航空研究所雜錄

第十號

大正十四年五月

Transversal Vibration of Two-dimensional elastic-connected Particles, II.

航空研究所々員　遠藤美壽

§ 4. Some varieties of connections

次に particle が互に連結される lattice の狀態が種々なる場合を考へやう。

1. 一般平行四邊形的配列

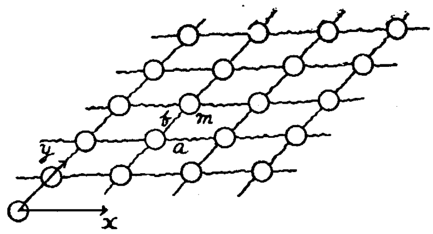

Fig. 17

particle の配置が左の圖の如く一般的な平行四邊形の lattice になつて居る場合にはこれらの二種の string に平行なる oblique Cartesian co-ordinates を用ひて議論することが出來る。

その結果は全く part I の rectangular lattice の場合と同一で frequency も displacement の式もそのまま前の式であらはされる。たゞ node をむすぶ線の方程式は oblique coordinates であらはされて居ることに注意すればよいのである。

この計算は直ちに極限をとつて continuous membrane の振動に移り行かしむることが出來るから平行四邊形の外圍を fix したる membrane の vibration は rectangular membrane の vibration と similar であることがわかるのである。

2. 正多角形的配列

先づ正多角形的配列が幾種類あるかを考へやう。此配列に於ては各 particle のまわりの角 2π は正多形の頂角の整數倍でなければならぬ。

今正多角形を n 邊形であるとすればその頂角は $\frac{n\pi-2\pi}{n}$ である。從つて p を positive の integer とすれば

$$\frac{n\pi-2\pi}{n}p=2\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

なる關係が成立する様な n の値を求むればよい。(19) から

$$p=\frac{2n}{n-2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

となる。此式で n を 0 から ∞ までかえたときの p の値は次のやうになる。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	………………	∞
p	0	-1	∞	6	4	$\frac{10}{3}$	3	$\frac{14}{5}$	………………	2

n が 7 から ∞ まで增す間に p は $\frac{14}{5}$ から 2 まで減ずる故この間に p が integer になる n の値はない。

これから p を integer ならしむる n の値は 3, 4, 6 のみであることがわかる。即ち第十八圖の配列である。この中 $n=4$ は既に論じたるところであるから之を除いての $n=3$, $n=6$ の場合を吟味しやう。

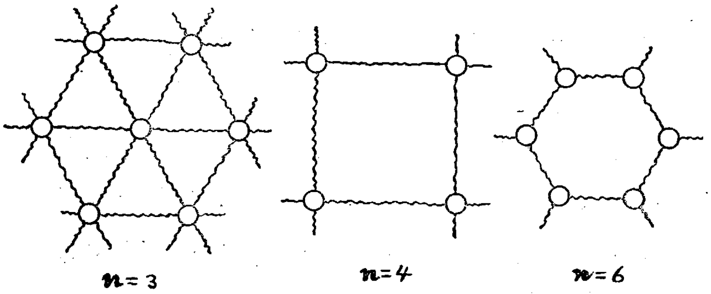

Fig. 18

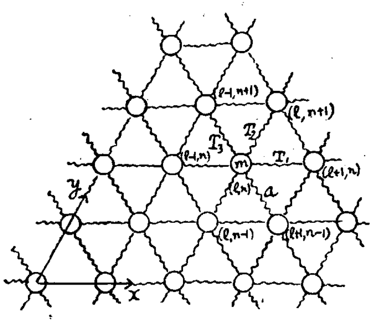

Fig. 19

(i) $n=3$

この場合には圖に示すやうに任意の particle (l, n) に働く力はそのまわりを取まく 6 個の particle 即ち $(l-1, n)$, $(l, n-1)$, $(l+1, n-1)$, $(l+1, n)$, $(l, n+1)$, $(l-1, n+1)$ に對する relative displacement によるものである。

圖の如く三角形の二邊に平行な oblique coordinate axes x, y をとれば particle (l, n) の振動の方程式は次のやうになる。

$$m\ddot{U}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(U_{l+1,n}+U_{l-1,n}-2U_{l,n})$$
$$+\frac{T_2}{a}(U_{l,n+1}+U_{l,n-1}-2U_{l,n})$$
$$+\frac{T_3}{a}(U_{l-1,n+1}+U_{l+1,n-1}-2U_{l,n})\ \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

こゝに T_1, T_2, T_3 は x 軸、y 軸の方向及び y 軸と 60° の角度をなせる方向の string の tension であつて、a は particle 同志間の距離である。そこでかゝる system of equation を solve するために

$$U_{l,n}=Ue^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)}$$

とおけば (21) 式は

$$-m\nu^2 a=T_1(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}-2)+T_2(e^{i\psi}+e^{-i\psi}-2)+T_3(e^{i(\psi-\varphi)}+e^{-i(\psi-\varphi)}-2)$$
$$=-4\left[T_1\sin^2\frac{\varphi}{2}+T_2\sin^2\frac{\psi}{2}+T_3\sin^2\frac{(\psi-\varphi)}{2}\right]$$

となるから frequency は

$$\nu=\sqrt{\frac{4}{ma}}\sqrt{T_1\sin^2\frac{\varphi}{2}+T_2\sin^2\frac{\psi}{2}+T_3\sin^2\frac{(\psi-\varphi)}{2}}\ \ldots\ldots\ldots(22)$$

で與へられる。即ち part I の ν と比較すれば第三の term が入るだけであることがわかる。

(附) 若し elementary triangle が正三角形でなく任意の三角形である場合には邊の長さを a, b, c とし其の各々の tension を T_1, T_2, T_3 とすれば振動の方程式は

$$m\ddot{U}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(U_{l+1,n}+U_{l-1,n}-2U_{l,n})$$
$$+\frac{T_2}{b}(U_{l,n+1}+U_{l,n-1}-2U_{l,n})$$
$$+\frac{T_3}{c}(U_{l-1,n+1}+U_{l+1,n-1}-2U_{l,n})$$

