

# Mathematical Theory of Induced Voltage in the High-tension Magneto.

By F. B. Silsbee. Scientific Paper No. 424.

Dec. 1921, U. S. Bureau of Standards.

航空研究所々員 瀨藤象二氏

## I. Introduction.

H. T. Magneto の理論を精密に組立てたのではなくて、比較的簡単な假定の下に實用上便な考へ方を二つ許り提案して居る。

H. T. Magneto の實際働いて居る時は次の様な六段に分ち得る cycle を繰返して居ると考へてよからう。

1. 一次線輪を短絡した儘アーメチュアアが廻る爲めに生ずる起電力がその中に2乃至4アムペアの電流  $I_0$  を生じ、カムの作用で此の電流が斷たると一次電流は急激に減ずる。
2. 一次電流の急激な減少により一次及二次線輪に高い起電力が出来る。その爲めに一次側ではその接觸點に於ける火花を減ずる爲めに入れてある蓄電器に、又二次側では各部に分布せられて居る電氣容量に、充電し二次電壓がプラグの火花間隙を放電するに至る。
3. プラグの放電により先づ蓄へられて居る靜電的エネルギーが急激に火花の方に與へられる。
4. 更に coil の中に磁氣的エネルギーとして蓄へられて居たものの一部分も火花の方へ導かれて来る。従てプラグの處で一吋の間アークが出来る。
5. 一次側蓄電器に蓄へられて居た靜電エネルギーはカムの作用で接點が近づくにつれて、一吋スパークして消滅する。
6. 接點が相接すればアーメチュアアが (I) の位置に来る迄は其儘繼續して居る。

此の論文では上の第二段の部分許りを考へて居るのである。H. T. Magneto の目的は確實に火花を出すと言ふ事にあるのだから、第二段のところて二次電壓が充分に高くなるかどうかと云ふことが第一の問題である。

Induction Coil と非常によく似て居るが、違つて居る點を挙げれば

1. 一次と二次との間の電磁的連結 (Coupling) が密接なこと、
2. 成層 (laminate) しない鐵が多く使はれて居ること、
3. 二次電壓に高周波振動が比較的顯著なことである。

Taylor-Jones は 1911 年以來 Induction Coil に就て研究して居た理論を H. T. Magnet に應用して實驗の結果と可なりよく合ふ様な論文 (Phil. Mag. 36. p. 145 1918) を出して居るが、併し色々な困難な點もあるから上述の周期の全體に互つて考へることは可なり困難である。

### II. Double-Coil Model.

Taylor Jones のやり方を茲に紹介してある。

第一圖と第二圖は夫々 two spark magneto と single spark magneto との接続を示すものである。今第一圖のものに於て

$E_1, E_2 = E. M. F. \text{ of rotation}$

$k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$  coupling coefficient

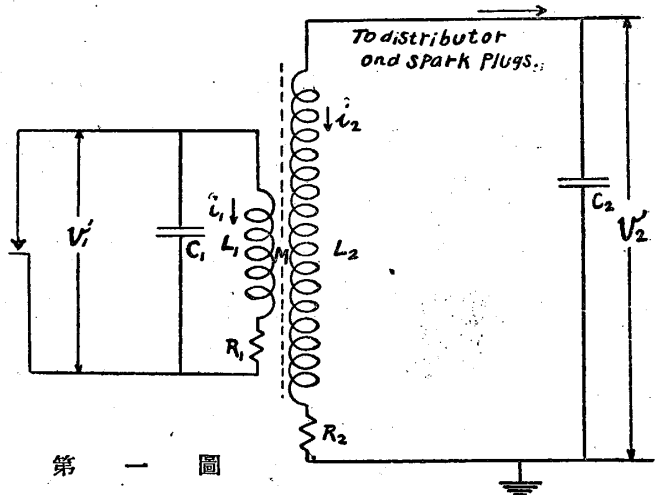
$i_1, i_2 = \text{電流}$

$v_1', v_2' = \text{端電位差}$

とすれば

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 + v_1' = E_1 \dots (1)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + v_2' = E_2 \dots (2)$$



