# Viscous Fluid Motion の問題二三

航空研究所々員 寺澤寛一氏紹介

ここに御紹介申しますのは英國 Newcastle on Tyne の Armstrong College の敎授で近頃の水力學の大家 T. H. Havelock 氏が Phil. Mag. 誌 Nov. 1921 號で發表した二つの論文の大略であります。

初めの論文は Viscous Fluid Motion の問題に關する Integral equation の解法と云ふ見出して二三の問題を解いて居ますが，其中特に二つの vertical planes の間に液體があつて其中央で他の rigid plane が重力の下に動く時にはどんな velocity で落ちるかと云ふ問題を御紹介致します。

液體が無限の擴がりを充す場合に solid body がその中で given force の下に動くときの問題は二三既に論ぜられてあります。例へば球とか平面とかを水中又は空氣中で落したときの運動の如きものである。もし液體が無限の空間を充す代りに有限な場所例へは二つの平面の間とか cylinder の中とかを充す場合に同じ樣な問題を論ずることは興味あることである。ここでは Integral equation の theory を應用して斯う云ふ問題が解かれてあります。

二つの fixed planes $x=\pm h$ の間の laminar fluid motion を考ふる。velocity は凡て $Oy$ に平行であるとする。$yz$ の plane が rigid plane で $Oy$ に平行に $\dot{V}(t)$ なる velocity で動くものとする。

Equation of motion は，$\nu$ を kinematic viscosity の coefficient とし，$v$ を液體の velocity とすれば

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

で boundary conditions は

$$x=h \text{ の處で } v=o,$$

$$x=o \text{ の處で } v=V(t)$$

この問題の解は，もし $V(t)$ が知れて居れば

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\pi\nu}{h^2}e^{-n^2\pi^2\nu t/h^2}\sin\frac{n\pi x}{h}\int_0^t V(\tau)e^{n^2\pi^2\nu\tau/h^2}d\tau$$

で與へられることは既知のことである。今論ぜんとする問題は rigid plane を fluid の中で重力の下に落すときはどんな velocity で落ちるかと云ふのであるから求むるものは $V(t)$ である。即 $V(t)$ は未知であるから上の式では板の運動の有様が解らない。

rigid plane が vertical であつて，その mass を per unit area に $\sigma$ とする。液體の density を $\rho$, $\mu$ を viscosity の coefficient とすれば rigid plane に動く液體の frictional force は unit area に就いて $2\mu\frac{\partial v}{\partial x}$ であるから inertia と gravity $g$ とを考に入れれば板の equation of motion は

$$V'(t)+\frac{2\mu}{\sigma h}\int_0^t V'(t)\left\{1+2\sum_1^{\infty}e^{-n^2\pi^2\nu(t-\tau)/h^2}\right\}d\tau=g,$$

となります。これは $V'(t)$ に就て Poisson type の integral equation と云ふものであります。

Edinburgh 大學の數學の敎授 Whittaker 氏はこの種類の積分方程式の解を Proc. Roy. Soc. London A, XCIV に出してあります。ここに其大體が sketch してあるから申しますと，積分方程式

$$\phi(x)+\int_0^x\kappa(x-s)\phi(s)ds=f(x)$$

で $f(x)$ は given, $\phi(x)$ は求むる function とする。此 integral equation の nucleus $\kappa(x)$ が次の様な形のものであるとする：

$$\kappa(x)=\sum_n P_n e^{p_n x}$$

此時には此 equation の solution は

$$\phi(x)=f(x)-\int_0^x K(x-s)f(s)ds,$$

となり；その solving function $K(x)$ は次の様にして定められます。

$$K(x)=\sum_{\alpha_n}A_n e^{\alpha_n x}$$

この $\alpha_n$ は

$$\sum_n\frac{P_n}{x-p_n}+1=0$$

の roots で $A_n$ は

$$\sum_{\alpha_n}\frac{A_n}{\alpha_n-p_i}+1=0,\qquad i=1,2,\ldots.n,\ldots.$$

から求められるものである。即

$$K(x)=-\frac{(\alpha_1-p_1)(\alpha_1-p_2)\ldots.(\alpha_1-p_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}e^{\alpha_1 x}-\ldots\ldots..$$

