

航空研究所雜錄

第三十一號

昭和二年二月

支柱の外形に就いて

所員 阿河財造

1. はしがき

航空船の模型については G. Fuhrmann の有名な研究⁽¹⁾があつて、吾々はその結果により航空船の空氣抵抗を少なくするには、その外形の理論的研究が如何に必要であるかを知ることが出来た。飛行機に於ても翼以外の部分の空氣抵抗を、なるべく小さくすることは、あらゆる方面から必要とせられてゐることであるが、その外形が比較的複雑であるため、之に近い形を求めることは不可能である。併し是等の抵抗を生ずる各部分の内、翼間支柱、脚支柱、及びボン線の如き簡単な外形をもつてゐるのは、その外形を或る假定のもとに理論的に定めることが出来るから、それについて實驗を行ひ、先きに Fuhrmann が航空船の外形について得たやうな結果を求めて置くことは、相當に必要なことであらうと思ふ。

扱て支柱又はリボン線の外形を理論的に定めるためには、是等のものは無限の長さをもつてゐるものと假定する。此の様な支柱に理想的流體——粘性及壓縮性なき——が軸に直角な方向に流れかかるとすると、所謂流體の平面運動が起る。従つて吾々は支柱軸に直角な任意の一平面を代表に撰び、その内の運動の状態を論ずればよいこととなる。今支柱軸を z -軸の方向にとり、流體の流れの方向を x -軸の方向と定む。又流體の運動を渦なきもの (irrotational) と假定すれば、次の關係式が成立する。

(1) G. Fuhrmann, "Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen," Jahrbuch der Motorluftschiff-Studiengesellschaft. Bd. 5. (1911~12) S. 65.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0.$$

但し ϕ は流體運動の速度ポテンシャルとす、従つて任意の點の分速度 u, v は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

によりて與へられる。又 Ψ を以つて流函數 (stream function) とすれば

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

となり、流體の運動を渦なきものと假定せることにより

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

となる。 ϕ と Ψ の關係は明かに

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

であつて、之は複素函數 $w = \phi + i\Psi$ が複素變數 $z = x + iy$ の正則函數であるべき條件を示す、但し i は $\sqrt{-1}$ とす。故に

$$w = \phi + i\Psi = f(z), \quad z = x + iy$$

として、 $f(z)$ の適當な形を求むれば、直ちに ϕ 及 Ψ を定めることが出来る。

扱て

$$w = f(z) = c \ln z \dots \dots \dots 1)$$

なる函數を假定する、但し c は常數とす。然る時 $z = x + iy = re^{i\theta}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctang \frac{y}{x}$

なる故

$$w = \phi_1 + i\Psi_1 = c \ln r + ic\theta$$

又は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= c \ln r = \frac{1}{2} c \ln(x^2 + y^2) \\ \Psi_1 &= c\theta = c \arctang \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

ϕ_1 は流體運動の速度ポテンシャルを示すが故に

$$u_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{cx}{x^2 + y^2}$$

$$v_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \frac{cy}{x^2 + y^2}$$

となる。是等は函数(1)によりて與へられる流體運動の任意の點の分速度となる。更に流體の法線分速度を u_r , 切線分速度を u_θ とすれば ϕ_1 の式から

$$u_r = \frac{c}{r}, \quad u_\theta = 0$$

となる。是の結果から函数(1)によりて與へられる運動は法線方向の分速度のみを有し、切線方向の分速度は零であることがわかる。又 u_r は $r=0$ の時に ∞ となり、 $r=\infty$ の時に零となる。この様な運動は流體の平面運動に於ける涌出口 (source) であつて、若し c が負數なれば逆に吸込口 (sink) となる。 $\psi_1 = \text{const.}$ なる曲線は流體の流れの道筋を與へるものであつて、(2) 式から、此の場合には $\psi_1 = \text{const.}$ は一點からの放射狀直線となることがわかる。云ふ迄もなく $\phi_1 = \text{const.}$ なる曲線は一點を中心とする多くの同心圓である。

此の如き涌出口に一定の方向に一樣な速度をもてる流れを重ねたと想像する。然る時は流體の凡ての部分は、二つの運動の合成速度の方向に運動す。今 x -軸の方向を一樣な流れの方向とすれば、此の時の速度ポテンシャル ϕ_0 は

$$\phi_0 = ax$$

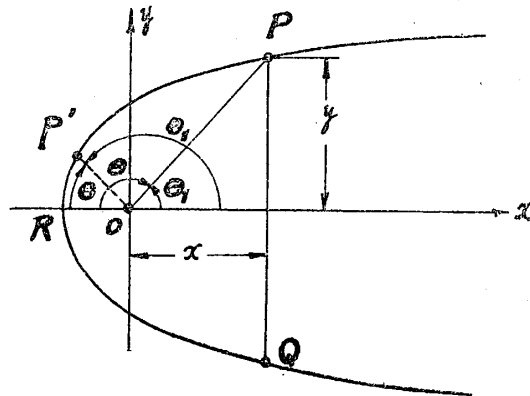
で與へられる。但し a は常數であつて $u=a, v=0$ となる。故に a は一樣な流れの速度を示す。組合わされた流體運動の速度ポテンシャルは

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 = ax + c \ln r \dots\dots\dots 3)$$

である。是より分速度 u, v を求めると

$$\left. \begin{aligned} u &= a + \frac{cx}{r^2} \\ v &= \frac{cy}{r^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 4)$$

扱て涌出口から放射狀に流れ出る流體は、一樣な流れのために一方に押し流されるが故に、二種の流れの間に境界面が出来、涌出口から流れ出た流體は凡てその境界面内に包まれ、一樣な流れは常にその境界面の外側を流れるやうになる。今此の境界面を PQR と假定す。その上の



第一圖

一點 P (x, y) を通り y-軸に平行な断面 PQ を過る單位時間の流體の量 Q (xy-面に直角な厚さを 1 とす) は

$$Q = \rho \int_{-y}^y u dy = \rho \int_{-y}^y \left(a + \frac{cx}{r^2} \right) dy \dots \dots \dots (5)$$

によつて與へられる。Q は x > 0 の場合には涌出口 O から流れ出る單位時間の流體の量 Q₁ に等しく、x < 0 の場合には零となる。而して Q₁ は直ちに

$$Q_1 = \rho \oint u_r ds = \rho \int_0^{2\pi} \frac{c}{r} r d\theta = 2\pi c \rho$$

となるが故に、(5) 式と組み合わせると

$$\begin{aligned} \rho \int_{-y}^y \left(a + \frac{cx}{r^2} \right) dy &= 2\pi c \rho, \quad x > 0 \\ &= 0, \quad x < 0. \end{aligned}$$

是を積分すると、x > 0 なる時は

$$ay + c \operatorname{arctang} \frac{y}{x} = \pi c$$

故に

$$\begin{aligned} y &= \frac{c}{a} (\pi - \theta_1) \\ x &= \frac{c}{a} \frac{\pi - \theta_1}{\operatorname{tang} \theta_1} \quad (\text{第一圖}) \end{aligned}$$

是等の式に於て $\theta = \pi - \theta_1$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{c}{a} \theta \\ x &= -\frac{c}{a} \frac{\theta}{\operatorname{tang} \theta} \end{aligned} \right\} x > 0$$

となる。但し θ は $\frac{\pi}{2}$ と π の間にある。x < 0 の場合には P' 點について考ふれば

$$ay - c \operatorname{arctang} \frac{y}{x'} = 0, \quad x = -x', \quad x' > 0.$$

又は

$$y = \frac{c}{a} \theta$$

$$x = -\frac{c}{a} \frac{\theta}{\tan \theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

となる。故に境界面の方程式は次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{c}{a} \theta \\ x &= -\frac{c}{a} \frac{\theta}{\tan \theta}, \quad 0 < \theta < \pi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 5)$$

此の式を用ひて、直ちに境界面の座標を計算することが出来る。(5)式から明かとなることは境界面の形は $\frac{c}{a}$ の値によりてのみ變ることである。故に $\frac{c}{a}$ に色々な値を入れて、變つた形の境界面を求めることが出来る。茲には一例として $\frac{c}{a} = 1$ と假定して x, y の値を計算し、これを第一表に與へ、その値を更に第二圖に圖示した。此の如くして得たる境界面の表面に沿へる壓力はベルヌリの定理を用ひて求めることが出来る。即

$$\frac{p}{q_0} = 1 - \left(\frac{V}{a} \right)^2$$

($q_0 = \frac{1}{2} \rho a^2$, $V =$ 境界面に於ける合成速度) なる故 (4) 式から

$$V^2 = u^2 + v^2 = a^2 + \frac{2acx}{r^2} + \frac{c^2}{r^2}$$

又は
$$\left(\frac{V}{a} \right)^2 = 1 + 2 \frac{c}{a} \frac{x}{r^2} + \left(\frac{c}{a} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

