

## 常微分方程式求解機について

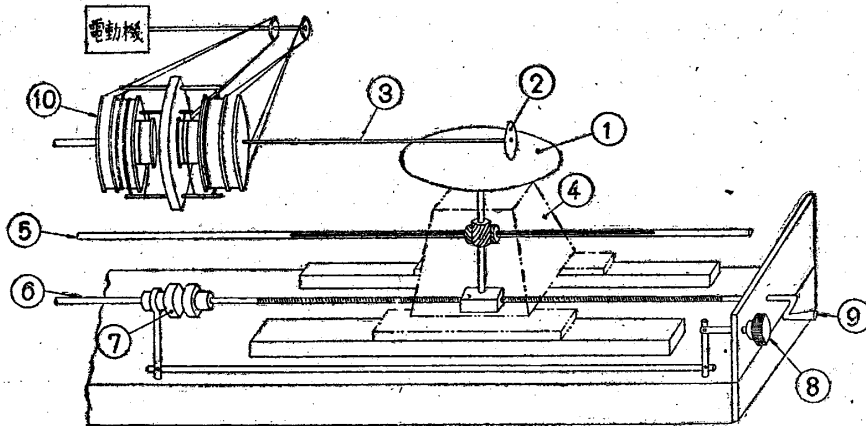
所 員 佐々木 達治郎  
元技師 志 賀 亮  
技 手 藤 井 明

### 目 次

1	緒 言 .....	101
2	原理及機構 .....	103
3	簡單なる方程式への應用 .....	108
4	結 語 .....	118
5	文 献 .....	119

### 〔1〕 緒 言

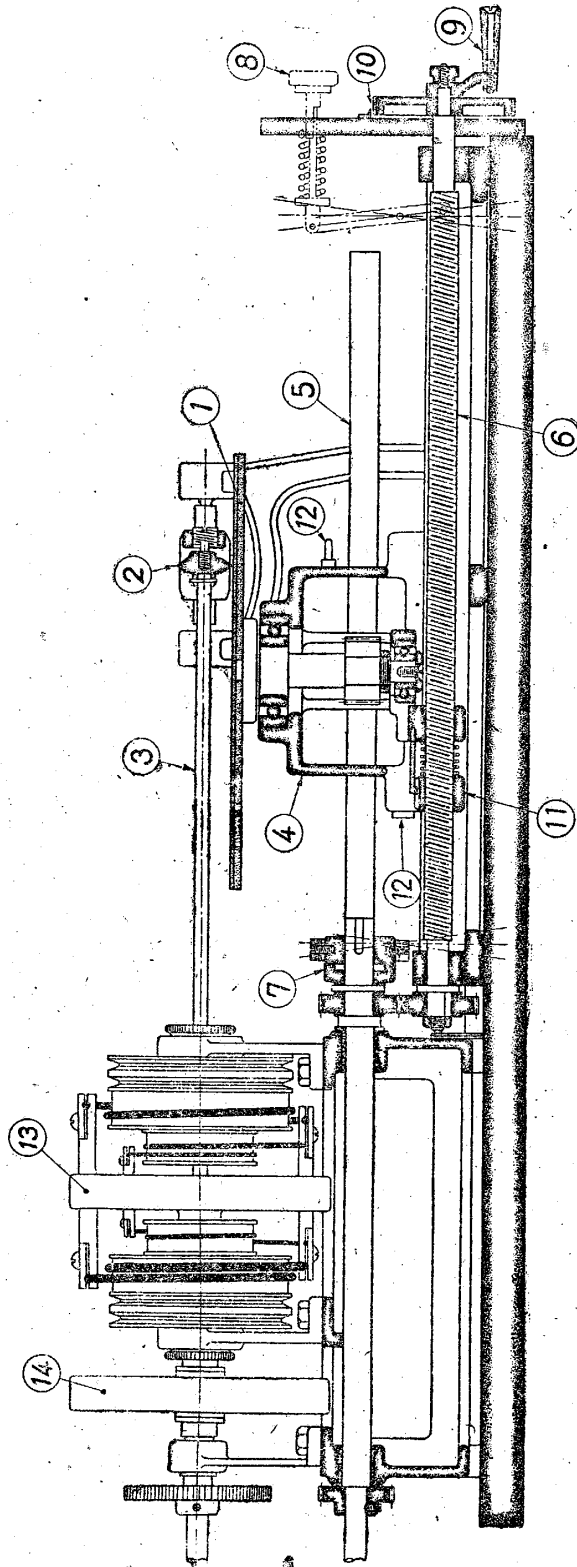
常微分方程式は航空力学，振動学，電気工学等において屢々現はれるが最近は特に非線型問題が重要な位置を占めて來た。かかる非線型問題に對する一般的解法は確立せられて居ず，唯特殊なる變換や級数解法或は數值的解法等に頼つてゐる現状である。この場合に於て方程式の形に關せず且時日を要せず解の形を見出すために工夫された装置が以下のべる求解機の目的である。機構の原理は簡單であり從來の解析的手段より自然的であると言ひ得やう。



第 1 圖 積分機原理圖

- (1)圓盤, (2)回子, (3)w軸, (4)往復台, (5)v軸, (6)u軸, (7)クラッチ  
(8)クラッチ用ツマミ, (9)初期條件用把手(10)廻轉力増大機

實驗關係者 長谷川信之, 八子直, 大森純子, 今井チエ子, 村木綾子, 田中久子, 片岡美枝.

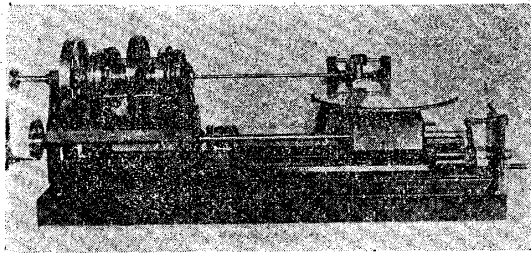


第 2 圖 積分機詳細圖

- (1) 圓盤, (2) 回子, (3) w 軸, (4) 往復台, (5) v 軸, (6) u 軸, (7) クラッチ, (8) クラッチ用ツマミ  
 (9) 把手, (10) 目盛盤, (11) 脊隙補正ナット, (12) クラッチ押し, (13) 廻轉力増大機, (14) ハツミ車

〔2〕 原理及機構

最も重要なものは積分機であつて、現在の機械では4個ある。従つて4階の微分方程式迄解ける。(次数には制限はない)。その他係数を入れる係数卓、解を書く解出卓、乗算を行ふ乗算卓、加算を行ふ加算機、それらを連結する連結軸、 $x$  軸を廻轉する電動機、回轉力増大機及びそれを駆動する電動機等が大體一平面上に配置されてゐる。以下その要素について簡単に述べる事とする。