現在の問題では

$$p_1=0,\qquad p_2=-\pi^2\nu/h^2,\qquad p_3=-2^2\pi^2\nu/h^2,\ldots.$$

$$P_1=2\mu/\sigma h,\qquad\qquad P_2=P_3=\ldots.=4\mu/\sigma h,$$

であるから $\alpha_n$ を定める式は

$$\frac{2\mu}{\sigma\sqrt{\nu x}}\coth\sqrt{\frac{h^2x}{\nu}}+1=0$$

となる。此式の roots は皆 negative であるから $x=-\nu\lambda^2/h^2$ と置けば $\lambda$ は

$$\lambda\tan\lambda=2\rho h/\sigma$$

の positive roots である。Coefficients $A_n$ は同じ様に $k=2\rho h/\sigma$ と置けば

$$A_r=\frac{4\mu}{\sigma h}\cdot\frac{\lambda_r^2}{\lambda_r^2+k(1+k)}\cdot$$

となる。そこで所要の解は

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4g\rho h}{\sigma}\sum\frac{e^{-\lambda^2\nu t/h^2}}{\lambda^2+k(1+k)},$$

となる。之を integrate して板の落つる velocity は

$$V=\frac{4g\rho h^3}{\sigma\nu}\sum\frac{1-e^{-\lambda^2\nu t/h^2}}{\lambda^2\{\lambda^2+k(1+k)\}},$$

となります。

これで rigid plane が液體を充てた 2 planes の間を重力の下で落下するときの速さが解つたことになります。上式の summation をずれば板の limiting steady velocity が $g\sigma h/2\mu$ となることも解ります。

既に $V$ が解れば液體の速さ $v$ も直に計算することができることになります。

原論文には circular cylinder に viscous fluid を入れて constant couple を與へて rotate させるときの運動の有様も論じてありますが餘り長くなるから省きます。

次の論文に於て Havelock 氏は viscous fluid 中に於ける solid body の振動の老衰に就て二三の問題を解いて居るから其中から一の簡單のものを御紹介して置きませう。

$x=\pm h$ なる二つの planes 間に液體があつて其中央 $x=o$ に rigid plane があるとします。此 plane が $y$ 軸の方向に elastic force を受けて振動するもので，液體がない時に $2\pi/p$ なる period であるとします。此 plane の mass を per unit area に $\sigma$ とし，equilibrium position よりの距離が $a$ と云ふ所から initial velocity なしで運動が初まつたと假定します。$v$ を液體の velocity とすれば板の運動の式は

$$\sigma\frac{d^2y}{dt^2}-2\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=0}+\sigma p^2y=0$$

となります。板の velocity を $V(t)$ とすれば前にも申した通り $v$ は

$$v=\frac{2}{h}\sum_1^\infty\frac{n\pi\nu}{h}e^{-n^2\pi^2\nu t/h^2}\sin\frac{n\pi x}{h}\int_0^t V(\tau)e^{n^2\pi^2\nu\tau/h^2}d\tau$$

で與へられますから，此から $\partial v/\partial x$ を作り且つ $V(0)=0$ を勘定に取れば上の式は

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2\mu}{\sigma h}\int_0^t\frac{d^2y}{dt^2}\left\{1+2\sum_1^\infty e^{-n^2\pi^2\nu(t-\tau)/h^2}\right\}d\tau+p^2y=0$$

となり $y$ に關する integro-differential equation が得られます。是を恰も $y$ が既知の様に考へて Whittaker の方法で解くと

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-p^2y+\frac{4\mu p^2}{\sigma h}\int_0^t y(\tau)\sum\frac{\lambda^2e^{-\nu\lambda^2(t-\tau)/h^2}}{\lambda^2+k(1+k)}d\tau$$

となります，此中の $\lambda$ は

$$\lambda\tan\lambda=\frac{2\rho h}{\sigma}=k$$

の positive roots であります。

此式を二度 integrate することによつて

$$y(t)+\int_0^t y(\tau)\left[\frac{\sigma p^2h}{2\mu}-\frac{4\mu p^2h^3}{\sigma\nu^2}\sum\frac{e^{-\nu\lambda^2(t-\tau)/h^2}}{\lambda^2\{\lambda^2+k(1+k)\}}\right]d\tau=a,$$

なる $y$ に關する integral equation が得られます。此式も前と同法で

$$x^2+\frac{2\rho x^{3/2}}{\nu^{1/2}\sigma}\coth\frac{hx^{1/2}}{\nu^{1/2}}+p^2=0,$$

の roots を $\alpha$ とすれば

$$y=\frac{4\mu p^2\alpha}{\sigma h}\sum\frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha^4-\frac{2\mu}{\sigma h}\left(1+\frac{2\rho h}{\sigma}\right)\alpha^3+2p^2\alpha^2+\frac{6\mu p^2}{\sigma h}\alpha+p^4}$$

と云ふ solution がでさます。

$\alpha$ をきめる式は real negative roots の infinite series の外に a pair of roots があつてそれが complex のこともあり，又は real negative のこともあります。後の場合には運動は aperiodic であるが前の場合には damped harmonic vibration になります。通例 oscillation method で液體の viscosity を定めるにはこの damped harmonic vibration を assume して他の凡ての terms を neglect してあることになります。 （終り）