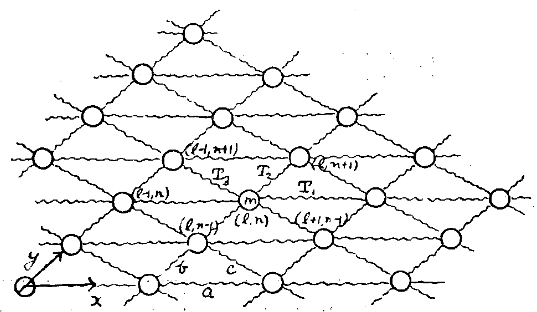

Fig. 20

となる故 frequency は

$$\nu=\frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}+\frac{T_3}{c}\sin^2\frac{(\varphi-\psi)}{2}}$$

となり、displacement は

$$U_{l,n}=Ue^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)}$$

にて與へられることになる。

(ii) $n=6$

(l, n) に働く力はそのまわりの $(l-1, n+1), (l+1, n), (l, n,-1)$ なる三つの particle に對する relative displacement によつて起こる。

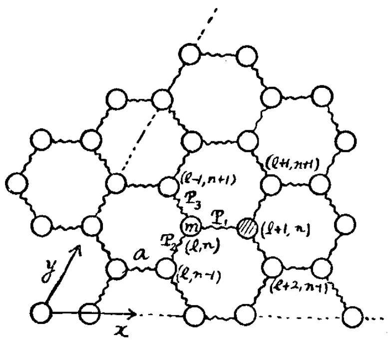

Fig. 21

從つて (l, n) の振動方程式は

$$m\ddot{U}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(U_{l+1,n}-U_{l,n})$$

$$+\frac{T_2}{a}(U_{l,n-1}-U_{l,n})$$

$$+\frac{T_3}{a}(U_{l-1,n+1}-U_{l,n})\ldots\ldots(22)_1$$

又 $(l+1, n)$ particle に對して同樣なる方程式を作れば

$$m\ddot{U}_{l+1,n}=\frac{T_1}{a}(U_{l,n}-U_{l+1,n})+\frac{T_2}{a}(U_{l+1,n+1}-U_{l,n})$$

$$+\frac{T_3}{a}(U_{l+2,n-1}-U_{l+1,n})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)_2$$

となる。そこで

$$U_{l,n}=Ue^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)}$$

とおけば $(22)_1$ から

$$-m\nu^2a=T_1(e^{i\varphi}-1)+T_2(e^{-i\psi}-1)+T_3(e^{i(\psi-\varphi)}-1)\ldots\ldots\ldots(23)$$

を得る故

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{ma}}\sqrt{T_1(1-e^{i\varphi})+T_2(1-e^{-i\psi})+T_3(1-e^{i(\psi-\varphi)})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{ma}}\sqrt{(T_1+T_2+T_3)-\{T_1\cos\varphi+T_2\cos\psi+T_3\cos(\psi-\varphi)\}-i\{T_1\sin\varphi-T_2\sin\psi+T_3\sin(\psi-\varphi)\}}$$

之を

$$=\frac{1}{\sqrt{ma}}(A-iB)$$

と置いて A, B を求めると

$$\begin{cases} A^2 = S_1 \pm \sqrt{S_1^2 + 4S_2^2} \\ B^2 = -S_1 \pm \sqrt{S_1^2 + 4S_1^2}, \end{cases}$$

こゝに

$$S_1 = (T_1 + T_2 + T_3) - \{T_1 \cos\varphi + T_2 \cos\psi + T_3 \cos(\psi - \varphi)\}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}[T_1 \sin\varphi - T_2 \sin\psi + T_3 \sin(\psi - \varphi)]$$

である。從つて A, と B 共に正負の値を得るがこの中 A は time に對する frequency を與ふるものであるから正をとらねばならず又それが real であるために

$$A = \sqrt{S_1 + \sqrt{S_1^2 + 4S_2^2}}$$

$$B = \sqrt{-S_1 + \sqrt{S_1^2 + 4S_2^2}}$$

が我々の場合に適合することがわかる。從つて

$$U_{l,n} = Ue^{-\frac{Bt}{\sqrt{ma}}} e^{i(\frac{A}{\sqrt{ma}}t + l\varphi + n\psi)}$$

となり、$\frac{A}{\sqrt{ma}}$ は 2π 秒間の frequency で、$\frac{B}{\sqrt{ma}}$ を含む term は damping をあらはすことになる。次に $(22)_2$ をとれば

$$-mv^2a = T_1(e^{-i\varphi} - 1) + T_2(e^{i\psi} - 1) + T_3(e^{i(\varphi-\psi)} - 1)$$

となる。之を (23) と比較するとたゞ i が $-i$ にかわつたに過ぎない。これは S_2 の符號をかえることになるのであるが S_2 は二乘の形で入る故に A, B なる solution は全く前同樣であることがわかる。

特別の場合として $T_1 = T_2 = T_3$ のときは之を T とおきて

$$-mv^2a = T(e^{i\varphi} + e^{-i\psi} + e^{i(\psi-\varphi)} - 3)$$

となる。この式から ν が一般に求められるがこれが purely に real になるためには

$$\psi = \varphi$$

であればよい。この條件を滿足する

$$\nu = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} \sin\frac{\varphi}{2}$$

である。即ち多くの harmonics の中で $\psi = \varphi$ なる關係を滿足する harmonics が damping なしに振動し得るのである。

§ 5. Systems of two different masses

是れ迄は同じ mass の particle が配列する場合の vibration を考へたのであるが更に進んで二種の相異なる mass m, M を有する particle が lattice 上に配列する場合を論じやう。これらの particle

の組合はせは色々出來るが一二の簡單な場合をのべる。

1. 第二十二圖に示す如き配列

$l+n$ が even の點に M, $l+n$ が odd の點に m が並列する、それらの displacement をそれぞれ U, u とすれば M に對する振動の方程式は

$$M\ddot{U}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2U_{l,n})+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2U_{l,n})\quad\ldots\ldots(24)$$

