講話

Strength of Hook for Machine Parts.

航空研究所所員 井口在屋氏

機械類の一要素である所の hook は crane hook, chain link, 汽車の draw bar hook, Punching machine, Shearing machine 等の frame に用ひられて居り機械力に對して重要なる働きを爲すものである。

20 ton 起重機の荷重に對し普通 hook の設計圖は fig. 1 に示す形狀であり、荷物を引掛ける重要な部分は腰の中央なる水平截斷面の處であり、bending moment の最大なる處に於て設計するのが普通である。

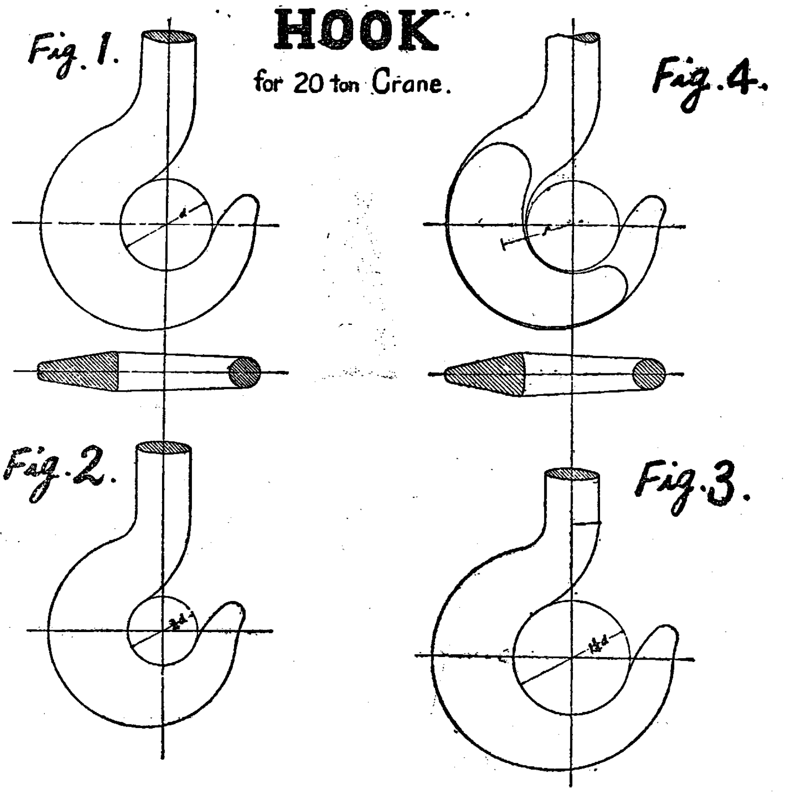

Fig. 5 は hook の中央に於ける水平截斷面を示し 0 點は荷重の作用線を示す。此線は紙の平面に直角であると思召せ。G は截斷面の中心であり GZ はそれの中立線である。一般な場合に於て G の軌跡の曲がりの半徑 ρ は距離 l に等し。荷物を掛ける部分の距離、即ち l が大きくなれば bending moment が增大し、又半徑 ρ が小さくなれば因て生ずる所の bending stress が增大する。若し半徑 $\rho=0$ と

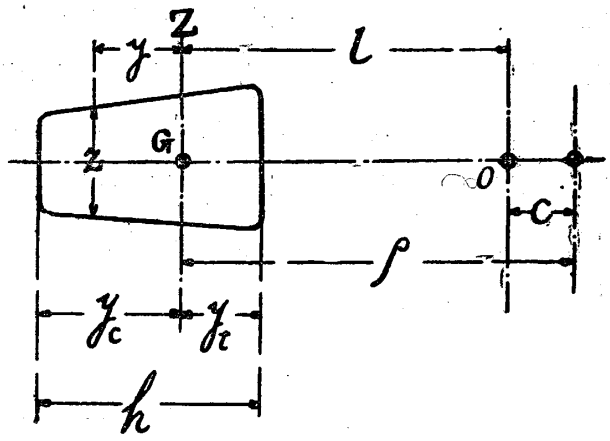

Fig. 5

This document is provided by JAXA.