故に
$$\frac{p}{q_0} = -2 \frac{c}{a} \frac{x}{r^2} + \left(\frac{c}{a} \right)^2 \frac{1}{r^2}$$

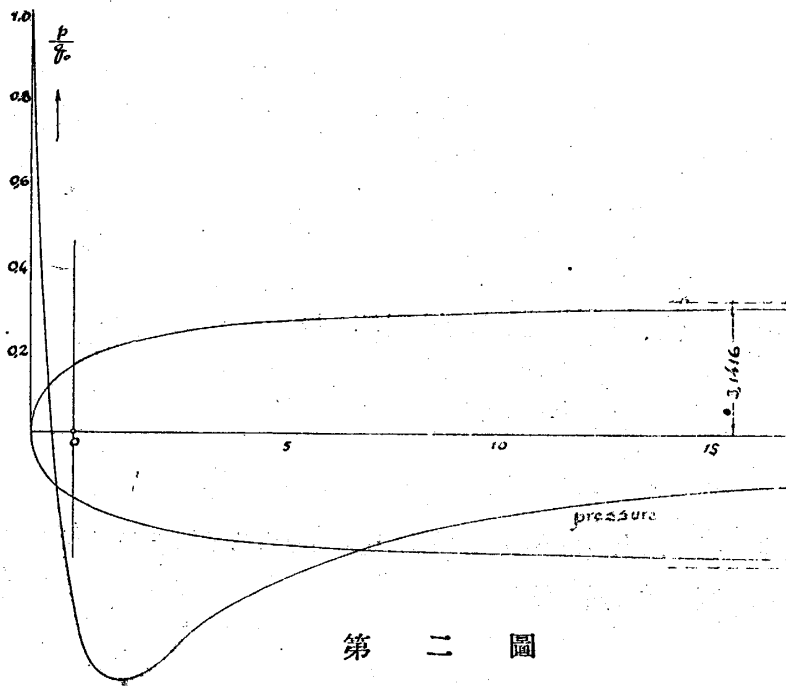
此の式の x, y に (5) 式の値を入れると、簡単な計算の後

$$\frac{p}{q_0} = \frac{\theta \sin 2\theta - \sin^2 \theta}{\theta^2} \dots\dots\dots 6)$$

となる。この式によりて境界面上の任意の點に於ける壓力を求めることが出来る。計算の結果は第一表に與へ、且つ第二圖に圖示する通りである。

第一表

θ		y	x	$\frac{p}{q_0}$
度	ラジヤン			
0°	0	0	-1,0000	1,0000
5°	,0873	,0873	-,9977	,9947
10°	,1745	,1745	-,9893	,9737
15°	,2618	,2618	-,9772	,9328
20°	,3491	,3491	-,9591	,8811
30°	,5236	,5236	-,9068	,7421
45°	,7854	,7854	-,7854	,4630
60°	1,0472	1,0472	-,6046	,1431
75°	1,3090	1,3090	-,3507	-,1625
90°	1,5708	1,5708	0	-,4052
105°	1,8326	1,8326	,4910	-,5504
120°	2,0944	2,0944	1,2091	-,5848
135°	2,3562	2,3562	2,3562	-,5146
150°	2,6180	2,6180	4,5341	-,3673
155°	2,7053	2,7053	5,8012	-,3076
160°	2,7925	2,7925	7,6717	-,2451
165°	2,8798	2,8798	10,7491	-,1817
170°	2,9671	2,9671	16,8298	-,1187
180°	3,1416	3,1416	∞	0



第二圖

扱て次ぎには上述の境界面及びその内外の流線を求める圖式解法に就いて述べる。この方法は G. Fuhrmann が航空船の模型を求むるに用ひたものであつて、支柱又はリボン線の外形を定むるにも同じ方法によるのが最も便利である。この目的のためには涌出口の流函數を平面内の各點について計算して置く必要がある。此の場合の流函數 Ψ_1 は

$$\Psi_1 = \int_{-y}^y u_1 dy = \int_{-y}^y \frac{cx}{r^2} dy = 2c \operatorname{arctang} \frac{y}{x}$$

又は之を變形して

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{y}{x} \dots\dots\dots 7)$$

π にて兩邊を割つたのは結果にあらはれる數字の形を都合よくするためである。 $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ を x, y の種々なる値に對して計意したものは第二表に之を示す。次ぎに一樣な流れの流函數 Ψ_0 は

$$\frac{\Psi_0}{\pi c} = 2 \frac{a}{\pi c} y \dots\dots\dots 8)$$

であるから、此の兩者を組合せると

$$\frac{\Psi}{\pi c} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + 2 \frac{a}{\pi c} y \dots\dots\dots 9)$$

第 二 表

一點に於ける涌出口の $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ の値

$x \backslash y$	0	,1	,2	,3	,4	,5	,6	,7	,8	,9	1,0	1,1	1,2	1,3
0	不定	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
,1	0	,5000	,7044	,7958	,8444	,8742	,8950	,9099	,9196	,9300	,9376	,9430	,9480	,9520
,2	0	,2951	,5000	,6259	,7048	,7578	,7952	,8230	,8444	,8612	,8742	,8861	,8954	,9040
,3	0	,2047	,3745	,5000	,5900	,6577	,7015	,7422	,7719	,7958	,8150	,8310	,8448	,8564
,4	0	,1559	,2951	,4098	,5000	,5720	,6259	,6690	,7044	,7338	,7578	,7786	,7960	,8104
,5	0	,1257	,2429	,3441	,4298	,5000	,5579	,6052	,6444	,6768	,7044	,7288	,7492	,7670
,6	0	,1052	,2047	,2951	,3745	,4424	,5000	,5492	,5900	,6261	,6577	,6822	,7051	,7250
,8	0	,0792	,1559	,2284	,2951	,3557	,4098	,4577	,5000	,5378	,5720	,6000	,6260	,6495
1,0	0	,0635	,1257	,1855	,2429	,2951	,3441	,3895	,4298	,4668	,5000	,5304	,5580	,5829
1,2	0	,0529	,1052	,1559	,2047	,2512	,2951	,3315	,3745	,4098	,4424	,4744	,5000	,5256
1,4	0	,0454	,0904	,1343	,1772	,2188	,2577	,2951	,3310	,3639	,3951	,4242	,4515	,4768
1,6	0	,0397	,0792	,1181	,1559	,1927	,2284	,2619	,2951	,3264	,3557	,3838	,4098	,4347
1,8	0	,0353	,0704	,1052	,1392	,1725	,2047	,2361	,2663	,2951	,3260	,3496	,3745	,3984
2,0	0	,0318	,0635	,0948	,1257	,1559	,1855	,2143	,2429	,2692	,2951	,3208	,3441	,3673
2,5	0	,0255	,0508	,0761	,1011	,1257	,1499	,1737	,1972	,2200	,2430	,2640	,2850	,3054
3,0	0	,0212	,0424	,0635	,0844	,1052	,1257	,1459	,1659	,1855	,2047	,2238	,2429	,2604

となる。境界面に對しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{\pi} \arctang \frac{y}{x} + 2 \frac{a}{\pi c} y &= 2, & x > 0 \\ &= 0, & x < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 10)$$

なる關係が成立する。(9) 式を圖式方法で解くには、先づ第二表に與へられた $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ の値を第三圖

の如くに圖示す。第三圖に於いては縦軸に $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ を、横軸に x をとり、各曲線は $y=0.05, 0.1, 0.2, \dots$

に相當するものである。次ぎに此の圖から x の一定値に對し、 y が種々變つた場合の $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ の値を讀

みとり

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = 2 - \frac{2}{\pi} \arctang \frac{y}{x}$$

なる曲線を作る。この式は (10) 式を變形して

$$2 \frac{a}{\pi c} y = 2 - \frac{2}{\pi} \arctang \frac{y}{x}, \quad x > 0$$

とした時の右邊に相當す、第四圖の上半分の曲線は此の如くして得られたものである。第四圖に於いては縦軸に $\frac{\Psi}{\pi c}$ をとり横軸に y をとつた。而して各曲線は $x=0.05, 0.1, 0.2, \dots$, を示す。第四