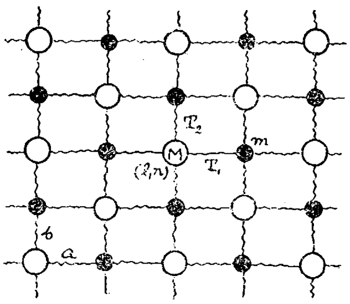

Fig. 22

又 m に對する方程式は

$$m\ddot{U}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(U_{l+1,n}+U_{l-1,n}-2u_{l,n})+\frac{T_2}{b}(U_{l,n+1}+U_{l,n-1}-2u_{l,n})\quad\ldots\ldots(25)$$

この二つの system of equation を solve すればよい。そのために前と同様に

$$\begin{cases} U_{l,n}=Ue^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)} \\ u_{l,n}=ue^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)} \end{cases}\quad\ldots\ldots(26)$$

と置けば (24) と (25) から

$$\begin{cases} -M\nu^2U=\dfrac{T_1}{a}(ue^{i\varphi}+ue^{-i\varphi}-2U)+\dfrac{T_2}{b}(ue^{i\psi}+ue^{-i\psi}-2U) \\ -m\nu^2u=\dfrac{T_1}{a}(Ue^{i\varphi}+Ue^{-i\varphi}-2u)+\dfrac{T_2}{b}(Ue^{i\psi}+Ue^{-i\psi}-2u) \end{cases}$$

となる。之は

$$\left\{M\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\right\}U+\left\{\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right\}u=0$$

$$\left\{m\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\right\}u+\left\{\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right\}U=0$$

と書けるから此二式より U と u を eliminate すれば

$$\begin{vmatrix} M\nu^2-2\left(\dfrac{T_1}{a}+\dfrac{T_2}{b}\right) & \dfrac{2T_1}{a}\cos\varphi+\dfrac{2T_2}{b}\cos\psi \\ \dfrac{2T_1}{a}\cos\varphi+\dfrac{2T_2}{b}\cos\psi & m\nu^2-2\left(\dfrac{T_1}{a}+\dfrac{T_2}{b}\right) \end{vmatrix}=0,$$

之を展開して

$$\left\{M\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\right\}\left\{m\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\right\}=\left(\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right)^2,$$

即ち

$$Mm\nu^4-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)(m+M)\,\nu^2+\left(\frac{2T_1}{a}+\frac{2T_2}{b}\right)^2-\left(\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right)^2=0$$

故に

$$\nu^2=\frac{\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)(m+M)\pm\sqrt{\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2(m+M)^2-Mm\left[\left(\frac{2T_1}{a}+\frac{2T_2}{b}\right)^2-\left(\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right)^2\right]}}{Mm}$$

かくして φ と ψ が色々にかわると ν も亦色々な値をとる。その limiting-frequency は前と同様に

	φ	ψ	λ_1	λ_2	ν^2	
(i)	2π	2π	a	b	0	全體としての變位
(ii)	π	π	$2a$	$2b$	$2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$	對角線の方向にすゝむ
(iii)	π	2π	$2a$	b	$\frac{\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)(m+M)\pm\sqrt{\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2(m+M)^2-16Mm\frac{T_1}{a}\frac{T_2}{b}}}{Mm}$	x 軸の方向に進む
(iv)	2π	π	a	$2b$	”	y 軸の方向に進む

又 m が M に比して甚だ小さいときには

$$\nu^2=\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)\frac{1}{m}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2\frac{1}{m^2}-\frac{1}{Mm}\left[\left(\frac{2T_1}{a}+\frac{2T_2}{b}\right)^2-\left(\frac{2T_1}{a}\cos\varphi+\frac{2T_2}{b}\cos\psi\right)^2\right]}$$

となる。是等の場合の振動の模様、harmonics, 及び node 等は全く part I と同様に論ずることが出來る。

2. 第二十三圖の如き配列

n が even のとき M, n が odd のとき m, 又 displacement を夫々 U, u とすれば振動の方程式は

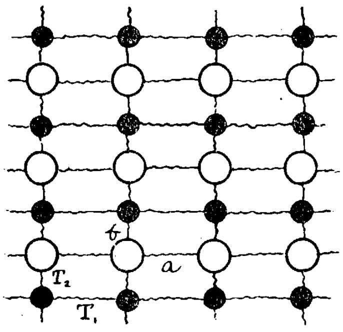

Fig. 23

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{U}_{l,n}&=\frac{T_1}{a}(U_{l+1,n}+U_{l-1,n}-2U_{l,n})\\ &\quad+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2U_{l,n})\\ m\ddot{u}_{l,n}&=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})\\ &\quad+\frac{T_2}{b}(U_{l,n+1}+U_{l,n-1}-2u_{l,n})\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(27)$$

$U_{l,n}$ $u_{l,n}$ に (26) の關係を代入して U, u を eliminate すれば

$$\begin{vmatrix} M\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)+2\frac{T_1}{a}\cos\varphi & 2\frac{T_2}{b}\cos\psi \\ 2\frac{T_2}{b}\cos\psi & m\nu^2-2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)+2\frac{T_1}{a}\cos\varphi \end{vmatrix}=0$$

となる。之より frequency ν が一般に求まる。又 limiting-frequency は

(i) $(2\pi,\ 2\pi)$

$\nu^2=0,$　　之は全體としての displacement をあらはす。

(ii) $(2\pi,\ \pi)$

$$\nu^2=2\frac{T_2}{b}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$$

之は y axis に沿ふてすゝむ wave である。

(iii) $(\pi,\ \pi)$

$$\nu^2=\frac{2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)(m+M)\pm\sqrt{\left(2\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2(m+M)^2-4mM\left[\left(2\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2-\frac{T_2^2}{b^2}\right]}}{mM},$$

