

渦の老衰に就いて (第二)

航空研究所々員 寺澤寛一氏

1. 此問題に就いて前回に一般の議論と二三の例とを以て空気又は水を viscous incompressible fluid と見る場合に其中に生じた渦がどんな工合に衰ひて行くかを述べました。今日はも一つの例を以て風洞の equalizer の位置がどの邊の場所になければならないかと云ふことと、氣象學上重要な定律であるらしい岡田氏定律のことに就いて述べたいと思ひます。

Two dimensional motion で point symmetry がある場合にその point を origin に取つて $t=0$ と云ふ時刻に渦が

$$\omega_0 = f(r)$$

で表はす様な distribution をして居るときに、若し radial velocity がなければ

$$\omega = \int_0^\infty e^{-k^2 \nu t} J_0(kr) k dk \int_0^\infty f(\alpha) J_0(k\alpha) \alpha d\alpha,$$

で勝手な時、勝手な場所の渦の有様が解ることは前回に述べたのです。

2. 今日此一般の法則の例として $t=0$ の時

$$\begin{aligned} \omega_0 &= C, & r < a, \\ &= 0, & r > a, \end{aligned}$$

即 origin を中心とする半径 a なる圓内に渦が限られて居ると定めます。この場合には上の一般の法式に従つて勘定* すれば勝手な時刻の渦の distribution は

$$\begin{aligned} \omega &= C - C e^{-\frac{a^2 + r^2}{4\nu t}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^m I_m\left(\frac{ar}{2\nu t}\right), & r < a, \\ &= C e^{-\frac{a^2 + r^2}{4\nu t}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m I_m\left(\frac{ar}{2\nu t}\right), & r > a \end{aligned}$$

で表はされます。 I_m は m 次の modified Bessel function であります。

第一圖は $t=0$, $t=\frac{1}{8\nu}$, $t=\frac{1}{4\nu}$, $t=\frac{1}{2\nu}$ と云ふ時刻に於ける渦の distribution を

* 詳しい計算は學術研究會議發行の Japanese Journal of Physics Vol. 1. No. 2 (1922) にあります。

示すものです。

渦の中心 ($r=0$) では渦の老衰程度は

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = e^{-\frac{a^2}{4\nu t}}$$

で表はされます。老衰程度が元の渦の強さの e^{-1} になるに要する時間を τ' とすれば

$$\tau' = \frac{a^2}{4\nu}$$

空気の時に $\nu = 0.13 \text{ c.g.s.}$ とすれば

$$\tau' = 2a^2 \text{ sec.}$$

水の時に $\nu = 0.01 \text{ c.g.s.}$ とすれば

$$\tau' = 25 a^2 \text{ sec.}$$

となる。空気の場合に

$a = 1 \text{ cm.}$	とすれば	$\tau' = 2 \text{ sec.}$
$a = 0.1 \text{ cm}$	„	$\tau' = 0.02 \text{ sec.}$
$a = 0.05 \text{ cm.}$	„	$\tau' = 0.005 \text{ sec.}$

風洞の equalizer を厚さ 1 mm. の板で作つてあるとします。之れに風があたつて同じ程度の大きさに渦が生ずるものと假定します。渦の強さが equalizer の下流でどの位離るれば元の値の $1 - e^{-1}$ 即略 63% の強さになるかと云ふに

風の速さが 30 m./sec. の時は 0.15 米突

„	60	„	0.30	„
„	100	„	0.50	„

となります。是等の数から実験の精確さの程度に従つて model を equalizer からどの位離せばよいかと云ふことの大體の見當がつくと思ひます。

$t=0$ の時に渦のない所即ち $r > a$ の所で渦がどう生じどう衰へるかを見る爲めに前に得た式を微分して

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{C}{4\pi t^2} e^{-\frac{a^2 + r^2}{4\nu t}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left\{ (a^2 + r^2) I_n\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) - 2ar I_n'\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) \right\}.$$

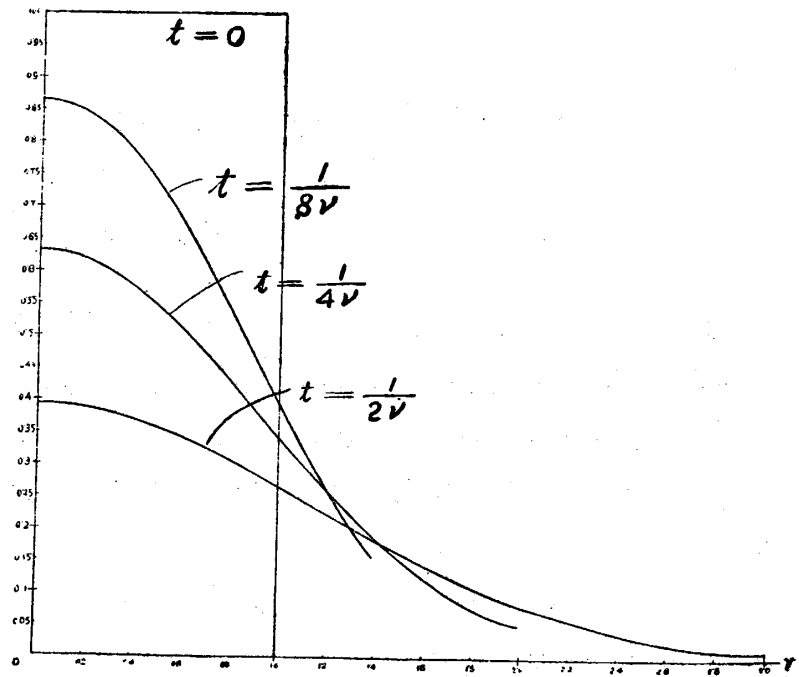


Fig. 1.