圖の下半分は (10) 式の $x < 0$ の場合を變形し

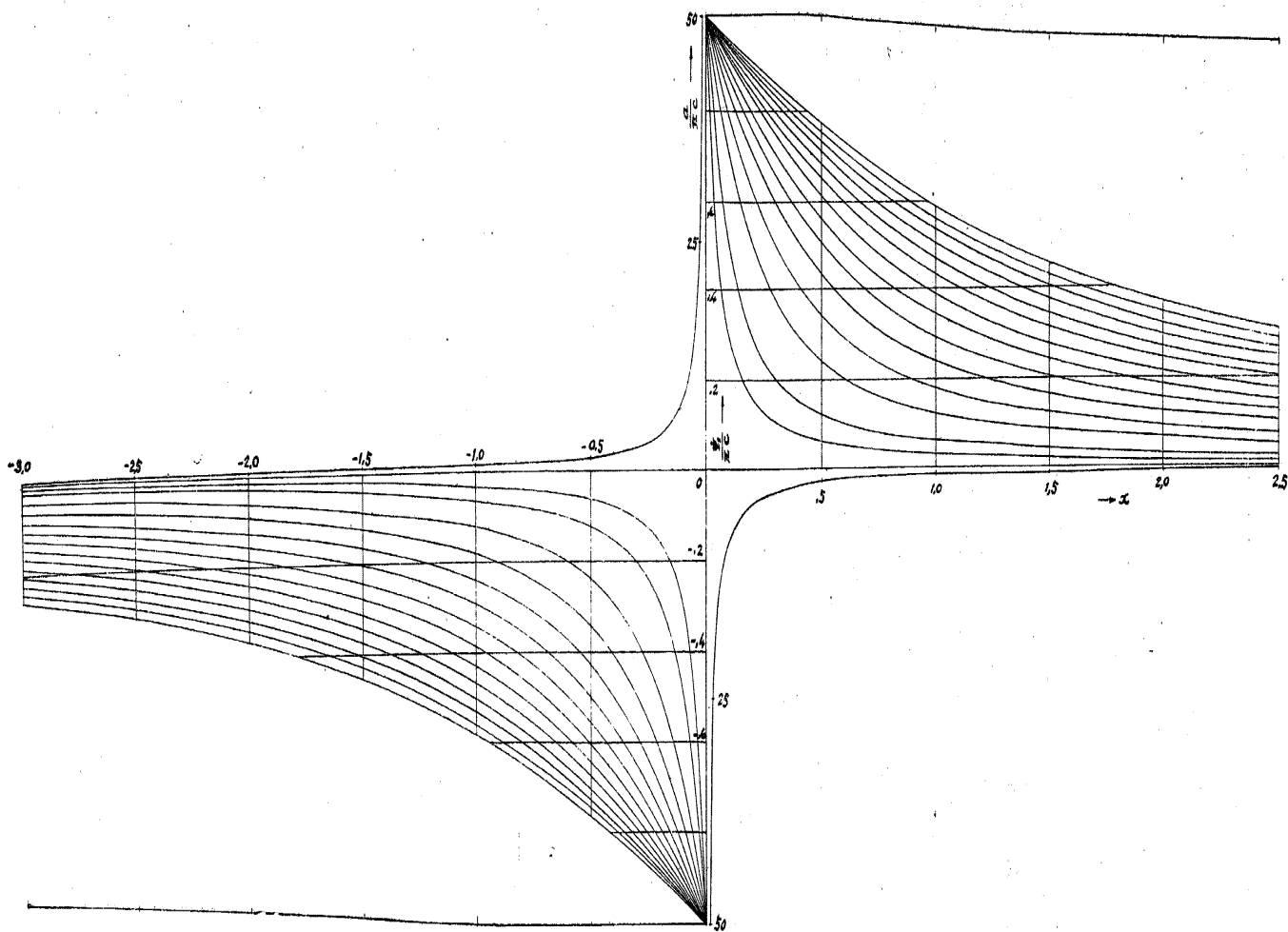
$$2 \frac{a}{\pi c} y = -\frac{2}{\pi} \arctang \frac{y}{x}, \quad x < 0$$

とした時の右邊に相當するものである。此の様な曲線上に $\frac{\Psi_0}{\pi c} = 2 \frac{a}{\pi c} y$ なる直線をかさねると、直

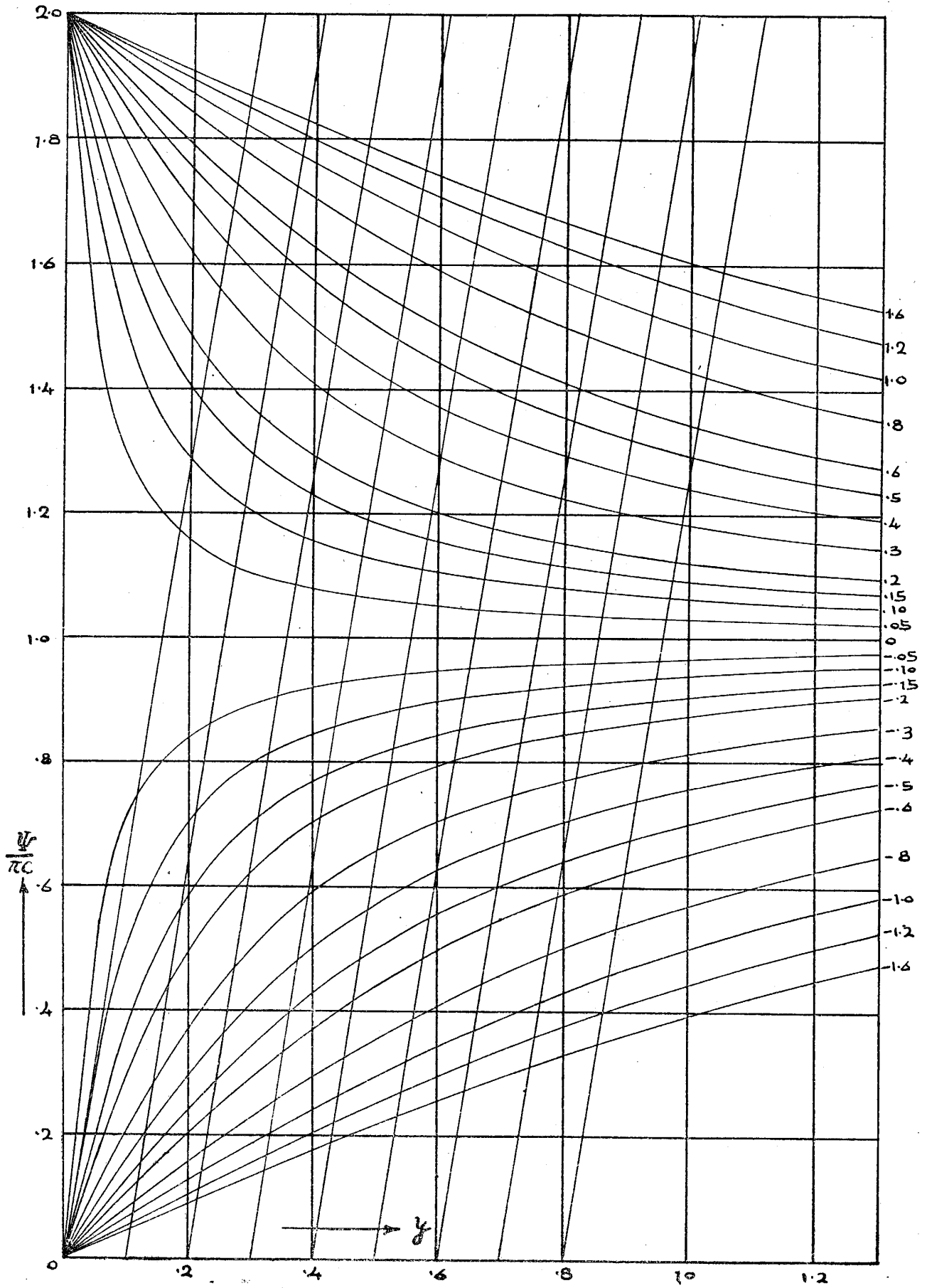
線と曲線の交點は (10) 式を満足し、從つて、涌出流と一樣な流れとの境界面の座標點を與へる。境界面の外の流れに對しては $\frac{\Psi}{\pi c} > 2$ なる故 $\frac{\Psi_0}{\pi c} = 2 \frac{a}{\pi c} y$ なる直線を右方にずらした時、直線と曲線の