第3圖 積分機全體寫眞

(i) 積分機

積分は圓盤の廻轉、移動及び回子の廻轉によつて行はれる。 $u, v, w$  を各々圓盤の移動量、回轉角、回子の廻轉角、 $r$  を回子の半徑とすると。

$$rdw = u dv$$

$$\therefore w = \frac{1}{r} \int u dv$$

かくして積分が行はれる。

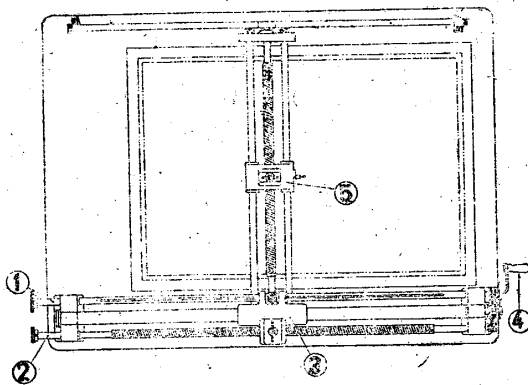
實際の組立圖は第2圖に示す如くなつてゐる。回子の半徑は 32 mm, 厚 6 mm の硬鋼製、回子の端は 0.05 mm の小半徑をもたしてある。圓板は直徑 255 mm, 厚 5 mm のジラルミン製でその上に平面ガラスが固定されてゐる。

圓板の移動量は下の目盛によつて直讀される。圓板の最初の位置は初期條件を與へるから最初に最右の把手によつて、クラッチを外して後、自由なる位置に持ち來らす事が出来る。

圓板は2個の球軸受に支へられて軽く廻轉する事が出来る。 $v$  軸と圓板の台とは特殊の脊隙を小さくするバネ装置が着いてゐる。

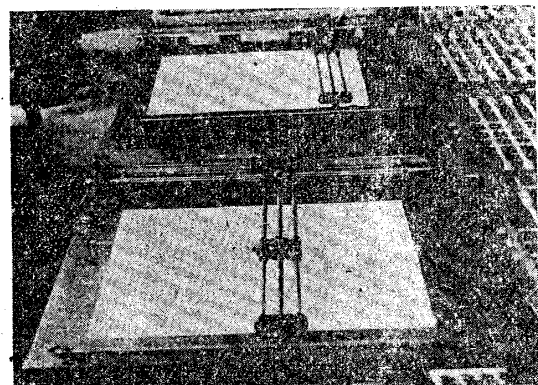
左にある装置は摩擦を利用して回子の廻轉力を増大する機構である。これについては次回にのべる事とする。

(ii) 係数卓



第4圖 係数卓組立圖

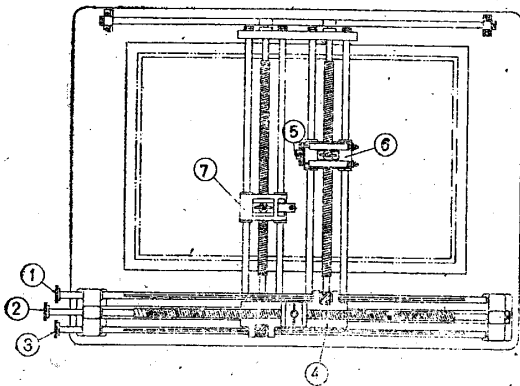
- (1) q 軸, (2) p 軸, (3) p 軸スライダ
- (4) 追尾用把手, (5) q 軸スライダ



第5圖 係数卓全體寫眞

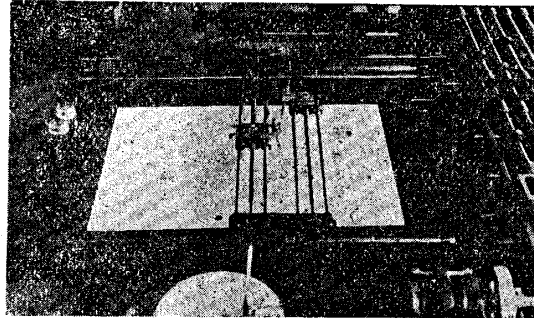
微分方程式に現はれたる種々の係数を機械に入れる装置、第4圖に於ける如く  $q=f(p)$  なる曲線を台上に書いておけば把手による追尾によつて  $q=f(p)$  なる函数が機械に入るわけである。台の大きさは  $800\text{ mm} \times 978\text{ mm}$  である。

(iii) 解出卓



第6圖 解出卓組立圖

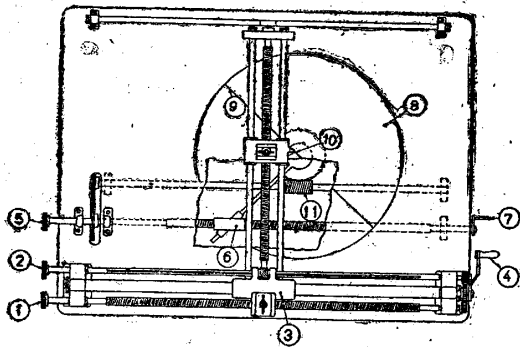
- (1) y 軸, (2) x 軸, (3) y' 軸, (4) x 軸スライダ、  
 (5) 鉛筆, (6) y 軸スライダ、(7) y' 軸スライダ



第7圖 解出卓全體寫眞

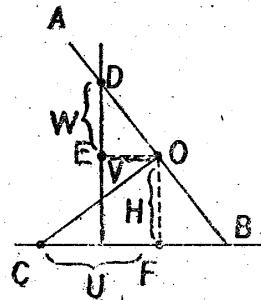
第6圖、第7圖に示す如く、最後に得られた解を台上にグラフ的に書く装置である。係数卓と大略同じ原理であつて係数卓の指標に相當する所に鉛筆が取り付けてある。又  $y$  と  $y'$  とを同時に畫く事が出来る様になつてゐる。  $y$  と  $y'$  とが同じ値をとる時鉛筆の心を折る恐れがあるため、片方が逃げる装置が付けてある。台の大きさは係数卓と殆ど同じである。

(iv) 乗算卓



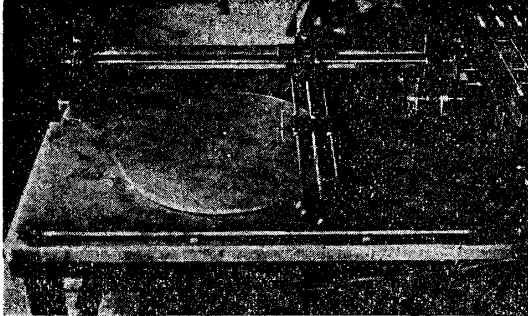
第8圖 乗算卓組立圖

- (1) u 軸, (2) w 軸, (3) u 軸スライダ、(4) w 軸把手  
 (5) v 軸, (6) 圓盤回轉用ナット, (7) v 軸用把手, (8) 圓盤, (9) 追尾線, (10) 指針, (11) 極座標用ウォーム

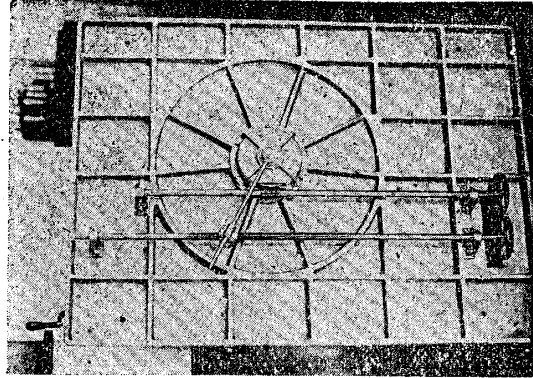


第9圖 乗算卓原理圖

2つの函数の積を行ふ装置である。第8圖に於て  $u$  軸が廻轉すると桿の助けによつて圓板が回轉す、 $v$  軸が廻轉すると指標が左右に動き、 $w$  軸は手によつて廻轉され指標を縦方向に動かす、圓板には桿と直角方向に直線が畫かれ、その直線を追尾する。



第10圖 乗算卓寫眞



第11圖 乗算卓寫眞(裏面)