之は對角線に沿ふてすゝむ wave である。

(iv) $(\pi,\ 2\pi)$

$$\nu^2=\frac{2\left(\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)(m+M)\pm\sqrt{\left(2\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2(m+M)^2-4mM\left[\left(2\frac{T_1}{a}+\frac{T_2}{b}\right)^2-\frac{T_2^2}{b^2}\right]}}{mM},$$

之は x axis に沿ふて進む wave であつて (iii) と ν の同じ値をもつのである。

全く同様にして他の組合はせ的配列（必ずしも m と M は同數なるを要しない）をなすときの vibration を議論することが出來るのである。

§ 6. Vibration being acted some resistance

(i) Resistance proportional linearly to its velocity

この場合の (l, n) particle の振動の方程式は part I の lattice に對して

$$m\ddot{u}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})$$

$$+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2u_{l,n})-2k\dot{u}_{l,n} \qquad \cdots\cdots(28)$$

となる。こゝに $2k$ は resistance の coefficient である。この場合にもこの system of equation の solution は free vibration のときと同様にして求まる。即ち

$$u_{l,n}=ue^{i(Nt+l\varphi+n\psi)} \qquad \cdots\cdots(29)$$

とおくと (28) から

$$O=mN^2-4\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-2ikN$$

を得る故、之より N を解けば

$$N=\frac{ik\pm\sqrt{4m\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-k^2}}{m}$$

となる。しかるに此式の real part は time に對する frequency をあらはす故に ± の sign の中で −の方を捨てて

$$N=\frac{ik}{m}+\sqrt{\frac{4}{m}\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-\frac{k^2}{m^2}}$$

之を (29) 式に代入すれば

$$u_{l,n}=ue^{-\frac{k}{m}t}\,e^{i\left(\sqrt{\frac{4}{m}\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-\frac{k^2}{m^2}}\,t+l\varphi+n\psi\right)}$$

この式の中で $e^{-\frac{k}{m}t}$ は damping をあらはす factor である。即ち damping の logarismic decrement は $\frac{k}{m}\pi$ である。なほ 2π second に對する frequency は

$$\nu=\sqrt{\frac{4}{m}\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)-\frac{k^2}{m^2}}$$

であるから resistance の増加と共に frequency が減少することがわかる。もし假りに mass m の充分小なる particle system が k の甚だ大なる medium の中にありとすればそれの vibration の frequency は甚だしく小さくなる。而して

$$k^2<4m\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

なる間はなほ vibration が起こり得るのであるが

$$k^2\geqq 4m\left(\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

に至れば最早 particle は vibration をせずに displace させても靜にもとの位置にもどるのみである。

(ii) resistance proportional to $\dot{u}^2$

この場合の方程式は

$$m\ddot{u}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})$$

$$+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2u_{l,n})\pm k\dot{u}^2_{l,n}\qquad\qquad(30)$$

ここに ± は rest の位置をとほりて上に上るか下に下がるかをあらはす。この solution を求むるには k が小さい場合に次のやうに k の power series に expand して

$$u_{l,n}=f_0(l,n,t)+kf_1(l,n,t)+k^2f_2(l,n,t)+\qquad\qquad(31)$$

と置き、之を (30) に代入すれば

$$m\left[\frac{\partial^2 f_0(l,n,t)}{\partial t^2}+k\frac{\partial^2 f_1(l,n,t)}{\partial t^2}+k^2\frac{\partial^2 f_2(l,n,t)}{\partial t^2}+\ldots\right]$$

$$=\frac{T_1}{a}\Big[f_0(l+1,n,t)+kf_1(l+1,n,t)+k^2f_2(l+1,n,t)+\ldots$$

$$+f_0(l-1,n,t)+kf_1(l-1,n,t)+k^2f_2(l-1,n,t)+\ldots$$

$$-2\{f_0(l,n,t)+kf_1(l,n,t)+k^2f_2(l,n,t)+\ldots\}\Big]$$

$$+\frac{T_2}{b}\Big[f_0(l,n+1,t)+kf_1(l,n+1,t)+k^2f_2(l,n+1,t)+\ldots$$

$$+f_0(l,n-1,t)+kf_1(l,n-1,t)+k^2f_2(l,n-1,t)+\ldots$$

$$-2\{f_0(l,n,t)+kf_1(l,n,t)+k^2f_2(l,n,t)+\ldots\}\Big]$$

$$\pm k\left\{\frac{\partial f_0(l,n,t)}{\partial t}+k\frac{\partial f_1(l,n,t)}{\partial t}+k^2\frac{\partial f_2(l,n,t)}{\partial t}+\ldots\right\}^2\qquad\qquad(32)$$

となる。そこで k を含まぬ term をひろひ出せば

$$m\frac{\partial^2 f_0(l,n,t)}{\partial t^2}=\frac{T_1}{a}\Big[f_0(l+1,n,t)+f_0(l-1,n,t)-2f_0(l,n,t)\Big]$$
$$+\frac{T_2}{b}\Big[f_0(l,n+1,t)+f_0(l,n-1,t)-2f_0(l,n,t)\Big]$$

となる。此方程式を滿足するやうに f_0 がきまればよい。ところが之は全く friction のないときの式であるから

$$f_0=Ae^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

なる形の solution が得られ

$$\nu=\sqrt{\frac{4}{m}}\sqrt{\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

で與へられる。なほ (32) 式より $k, k_i^2\cdots\cdots$ を含む項を兩邊 equate すれば

$$m\frac{\partial^2 f_1(l,n,t)}{\partial t^2}=\frac{T_1}{a}\Big[f_1(l+1,n,t)+f_1(l-1,n,t)-2f_1(l,n,t)\Big]$$
$$+\frac{T_2}{b}\Big[f_1(l,n+1,t)+f_1(l,n-1,t)-2f_1(l,n,t)\Big]\pm\left(\frac{\partial f_0(l,n,t)}{\partial t}\right)^2\quad(34)$$

$$m\frac{\partial^2 f_2(l,n,t)}{\partial t^2}=\frac{T_1}{a}\Big[f_2(l+1,n,t)+f_2(l-1,n,t)-2f_2(l,n,t)\Big]$$
$$+\frac{T_2}{b}\Big[f_2(l,n+1,t)+f_2(l,n-1,t)-2f_2(l,n,t)\Big]$$
$$\pm2\frac{\partial f_0(l,n,t)}{\partial t}\frac{\partial f_1(l,n,t)}{\partial t}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

