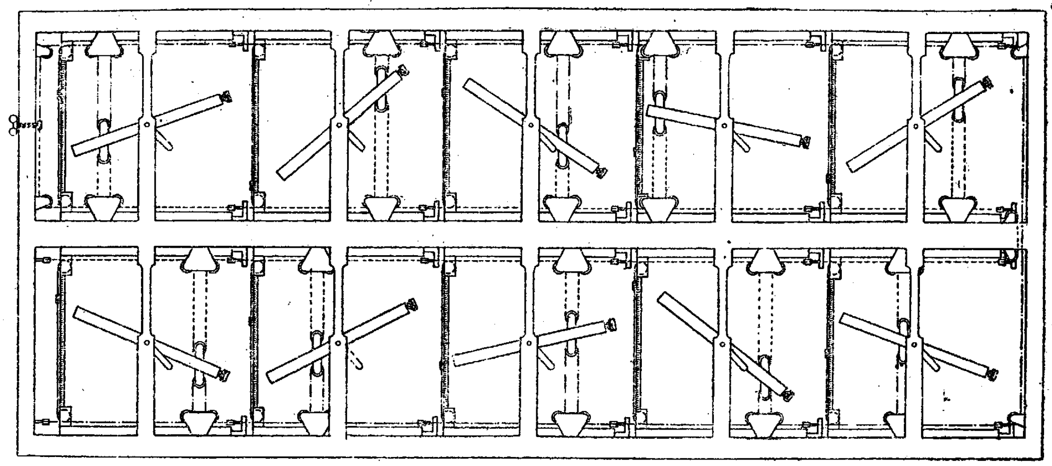
依つて $\Delta=\dfrac{1}{x_1y_2z_3}$ より行列式の値が計算出來る. 猶次數が多くなつても同樣に遂行出來るのである. 猶この用ひ方でも y, z の係數は變らぬから滑子を動かす必要はない.

8 あとがき

以上が試作の 2 元聯立方程式の求解機の實驗結果である. これに力を得て, 第 9 圖の如き9 元の機械を目下製作中である.

もしこれが完了の時は多大なる有力性が望まれてゐる.

9 元の機械に於ては二階建とし, 傾斜板も現在のものよりは小さく全體の大きさは左程大きくなつてゐない. この結果も追つて發表する豫定である. 猶この機械の製作に當つては第



第9圖　9元聯立方程式求解機

二精工社研究部黒河行雄技師に深く感謝する.

9 文　　獻

J. B. Willbur ; The mechamical solution of simultaneous equation.
J. F. I. 222. p. 715—724 (1936)

V. Bush ; Recent progress in analysing machines
Proc. 4th International congress of
applied mechanics, Cambridge p. 3—23 (1934)

志賀亮 ; 聯立方程式の計算機械　科學測器　第2卷　第10號　p. 7—10　(1942)

佐々木達治郎 ; 特殊計算機　機械　第17卷　第1號　p. 33—48　(1944)