第9圖に於て  $AB$  は圓盤上の直線とし  $O$  をその中心とする,  $O$  より  $v$  軸上に垂線  $OF$  を下しその足を  $F$  とする.  $D$  を指標とする.  $O$  より垂線  $OF$  を下す.

$$CF = u, \quad OE = v, \quad DE = w, \quad OF = h = \text{Const}$$

$\triangle ODE \sim \triangle OFC$  より

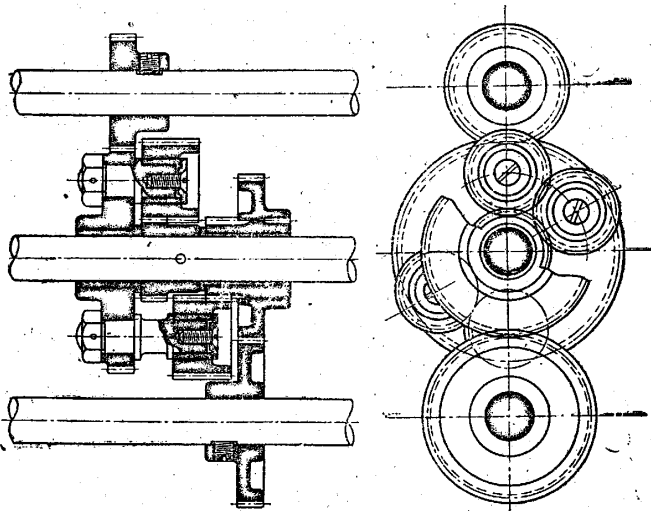
$$w = h \cdot u \cdot v$$

かくして乗算がなされる. 尙今述べた線と直角に書けば割算がなされる.

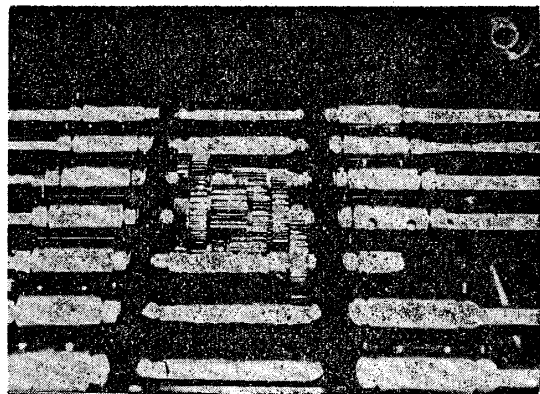
尙  $u'$  なる軸は圓板をウォーム歯車にて廻轉させるから極座標として使用出来る. 圓盤は徑 420 mm のジュラルミン製である.

第10圖は表から第11圖は裏から見た寫眞である.

(v) 加算機



第12圖 加算機組立圖



第13圖 加算機寫眞

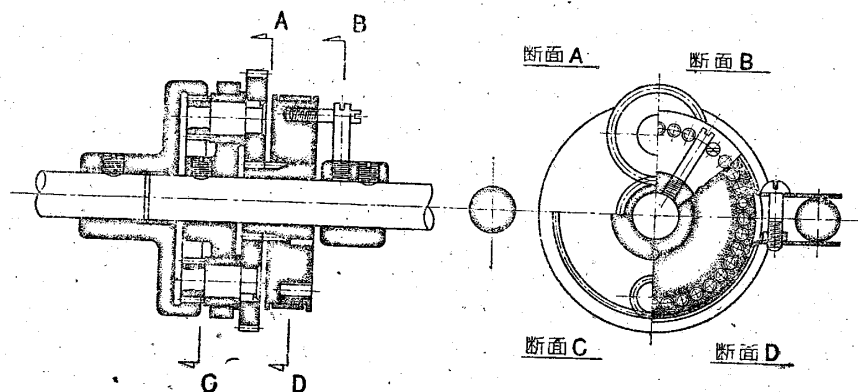
2 軸間の加算を行ふもので差動歯車を利用せるものである.

## (vi) 連結軸

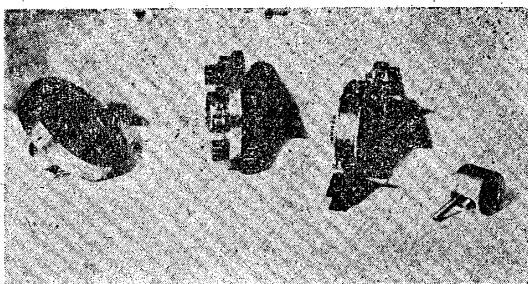
今まで述べた要素を連結する多数の軸を有する部分，軸間の連結はネジ歯車によつて自由にする事が出来，正負は右又は左の斜向歯車の使用によつて定まる。