交點は求むる流線の座標點を與へる。逆に境界面内の流れに對しては $\frac{\Psi}{\pi c} < 2$ なる故同じ直線を左方

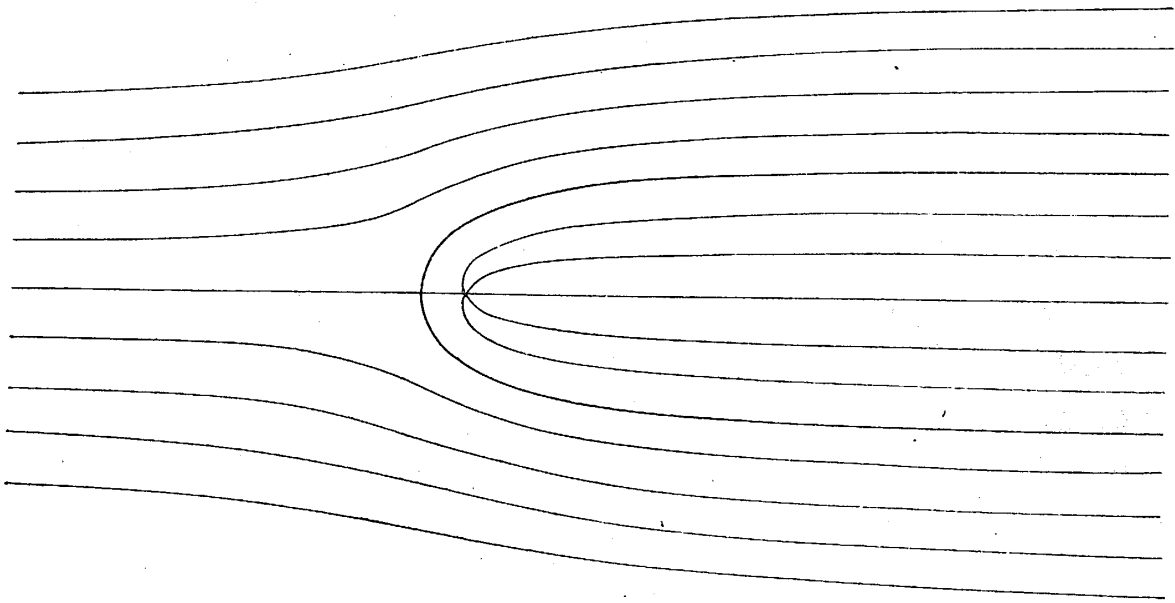
にずらし、直線と曲線の交點を求むればよい。此の様な方法によりて求めた流線の一つは第五圖に示す通りである。かくして得たる境界面内を一つの固體に置き換へたとすれば、第二圖の如き物體の近くの流れの状態を知ることが出来る。境界面の頂點を求むることは第四圖からは幾分困難である。併し此の點に於いては速度が零であることを利用して此の困難をさけることが出来る。即



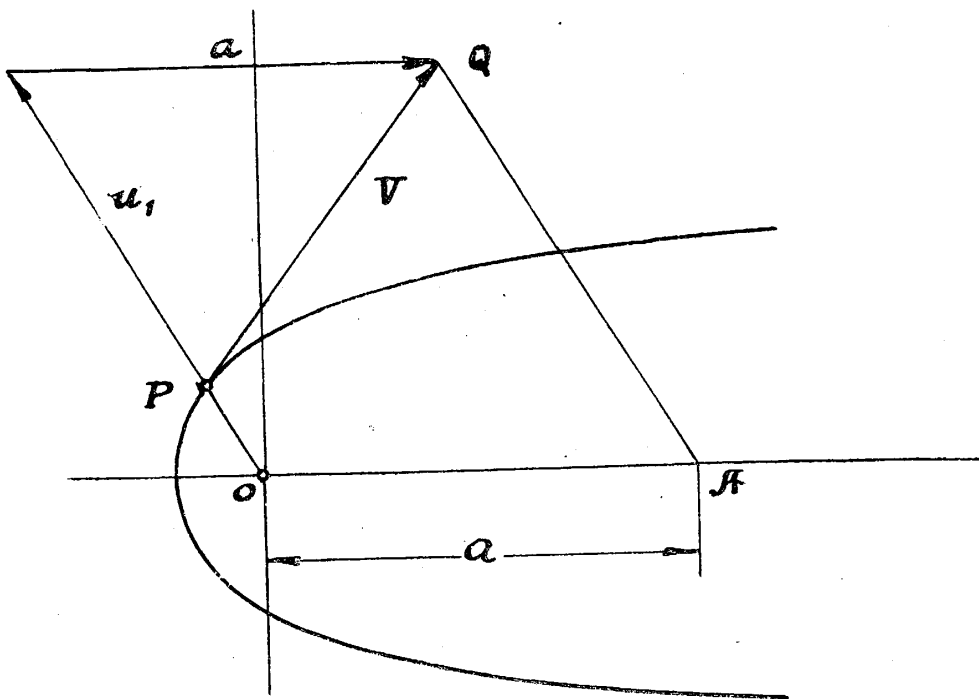
第 三 圖



第四圖



第五圖



第六圖

$$u = \left(a + \frac{cx}{r^2} \right)_{y=0} = 0$$

故に
$$-\frac{a}{\pi c} = \frac{1}{\pi x}$$

従つて $\frac{1}{\pi x}$ なる曲線を作り、その上に所要の $\frac{a}{\pi c}$ の値をよみとればよい。第三圖には $\frac{a}{\pi c}$ の曲線をも記入して置いた。

最後に境界面に沿へる合成速度及び壓力を圖で求めるには第六圖に示す方法による、即任意の點 P に於ける合成速度は a と u_1 からなつてゐるもので、合成速度 V は境界面に切線となるべきであるから、先づ x -軸上に a に等しき長さ OA をとり、A より OP に平行線 AQ を引き、P に於ける切線との交點を Q とすれば、PQ は求むる合成速度 V となる、 V がわかれば

$$\frac{p}{q_0} = 1 - \left(\frac{V}{a} \right)^2$$

によりて、任意の點の壓力を求めることが出来る。

2. 涌出口の流函數の計算

第一節に述べた方法によつて支柱又はリボン線の外形を求むるには、先づ簡単な形の涌出口を想像し、それによつて生ずる流函數を計算することが必要である。

(a) 涌出口の強さが直線上に一樣に分布せられてゐる場合、

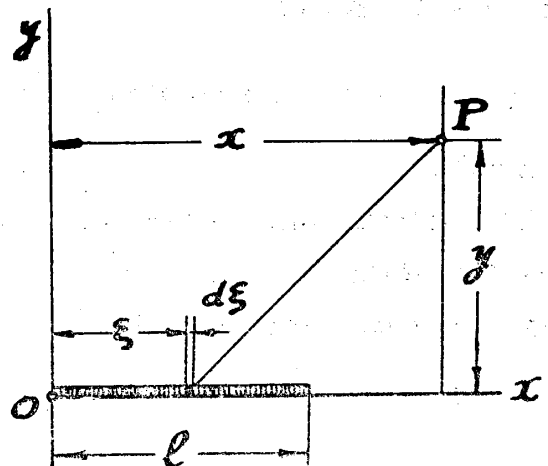
長さ l なる直線上 (第七圖) に涌出口が一樣に分布せられてゐるものとす。長さ $d\xi$ なる涌出口から流れ出る流體の量を $\frac{2\pi c}{l} d\xi$ とすれば、全流出量は

$$\int_0^l \frac{2\pi c}{l} d\xi = 2\pi c$$

となる、但し c は常數とす。此の量は第一節で求めた一點に於ける涌出口の流出量に等し。扱て $\frac{c}{l} d\xi$ なる強さの涌出口が任意の點 $P(x, y)$ に生ずる速度ポテンシャルは

$$d\phi_1 = \frac{c}{l} d\xi \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$$

である。従つて x 方向の分速度を du_1 とすれば



第七圖

$$du_1 = \frac{\partial(d\Phi_1)}{\partial x} = \frac{c}{l} d\xi \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

是より直ちに

$$\begin{aligned} d\Psi_1 &= \int_{-y}^y du_1 \cdot dy = \frac{c}{l} d\xi \int_{-y}^y \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} dy = \\ &= \frac{2c}{l} \operatorname{arctang} \frac{y}{x-\xi} d\xi \end{aligned}$$

を得。之を $\xi=0$ から $\xi=l$ まで積分すれば、想像せる涌出口の任意の點に於ける流函數を求めることが出来る。即

$$\Psi_1 = \frac{2c}{l} \int_0^l \operatorname{arctang} \frac{y}{x-\xi} d\xi$$

此の式に於いて z を $\frac{y}{x-\xi}$ の代りに入れ、且つ便宜上兩邊を π で割れば

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{2}{\pi l} \int_{\frac{y}{x}}^{\frac{y}{x-l}} \operatorname{arctang} z \cdot \frac{y}{z^2} dz.$$

故に積分して、簡單化すれば最後に次の式を得。

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{2y}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{y} \operatorname{arctang} \frac{y}{x} - \frac{x-1}{y} \operatorname{arctang} \frac{y}{x-1} \right] \dots\dots\dots 11)$$

但し l を 1 と假定す。

此の式について x, y の種々なる値に對して $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ を計算すれば第三表に示すが如き結果を求めることが出来る。