なるならば stress は無窮大となる譯である、故に此の ρ を適當に定むれば stress 最小となる筈である。Fig. 2, 3 は同じ size の hook に對し $\frac{3}{4}\rho$ の場合と $1\frac{1}{4}\rho$ の場合の形狀を示す。又 l を一定にした儘で中心を offset して Fig. 4 の如くすれば stress を減ずることが出來る。

Punching Machine 又は shearing maching 等の frame に於て曲げ方が自由な場合には此の方法を採用して stress を減少すべきである。

計算の一般の式は次の通り

$$f=\frac{Wl}{\rho(A'-A)}\left(\frac{\rho}{\rho+y}-\frac{A'}{A}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之れは屈曲せるうつ梁*に對する一般公式である、此の式中 A は截斷斷面積、A' は變形面積 (modified area) と稱するものであり次の積分を表はす。

$$A'=\rho\int\frac{zdy}{\rho+y}$$

Curvature の中心を少し offset して、即ち c 丈けづらして上式を適用するときは次の如し

$$f=\frac{W}{A}\left(1-\frac{c}{\rho}\right)\left(\frac{A}{A'-A}\ \frac{y_t}{\rho-y_t}-1\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今 $c=\frac{1}{2}mh$ とし、h を截斷面の深さとすれば、$\frac{1}{2}m$ は offset を深さの分數で表はしたるものである、而して上式は次の如くなる

$$f+\frac{W}{A}=\frac{W}{A}\left\{\frac{1-mx}{F(x)}+mx\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式中 $$F(x)=\frac{A'-A}{A}\left(\frac{\rho-y_t}{y_t}\right), \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

其の x は $$x=\frac{h}{2\rho}$$

Hook の中央なる截斷面の形は rectangular, trapezoidal, circular 等である。triangular section は一般に用ゐられない。其の理由は次の如し。

三角形なる截斷面を有するうつ梁*に於て頂點①に於ける曲げ內力を f_1 とすれば之れに對する moment of resistance は

* うつばりははりの古言である、單にはりに唱ふるときは引き張り、突き張り、針金などのはりと混じ易い、因て我は語呂のよい古言うつばりを復活する。

This document is provided by JAXA.

$$M_1=f_1\frac{Bh^2}{24}$$

であり、底邊②に於ける曲げ内力を f_2 とすればこれに對する moment of resistance は

$$M_2=f_2\frac{Bh^2}{12}$$

である。

今 Fig. 5 に於ける section line を施せる部分をなきものと考へて moment を求むれば

$$M_1=\frac{f_1 B}{12h}\,\frac{(h^2+4h\alpha+\alpha^2)(h-\alpha)^2}{2h+\alpha}$$

之の expression は α の變化に對して Max. value を持て居る、因て之れを differentiate して其の値を求むれば

$$\alpha_1=0.1304h$$

の時、即ち α なる部分を全高さ h の約一割三分程切り取れば M_1 を最大となる、即ち

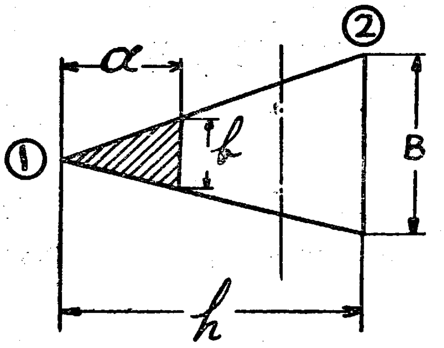

Fig. 6.

$$M_{1\,max.}=1.093\times\frac{f_1Bh^2}{24}$$

となり resistance は百に付き九個三分だけ增加する、之れに對する M_2 は

$$M_2=0.923\times\frac{f_2Bh^2}{12}$$

である。之れ triangular section を採用せぬ理由である。

今先づ一般的な截斷面に就て考ふるときは

$$A'-A=\rho\int\frac{zdy}{\rho+y}-\int zdy=\frac{I_2}{\rho^2}-\frac{I_3}{\rho^3}+\frac{I_4}{\rho^4}-\ldots\ldots$$

$$=\sum\frac{I_n}{(-\rho)^n},$$

Where $I_n=\int y^n zdy.$

A = Area of section.