軸径は 14 mm 枠は鑄物製全體は木枠の上に組立てられてゐる。

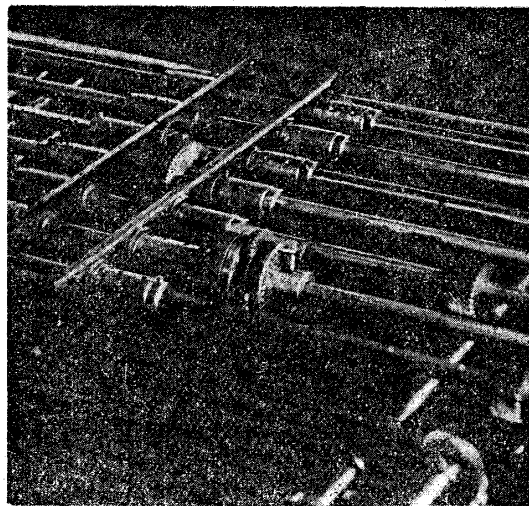
## (vii) 脊隙補正装置



第 14 圖 脊隙補正装置組立圖



第 15 圖 脊隙補正装置寫眞

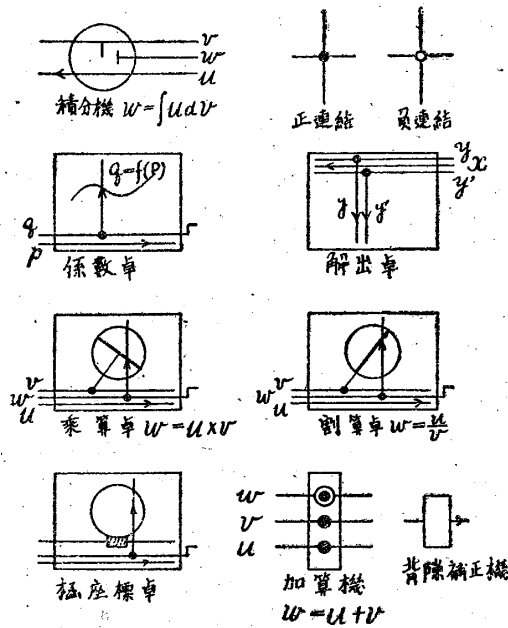


第 16 圖 脊隙補正装置取付寫眞

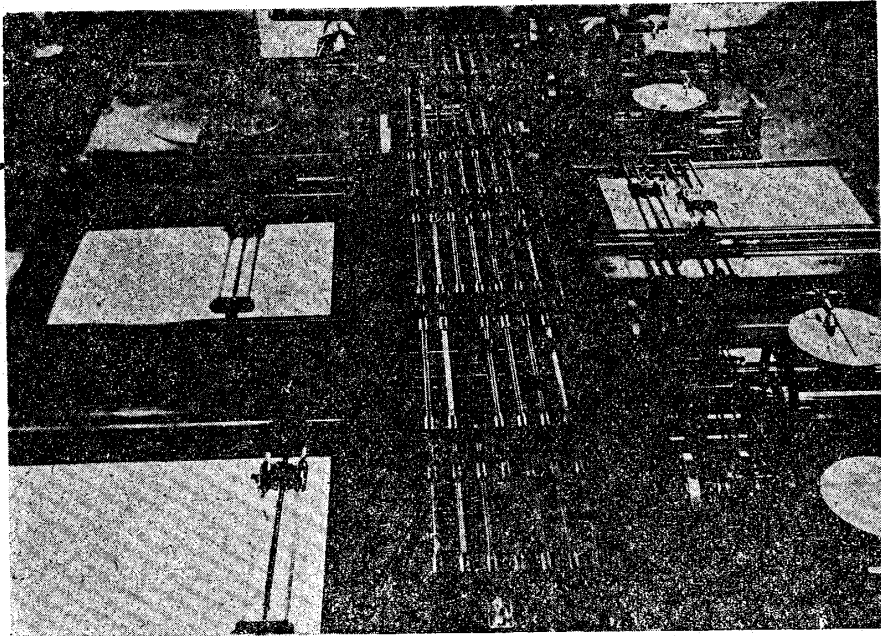
脊隙を補正するために用ひられる装置で第 14 圖及び第 15 圖に示す如く差動歯車を使用し廻轉方向が變る時ある時間中任意の量だけ多く廻轉する機構である。補正量はピンの間の角によつて決定する，實際に取り付けた所は第 16 圖の如くなる。

## (viii) 符 號

以上述べた要素を簡単に示すために第 17 圖の如き符號を使用する。



第 17 圖 符 號

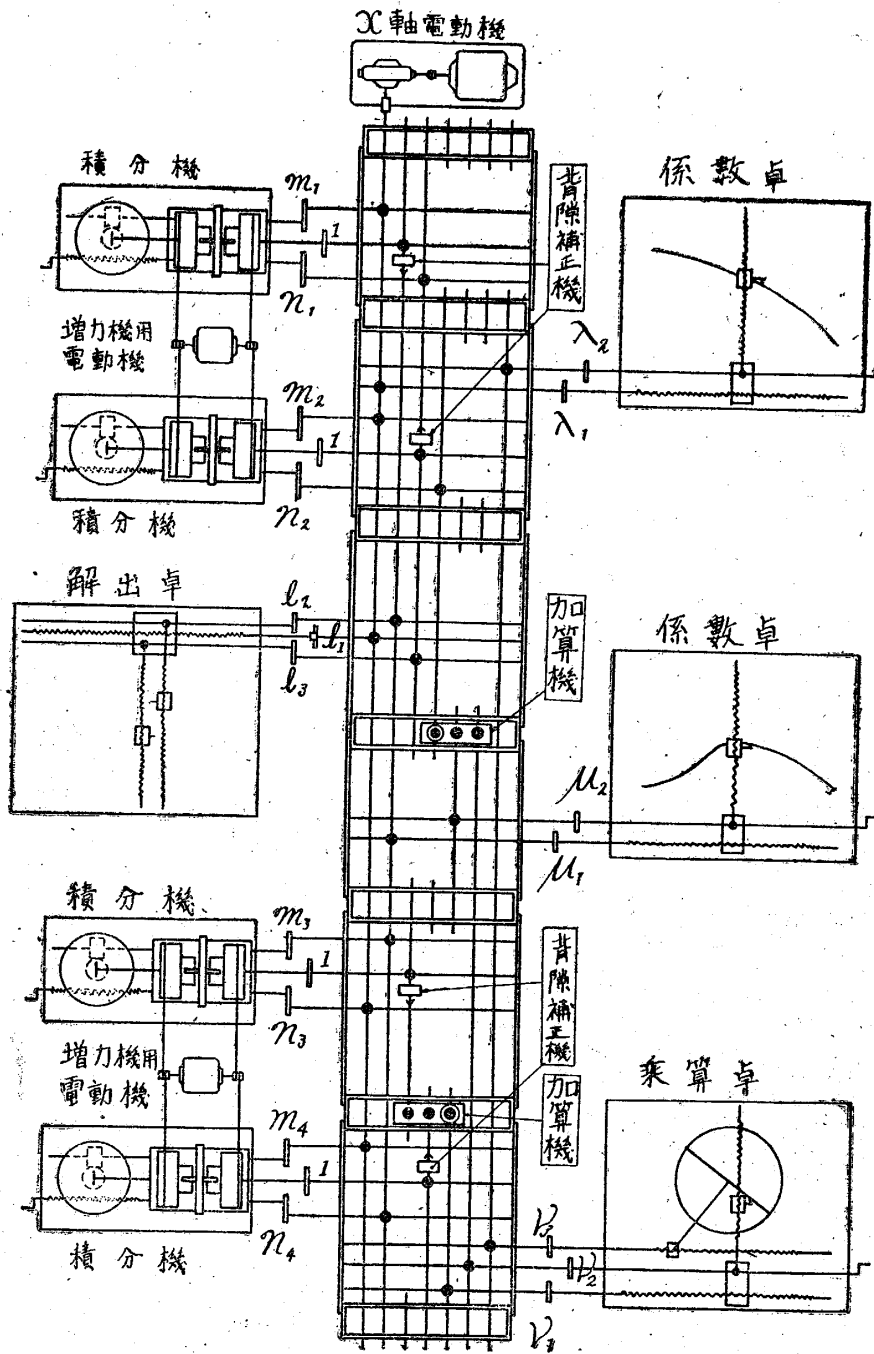


第 18 圖 全 體 寫 眞

第 18 圖, 第 19 圖は全體の寫眞及び配置であつて齒車比は圖に示す如き符號を使用して且連結軸側の齒數を要素側の齒數で割つた値をとる. 尙第 18 圖及第 19 圖は

$$y'' = f(x)xy + g(y)$$

の解の連結になつてゐる.



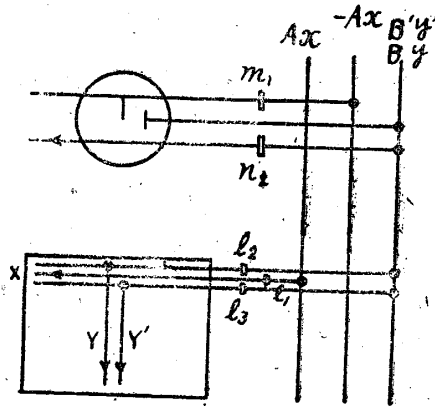
第19圖 全體配置圖

〔3〕 簡單なる方程式への應用

(I)  $y' = kx + a$

第20圖の如く連結する。





第 20 圖  $y' = kx + a$  連結圖

先ず  $a=0$  の場合を考へる.