圖式解法を行ふ都合上、第一節の場合と同様に支柱又はリボン線の頂點を見出すに用ひる曲線を計算して置く必要がある。云ふ迄もなく頂點は x -軸上にあり、その點に於いては流出口によりて起る速度と一様な流れの速度とは相等し。従つて

$$du_1 = \frac{c}{l} d\xi \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

を用ひて

$$\frac{u_1}{\pi c} = \frac{1}{\pi l} \int_0^l \frac{(x-\xi)d\xi}{(x-l)^2 + y^2} = -\frac{1}{\pi l} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(x-l)^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

となる。更に $y=0, l=1$ とすれば

$$\frac{u_1}{\pi c} = -\frac{1}{\pi} \ln \left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad x < 0 \dots\dots\dots 12)$$

11) 12) の兩式を用ひて、茲に述べた様な涌出口を一樣な流れと組合せた場合の問題を完全に解くことが出来る。

11) 式は $x > 1$ の場合に用ひられるものであつて $x < 1$ の場合には同様な計算方法によりて

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{2y}{\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{x}{y} \arctang \frac{y}{x} - \frac{1-x}{y} \arctang \frac{y}{1-x} \right] \dots\dots\dots 11 a)$$

を求めることが出来る。但し $x < 1$ とす。11 a) 式に於いて $x < 0.5$ の場合の計算は、涌出口の對稱の性質により、之を行ふ必要はない。

(b) 涌出口の強さが一點からの距離に比例して大きくなつてゐる場合、長さ $d\xi$ なる涌出口(第八圖)の流出量を $2\pi k \xi d\xi$ とすれば、全流出量は

$$2\pi k \int_0^l \xi d\xi = 2\pi k \cdot \frac{l^2}{2}$$

となる、之を一點に於ける涌出量に等しとすれば

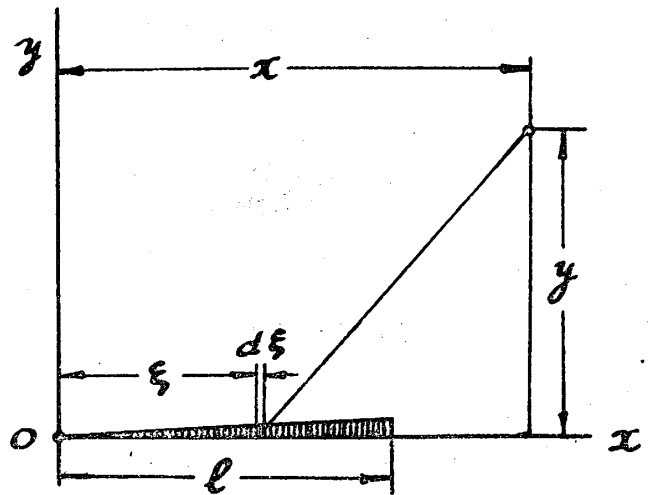
$$2\pi k \frac{l^2}{2} = 2\pi c$$

又は $k = \frac{2c}{l^2}$

となる。従つて長さ $d\xi$ なる涌出口の單位時間の流出量は $\frac{4\pi c}{l^2} \xi d\xi$ となる。此の涌出口による速度ポテンシャルは

$$d\Phi_1 = \frac{2c}{l^2} \xi d\xi \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$$

であつて、速度は



第八圖

$$du_1 = \frac{\partial(d\Phi_1)}{\partial x} = \frac{2c}{l^2} \xi d\xi \cdot \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

従つて

$$\frac{d\Psi_1}{\pi c} = \frac{2\xi d\xi}{\pi l^2} \int_{-y}^y \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + y^2} = \frac{4\xi d\xi}{\pi l^2} \arctang \frac{y}{x-\xi}$$

又は

$$\frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{4}{\pi l^2} \int_0^y \arctang \frac{y}{x-\xi} \cdot \xi d\xi$$

此の最後の式を積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{4xy}{\pi l^2} & \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(x-l)^2 + y^2} + \frac{x}{y} \arctang \frac{y}{x} - \frac{x-l}{y} \arctang \frac{y}{x-l} \right\} \\ & - \frac{2y^2}{\pi l^2} \left\{ \frac{l}{y} + \frac{x^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{x} - \frac{(x-l)^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{x-l} \right\} \end{aligned}$$

又は $l=1$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{4xy}{\pi} & \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{y} \arctang \frac{y}{x} - \frac{x-1}{y} \arctang \frac{y}{x-1} \right\} \\ & - \frac{2y^2}{\pi} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{x^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{x} - \frac{(x-1)^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{x-1} \right\} \dots\dots\dots 13) \end{aligned}$$

13) 式は $x > 1$ の場合について求めたものであつて、 $x < 0$ 、及び $0 < x < 1$ な場合には之と多少異つた形となる。計算の結果を示すと次の様になる。

$0 < x < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1}{\pi c} = \frac{4xy}{\pi} & \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} + \frac{x}{y} \arctang \frac{y}{x} - \frac{1-x}{y} \arctang \frac{y}{1-x} \right\} \\ & + \frac{2y^2}{\pi} \left\{ \pi - \frac{x^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{x} - \frac{(1-x)^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{1-x} - \frac{1}{y} \right\} \dots\dots\dots 13 a) \end{aligned}$$

及び

$x < 0$:

$$\frac{\psi_1}{\pi c} = \frac{4xy}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} - \frac{x}{y} \arctang \frac{y}{-x} - \frac{1-x}{y} \arctang \frac{y}{1-x} \right\} + \frac{2y^2}{\pi} \left\{ \frac{x^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{-x} - \frac{(1-x)^2 + y^2}{y^2} \arctang \frac{y}{1-x} - \frac{1}{y} \right\} \dots\dots\dots 13 b)$$

$x=0$ の場合には (13 a) と (13 b) とは同じ式となり、 $x=1$ の場合には (13) と (13 a) とは同じ式となる。(13) 式の x, y に種々なる数値を與へて、 $\frac{\psi_1}{\pi c}$ を計算すれば第四表に示すやうな結果が得られる。

更に支柱又はリボン線の頂點を見出すに用ひる曲線を計算して置く必要がある。これは前の場合と同様にして

$$\frac{u_1}{\pi c} = \frac{2}{\pi} \left\{ x \ln \frac{x}{x-1} - 1 \right\}, \quad x > 1 \dots\dots\dots 14)$$

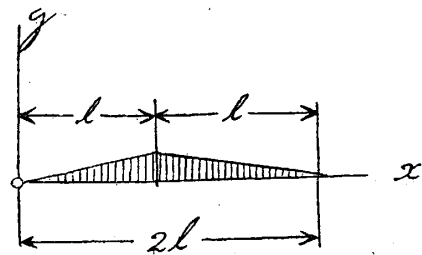
及び

$$\frac{u_1}{\pi c} = -\frac{2}{\pi} \left\{ x \ln \frac{1-x}{-x} + 1 \right\}, \quad x < 0 \dots\dots\dots 14 a)$$



となる、但し $l=1$ と假定す。

以上に求めた二種類の涌出口の他に更に簡単な涌出口として第九圖に示す様なものの計算も容易に行ふことが出来るが、計算の結果を應用して支柱又はリボン線の形を求めたものが餘り實用上よい形でなかつたから、茲には之を省略する。第九圖の如き涌出口の流函數は第八圖の如き涌出口の流函數の計算の結果から、圖によりて之を求めることも出来る。



第九圖

(11) 式乃至 (14) 式で與へられた結果に於いて c の値を負數とすれば吸込口の流函數となることは云ふまでもないことである。故に涌出口と吸込口を組合せて支柱又はリボン線の外形を求むるには、計算上非常に好都合である。

