粘性流體中を運動する物體の表面摩擦に關して簡單なる一考察

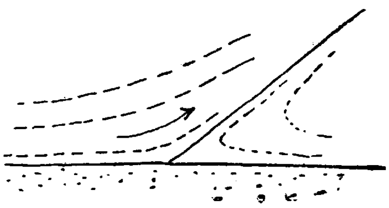
所員　遠藤美壽

靜止する粘性流體中を或る形の個體が運動する時に、それに働らく流體の抵抗は、其の固體を完全に平滑なるものと見做したるときその幾何學的形狀及びそれが流體內を運動する向きに依りて周圍の流體內に disturbance を起こすために、其の reaction として流體より固體に及ぼす力と、物體の表面の凹凸さに依る摩擦によりて起こる部分、及び第二次的の影響として、物體表面の凹凸さが周圍の流體の disturbance の state を多少變ずるために起こる部分とに分けて考へることが出來る。

此の第二の純粹摩擦に依る部分に對する一考察を、極めて大膽なる假定を基として與へて見る。

茲に一つの semi-infiinite に廣がれる plane wall の固體があつて、それが靜止する粘性流體內をその plane boundary に沿ふて一定の速度を以て動くものと考へる。

第一圖

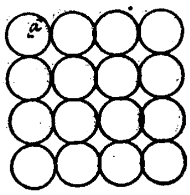


この場合に若し此の plane が完全に ideal geometrical plane ならば、單に、solid と fluid の境に近きところに於て solid の molecule と fluid の molecule との間に働く molecular force の影響として、所謂 grenzschicht の disturbance が生じ、それに依る reaction が solid に及ぶのみであろう（第一圖)。

然るに我々の作る plane は機械的製作上の精密さに制限があるからその plane に凹凸のあることはまぬかれぬ。即ち完全なる幾何學的平面とは見做すことは出來ない。このために solid に reaction が與へられるのである。

今、此の凹凸をあらはすために、radius a の hemisphere が理想的の plane 上にならぶものを model にとつて、議論を進めやう。即ち凹凸の大さを a の大さをもつて代表せしめるのである。

第二圖



若し第二圖の如く hemisphere を相互に接せしめて plane を蔽ふたとすれば unit length にならぶ hemisphere の數 N は hemisphere が充分に小さければ

$$N=\frac{1}{2a} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

にて與へられる。しかし實際の plane の凹凸さを考へるときは、かやうに密接した hemisphere で置きかへらるべきものでなく寧ろ離れ離れに hemisphere が分布するものとしてあらはさるべきものであろう。かやうに離れ離れの hemisphere であらはすとしても矢張 unit length に

ならぶ sphere の數は半徑に逆比例すると見て差支ない樣に思はれる。即ち凹凸さの大きいものは凸凹さの density が少ないと云ふことである。即ち

$$N \propto \frac{1}{a}$$

比例の常數を c とすれば

$$N = \frac{c}{a} \quad \dots\dots\dots\dots(2)$$

さて plane 上に ΔA なる small area をとれば其の上に分布する hemisphere の數は

$$N^2 . \Delta A \quad \dots\dots\dots\dots(3)$$

である。ΔA が小さければたとへ grenzschicht 的の disturbance があつてもその點に於ける velocity は uniform と見做し得るから、その velocity を v とする。そうすると Stokes' law によつて、sphere が充分に離れ合つて互の影響がない場合には ΔA 上の hemisphere による抵抗 F は

$$F = 3\pi\eta av . N^2 . \Delta A \quad \dots\dots\dots\dots(4)$$

となる。ここに η は viscosity の coefficient である。これは (2) によつて

$$F = \frac{3\pi\eta c^2 v}{a} . \Delta A \quad \dots\dots\dots\dots(5)$$

となる。此式を見ると F なる抵抗は area ΔA 並に velocity viscosity に比例する外に hemisphere の radius a に逆比例する。即ち小さい sphere が數多くあるのは大きい sphere が數少くあるよりも抵抗が大きいと云ふ結果になる。云ひかえれば凸凹の度が大きいもの一見して粗雜な表面のものは摩擦が小さいと云ふ結果になる。勿論實際の凹凸さをあらはすときには c は必ずしも constant でないからかやうに簡單な式にはならぬであらうが兎に角 (2) の假定を許すならば、かう云ふ結論に達するのである。ところが此の抵抗の値は sphere の抵抗式によつて勿論色々になる。たとへば Newton's law を用ふれば