A' = modified area.

I = moment of inertia of the section about the neutral axis.

ρ = radius of curvature.

This document is provided by JAXA.

截斷面が circular rectangular, 等の如く neutral axis に對して對稱するときは $\frac{I}{\rho}$ に含まれる n が奇數の場合に其項は消去失する。

前記級數に於て第三項なる $\frac{I_4}{\rho^4}$ 位までゞ大抵の形には充分である。

中心點の offset c を零とすれば A' を前式から除去して次の結果を得る。

$$f+\frac{W}{A}=\frac{W}{\left(\frac{\rho}{y_t}-1\right)\sum\frac{I_n}{(-\rho)^n}} \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

然るに $f+\frac{W}{A}$ は hook の腰の中央部に於ける合成内力である、この合成内力が

$$\left(\frac{\rho}{y_t}-1\right)\sum\frac{I_n}{(-\rho)^n}$$

の函數であることを上の式が明示する。

依てその内力を最小にする條件として半徑 ρ に對し differentiate して

$$\sum\left[\frac{I_n}{(-\rho)^n}\left\{(n-1)-\frac{ny_c}{\rho}\right\}\right]=0 \qquad \cdots\cdots\cdots (6)$$

と置く。この式中 n は自然數 2, 3, 4,.... である。

今一例として hook の截斷面 rectangular なる場合を取りて其幅を b とし其高さを h とし、更に $\frac{h}{2\rho}$ なる比數を x と名づけるときは前記條件公式, (6) は次の通りになる。

$$\sum\left[\frac{x^n}{n+1}\left\{(n-1)-\frac{ny_t}{\rho}\right\}\right]=0.$$

Rectangular section は其中立線に關して對稱するが故に n の値は 3, 5, 7,....n である。

今 n を無窮大となすときは上式は次の通りなる整齊式に變化する。

$$\frac{2x(2+x)}{(1+x)(2-x)}=\log\frac{1+x}{1-x}$$

此式を解き

$$x=\frac{h}{2\rho}=0.646$$

を得る。尙又

$$\frac{(\rho-y_t)}{y_t}=\frac{1}{x}-1$$

This document is provided by JAXA.

なるが故に合成內力の式即ち (3) 式及び (4) 式から次表の數を計算することは容易である。

式中の $F(x)$ は次の通り

$$F(x)=\left(\frac{A'}{A}-1\right)\left(\frac{\rho}{y_t}-1\right)=\frac{1}{x^2}(1-x)\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-x\right).$$

$x=\frac{h}{2\rho}$	$\frac{\text{合成內力}}{\text{直接內力}}=\frac{fA+W}{W}=\frac{1}{F(x)}$
0	inf.
.1	31.70
.2	18.18
.3	13.46
.4	11.14
.5	10.14
.6	9.66
.646	9.62
.7	9.77
.8	10.72
.9	14.16
1.0	inf.

普通の設計に從ひ製作せられた起重機 hook に依て合成內力は直接荷重に依て生ずる內力の約 10 倍になつて居り Minimum Value 9.62 に比較して大差のないことが上表で明かにわかる。

次に trapezoidal section を考へ荷重の作用線が hook の中心を通過すと假定する、即ち offset c が零であると假定する。今一例として並行せる二邊 b, b_1 が次の割合なる場合に就て計算を試みる。

假定.............　$\theta=\frac{1}{3}\cdot\frac{b-b_1}{b+b_1}$ を $\frac{1}{10}$ となす。

然るときは........　$b_1=\frac{1-3\theta}{1+3\theta}b=0.538\,b$

中立軸の距離......　$\bar{h}=y_t=\frac{1}{2}(1-\theta)h=0.45\,h,$

截斷面積..........　$A=\frac{1}{1+3\theta}bh=0.769\,bh.$

此場合に於ては直接に變形面積 A' を計算して (4) 式に適用し更にその $F(x)$ を (3) 式に

This document is provided by JAXA.