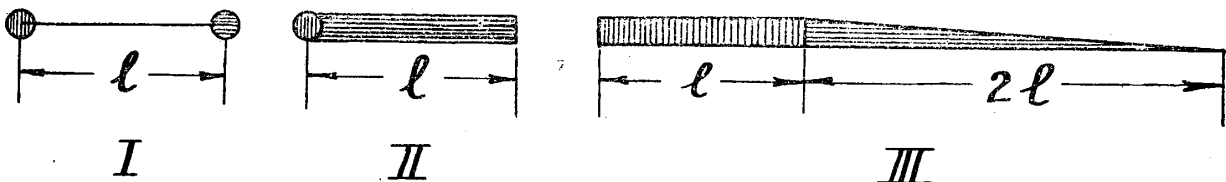
第三表

直線上に一樣に分布せられた涌出口の $\frac{\psi_1}{\pi c}$ の値

$x \backslash y$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.6	0.0128	0.0255	0.0481	0.0694	0.0865	0.1006	0.1121	0.1204	0.1290	0.1356	0.1408	0.1462	0.1500	0.1530	0.1560
0.7	0.0268	0.0529	0.1011	0.1420	0.1758	0.2033	0.2255	0.2441	0.2592	0.2724	0.2787	0.2915	0.3005	0.3072	0.3132
0.8	0.0438	0.0859	0.1609	0.2226	0.2713	0.3115	0.3435	0.3702	0.3921	0.4105	0.4265	0.4395	0.4515	0.4620	0.4717
0.9	0.0687	0.1316	0.2352	0.3144	0.3775	0.4272	0.4676	0.4945	0.5285	0.5518	0.5718	0.5887	0.6035	0.6170	0.6282
1.0	0.1274	0.2200	0.3331	0.4235	0.4955	0.5515	0.5978	0.6363	0.6690	0.6978	0.7205	0.7408	0.7583	0.7750	0.7890
1.1	0.0752	0.1444	0.2608	0.3459	0.4255	0.4865	0.5368	0.5780	0.6143	0.6458	0.6720	0.6952	0.7147	0.7292	0.7502
1.2	0.0567	0.1117	0.2121	0.2975	0.3699	0.4315	0.4825	0.5265	0.5650	0.5970	0.6275	0.6550	0.6753	0.6953	0.7132
1.4	0.0398	0.0791	0.1550	0.2250	0.2888	0.3479	0.3965	0.4411	0.4818	0.5165	0.5478	0.5758	0.6014	0.6243	0.6448
1.6	0.0312	0.0622	0.1229	0.1812	0.2356	0.2861	0.3330	0.3754	0.4145	0.4498	0.4818	0.5108	0.5386	0.5618	0.5834
1.8	0.0258	0.0515	0.1022	0.1514	0.2024	0.2438	0.2855	0.3250	0.3628	0.3978	0.4270	0.4563	0.4831	0.5079	0.5308
2.0	0.0222	0.0440	0.0877	0.1358	0.1709	0.2119	0.2495	0.2869	0.3208	0.3520	0.3819	0.4105	0.4364	0.4614	0.4844
2.5	0.0163	0.0325	0.0648	0.0968	0.1282	0.1590	0.1878	0.2179	0.2460	0.2693	0.3008	0.3234	0.3481	0.3712	0.3931
3.0	0.0129	0.0258	0.0516	0.0772	0.1022	0.1274	0.1520	0.1702	0.1982	0.2221	0.2446	0.2665	0.2899	0.3078	0.3276
3.5	0.0107	0.0214	0.0430	0.0640	0.0853	0.1060	0.1269	0.1474	0.1673	0.1879	0.2052	0.2233	0.2447	0.2692	0.2822
4.0	0.0092	0.0183	0.0366	0.0547	0.0732	0.0909	0.1067	0.1264	0.1489	0.1615	0.1781	0.1947	0.2092	0.2278	0.2459

3. 支柱外形の求め方

第一節に述べたやうな一點に於ける涌出口と一樣な流れとの組合せでは、二つの流れの境界面は第二圖に示すやうに決して閉ぢることがない。故に支柱又はリボン線の如き閉ぢた形のものを探むるには涌出口と一樣な流れとの組合せだけでは不充分であることが明かとなる。閉ぢた形の境界面を探むるためには二つの強さ相等しき涌出口と吸込口との組合せに更に一樣な流れを重ねなければならぬ。茲に求めた組合せは第十圖に示すが如き三つの場合がある。(I)は一點に於ける涌出口と一點に於