第一圖

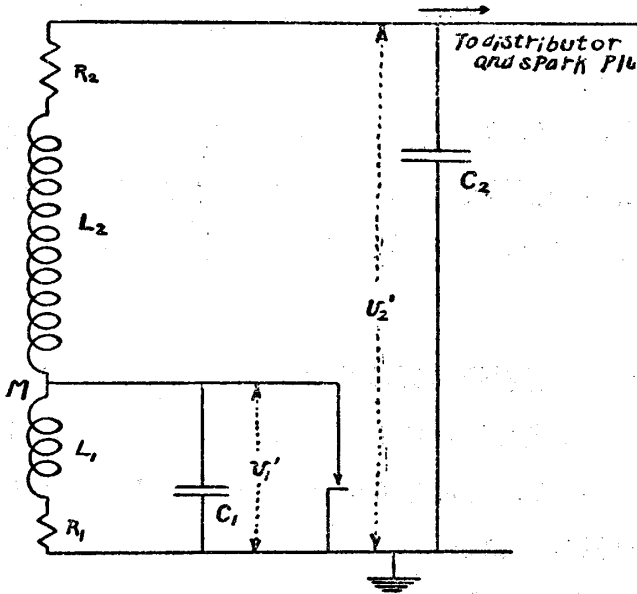
$$i_1 = C_1 \frac{dv_1'}{dt} \dots (3)$$

$$i_2 = C_2 \frac{dv_2'}{dt} \dots (4)$$

此等を combine し  $v_1 = v_1' - E_1, v_2 = v_2' - E_2$  なる notation を使ひ且  $E_1, E_2$  が此の period の間に殆んど變らないと考へてよいことを條件として

$$L_1 C_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + M C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + C_1 R_1 \frac{dv_1}{dt} + v_1 = 0 \dots (8)$$

$$L_2 C_2 \frac{d^2 v_2}{dt^2} + M C_1 \frac{d^2 v_1}{dt^2} + C_2 R_2 \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0 \dots (9)$$



第二圖

(8) と (9) とから  $v_2$  の式を求めれば

$$\begin{aligned} & (L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2 \frac{d^4 v_2}{dt^4} + (L_1 R_2 \\ & + L_2 R_1) C_1 C_2 \frac{d^3 v_2}{dt^3} + (R_1 R_2 C_1 C_2 \\ & + L_1 C_1 + L_2 C_2) \frac{d^2 v_2}{dt^2} + (R_1 C_1 \\ & + R_2 C_2) \frac{dv_2}{dt} + v_2 = 0 \dots \dots (10) \end{aligned}$$

と云ふ様な四次の微分方程式が得られる。

第二圖の様な場合には同様に取扱つて、

$$\begin{aligned} & (L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2 \frac{d^4 v_2}{dt^4} + (L_1 R_2 + L_2 R_1) C_1 C_2 \frac{d^3 v_2}{dt^3} + \\ & \{ R_1 R_2 C_1 C_2 + L_1 C_1 + (L_2 + 2M + L_1) C_2 \} \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \{ R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2 \} \frac{dv_2}{dt} + v_2 \\ & = 0 \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

即殆んど (10) と同形であります。

General Solution は

$$v_2 = A_1 e^{m_1 t} + A_2 e^{m_2 t} + A_3 e^{m_3 t} + A_4 e^{m_4 t} \dots \dots \dots (12)$$

$m$  は

$$\begin{aligned} & m^4 + \frac{L_1 R_2 + L_2 R_1}{L_1 L_2 - M^2} m^3 + \frac{R_1 R_2 + \frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1}}{L_1 L_2 - M^2} m^2 + \frac{\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}}{L_1 L_2 - M^2} m + \frac{1}{(L_1 L_2 - M^2) C_1 C_2} \\ & = 0 \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

の根である。

實際起り得るのは此の四つの根が互に Conjugate な二組の Complex quantity である時で、場合には

$$v_2 = e^{\alpha_1 t} (A_1 \sin \beta_1 t + B_1 \cos \beta_1 t) + e^{\alpha_2 t} (A_2 \sin \beta_2 t + B_2 \cos \beta_2 t) \dots \dots \dots (14)$$