積分を行ふ時被積分函数にかゝる常數を

$$g_1 = \frac{m_1 n_1}{32} \quad (32 \text{ は回子半徑}) \text{ とする.}$$

第 1 表

齒 數 比 及 初 期 條 件

	I	II	III	III
$m_1$	1	1	1	1
$n_1$	1	1	$\frac{1}{2}$	1
$g_1$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$
$l_1$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$l_2$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$A$	8	16	32	32
$a$	32	32	32	32
$B$	8	16	16	16
$l$	16	16	16	16
$A'$	32	32	32	16
$a'$	16	16	16	16
$x$	-9	-6	-6	-3.5
$y$	$\frac{8}{8}$	9	18	12.25
$y'$	$\frac{9}{4}$	-3	-6	-7
$X$	-288	-192	-192	-112
$Y$	16	144	288	196
$Y'$	-72	-48	-96	-112
$a'$	32	32	16	16
$S_1$	-72	-96	-96	-112
$k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

第 1 軸を  $Ax$ , 第 2 軸を  $By$  とする.

積分機の関係より  $By = g_1 \int A'y'd(Ax)$

$$\frac{g_1 AA'}{B} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

第 1 軸に於て  $A'y' = Ax \dots\dots\dots(2)$

故に  $k = \frac{A'}{A}$

(1) より  $\frac{g_1 A^2}{B} = k \dots\dots\dots(3)$

初期条件の圓盤の移動量(耗)を  $S_1$  とす.

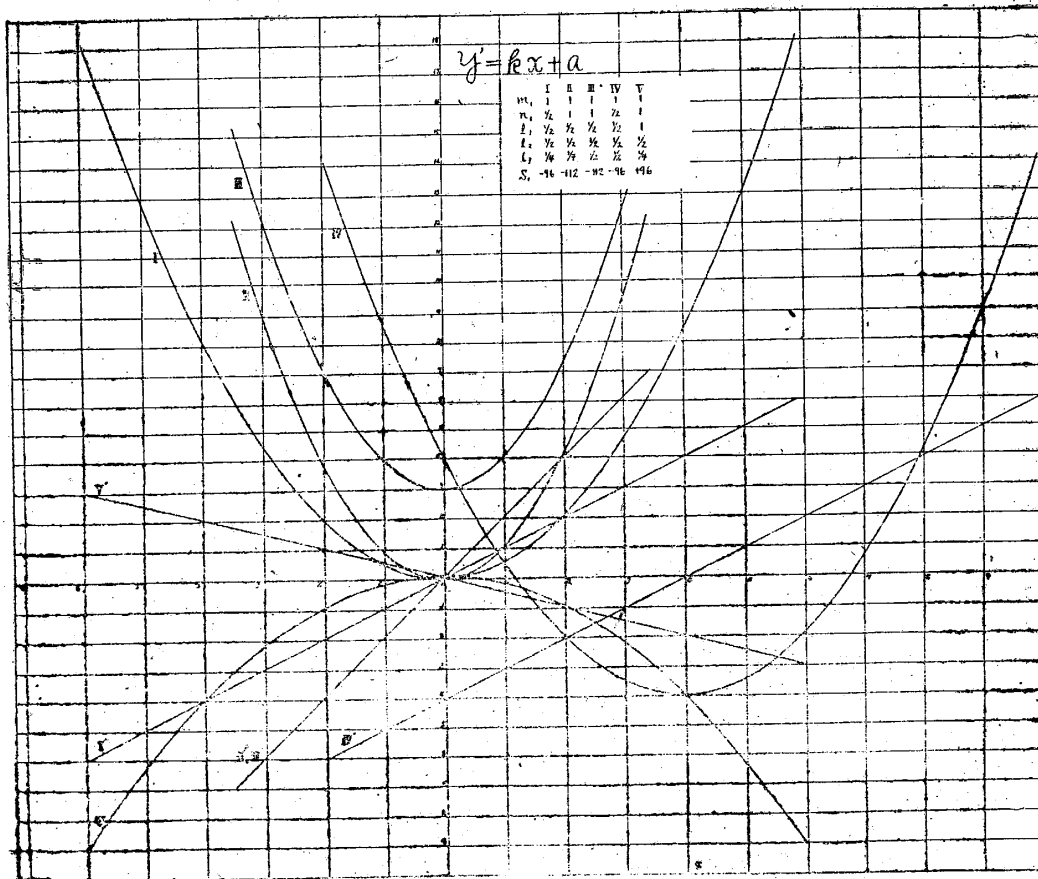
$$S_1 = \alpha'y' \quad \text{但} \quad a' = n_1 A'$$

解出卓における單位目盛(耗)を  $x, y, y'$  の順に  $a, b, \alpha'$  とすると.

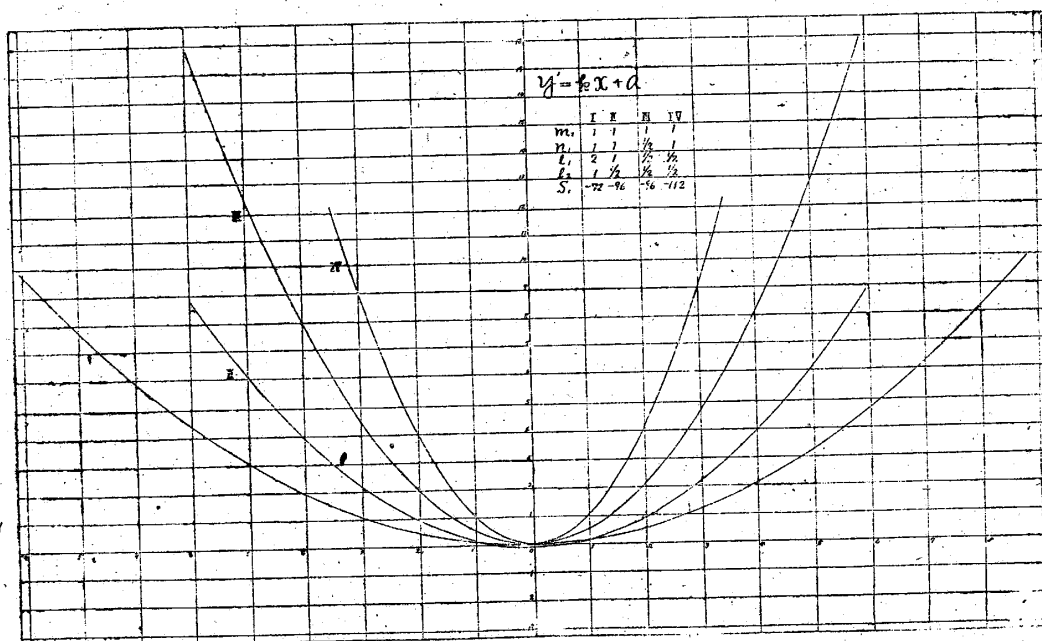
$$\alpha = 2l_1 A, \quad b = 2l_2 B, \quad \alpha' = 2l_3 A$$

第 2 表  
齒 數 比 及 初 期 條 件

	I	II	III	IV	V
$k$	1	2	2	1	$1/2$
$a$	0	0	0	4	0
$c$	0	0	3	-4	0
$m_1$	1	1	1	1	1
$n_1$	$1/2$	1	1	$1/2$	1
$g_1$	$1/64$	$1/32$	$1/32$	$1/64$	$1/32$
$l_1$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
$l_2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$l_3$	$1/4$	$1/4$	$1/2$	$1/2$	$1/4$
$A$	32	32	32	32	16
$\alpha$	32	32	32	32	32
$B$	16	16	16	16	16
$b$	16	16	16	16	16
$A'$	32	16	16	32	32
$a'$	16	16	16	16	16
$x$	-6~+6	-3.5~+3.5	-3.5~+3.5	-6~+6	-6~+6
$y_{max}$	18	12.25	15.25	14	-9
$y'$	-6~+6	-7~+7	-7~+7	-6~+6	+3~-3
$X$	-192	-112	-112	-192	-192
$Y$	288	196	244	224	-144
$Y'$	-96	-112	-112	-96	48
$\alpha'$	16	16	16	16	32
$S_1$	-96	-112	-112	-96	96



