渦の老衰に就いて

航空研究所々員 寺澤寛一氏

本所の大風洞を作るに際して最困難した事柄の一つは風の入口の前に空氣の渦が現はれるのをどうして除くことが出來るかと云ふことであつた。種々の試みて之を除かうとしたが中々目的が達せられない。一體こう云ふ裝置で全く渦のない air stream を作ることは殆んど不可能のことであるかも知れない。では渦と云ふのがある爲めに實驗にどう云ふ影響があるかをしらべることは極めて大切なことである。かかる大事な問題であるに拘らず之に關する研究は餘り多く見受けない。のみならず空氣とか水とかに起る渦其物に就ての性質が是等を perfect fluid と考へた場合の外は澤山しらべられて居ない。こゝで御話するのは空氣又は水を viscous fluid と考へて一度び其中に起つた渦は時と共に其强さがどう變るものかと云ふ問題であります。勿論實驗の data がありませんから全然理論的にしらべたのです。

Viscous fluid の運動を定むる式は、よく知られて居る通り、V を velocity vector, p を pressure, ρ を density, ν を Kinematic viscosity の coefficient, t を time とすれば、外力なき場合には

$$\frac{DV}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\text{grad}\,p+\frac{4}{3}\nu\,\text{grad div}\,V-\nu\,\text{curl curl}\,V \quad\cdots\cdots(1)$$

である。

ここで論ずるのは一般の場合でなく、運動が two dimensional で而もある點に就て symmetry である場合丈けを考ふる。即此點を polar coordinates (r,θ) の origin に取るときは上の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{v^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2 u-\frac{u}{r^2}\right), \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{uv}{r}=\nu\left(\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}\right), \quad\cdots\cdots(3)$$

となる，u, v は夫々 radial 及び azimuthal の velocity components である。こゝでは Fluid が incompressible と假定してある。此事を表はす式は一般に

$$\text{div}\;V=0,$$

であるが現在の場合には

$$\frac{\partial(ur)}{\partial r}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

と云ふ簡單なものになる。(4) を解きて

$$u=\frac{c}{r} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

が得られる。是を (3) の式に入れると

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1-\frac{c}{\nu}}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1+\frac{c}{\nu}}{r^2}v=\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial v}{\partial t}$$

となる。是を解くと

$$v=Ae^{-\nu k^2 t}r^{\frac{c}{2\nu}}\,J_{1+\frac{c}{2\nu}}(kr)$$

が得られる。A, k は常數, J は Bessel の Function である。

(5) の中の c は一般に time の function であり得るが玆では計算を簡單にする爲め是を constant と考へる、のみならず最も簡單な場合として $c=0$ の場合丈けを記すことにする。即 radial velocity が zero と云ふ一番簡單な場合に限ることにする。* この時は

$$v=Ae^{-\nu k^2 t}J_1(kr) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

となる

Coordinate plane に垂直な rectilinear vortex の强さを $\omega/2$ で表はせば

$$\omega=\frac{1}{r}\,\frac{\partial(rv)}{\partial r}$$

となる。是に上の v の値を入れると

$$\omega=Ake^{-\nu k^2 t}\,J_0(kr) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となる。

今 $t=0$ の時に渦の distribution が勝手に與へられたとする。此與へられた distribution が t なる時間後に如何に變つて居るかと云ふことが今日御話しする問題であります。

$t=0$ の時に渦の distribution が

* 講演には radial velocity の zero でない場合もやりましたが雜錄には之を省きました。何れ研究報告の中で詳しく述べる積りです。

$$\omega_0=f(r) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

で與へられる。此の $f(r)$ は radius vector r の勝手な function である。t なる時間後に此渦がどう云ふ distribution に變るかを見る爲めには (7) 式で得た式を Fourier の方法で generalize すればよい。即 (7) 式の中の A なる constant を k なる constant の function と見て k の凡ての値に就て此式を寄せ集むる。式で書けば

$$\omega=\int_0^\infty A(k)e^{-\nu k^2 t}J_0(kr)kdk \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此 ω の値が t=0 の時に(8)で與へた initial condition に會ふ樣に $A(k)$ なる function を定めれば問題がとける

即

$$f(r)=\int_0^\infty A(k)J_0(kr)kdk$$

なる一種の integral equation を解けばよい。是を解くと直に

$$A(x)=\int_0^\infty f(\alpha)J_0(k\alpha)\alpha d\alpha$$

と云ふ解が出來る。是を(9)式に入れると

$$\omega=\int_0^\infty e^{-\nu k^2 t}J_0(kr)kdr\int_0^\infty f(\alpha)J_0(k\alpha)\alpha d\alpha,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

となる、是が t なる時間後の渦の distribution を與へる。此式は又半分 integrate することによつて次の樣にも書ける

$$\omega=\frac{1}{2\nu t}e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\int_0^\infty f(\alpha)e^{-\frac{\alpha^2}{4\nu t}}I_0\left(\frac{\alpha r}{2\nu t}\right)\alpha d\alpha,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ここに I_0 は modified Bessel function である。(10)式を使ふのと(11)式を使ふのとは initial condition として與へられたる $f(r)$ なる function の形によつてきまる、是で問題が most general form に於て解決がついた譯であるが簡單なる例を二つばかり擧げる

例 1. $t=0$ の時に渦の distribution が

$$\omega_0=\frac{c}{r}$$

で與へられるとする、即 origin では infinite で origin から離れるに從つて hyperbolic に減じて行く樣な distribution である。こう云ふ distribution を作るには實際 infinite energy が必要であるから physical には面白いことはないが mathematical に最も簡單であるからやつて見たのである。此場合には(10)式を使つて勘定すれば t 時間の後には