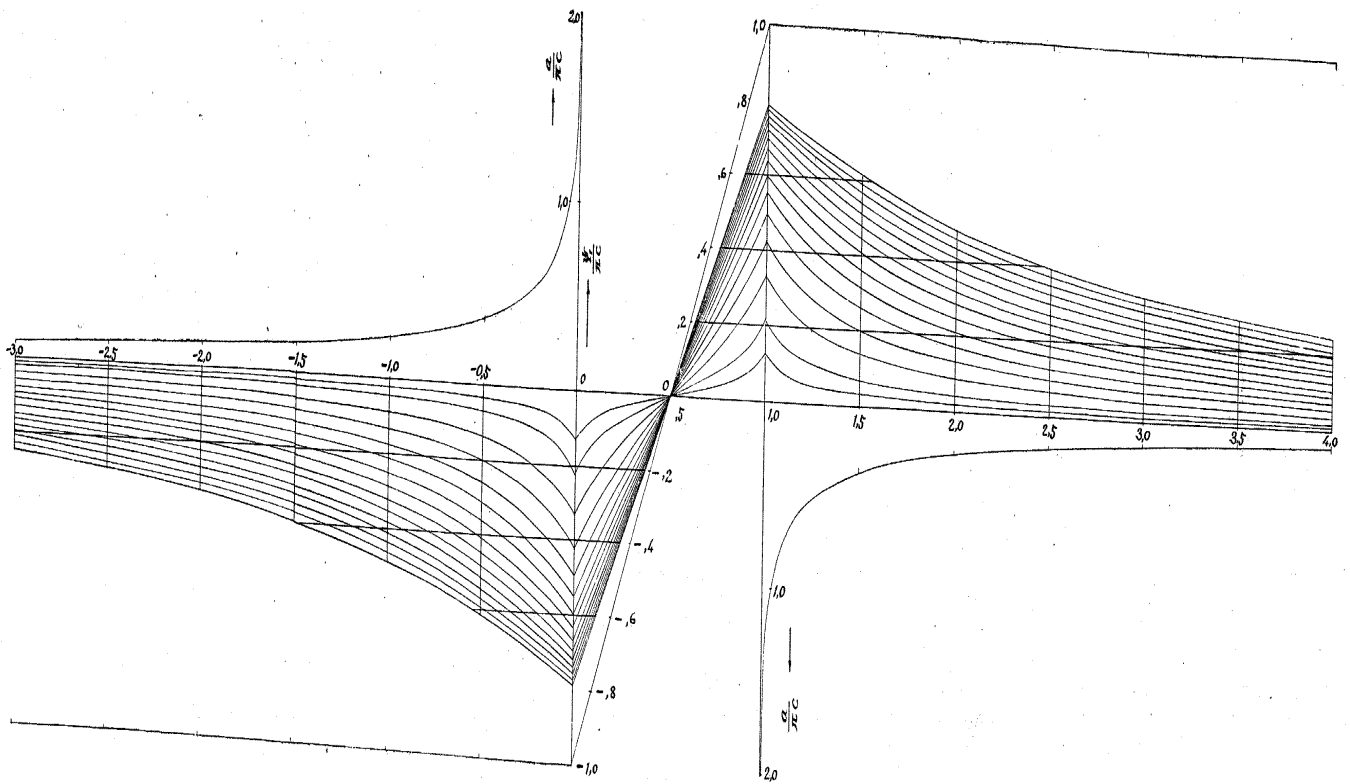


第十圖

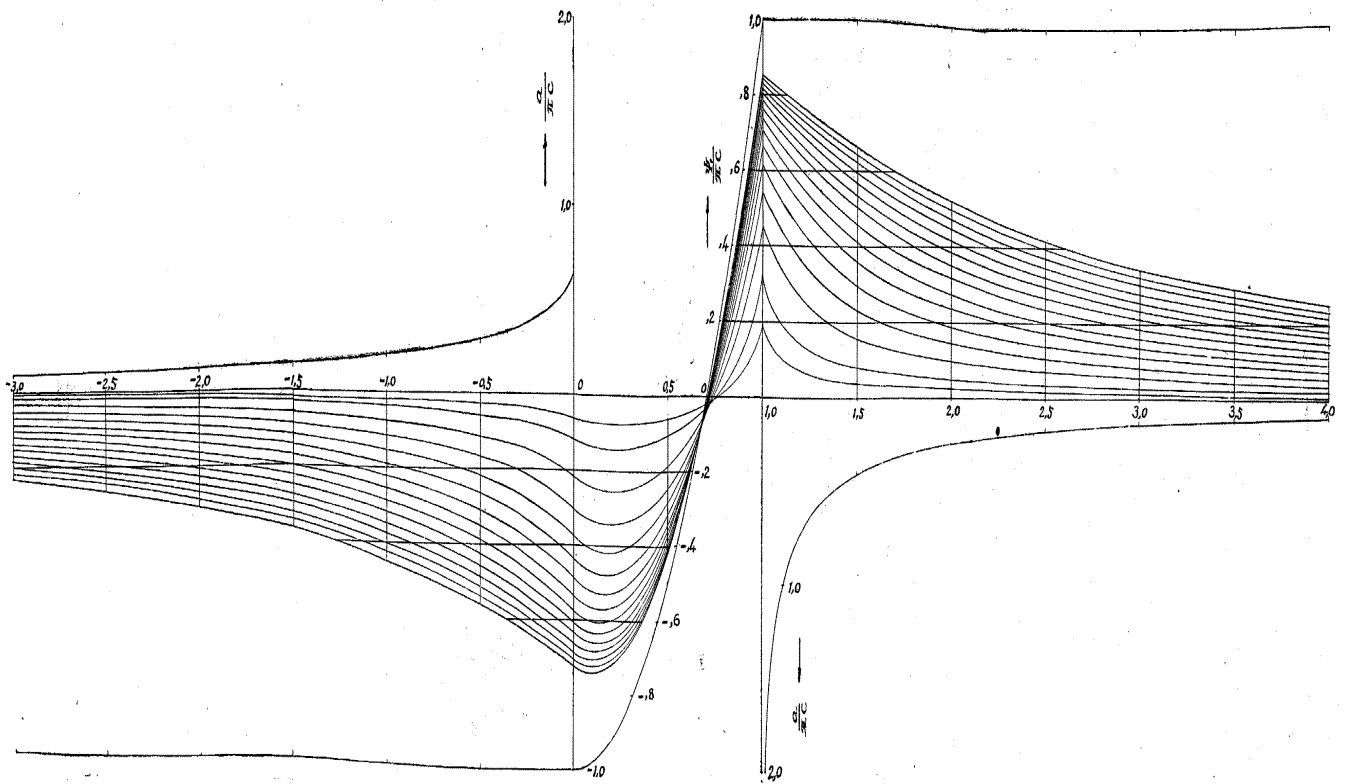
第 四 表

強さが距離に比例して増してをる涌出口の $\frac{\psi_1}{\pi\sigma}$ の値

$x \backslash y$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
-3.0	-0.0083	-0.0177	-0.0350	-0.0520	-0.0685	-0.0870	-0.1037	-0.1208	-0.1375	-0.1524	-0.1715	-0.1869	-0.2028	-0.2183	-0.2329
-2.5	-0.0103	-0.0205	-0.0395	-0.0603	-0.0800	-0.1006	-0.1196	-0.1371	-0.1533	-0.1773	-0.1969	-0.2141	-0.2293	-0.2459	-0.2662
-2.0	-0.0122	-0.0238	-0.0478	-0.0714	-0.0957	-0.1187	-0.1414	-0.1646	-0.1840	-0.2529	-0.2305	-0.2507	-0.2705	-0.2905	-0.3097
-1.5	-0.0148	-0.0298	-0.0593	-0.0888	-0.1173	-0.1462	-0.1755	-0.2015	-0.2279	-0.2658	-0.2787	-0.3016	-0.3248	-0.3464	-0.3682
-1.0	-0.0192	-0.0392	-0.0777	-0.1148	-0.1543	-0.1885	-0.2240	-0.2549	-0.2902	-0.3195	-0.3485	-0.3758	-0.4014	-0.4258	-0.4487
-0.8	-0.0224	-0.0446	-0.0885	-0.1322	-0.1739	-0.2138	-0.2528	-0.2893	-0.3218	-0.3561	-0.3867	-0.4149	-0.4418	-0.4665	-0.4912
-0.6	-0.0263	-0.0522	-0.1038	-0.1535	-0.2015	-0.2468	-0.2894	-0.3293	-0.3660	-0.4005	-0.4324	-0.4617	-0.4875	-0.5148	-0.5376
-0.4	-0.0317	-0.0633	-0.1250	-0.1839	-0.2392	-0.2900	-0.3391	-0.3807	-0.4192	-0.4555	-0.4883	-0.5177	-0.5444	-0.5687	-0.5910
-0.2	-0.0408	-0.0809	-0.1541	-0.2293	-0.2934	-0.3507	-0.4022	-0.4478	-0.4881	-0.5243	-0.5557	-0.5881	-0.6095	-0.6324	-0.6529
-0.1	-0.0482	-0.0952	-0.1831	-0.2614	-0.3304	-0.3902	-0.4426	-0.4885	-0.5285	-0.5635	-0.5939	-0.6217	-0.6460	-0.6676	-0.6868
0	-0.0612	-0.1178	-0.2180	-0.3032	-0.3765	-0.4372	-0.4898	-0.5350	-0.5740	-0.6074	-0.6366	-0.6621	-0.6848	-0.7046	-0.7226
0.1	-0.0730	-0.1377	-0.2480	-0.3377	-0.4119	-0.4733	-0.5246	-0.5679	-0.6042	-0.6355	-0.6629	-0.6859	-0.7061	-0.7241	-0.7401
0.2	-0.0765	-0.1443	-0.2578	-0.3431	-0.4203	-0.4791	-0.5271	-0.5669	-0.6001	-0.6281	-0.6520	-0.6724	-0.6903	-0.7055	-0.7199
0.3	-0.0750	-0.1411	-0.2506	-0.3357	-0.4025	-0.4555	-0.4979	-0.5326	-0.5610	-0.5850	-0.6023	-0.6216	-0.6371	-0.6493	-0.6606
0.4	-0.0691	-0.1295	-0.2268	-0.3017	-0.3575	-0.4025	-0.4416	-0.4637	-0.4867	-0.5052	-0.5202	-0.5340	-0.5449	-0.5567	-0.5625
0.5	-0.0589	-0.1090	-0.1882	-0.2449	-0.2870	-0.3183	-0.3424	-0.3613	-0.3763	-0.3886	-0.3988	-0.4073	-0.4144	-0.4206	-0.4259
0.6	-0.0435	-0.0785	-0.1306	-0.1629	-0.1845	-0.2013	-0.2174	-0.2229	-0.2287	-0.2340	-0.2386	-0.2416	-0.2449	-0.2493	-0.2500
0.7	-0.0214	-0.0353	-0.0484	-0.0517	-0.0509	-0.0489	-0.0469	-0.0444	-0.0426	-0.0402	-0.0388	-0.0379	-0.0361	-0.0349	-0.0342
0.8	0.0111	0.0276	0.0641	0.0971	0.1224	0.1437	0.1599	0.1735	0.1841	0.1929	0.2010	0.2066	0.2127	0.2181	0.2235
0.9	0.0644	0.1255	0.2224	0.2911	0.3431	0.3811	0.4106	0.4335	0.4528	0.4681	0.4807	0.4915	0.5009	0.5099	0.5164
1.0	0.1936	0.3222	0.4482	0.5438	0.6146	0.6658	0.7058	0.7376	0.7640	0.7883	0.8044	0.8195	0.8318	0.8455	0.8554
1.1	0.1022	0.1936	0.3385	0.4423	0.5207	0.5828	0.6310	0.6676	0.7001	0.7281	0.7501	0.7687	0.7834	0.7977	0.8136
1.2	0.0724	0.1425	0.2661	0.3657	0.4464	0.5132	0.5628	0.6032	0.6419	0.6699	0.6993	0.7219	0.7411	0.7583	0.7735
1.4	0.0479	0.0949	0.1850	0.2661	0.3384	0.4058	0.4557	0.5015	0.5444	0.5775	0.6073	0.6339	0.6584	0.6799	0.6986
1.6	0.0361	0.0722	0.1420	0.2089	0.2697	0.3254	0.3766	0.4215	0.4630	0.4991	0.5321	0.5599	0.5897	0.6098	0.6292
1.8	0.0292	0.0584	0.1159	0.1706	0.2235	0.2738	0.3182	0.3592	0.4038	0.4350	0.4673	0.4977	0.5244	0.5493	0.5724
2.0	0.0252	0.0488	0.0978	0.1449	0.1875	0.2353	0.2750	0.3189	0.3514	0.3845	0.4153	0.4452	0.4714	0.4970	0.5201
2.5	0.0178	0.0353	0.0703	0.1048	0.1391	0.1718	0.2001	0.2343	0.2642	0.2943	0.3229	0.3477	0.3714	0.3961	0.4180
3.0	0.0136	0.0278	0.0554	0.0830	0.1087	0.1362	0.1626	0.1875	0.2151	0.2354	0.2587	0.2824	0.3054	0.3251	0.3456
3.5	0.0111	0.0223	0.0465	0.0676	0.0906	0.1113	0.1342	0.1569	0.1764	0.1967	0.2135	0.2360	0.2565	0.2751	0.2935
4.0	0.0101	0.0189	0.0382	0.0574	0.0779	0.0948	0.1140	0.1321	0.1529	0.1696	0.1847	0.2025	0.2195	0.2373	0.2545



第十圖



第十一圖

ける吸込口の組合せで此の場合には左右上下對稱な境界面となる、(II) は一點に於ける涌出口と直線上に一様に分布せる吸込口との組合せであつて、支柱又はリボン線の外形に殆んど近い境界面となる、(III) は直線上に一様に分布せる涌出口と、距離に比例して強さが減少する吸込口との組合せであつて、實用上使用せられてゐる支柱の外形に殆んど同じものとなる。