但し

$$\left. \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\} = \alpha_1 \pm i \beta_1 \quad \left. \begin{matrix} m_3 \\ m_4 \end{matrix} \right\} = \alpha_2 + i \beta_2$$

即ち二次電圧は二種の Oscillation の合成された形で其の各は  $\alpha_1 \alpha_2$  なる logarithmic decrement に従て減衰することを意味して居る。

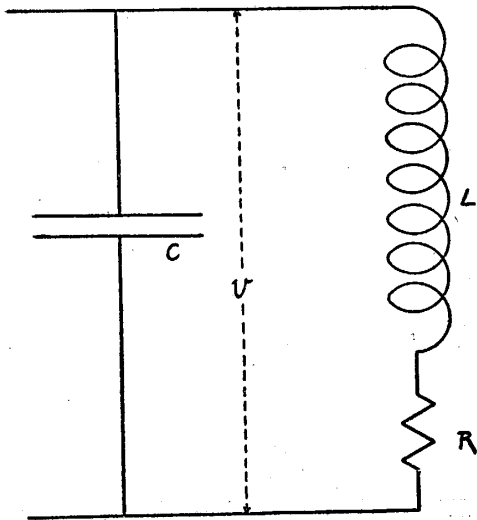
此の式を直接取扱つて  $R_1 R_2 L_1 L_2 M C_1 C_2$  等に適當な數値を入れて計算したものが三種曲線の形で表はされて居ますが、中々計算が面倒で上の  $R_1$  から  $C_2$  迄の間の一つを一寸變へて、其結果がどう表はれるかを知りたいと云ふ様な問題にはとても使はれない。

III Single Coil Model. (著者の提案の第一)

此は Engineering の方で吾々が transformer に就て屢々使つて居る equivalent network の原理を H. T. Magneto に應用したもので、原文には可なり廻りくどく説明してあるが、要するに次の假定を置いて出發しなければならぬ。

- 1)  $k^2=1$ . 即一次と二次との間に漏洩磁束が生じないこと。
- 2)  $R_1 C_1 = R_2 C_2$

〔(1) は大體承認してもよからうと思はれるが (2) は大分怪しいと思ふ少くとも  $R_1 C_1 R_2 C_2$  等を色々に變へた場合にはどうなるかと云ふ研究には可なり誤を伴ふものと覺悟しなければならぬと思ふ〕



第三圖

此の二つの假定が許せると第一圖の様な Circuit の代りに、第三圖の様な coil が唯一個しかないものを持つて來て考へてもよい。但し

$$C = C_1 + p^2 C_2 \quad p = \frac{M}{L_1}$$

$$R = \frac{R_1 R_2'}{R_1 + R_2'} \quad R_2' = \frac{R_2}{p^2}$$

$$L = L_0 \quad \text{Initial condition } I_0 \text{ at } t=0$$

而して得られた結果の中二次電圧は  $p$  倍し二次電流は  $p$  分の一を取ればよい。

此の形だと Maximum Voltage などは極簡単な形で示される。

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v - E = 0 \dots \dots \dots (20)$$

今  $\frac{R}{2L} = b \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = d$  とせば

a)  $b^2 > d^2$  なるとき (damped discharge)

$$v = \frac{I_0}{C(\alpha_1 - \alpha_2)} (e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) + E.$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -b + \sqrt{b^2 - d^2} \\ \alpha_2 &= -b - \sqrt{b^2 - d^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

b)  $b^2 < d^2$  なるとき (Oscillatory discharge)

$$v = \frac{I_0}{\beta C} e^{\alpha t} \sin \beta t + E. \quad \begin{aligned} \alpha &= -b \\ \beta &= \sqrt{d^2 - b^2} \end{aligned}$$

従て Maximum Voltage  $V_m$  は

$$(a) \quad V_m = -\frac{I_0}{C\alpha_2} y^{\frac{1}{1-y}} + E \quad y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