第 21 圖  $y' = kx + a$  曲線圖 (A)

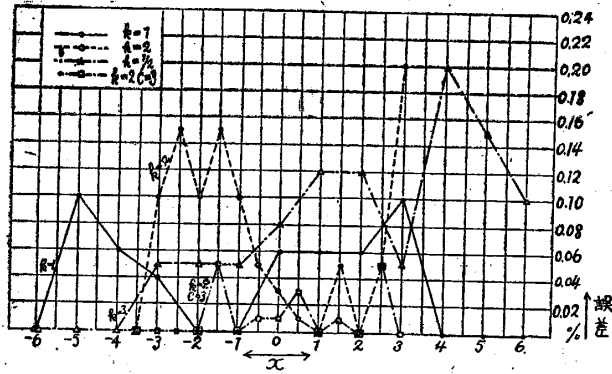


第 22 圖  $y' = kx + a$  曲線圖 (B)

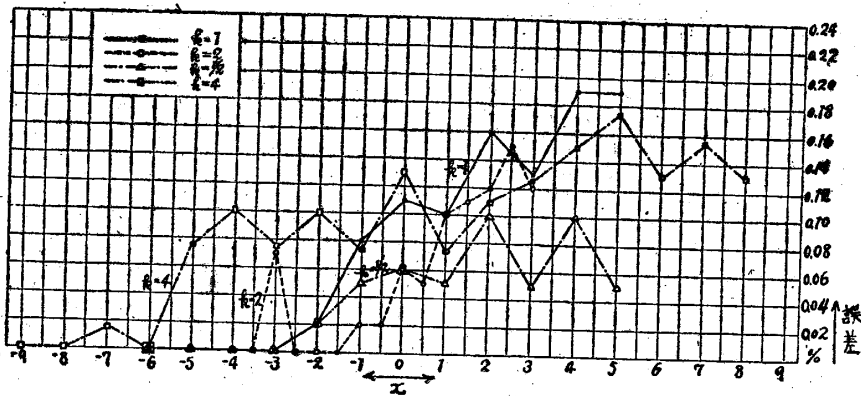
$\alpha \neq 0$  のときは  $y$  軸を左右に移動すればよい。

この式によつて第 1 表, 第 2 表の如く歯数比その他を定めて実験を行つた。

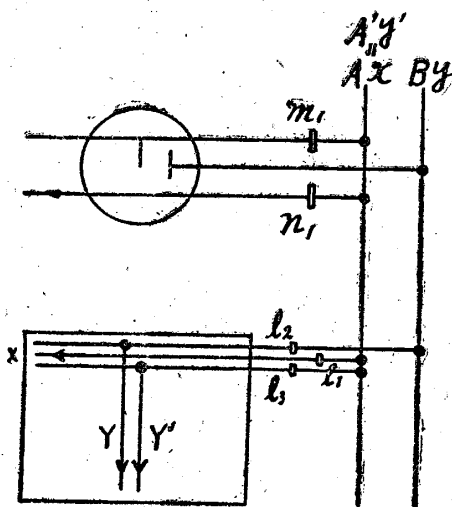
得たる曲線は第 21 圖, 第 22 圖に示す如くでこれより誤差を計算すれば第 23 圖, 第 24 圖に示す如くなる。



第 23 圖  $y' = kx + a$  誤差 (A)



第 24 圖  $y' = kx + a$  誤差 (B)



第 25 圖  $y' = ky + a$  の連結圖

(II)  $y' = ky + a$

第 25 圖の如く連結する。

$a = 0$  とする, 積分機の関係より

$$By = g_1 \int B'y' d(-Ax)$$

$$-\frac{g_1 B'A}{B} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$By = B'y'$$

$$\frac{B'}{B} = k \dots\dots\dots (2)$$

$$(1), (2) \text{ より } -g_1 A = k \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2), (3) を組合せ  $k$  の値, 積分機圓盤等を考慮して歯数比, 初期條件を計算し得る。

初期條件  $S_1 = \beta y' \quad \beta' = n_1 B'$

目 盛  $\begin{cases} \alpha = 2l_1 A \\ b = 2l_2 B' \\ b' = 2l_3 B' \end{cases}$

第 3 表の如き齒數比，初期条件にて第 26 圖，第 27 圖の如き結果が得られた。

第 3 表

	I	II	III	III
$k$	4	2	1	$1/2$
$a$	0	0	0	0
$c$	1	1	1	1
$m_1$	1	1	$1/2$	$1/2$
$n_1$	1	$1/2$	$1/2$	$1/2$
$g_1$	$1/32$	$1/64$	$1/128$	$1/128$
$l_1$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1
$l_2$	2	1	1	$1/2$
$A$	128	128	128	64
$\alpha$	128	128	128	128
$B$	4	8	8	10
$l$	16	16	16	16
$B'$	1	4	8	32
$x'$	0.75~-1	1.5~-2	3~-2	3~-2
$y$	20.086~0.0183	20.086~0.0183	20.086~0.1353	4.4817~0.37183
$y'$	80.344~0.0732	80.344~0.0732	20.086~0.1353	2.2408~0.1869
$X$	96~-128	192~256	384~-256	384~-256
$Y$	321.376~0.2928	321.376~0.2928	321.376~0.2928	71.707~5.949
$\beta'$	1	2	4	16
$S_1$	80.344	80.344	80.344	35.8536