t が小さい間は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{C(r-a)}{4} \sqrt{\frac{a}{\pi \nu t^3}} e^{-\frac{(r-a)^2}{4\nu t}}$$

となり、明に positive であります

($\because r > a$)。

t が大きいときには

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{Ca^2}{4\nu t^2} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} \left(1 - \frac{r^2-a^2}{4\nu t}\right)$$

となります。是は充分大きい t の値に對して negative であります。即最初に渦のない場所では初の間は渦が生じ或る程度迄成長し、次に衰ひ出してしまひには消え失せます。第二圖に $r=2a$ の所で渦の變る有様と其變化の割合とが表はしてあります。

3. 次に $t=0$ に於て渦が $r=a$ なる圓周に沿ふて極めて薄き厚さ (δa) 丈けの場所にあるとする。即

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 0, \text{ for } r < a, \\ &= C, \text{ ,, } a < r < a + \delta a, \\ &= 0, \text{ ,, } a + \delta a < r \end{aligned}$$

此場合に勝手な時刻に於ける渦の distribution は、若し δa の二乗以上を neglect すれば

$$\omega = \frac{Ca\delta a}{2\nu t} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}} I_0\left(\frac{ar}{2\nu t}\right)$$

で表はされる。第三圖は $a=1$, $C\delta a=1$ として $t=\frac{1}{8\nu}$, $t=\frac{1}{4\nu}$, $t=\frac{1}{2\nu}$, $t=\frac{1}{\nu}$

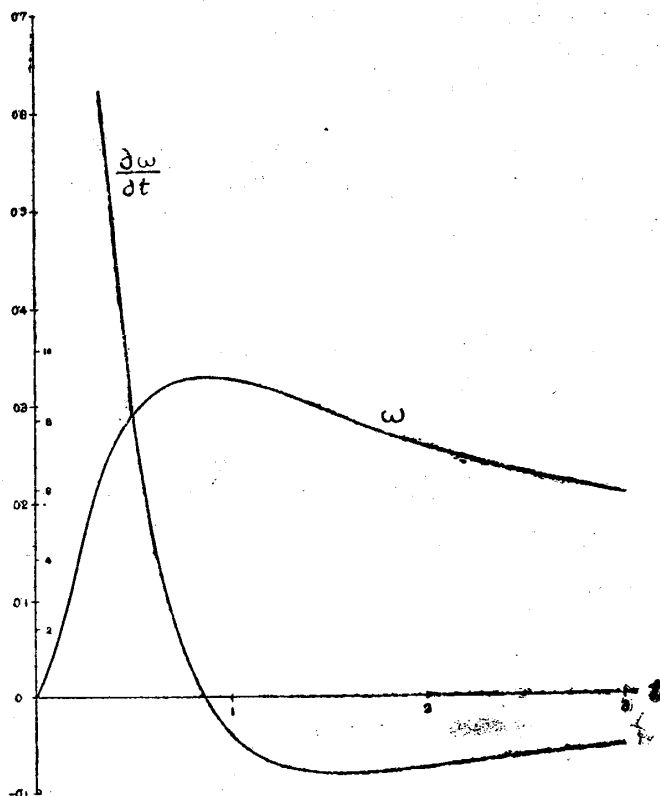


Fig. 2.

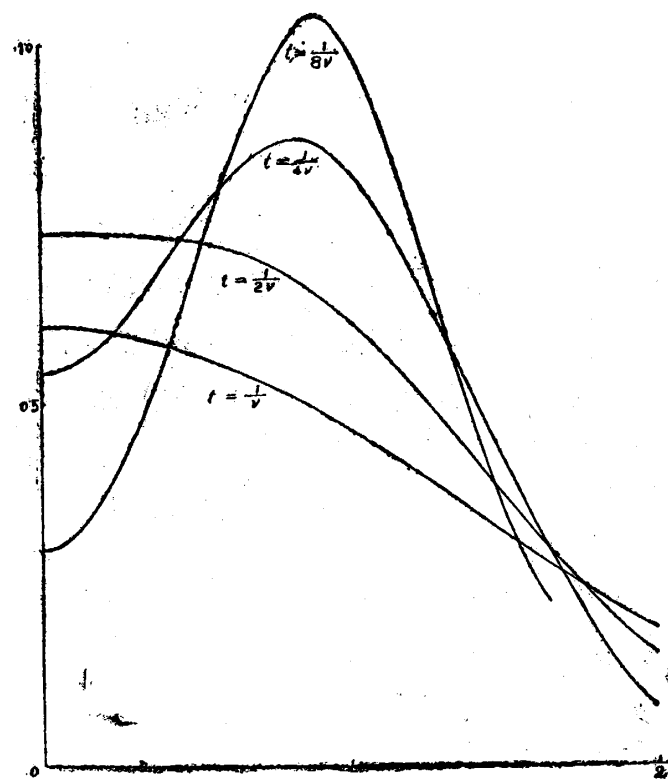


Fig. 3

の時の渦の分布を示します。

Maximum の位置は

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{Ca\delta a}{(2\nu t)^2} \left\{ aI_1\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) - rI_0\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) \right\} e^{-\frac{a^2+r^2}{4\nu t}}$$