特に damping が非常に大なる時は

$$V_m = \frac{I_0 L}{RC} + E.$$

$$(b) \quad V_m = \frac{I_0}{\alpha C} e^{\frac{\alpha}{\beta} \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha}} + E$$

特に damping が非常に小さい時は

$$V_m = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}} + E$$

即ち  $V_m$  は  $E$  の effect を省略すれば常に  $I_0$  即ち一次電流の断れる時の値に正比例することになる。又

$$\frac{V_m}{I_0} = \text{Impulsive Impedance}$$

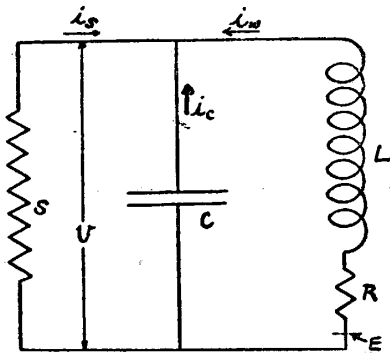
と名付けて H. T. Magneto の characteristic を示す重要な factor と見られる。

### Single-Coil Model with shunting Resistance.

Plug に炭素粉等が deposit して電氣の漏れることは發動機の點火故障の中最も屢々生ずるものの一つであるが此は電氣的は言へば Condenser  $C_1$  に並列に  $S$  の様な抵抗がつながれて居ると變らない。従て Single coil Model では第四圖の如くなる。

此場合の differential equation は

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \left( \frac{R}{L} + \frac{1}{SC} \right) \frac{dv}{dt} + \left( \frac{1}{LC} + \frac{R}{LSC} \right) v - \frac{E}{LC} = 0$$



第四圖

$$\left. \begin{aligned} L' &= L' & R' &= R + \frac{L}{SC} \\ C' &= C' \frac{S}{R+S} & E' &= E \frac{S}{R+S} \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