$$F = k\rho a^2 v^2 . N^2 . \Delta A = k\rho v^2 c^2 \Delta A \quad \dots\dots\dots\dots(6)$$

となつて hemisphere の radius には無關係となる。

又Stokes' law は slipping がなく a が 10^{-2}—10^{-6} cm のときによく合ふのであるが slipping があるときは、β を sliding friction の coefficient とすれば

$$F = 3\pi\mu va \frac{2\mu + \beta a}{3\mu + \beta a} . N^2 . \Delta A \quad \dots\dots\dots\dots(7)$$

しかるに適當の場合には β は充分に大きい値をとる ($\beta = \infty$ で stokes' law になる) から、此の式は

$$F = 3\pi\mu va \frac{\left(1 + \dfrac{2\mu}{\beta a}\right)}{\left(1 + \dfrac{3\mu}{\beta a}\right)} N^2 \Delta A$$

を $\frac{\mu}{\beta a}$ に對して expand して、(2) を代入すれば

$$F=3\pi\mu v\left(1-\frac{\mu}{\beta a}\right)\frac{c^2}{a}\Delta A \text{ .... }(8)$$

即ち、大約 a に逆比例することになる。又 Millikan, Stokes-Cunningham, Sexl の論ぜるが如く sphere の抵抗 W を

$$W=\frac{6\pi\mu a}{1+A\dfrac{l}{a}}v$$

とすれば

$$F=\frac{3\pi\mu v}{1+A\dfrac{l}{a}}\frac{c^2}{a}.\Delta A \text{ .... }(9)$$

となる。ここに l は fluid molecule の mean free path で A は Sexl (1925) の計算に從へば 1.575 又 Millikan の實測に從へば fluid を gas とせるときに 0.7—1.0 の間にかわる常數である。もし plane の表面が極めて平滑で a が l に對して充分に小さいと見做し得るやうになれば

$$W=\frac{6\pi\mu a^2}{Al}v$$

と書けるから

$$F=\frac{3\pi\mu v c^2}{Al}\Delta A$$

となつて a に無關係になる。又機械的の製作上凹凸が cylindrical に廣がれるとき、もし solid が cylinder の axis に垂直に動くとすれば半徑 a の hemi-cylinder を分布させてそれより生ずる抵抗を求めると、unit の巾の ΔL なる長さに對して

$$F=\left\{\frac{2\pi\mu vc}{\frac{1}{2}-\gamma-\log(\frac{1}{2}ka)}\right\}\frac{\Delta L}{a} \text{ .... }(10)$$

ここに γ は數である。Lamb の計算に從へば括孤の中の値は ka の變化に對する變り方が少ない。たとへば $ka=\frac{1}{10}$ では $2.15\,\mu v$ 又 $ka=\frac{1}{20}$ では $1.74\,\mu v$ となる。即ち ka が小なくなると多少減ずるが減じ方は少ないのである。それ故上の式より矢張 a に inversely に proportional であると云ふ結果を得るのである。

この結果は飛行機の翼上に rivet の頭が出て居るときの影響を考へるときに用ひられるであらう。即ち rivet の頭を小さくして數をたくさんにすることは必ずしも摩擦を少なくするのに有效ではないのである。

かやうにして甚だ大膽な假定ではあるが第二の摩擦力の考察を與へることが出來る。しかし更にこの表面の凹凸さがまわりに生ずる fluid の disturbance にいかなる影響を與へるかは更に考察を要する點である。そして之が明かになつたときに初めて表面の粗雜さに對する影響を完全に知り得るものであると考へる。

（終）