となる。それ故 f_0 がわかれば (34) によつて f_1 を又 (35) によつて f_2 を見出すことが出來るのである。(34) より f_1 を見出すには

$$f_1(l,n,t)=\bar{f}_1e^{2i(\nu t+l\varphi+n\psi)}$$

とおき、(33) より f_0 を代入すれば

$$\bar{f}_1\left(2\nu^2m+4\frac{T_1}{a}\sin^2\varphi+4\frac{T_2}{b}\sin^2\psi\right)=\mp A^2 4\nu^2$$

となるから

$$f_1=\frac{\mp4\nu^2f_0^2(l,n,t)}{4\frac{T_1}{a}\sin^2\varphi+4\frac{T_2}{b}\sin^2\psi-2\nu^2m}=\frac{\mp4\nu^2A^2e^{2i(\nu t+l\varphi+n\psi)}}{\text{〃}}\quad(36)$$

となる。同様に f_2 を (35) 式より見出すには

$$f_1 = Be^{2i(\nu t + l\varphi + n\psi)}$$

とおけば (35) 式は

$$m\frac{\partial^2 f_2(l,n,t)}{\partial t^2} = \frac{T_1}{a}\Big[f_2(l+1,n,t)+f_2(l-1,n,t)-2f_2(l,n,t))\Big]$$

$$+\Big[f_2(l,n+1,t)+f_2(l,n-1,t)-2f_2(l,n,t)\Big] \mp 4\nu^2 ABe^{3i(\nu t - l\varphi + n\psi)}$$

となる。之を解くには

$$f_2(l,n,t) = \bar{f}_2 e^{3i(\nu t + l\varphi + n\psi)}$$

とおけばよい。そうすれば上の式から

$$\bar{f}_2 = \frac{\mp 4\nu^2 AB}{4\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{3\varphi}{2} + 4\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{3\psi}{2} - 3\nu^2 m}$$

となるから

$$f_2(l,n,t) = \frac{\mp 4\nu^2 ABe^{3i(\nu t + l\varphi + n\psi)}}{4\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{3\varphi}{2} + 4\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{3\psi}{2} - 3\nu^2 m} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

となる。以下同様に $f_3, f_4\cdots\cdots$ が見出される故に結局

$$u_{l,n} = Ae^{i(\nu t + l\varphi + n\psi)} \mp \frac{4A^2\nu^2 k\, e^{2i(\nu t + l\varphi + n\psi)}}{4\frac{T_1}{a}\sin^2\varphi + 4\frac{T_2}{b}\sin^2\psi - 2\nu^2 m}$$

$$\mp \frac{16\nu^4 A^3 k^2 e^{3i(\nu t + l\varphi + n\psi)}}{\left(4\frac{T_1}{a}\sin^2\varphi + 4\frac{T_2}{b}\sin^2\psi - 2\nu^2 m\right)\left(4\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{3\varphi}{2} + 4\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{3\psi}{2} - 3\nu^2 m\right)}$$

$$\pm \cdots\cdots$$

となる。ここに A は half period 度にかゝわる常數であつて

$$\nu = \sqrt{\frac{4}{m}}\sqrt{\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

である。上の solution からわかる様に第二、第三……の term はこの ν を fundamental とせるときの二倍、三倍……の over-vibration である。

§ 7. Forced vibrations

(i) non-resisting medium 中の forced vibration

(1) 先づ全體の particle に一樣なる periodic force が働ける場合を述べやう。

external force の frequency を p, q とすればその force は $A\cos pt+B\cos qt$ にてあらはされる。之を $Ae^{ipt}+Be^{iqt}$ とおいて (l,n) particle の振動の方程式を作れば

$$m\ddot{u}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2u_{l,n})$$
$$+Ae^{ipt}+Be^{iqt} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(38)$$

之は

$$u_{l,n}+\frac{A}{mp^2}e^{ipt}+\frac{B}{mq^2}e^{iqt}=\zeta_{l,n} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(39)$$

とおけば

$$m\ddot{\zeta}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(\zeta_{l+1,n}+\zeta_{l-1,n}-2\zeta_{l,n})+\frac{T_2}{b}(\zeta_{l,n+1}+\zeta_{l,n-1}-2\zeta_{l,n})$$

となる。之は free-vibration のときと同一の方程式であるから

$$\zeta_{l,n}=Se^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)}$$

なる solution が得られ

$$\nu=\sqrt{\frac{4}{m}}\sqrt{\frac{T_1}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\frac{T_2}{b}\sin^2\frac{\psi}{2}}$$

で與へられる。從つて

$$u_{l,n}=-\frac{A}{mp^2}e^{ipt}-\frac{B}{mq^2}e^{iqt}+Se^{i(\nu t+l\varphi+n\psi)} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(40)$$

となるから之の real part を求め boundary が rectangle 即ち $l=0$, $l=L$, $n=0$, $n=N$ にて fix され居るものとすれば

$$u_{l,n}=-\frac{A}{mp^2}\cos pt-\frac{B}{mq^2}\cos qt$$
$$+\sum_{S_1}\sum_{S_2}S_{S_1S_2}\sin\frac{s_1\pi l}{L}\sin\frac{s_2\pi n}{N}\cos(\nu_{S_1S_2}t-\varepsilon_{S_1S_2}) \quad\ldots.(41)$$

となる。即ち free の場合に比してたゞ第一、第二の forced の部分が單に加はるに過ぎないのである。之を continuous membrane の場合に直せば明かに

$$u=-\frac{A'}{\rho p^2}\cos pt-\frac{B'}{\rho q^2}$$
$$+\sum_{S_1}\sum_{S_2}S_{S_1S_2}\sin\frac{s_1\pi x}{L_1}\sin\frac{s_2\pi y}{L_2}\cos(\nu_{S_1S_2}t-\varepsilon_{S_1S_2}) \quad\ldots.(42)$$