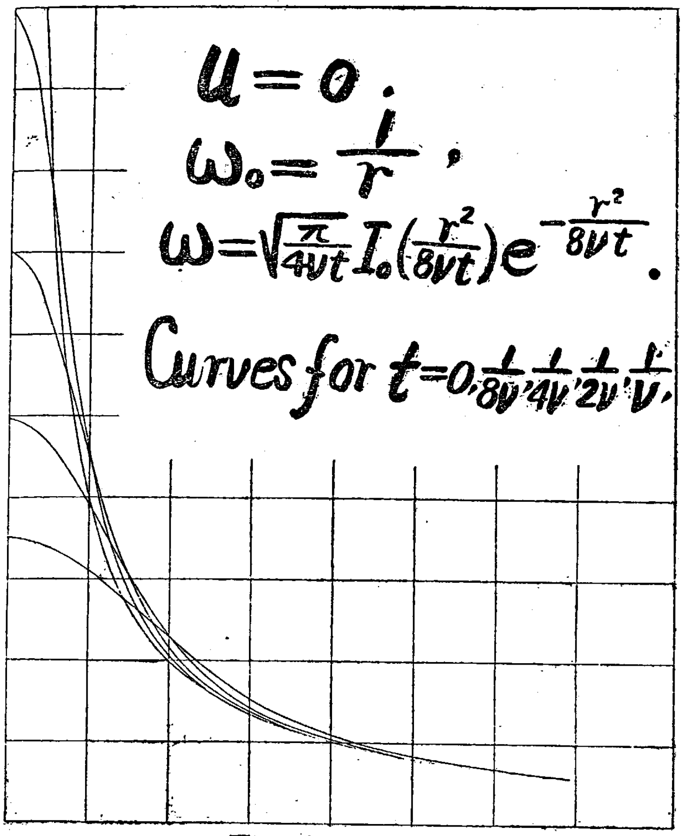


Fig. 1.

$$\omega=c\sqrt{\frac{\pi}{4\nu t}}e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}I_0\left(\frac{r^2}{8\nu t}\right)$$

となる、第一圖には上から順々に

$t=0,\ t=\frac{1}{8\nu},\quad t=\frac{1}{4\nu},\quad t=\frac{1}{2\nu},\ t=\frac{1}{\nu}$

の時の渦の distribution の有樣が表はしてある、此圖は縱軸に ω 横軸に r を取つてある、共に arbitrary unit で。

例 2. $t=0$ の時に vortex の distribution が

$$\omega_0=Ce^{-\frac{r^2}{4a^2}}$$

で與へられるとする。a なる constant を充分小さく取れば此 distribution は origin の附近に丈け concentrate するものでよく實際に現はれる渦に極めて近い性質のものである。此場合には(11)式を使つて t なる時間の後にはその distribution は

$$\omega=\frac{C\,a^2}{a^2+\nu t}e^{-\frac{r^2}{4(a^2+\nu t)}}$$

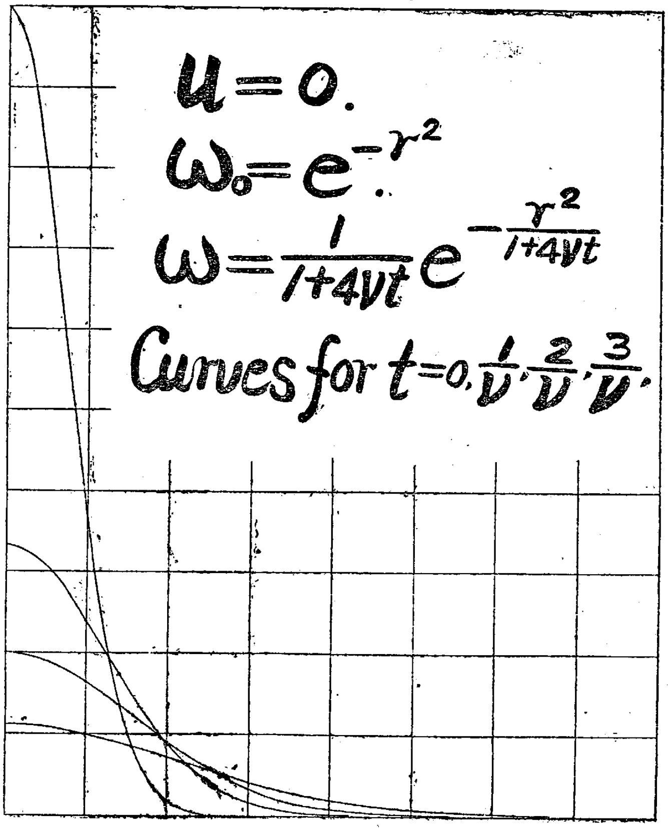
で表はされることが解る、第二圖には $a=\frac{1}{2}$ として上から順々に

$$t=0,\quad t=\frac{1}{\nu},\ \frac{2}{\nu},\ \frac{3}{\nu}$$

の時の渦の distribution が表はしてある。是で渦が viscosity の爲に如何に早く衰弱するかが大體見える。

空氣の場合に $\nu=0.13\,c.g.s.$ とすれば渦の中心に於ける强さが元の $\frac{1}{2}$ となるには2秒で水の場合に $\nu=0.01$ とすれば25

Fig. 2.



秒となる、即空氣中の渦は水の中の渦に比較して 12 倍位早く老衰する。又大氣中でも高空に於ける ν の値は地上に於ける ν の値より遙に大きいから高空では地上よりも渦の老衰の仕方が遙に早い。高空の氣流が地上のより比較的一様で飛行に安全であるのも尤もなことである。　　　　　　　　　　　　　（終り）