とせば

$$L' C' \frac{d^2 v}{dt^2} + R' C' \frac{dv}{dt} + v - E' = 0. \dots(46)$$

となり (20) と同じ形になります。Solution は  $E$  を negligible なりとせば

$$v = \frac{I_0}{C(\alpha_1' - \alpha_2')} (e^{\alpha_1' t} - e^{\alpha_2' t})$$

但し  $\alpha_1' \alpha_2'$  は (23) に (47) を代入して得らる。

**Numerical examples.**

case I.  $L=0.015^h$

$C=0.32^{mf}$   $R=16.8^\Omega$

$n=49 = \text{ratio of } 2 \text{ ry \&}$

$1 \text{ ry turns.}$

case II. 100 micro microfarad

を case I の二次側に加へた場合。

case III. 二次に  $S=500,000$

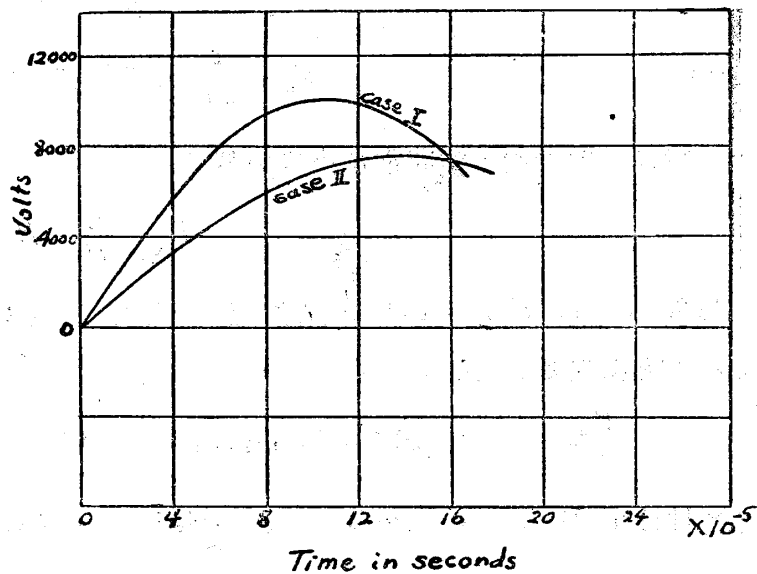
オームを加へた場合。

case IV. 二次に  $S=100,000$

オームを加へた場合。

第五圖及第六圖に示す如く

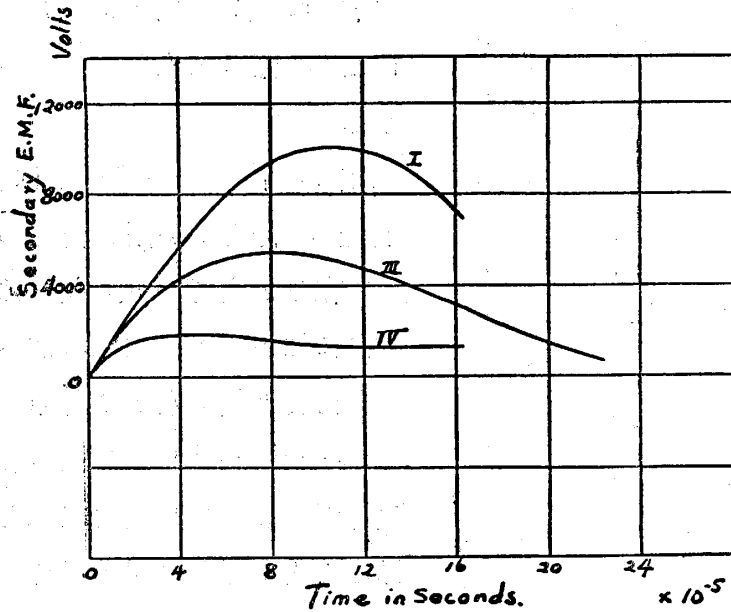
voltage が變化する。



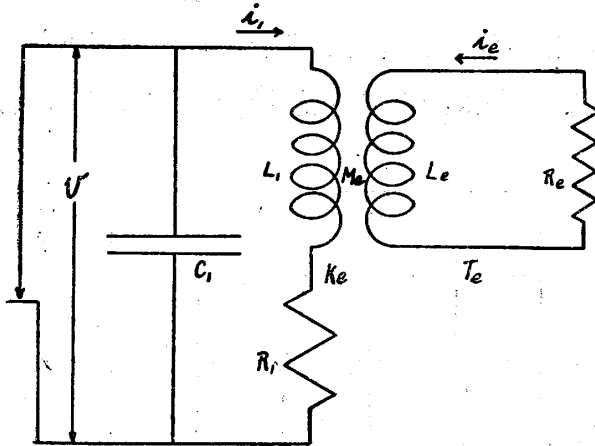
第五圖

**IV. Closed-Coil Model.**

Armature iron に渦流が生ずる爲めエネルギーの損失が起ることを成るべく事實に違はない様に代表せしむるには Double-coil & Single-Coil も共に充分でないので、第七圖の如く其自身抵抗  $R_0$  で短絡せられて居る coil が或る coupling Coeff.  $Ke$  を以て Couple せられて居ると考へるのがよい。