となる。こゝに

$$A'=\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}}\frac{A}{ab}\,,\qquad B'=\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}}\frac{B}{ab}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(43)$$

をあらはす、即ち unit area に働く外力の amplitude である。

(2) 次に isotropic membrane を考へてそれに風があたる場合を述べやう。particle の system にても議論は同一であるが計算の式の形を簡單ならしむるために continuons membrane をとつたのである。

風の場合には time に對して periodic である計りでなく場所に對しても period をもつと見做してよいからこの力が働くときの membrane の振動の方程式は

$$\rho\ddot{\eta}=\tau\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)+G\,e^{i(\alpha x+\beta y+pt)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(44)$$

となる。ここに $Ge^{i(\alpha x+\beta y+pt)}$ は風の膜に働く力である。この term がなきときの solution は

$$\eta=Ae^{i(\nu t+S_1x+S_2y)}\,,$$

又

$$\nu^2=\frac{\tau}{\rho}(s_1^2+s_2^2)$$

にて與へられる。そこで之に第三の term があるときの particular solution を足せばよい。それを求むるために

$$\eta=Be^{i(\alpha x+\beta y+pt)}$$

と置けば (44) から

$$\{\rho p^2-\tau(\alpha^2+\beta^2)\}B=-G$$

なる關係を得るから

$$B=\frac{G}{\tau(\alpha^2+\beta^2)-\rho p^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(45)$$

であればよいことになる。從つて particular solution は

$$\eta=\frac{G}{\tau(\alpha^2+\beta^2)-\rho p^2}\,e^{i(\alpha x+\beta y+pt)}$$

となる故に general solution は

$$\eta=Ae^{i(\nu t+S_1x+S_2y)}+\frac{Ge^{i(\alpha x+\beta y+pt)}}{\tau(\alpha^2+\beta^2)-\rho p^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(46)$$

となる。たとへば $x=0$, $x=L_1$, $y=0$, $y=L_2$ に於て fixed せる membrane ならば

$$\eta=\sum_{t_1\,t_2}A\sin\frac{\pi t_1x}{L_1}\sin\frac{\pi t_2y}{L_2}\cos(\nu t+\varepsilon)+\frac{G\cos(\alpha x+\beta y)}{\tau(\alpha^2+\beta^2)-\rho p^2}\cos(pt+\varepsilon')\,..(47)$$

となる。ここに $G\cos(\alpha x+\beta y)\cos(\gamma t+\epsilon)$ は風の disturvance である。

(3) 飛行機の下翼の如く constant pressure が全體一樣に働く場合には

$$\rho\ddot{\eta}=\tau\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)+P \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

なる方程式を解けばよい。ここに P は x, y, t に對して一定なる constant pressure (per unit area) をあらはす。

之を解くために (48) を

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\eta-\frac{P}{\rho}t^2\right)=\tau\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\right)$$

と書きあらはし

$$\eta-\frac{P}{\rho}t^2=\zeta$$

とおけば上の方程式は

$$\rho\ddot{\zeta}=\tau\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)$$

と書きあらためるとが出來る。しかるに此方程式は free-vibration のときの方程式と全く同一であるから

$$\zeta=Ae^{i(S_1x+S_2y)}\cos(\nu t+\varepsilon)$$

なる solution をもつべきである。從つて (48) の solution は

$$\eta=\frac{P}{\rho}t^2+Ae^{i(S_1x+S_2y)}\cos(\nu t+\varepsilon) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

ここに A なる constant は half period ごとにその値を變ずる量である。

この motion を調べるために membrane 中の一定の場所をとり

$$Ae^{i(S_1x+S_2y)}=-B$$

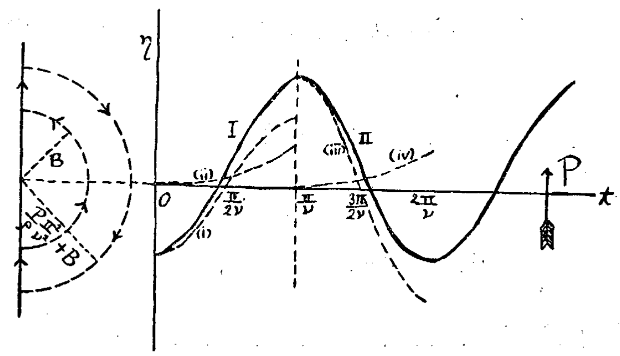

Fig. 24

と置く。そうすれば B は half-period 度にかわる量となる。今簡單のために phase difference $\epsilon=0$ とすれば

$$\eta=\frac{P}{p}t^2-B\cos\nu t$$

となる。この graph を畫けば第二十四圖に示したる實線になる。即ち $t=0$ から $t=\frac{\pi}{\nu}$ までの間に第二の term $B\cos\nu t$ は (i) なる curve を畫き 第一の term $\frac{P}{p}t^2$ は (ii) なる parabola を

畫く。それ故この interval に於ける二つの term の和は I の實線にてあらはせるものになる。しかるにこの interval は P の働く方向に動いて居つたのであるが $t=\frac{\pi}{\nu}$ で振動は一たん止まり更に下向きに即ち P の向きに反對の方向にもどつて來る。その start の vibration の amplitude は $\frac{P}{\rho}\frac{\pi^2}{\nu^2}+B$ であるから、次の $t=\frac{\pi}{\nu}$ から $t=\frac{2\pi}{\nu}$ の間では vibration は

$$\eta=\frac{P}{\rho}\left(t-\frac{\pi}{\nu}\right)^2-\left(\frac{P}{\rho}\frac{\pi}{\nu^2}+B\right)\cos\nu t$$

であらはされる。この第二の term は curve (iii) 又、第一の term は curve (iv) にして、此二つの和は實線 (II) である。かくして $t=2\pi/\nu$ に於て $t=0$ と全く同じ狀態にもどりて振動が close するのである。即ちごく大體に云へば constant force P の方向に displacement の center がづれた樣な形の vibration になる。しかし勿論、この振動は pure な正弦的振動ではないのである。

なほ此計算は horizontal membrane が gravity の下に vibrate する場合にそのまゝ當はめることが出來る。その場合には單に上の式の $P=\rho g$ とおけばよいのである。

(ii) $K\dot{u}_{e,n}$ なる resisting medium 中の forced vibration.