(III)  $y'' + k^2 y = 0$

第 28 圖の如く連結する。

第 1 の積分機より

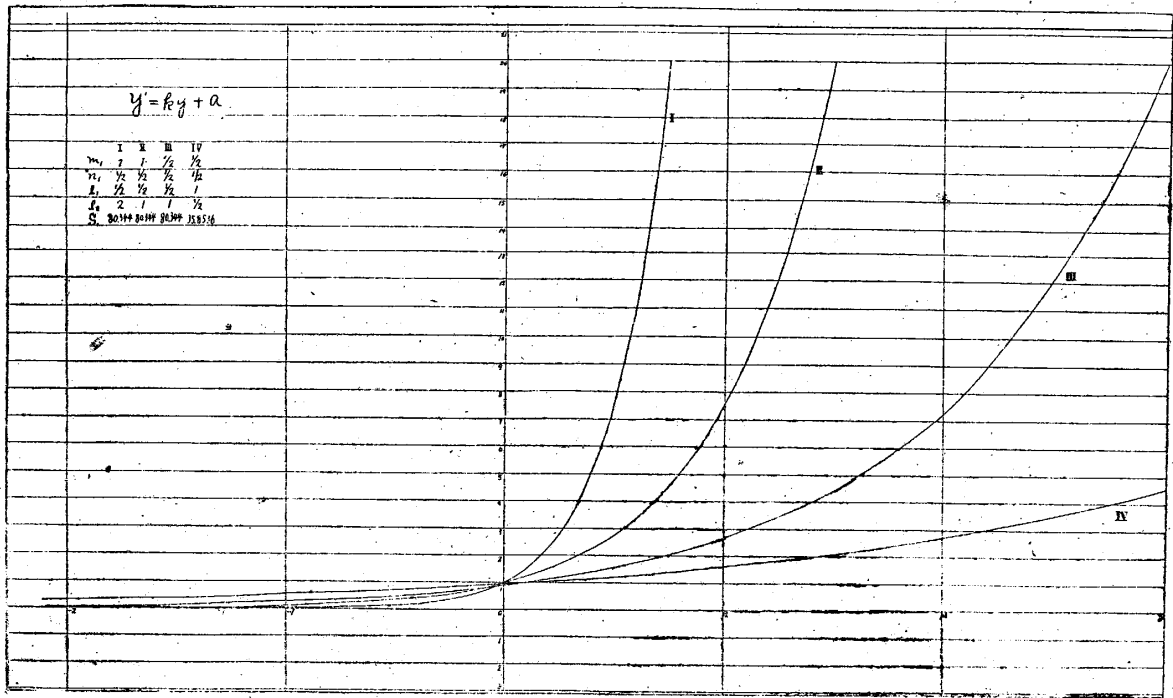
$$By = g_1 \int cy' d(Ax)$$

$$\frac{g_1 c A}{B} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

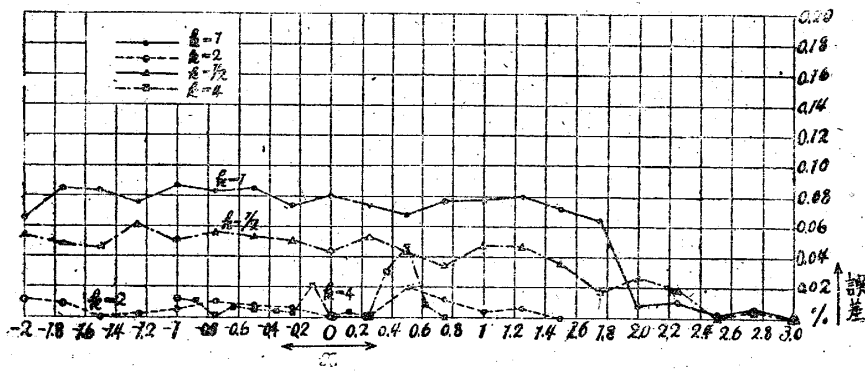
第 2 の積分機より

$$Cy' = g_2 \int B'y'' d(-Ax)$$

$$-\frac{g_2 BA}{C} = 1 \dots\dots\dots(2)$$



第 26 圖  $y' = ky + a$  の曲線圖



第 27 圖  $y' = ky + a$  の誤差圖

$$By = B'y'' \dots \dots \dots (3)$$

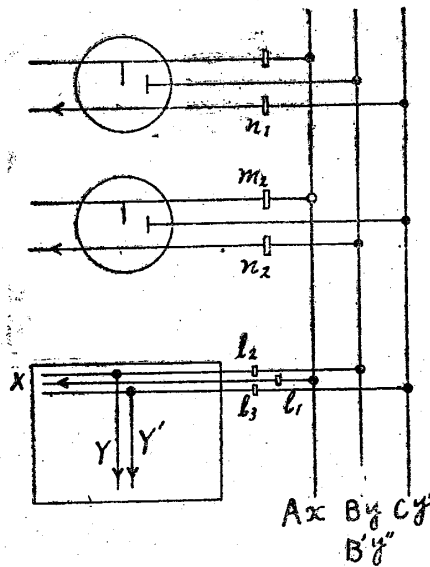
(1), (2), (3) 及び原方程式より

$$A^2 = \frac{k^2}{g_1 g_2}$$

初期條件  $S = rg'$ ,  $S_2 = \beta y$ ,  $r = n_1 C$ ,  $\beta = n_2 B$ .

目 盛、 $a = 2l_1 A$ ,  $b = 2l_2 B$ ,  $c = 2l_3 C$ .