第六圖



第七圖

此の場合の解式に就て長々と説明して居るが、要するにあまり簡単と云はれないが、若し

$$K_c = \sqrt{\frac{M_c^2}{L_1 L_e}}$$

$$T_e = \frac{L_e}{R_e}$$

が知られて居るならば解くことが出来る。

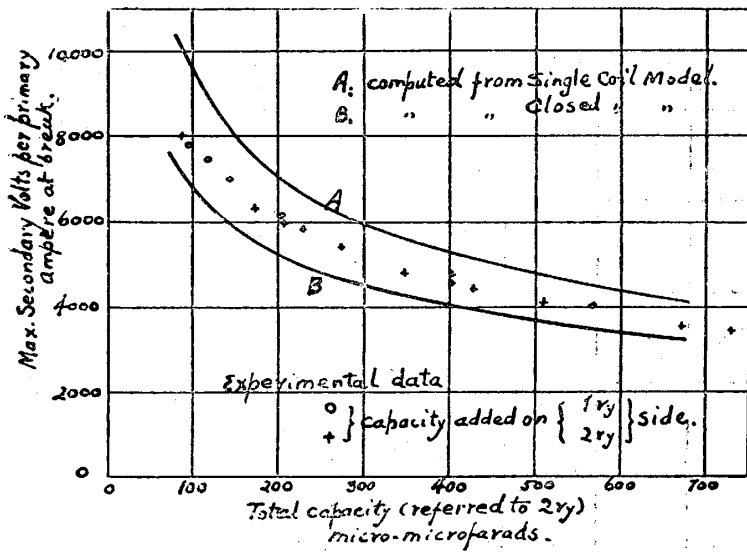
### V. Measurements of Constants.

與へられた Magneto に就て上述の Model の R L C 等の constant を實驗的に求むる方法が説明してある。是等の constant は實驗の時に使ふ交流の周波數によつて變化するもので、周波數の増すと共に R は増し L は減ずる。C は大體周波數の可なり廣い範圍に互つて一定である。

### VI. Experimental Confirmation.

Bureau of Standards で Berling Magneto Model D-81 及 D-82 に就て實驗した結果を述べてある。

第八圖の ○印は一次側、×印は二次側に電氣容量を増した時の Impulsive impedance (二次最高電壓と一次側の電流との比) が電氣容量によつて如何に變化するかを示したもので上側の curve は Single-coil Model 下側のは closed coil Model に就て計算した結果である。



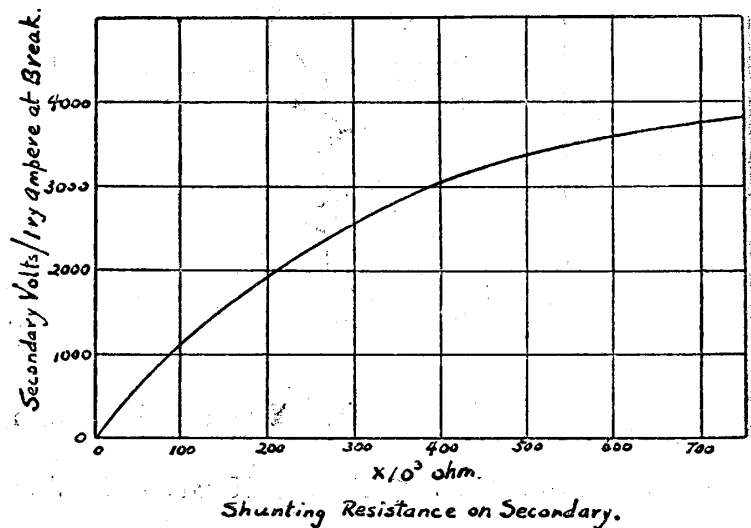
第八圖

(注意、本文の圖面では上下反對の様に記入してあるが勿論誤である)。

此圖で特に注意すべきは、 $\circ$ 印と  $\times$ 印とが略同じ曲線の上に在ることから Capacity は一次に加へても二次側に加へてもあまり變らないこと従て Single-coil Model でも或る範圍内では立派に事實を表はし得ることを示して居る點である。

第九圖の Solid curve は二次側に加へた Shunting resistance S と Impulsive impedance との關係を計算から出したもので、 $\times$ 印は實測値、 $\circ$ 印は Single coil model に實驗から得た Constant を用ふる際、成るべく事實に合ふ様にする爲 Shunt を有するが爲めに周波數の變ることを考へに入れて求めた計算値を示す。

第八圖、第九圖共に Magneto が實際確實に働き得るや否やを示す重要な性質であつて、空氣中の濕氣が plug への絶縁線の表面に露を結ぶと二次側の電氣容量は著しく増加し電壓が下る。第九圖の curve が忽な傾斜を持つて居るものは試験當時確實に働作しても上の様な場合に充分火花を出さない。又 plug leakage の爲めに火花の出なくなる傾向は第十圖の curve の傾斜の急なものに多いと云ふことも出来るのである。(終り)



第九圖