振動の方程式は

$$m\ddot{u}_{l,u}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n-1}-2u_{l,n})$$

$$+Ae^{ipt}+Be^{iqt}-k\dot{u}_{l,n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)$$

之を解くには矢張 (i) の如く

$$u_{l,n}+\frac{A}{mp^2}e^{ipt}+\frac{B}{mq^2}e^{iqt}=\zeta_{l,n}$$

とおきて

$$m\ddot{\zeta}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(\zeta_{l+1,n}+\zeta_{l-1,n}-2\zeta_{l,n})+\frac{T_2}{b}(\zeta_{l,n+1}+\zeta_{l,n-1}-2\zeta_{l,n})-k\dot{\zeta}_{l,n}$$

と書きなほし、この solution はすでに §6, (i) でやつてあるからそれをもつて來て (51) の ζ_n の代りにおけばよいのである。

(iii) $k\dot{u}^2_{l,n}$ なる resisting medium 中に於ける forced vibration.

振動の方程式は

$$m\ddot{u}_{l,n}=\frac{T_1}{a}(u_{l+1,n}+u_{l-1,n}-2u_{l,n})+\frac{T_2}{b}(u_{l,n+1}+u_{l,n+1}-2u_{l,n})$$

$$\pm k\dot{u}^2_{l,n}+Ae^{ipt}+Be^{iqt}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

之も (i), (ii) の如く

$$u_{l,n}+\frac{A}{mp^2}e^{ipt}+\frac{B}{mq^2}e^{iqt}=\zeta_{l,n}$$

なる substitution を行ひ § 6, (ii) の方程式に reduce して solution が求められるのである。

§ 8. Vibration of hunging membrane

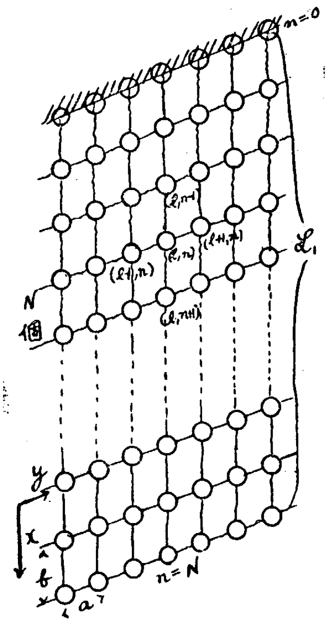
Fig. 25

two-dimensional connected particle の極限として振動の方程式を求める。

圖の如く上から下まで N 個の mass m なる particle が吊り下げてあつて互に横の series と horizontal string にて結びついて居るとすれば (l, n) particle に働く力は connected plane に垂直の, transversal displacement $z_{l,n}$ に對して次のやうになる。

(l, n) と $(l, n-1)$ 間の string の tension は (l, n) 以下の particle を吊り下げる重力に釣合ふ故に

$$m(N-n+1)g$$

に等し。從つて此二つの particle の relative displacement によつて (l, n) に働く力は

$$\frac{m(N-n+1)g}{b}[z_{l,n-1}-z_{l,n}],$$

同樣に (l, n) と $(l, n+1)$ 間の string から

$$\frac{m(N-n)g}{b}[z_{l,n+1}-z_{l,n}]$$

この外に横の相隣れる二つの particle から絲の tension T に對して

$$\frac{T}{a}[z_{l+1,n}+z_{l-1,n}-2z_{l,n}]$$

なる力を受ける。なほこの外に velocity に一次的に比例する抵抗が働くとすれば (l, n) particle の振動の方程式は

$$m\ddot{z}_{l,n}=\frac{m(N-n+1)g}{b}[z_{l,n-1}-z_{l,n}]+\frac{m(N-n)g}{b}[z_{l,n+1}-z_{l,n}]$$
$$+\frac{T}{a}[z_{l+1,n}+z_{l-1,n}-2z_{l,n}]-\mu'\dot{z}_{l,n}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

これを解けば particle の system の振動が得られる。(52) の兩邊を ab で割れば

$$\frac{m}{ab}\ddot{z}_{l,n}=\frac{m}{ab}(N-n+1)gb\left[\frac{z_{l,n+1}+z_{l,n-1}-2z_{l,n}}{b^2}\right]$$

$$-\frac{m}{ab}g\left[\frac{z_{l,n}-z_{l,n-1}}{b}\right]+\frac{T}{b}\left[\frac{z_{l+1,n}+z_{l-1,n}-2z_{l,n}}{a^2}\right]-\frac{\mu'}{ab}\dot{z}_{l,n}$$

と書ける。そこで a, b 並に m, T を充分に小さく、N, n を充分に大きくとり

$$\begin{cases}\mathrm{Lim}\,\dfrac{m}{ab}=\rho, \quad \mathrm{Lim}\,\dfrac{\mu'}{ab}=\mu \ (\text{unit area に對する coeff.})\\ \mathrm{Lim}\,(N-n+1)\,b=L_1-x, \quad \mathrm{Lim}\,\dfrac{T}{b}=\tau \ (\text{surface tension along } y \text{ axis})\end{cases}$$

とすれば上式は

$$\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\rho(L_1-x)g\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\rho g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\tau\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots(53)$$

となる。之が吊り下げられたる membrane の振動の方程式である。簡單のために $\rho=1$ とすれば

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=(L_1-x)g\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\tau\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \cdots\cdots\cdots(54)$$