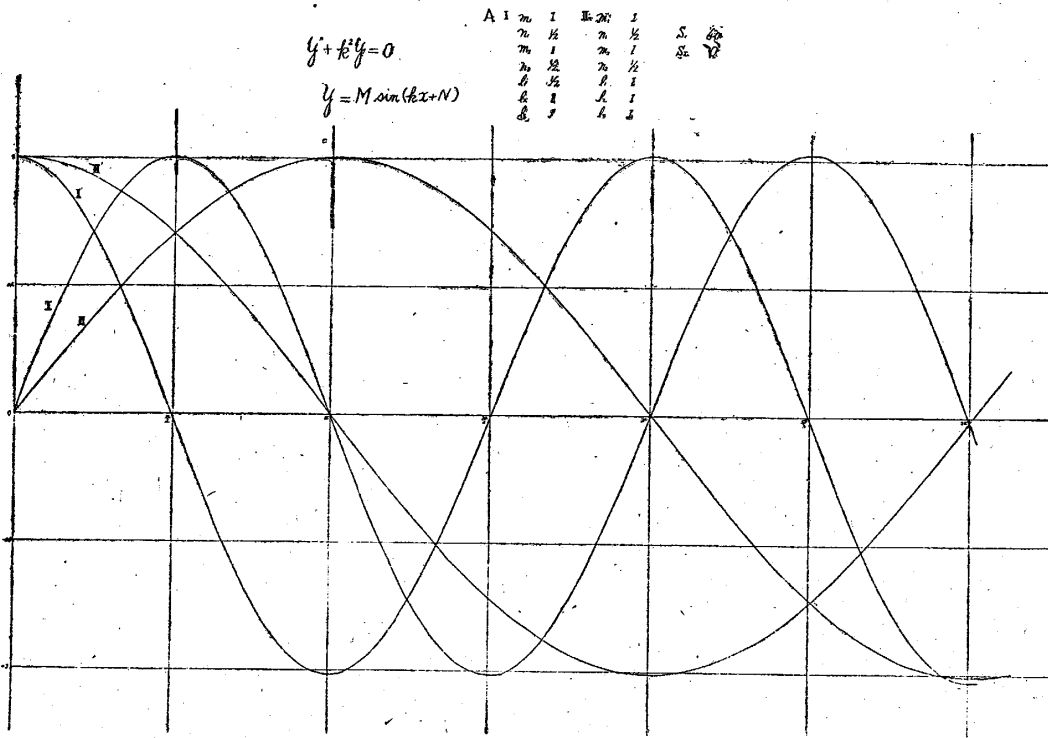
これより第 4 表及び第 28~35 圖の如き結果を得た。



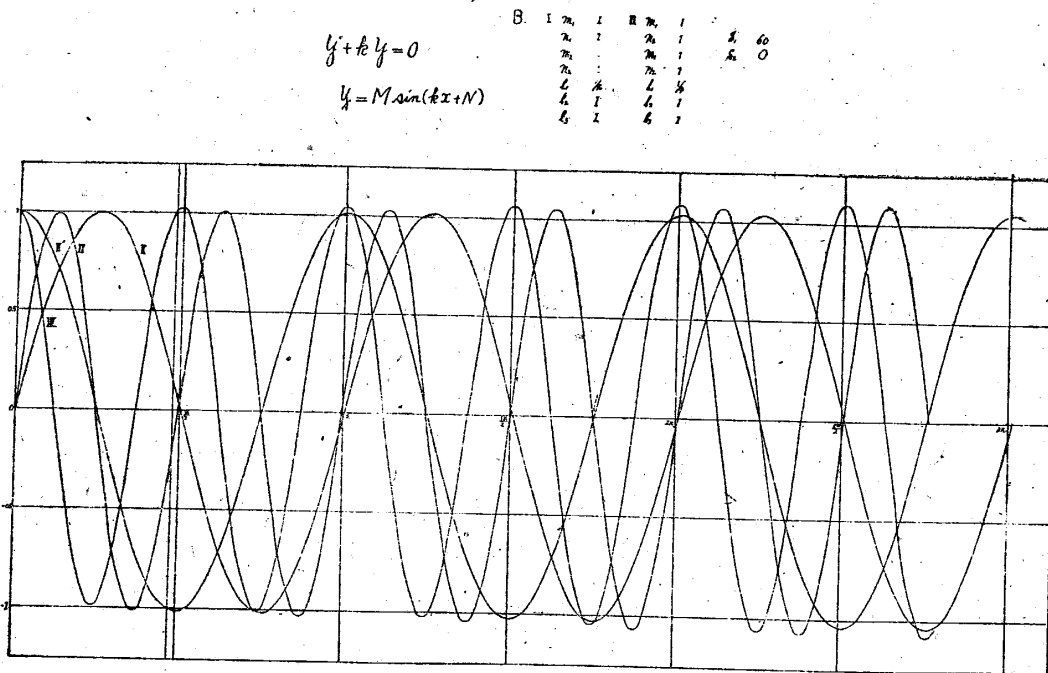
第 28 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の連結圖

第 4 表  
齒 數 比 及 初 期 條 件

	A		B		C			D		
	I	II	I	II	I	II	III	I	II	III
$k$	1	1/2	2	4	1	1/2	1	1	1	1
$m_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n_1$	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$g_1$	1/64	1/64	1/32	1/32	1/64	1/64	1/64	1/64	1/64	1/64
$m_2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n_2$	1/2	1/2	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$g_2$	1/64	1/64	1/32	1/32	1/64	1/64	1/64	1/64	1/64	1/64
$l_1$	1/2	1	1/2	1/4	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
$l_2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$l_3$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A$	64	32	64	128	64	64	64	64	64	64
$a$	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
$B$	80	80	60	60	80	80	80	80	70	60
$b$	160	160	120	120	160	160	160	160	140	120
$C$	80	80	60	60	80	80	80	80	70	60
$c$	160	160	120	120	160	160	160	160	140	120
$x$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$y$	0	0	0	0	0	0	0	0	6/7	1
$y'$	1	1	1	1	1	3/4	1/2	1	8/7	-1
$X$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Y$	0	0	0	0	0	0	0	0	120	160
$Y'$	160	160	120	120	160	160	160	160	160	-120
$\beta$	40	40	60	60	40	40	40	40	35	30
$r$	40	40	60	60	40	40	40	40	35	30
$S_1$	40	40	60	60	40	30	20	40	40	30
$S_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	30	-30



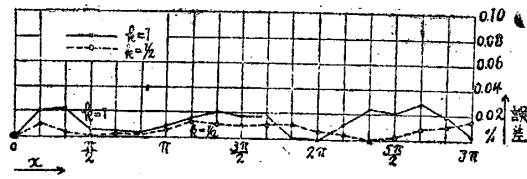
第 29 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の曲線圖 (A)



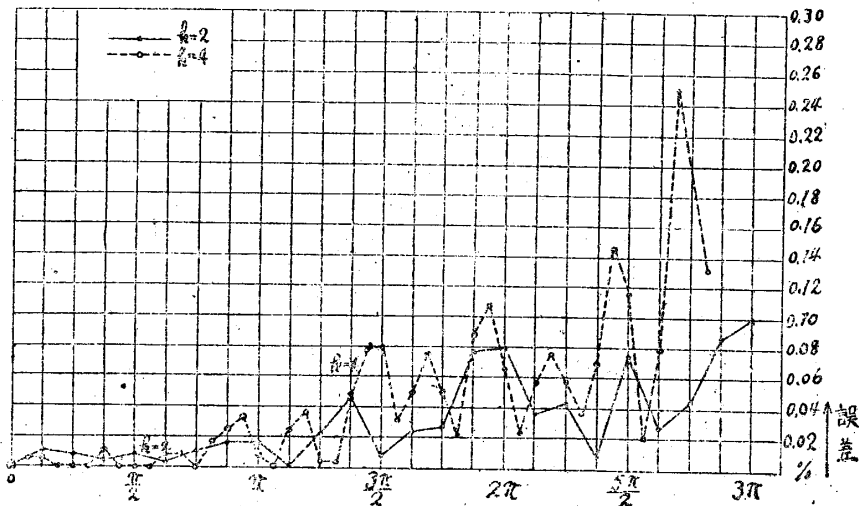
第 30 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の曲線圖 (B)



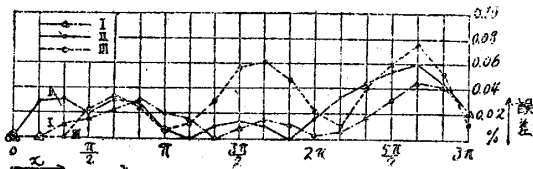




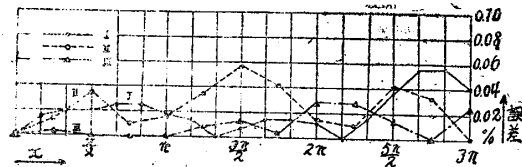
第 33 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の誤差圖 (A)



第 34 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の誤差圖 (B)



第 35 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の誤差圖 (C)



第 36 圖  $y'' + k^2 y = 0$  の誤差圖 (D)

〔4〕 結 語

以上は非常に簡単なる方程式を解いて見たのであるが誤差は  $\sin$  の場合でも 0.1% 以下であると言ひ得る。尙一部を擴大して書く事によつて誤差は更に小にし得るのである。

なほ増大機に関する實驗，その他複雑なる方程式への實驗結果は追つて發表する豫定である。

## 〔5〕 文 獻

- V. Bush, T. D. Gage and H. R. Stewart.  
A Continuous Integrator  
J. F. I. 203. p. 63. (1927)  
M. I. T. E. E. Res. Bull. No. 56.
- V. Bush and H. L. Hazen  
Integrator Solution of Differential Equations.  
J. F. I. 204. p. 575. (1927)  
M. I. T. E. E. Res. Bull. No. 59.
- V. Bush  
The Differential Analyser. A New Machine for Solving Differential Equations.  
J. F. I. 212. p. 447 (1913)
- D. R. Hartree.  
The Differential Analyser.  
Nature vol. 135. p. 940. (1935)
- D. R. Hartree and A. K. Nuttall  
The Differential Analyser and its Applications in Electrical Engineering.  
J. I. E. E. 83. p. 643. (1938)
- D. R. Hartree  
Nature vol. 146. p. 319. (1940)
- S. Rosseland  
Mechanische Integration von Differential-gleichungen.  
Naturwiss. 27. s. 729. (1939)
- D. R. Hartree and A. Porter.  
The Construction and Operation of a Model Differential Analyser.  
Mem. Man. Lit. Phil. Soc. 79. No. 5. p. 51. (1934~35)

J. E. Leonard Jones, M. V. Wilkes and J. B. Bratt.

The Design of a Small Differential Analyser.

Camb. Phill. Soc. 35. p. 485. (1939)

R. Sullivan, H. S. W. Massy, J. Wylie and R. A. Buckingham.

A. Small Scale Differential Analyser-Its Construction and Operation.

P. R. I. A. 45. Soc. A. No. 1. p. 1. (1938)

(Queen's University, Belfast)