適用するが近路らしい。(3) 式に於て m の値は今は零であると知りたまへ。かくして

(3) 式は............ $f+\frac{W}{A}=\frac{W}{A}\cdot\frac{1}{F(x)}$ となり

(4) 式は............ $F(x)=\left\{\frac{f(x)}{x^2}-1\right\}\left\{\frac{1}{(1-\theta)x}-1\right\}$ となり

その $f(x)$ は........ $f(x)=\frac{1}{2}\left\{(1+3\theta^2)x+3\theta\right\}\log\frac{1+(1+\theta)x}{1-(1-\theta)x}-30x$ である。

上記假定の値を此等の式にはめ込んで次の表を計算した。

表中の最小內力に對する形は Fig. 7.

$x=\frac{h}{2\rho}$	$\frac{合成內力}{直接內力}=\frac{fA+W}{W}=\frac{1}{F(x)}$
0.0	inf.
0.1	28.00
0.2	16.98
0.3	12.48
0.4	10.33
0.5	9.17
0.6	8.61
0.698	8.43
0.7	8.43
0.8	8.65
0.9	9.57
1.0	12.42

合成內力が最小なるとき $x=h/2\rho$ の精確な値は計算によれば 0.693 となる。

Trapezoidal section の第二例として並行せる二邊 b, b_1 が次の割合なる場合に就て計算を試みる。

假定 .... $\theta=\frac{1}{3}\cdot\frac{b-b_1}{b+b_1}$ を 0.2 となす。

然るときは .... $b_1=\frac{1-3\theta}{1+3b}b=\frac{1}{4}b,$

中立軸の距離 ..... $\bar{h}=y_t=\frac{1}{2}(1-\theta)h=0.4h,$

截斷面積 .... $A=\frac{1}{1+3\theta}bh=\frac{5}{8}bh.$

尙又 $f(x)$ 及び $F(x)$ に上記の假定數値 $\theta=0.2$ をはめ込んで次の表を計算した。

This document is provided by JAXA.

最小合成内力=8.43×(直接内力)

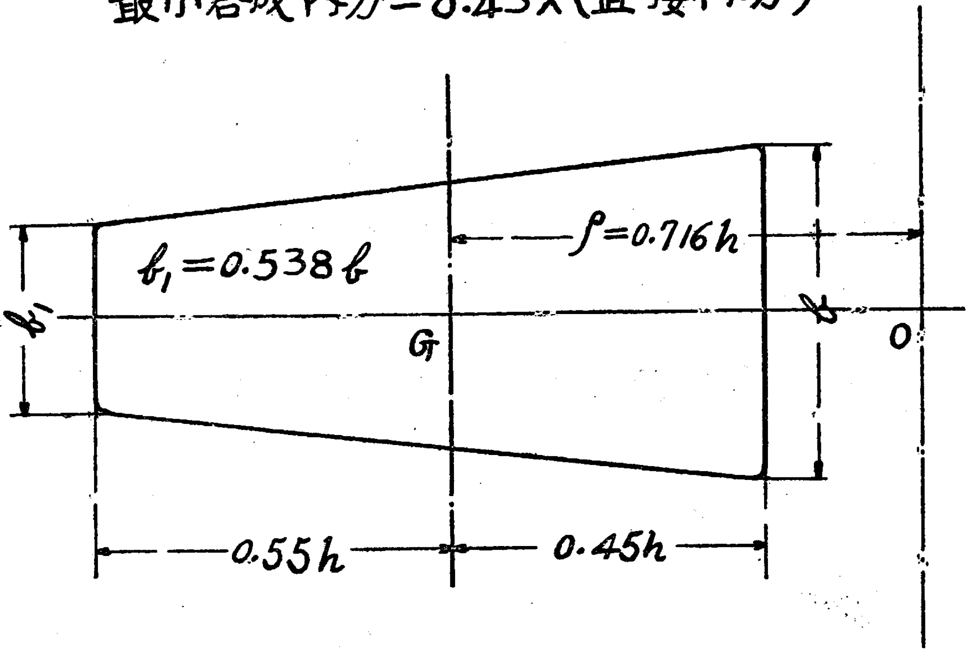

Fig. 7.