この方程式の solution は何づれ vibration であるから時間に對しては e^{int} なる factor であらはされるに違ひない。それ故

$$\zeta=\eta e^{int}$$

とおけば (54) は

$$-n^2+i\mu n=(L_1-x)g\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-g\frac{\partial\eta}{\partial x}+\tau\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots\cdots(55)$$

となる。しかるに (55) 式の y に對する differential の入り方に依つて η は y に對して e^{isy} なる factor を含むことがわかる。そこで

$$\eta=\bar{\eta}e^{isy}$$

とおけば (55) から

$$(n^2-i\mu n-\tau s^2)+(L_1-x)g\frac{\partial^2\bar{\eta}}{\partial x^2}-g\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x}=0$$

を得る。之は ζ の x に對する functional form を與へる方程式であつて之の solution は明かに zero order の Bessel-function である。即ち

$$\bar{\eta}=J_0\left(2\sqrt{k(L_1-x)}\right)$$

となる。玆に

$$k=\frac{n^2-i\mu n-\tau s^2}{g} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(56)$$

なほこの k は boundary condition によつて定まる常數であつて、第二十五圖の如く $x=0$ に於て fix され居るとすれば $x=0$ に於て $\bar{\eta}=0$ であるから

$$J_0(2\sqrt{kL_1})=0$$

なる關係がなければならず、從つて此方程式の root として k が與へられるのである。此 equation の roots はすでにわかつて居る、即ちその二三をかけば

$$\frac{2\sqrt{kL_1}}{\pi}=0{,}7655 \quad 1{,}7571 \quad 2{,}7546 \quad \ldots\ldots \qquad (57)$$

かくして L_1 なる membrane の縦の長さが與へられれば k がきまるから之を (56) に代入して n が與へられるのである。そこでこの n を real part と imaginary part とに分ければその real part は 2π 秒間の frequency をあらはすことになる。(56) から

$$n^2-i\mu n-(\tau s^2+kg)=0$$

であるから

$$n=\frac{i\mu\pm\sqrt{-\mu^2+4(\tau s^2+kg)}}{2}$$

$$=\frac{i\mu}{2}\pm\nu$$

とおく。この中 − の sign は frequency が negative であり得ぬから捨てる。そうすれば 2π 秒間の frequency ν は

$$\nu=\frac{\sqrt{4(\tau s^2+kg)-\mu^2}}{2}$$

となる。それ故に全體の solution は上の三つを掛け合はせたものであつて、それの real part をとれば

$$\zeta=e^{-\frac{\mu}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4(\tau s^2+kg)-\mu^2}}{2}t+\varepsilon\right)J_0\left(2\sqrt{k(L_1-x)}\right)\left[A\cos sy+B\sin sy\right] \qquad (58)$$

にてあらはされる。

又 special case として $y=0$, $y=L_2$ が更に fix されて居るとすればそこで $\zeta=0$ にならなければならぬから最後の factor は $B\sin sy$ のみのこり、

$$s=\frac{2\pi}{L_2}$$

となる。故に此場合には

$$\zeta=Be^{-\frac{\mu}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{4\left(\tau\frac{4\pi^2}{L_1^2}+kg\right)-\mu^2}}{2}t+\varepsilon\right)J_0\left(2\sqrt{k(L_1-x)}\right)\sin\frac{2\pi y}{L_2} \quad (59)$$

にて與へられる振動をするのである。

尙この場合を particle の system として取扱ふことも簡單であるが y に對して $\sin\frac{s\pi l}{L}$ となるだけであとの factor は數物記事 (Dai 3ki Maki no 2, 8 Gô) の S. Suzuki; On the Oscillation of the Beaded String の議論と同一になる故に之を略すことにする。(終)

正　　　　誤

〔第十號、大正十四年五月發行の分〕

頁	行（上より）	誤	正
123.	8		表の右側に縦線を入れる
129.	21	$u=-\frac{A'}{\rho p^2}\cos pt-\frac{B'}{\rho q^2}$	$u=-\frac{A'}{\rho p^2}\cos pt-\frac{B'}{\rho q^2}\underline{\cos qt}$
132.	14	$m\ddot{u}_{l,u}=\cdots\cdots\cdots\cdots$	$m\ddot{u}_{l,\underline{n}}=\cdots\cdots\cdots\cdots$
170.	終り	$\frac{c_p}{c_v}=1+1.19\times10^{-5}\{c_v+\cdots\cdot\}$	$\frac{c_p}{c_v}=1+1.19\times10^{-5}\underline{T}\{c_v+\cdots\cdot\}$
171.	17	$\therefore\ a(n-1)=2.04\times10^{17}$	$\therefore\ a(n-1)=2.04\times\underline{10^{-17}}$
159.	23	がてる。	である。
,,	24	あ 2 に	が 2 に
132.	20	ζ_n の	$\zeta_{\underline{l}\,n}$ の

正　　　誤

〔第十號、大正十四年五月發行の分〕

頁	行（上より）	誤	正
123.	8		表の右側に縦線を入れる
129.	21	$u=-\frac{A'}{\rho p^2}\cos pt-\frac{B'}{\rho q^2}$	$u=-\frac{A'}{\rho p^2}\cos pt-\frac{B'}{\rho q^2}\underline{\cos qt}$
132.	14	$m\ddot{u}_{l,u}=\cdots\cdots\cdots\cdots$	$m\ddot{u}_{l,\underline{n}}=\cdots\cdots\cdots\cdots$
170.	終り	$\frac{c_p}{c_v}=1+1.19\times10^{-5}\{c_v+\cdots\cdot\}$	$\frac{c_p}{c_v}=1+1.19\times10^{-5}\underline{T}\{c_v+\cdots\cdot\}$
171.	17	$\therefore\ a(n-1)=2.04\times10^{17}$	$\therefore\ a(n-1)=2.04\times\underline{10^{-17}}$
159.	23	がてる。	である。
,,	24	あ 2 に	が 2 に
132.	20	ζ_n の	$\zeta_{\underline{l}\,n}$ の