の値で定まるが

$$I_0 > I_1$$

であるから $\frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$ となる点では

$$r < a$$

でなければならない。即 maximum point は時と共に中心に近づくことになる。

4. 上の様な一種の vortex sheet と云ふべきものが二つ $r=a$, $r=b$ にある場合を考へます。即 $t=0$ に於て

$$\begin{aligned} \omega &= 0, & \text{for } r < b, \\ &= C, & \text{,, } b < r < b + \delta b, \\ &= 0, & \text{,, } b + \delta b < r < a, \\ &= C, & \text{,, } a < r < a + \delta a, \\ &= 0, & \text{,, } a + \delta a < r. \end{aligned}$$

この場合には $C\delta b = B$, $C\delta a = A$ と置けば

$$\omega = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}}{2\nu t} \left\{ Aa I_0\left(\frac{ar}{2\nu t}\right) e^{-\frac{a^2}{4\nu t}} + Bb I_0\left(\frac{br}{2\nu t}\right) e^{-\frac{b^2}{4\nu t}} \right\}$$

となります。是等同時に生れた二つの渦の生後の交渉がどうなるかは興味ある問題である。どうせ今迄の例で知つて居る通り直に渦が fluid 全體に擴がつて行くことは明かであるがその最も強い所即共同生活の中心がどこにあるかを驗べて見たいのです。前と同じ様な計算で A と B とが same sign を有つときには渦の強さの maximum は $r=b$ と $r=a$ との間にある、 A と B とが opposite sign を有つときには渦の maximum は $r < b$ と $r > a$ との兩方にあることが解ります。

第四圖は $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $A=1$, $B=\pm 1$ としたときの $t=\frac{1}{12\nu}$, $t=\frac{1}{8\nu}$ の時刻に於ける渦の distribution であります。(++) と書いたのは A と B とが同符號のときで、(+−) と書いたのは A と B とが異つた符號のときです。上に言ふた事柄は圖の上によく現はれて居ります。

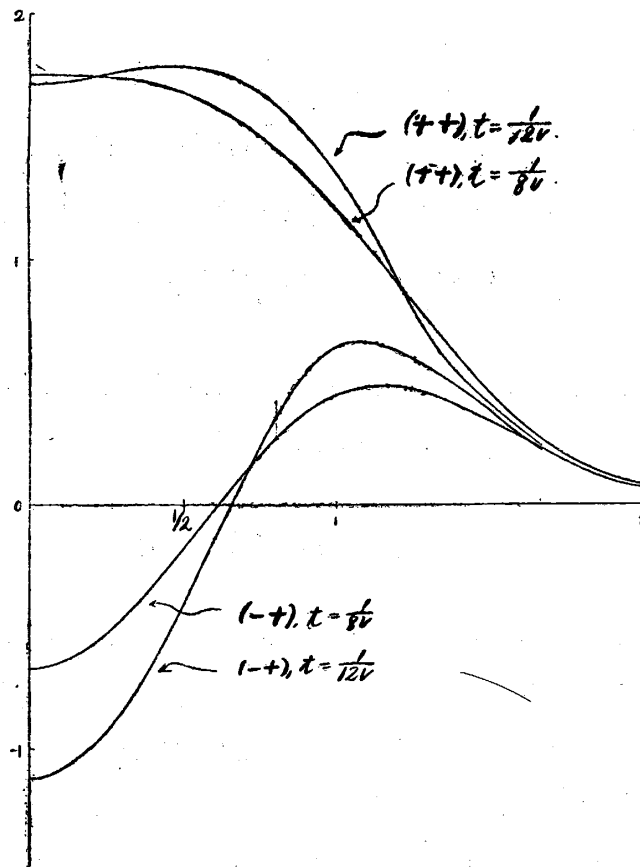


Fig. 4

即ち二つの同じ sign を有つた渦が同時に存在するときは互に引き合つて amalgamate するし、違つた sign の二つの渦ならば互に反撥して離れると云ふことになります。是は氣象學上岡田氏定則* と云ふて重要な事實だそうであります。此で御話ししたのは二つの concentric の渦に就てでありますから、岡田氏定則の嚴格な證明にはなつては居りませんが大體は是で解ると思ひます。嚴格な證明は他日に譲ります。(終)

* 此定則のあることを私は知りませんでした。が本年4月2日に氣象臺の藤原博士が日本數學物理學會でされた講演の中で初めて聞きました。