最　合成内力＝7.70×(直接内力)

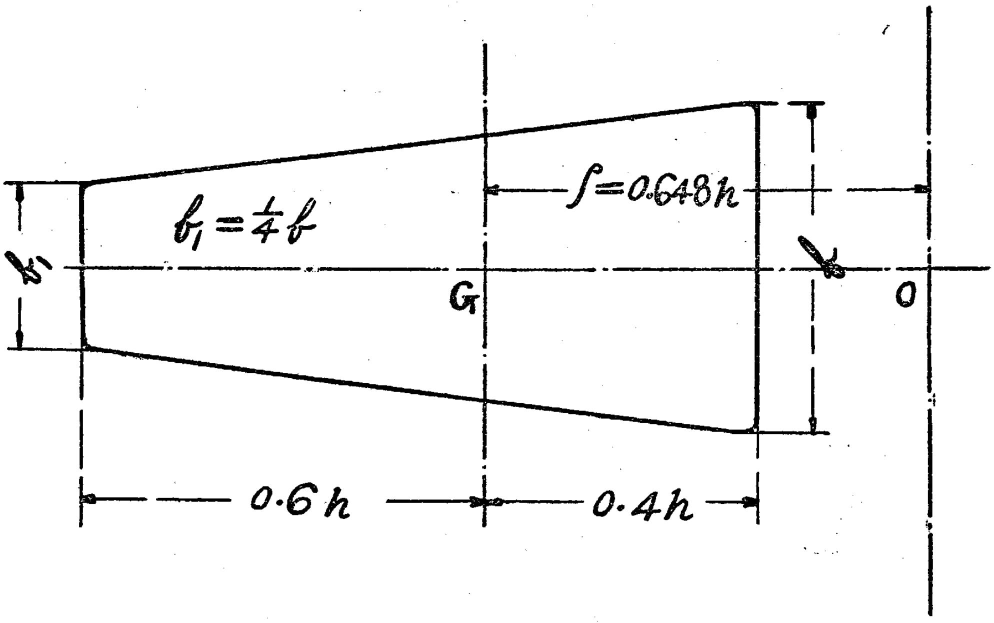

Fig. 8.

This document is provided by JAXA.

表中の最小合成內力に對する形は Fig. 8.

$x=\dfrac{h}{2\rho}$	$\dfrac{\text{合成內力}}{\text{直接內力}}=\dfrac{fA+W}{W}=\dfrac{1}{F(x)}$
0.0	inf.
0.1	30.14
0.2	16.58
0.3	12.15
0.4	10.02
0.5	8.83
0.6	8.14
0.7	7.79
0.772	7.70
0.8	7.85
0.9	7.94
1.0	8.66

截斷面 rectangular であつて曲りの中心を offset した場合を一例として玆に書き加へる

假定 .... $c=\dfrac{1}{2}mh=0.2\,h,$

然るときは ...... $f+\dfrac{W}{A}=\dfrac{W}{A}\left\{\dfrac{1-mx}{F(x)}+mx\right\}$

$$=\frac{W}{A}\left\{\frac{1-0.4x}{F(x)}+0.4x\right\},$$

その $F(x)$ は...... $F(x)=\dfrac{1}{x^2}(1-x)\left(\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}-x\right)$ である。

計算を施して次の表を作成した。

$x=\dfrac{h}{2\rho}$	$\dfrac{\text{合成內力}}{\text{直接內力}}=\dfrac{fA+W}{W}=\dfrac{1-mx}{F(x)}+mx$
0.0	inf.
0.1	30.47
0.2	16.81
0.3	11.96
0.4	9.63
0.5	8.32
0.6	7.58
0.699	7.31
0.7	7.31
0.8	7.61
0.9	7.42
1.0	inf.

This document is provided by JAXA.

第一例に記載した最小合成內力 9.62 に比較して本例の最小內力 7.31 は約二割四分の減少を示す。是れ offset の效能である。故に截斷面の形狀を適當に撰擇し且つ offset を利用するときは hook に生ずる內力は大に減少することを得べし（終）

This document is provided by JAXA.