扱て (II) 及び (III) の組合せを作る方法の準備として、第三表及び第四表の結果を圖示しなければならぬ。第十一圖は第三表を圖示したもので、第十二圖は第四表を圖示したものである。兩者共に第三圖の場合と同様に縦軸に $\frac{\Psi_1}{\pi c}$ の値を、横軸に x の値をとり、各曲線は $y = \text{const}$ に相當する。扱て便宜上涌出口の流函數を Ψ_1 をもつて表わし吸込口の流函數を Ψ_2 を以つて示すとすれば、支柱の外形を求むるためには

$$\frac{2a}{\pi c}y + \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c}\right) = \text{const}$$

なる式を圖式に解かなければならぬ。此の右邊の const は今考へてゐる断面 ($x = \text{const.}$) が涌出口の所にあるか、吸込口の所にあるか、或はその他の點にあるかによつて、その値がかわる。今 $f_1(\xi)$ を以つて涌出口の強さの分布を示し、 $f_2(\xi)$ を以つて吸込口の強さの分布を示し、又 l_1 を以つて涌出口の長さ、 l_2 を以つて吸込口の長さを示すとすれば

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ x > l_1 + l_2 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c}y + \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c}\right) = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x < l_1 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c}y + \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c}\right) = 2 \frac{\int_0^x f_1(\xi) d\xi}{\int_0^{l_1} f_1(\xi) d\xi}$$

及

$$\left. \begin{array}{l} x > l_1 \\ x < l_1 + l_2 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c}y + \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c}\right) = 2 \frac{\int_x^{l_1+l_2} f_2(\xi) d\xi}{\int_{l_1}^{l_1+l_2} f_2(\xi) d\xi}$$

となる。例へば涌出口が直線上に一様に分布してゐる場合には

$$f_1(\xi) = \frac{c}{l}$$

なる故

$$2 \frac{\int_0^x f_1(\xi) d\xi}{\int_0^{l_1} f_1(\xi) d\xi} = 2x$$

となる。

扱て次に $\frac{\Psi}{\pi c}$ の値を第四圖の如く y の函數として表わすには

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ x > l_1 + l_2 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c} y = - \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x < l_1 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c} y = 2 \frac{\int_0^x f_1(\xi) d\xi}{\int_0^{l_1} f(\xi) d\xi} - \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > l_1 \\ x < l_1 + l_2 \end{array} \right\} : \frac{2a}{\pi c} y = 2 \frac{\int_x^{l_1+l_2} f_2(\xi) d\xi}{\int_{l_1}^{l_1+l_2} f_2(\xi) d\xi} - \left(\frac{\Psi_1}{\pi c} + \frac{\Psi_2}{\pi c} \right)$$

として、此の右邊に相當する様な曲線を作る。 Ψ_1 及 Ψ_2 の値は第十圖及第十一圖から適當によみとることが出来る。此の如くして得たる曲線は第十三圖 (I)、第十四圖 (II) 第十五圖 (III) の如くなる。是等の曲線上に $\frac{2a}{\pi c} y$ なる直線を重ねると求むる支柱又はリボン線の外形は直線と曲線との交點によりて與へられる。更に此の直線を右又は左に移動して、直線と曲線の交點を求むれば第一節第五圖の場合と同様に境界面の外又は内の流線が得られる。

扱て此の如くして得られる支柱又はリボン線の長さとの幅の關係を明かにして置くことは實際上必要なことである。此の理論が示す如く支柱又はリボン線の外形は全く $\frac{a}{c}$ の値によりて定められる。

故に先づ第十三圖乃至第十五圖に於いて任意の値の $\frac{a}{c}$ に對して $\frac{2a}{\pi c} y$ なる直線を引き、それより得たる支柱の外形についてその長さとの幅の比を定める。此の方法を幾度も繰返へせば長さ (t) と幅 (w) の比 $\lambda = \frac{w}{t}$ と $\frac{a}{c}$ の間に存する關係を見出すことが出来る。第十六圖は此の如くして得たものであつて横軸に $\frac{a}{c}$ をとり、縦軸に $\frac{t}{w}$ をとつたものである。圖に於いて (I) (II) (III) は第十圖の組合せの順序を示す。一度第十六圖を求めて置けば、之と第十三圖乃至第十五圖とを組合せば任意の λ の値に對して支柱又はリボン線の外形を求めることが出来る。第十七圖、第十八圖、第十九圖は何れも此の方法によつて、定めた支柱の外形であつて、 λ の値は各支柱に之を記入してある。第十七圖は (I) の組合せに相當するもの、第十八圖は (II) の組合せに相當するもの、第十九圖は (III) の組合せに相當するものである。

4. 附 記

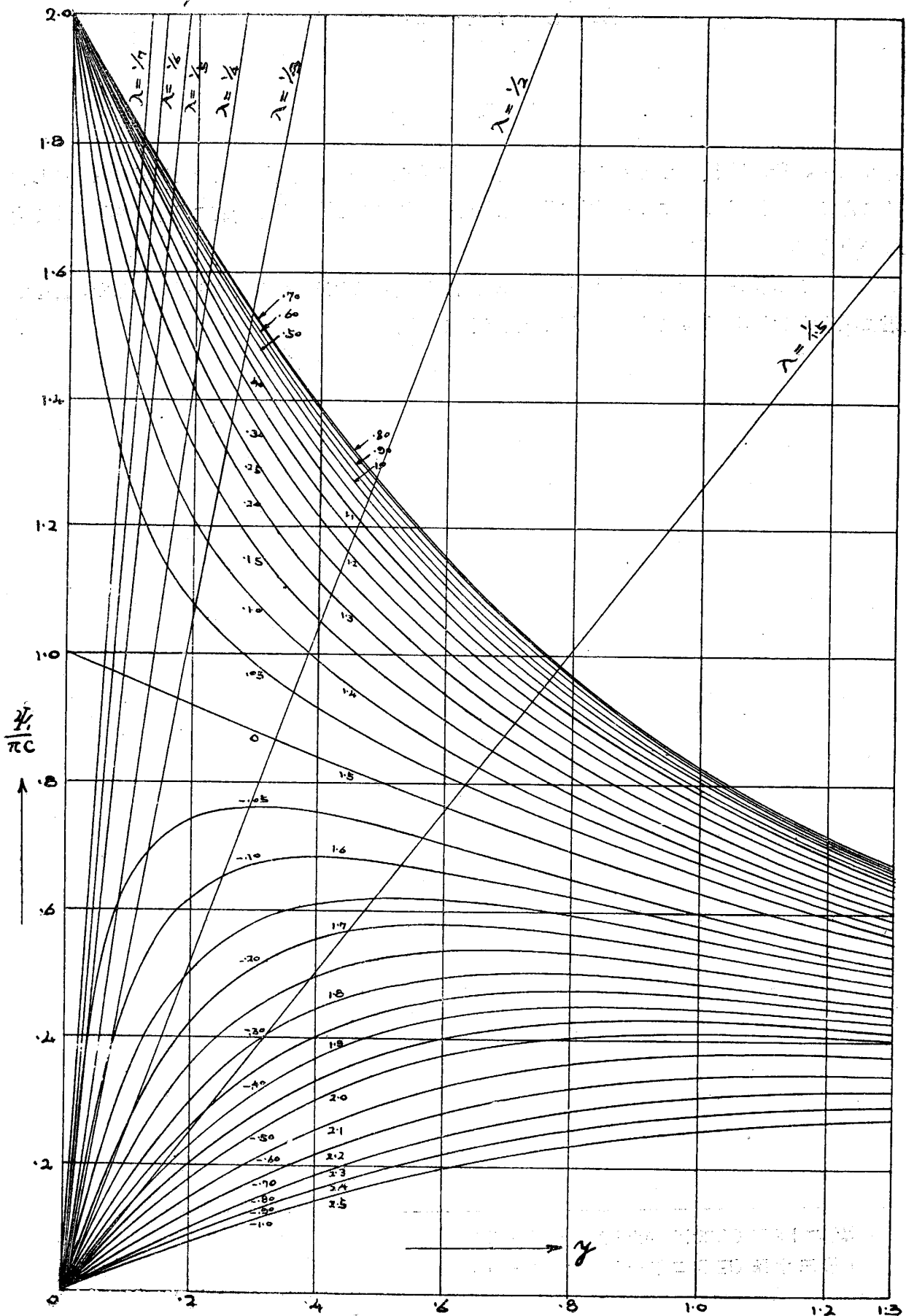
第十七圖、第十八圖及第十九圖に示すが如き外形の支柱模型の風洞實驗は之を河田君に依頼せし所よること引受けられ、既にその實驗の結果は報告せられてゐる¹⁾。茲に同君の御厚意を感謝する次第であります。

又流函數の計算の一部分及び晝圖については勝村、泰磨及泉の三助手の援助を受けました。併せて三君に感謝する次第であります。（大正十五年十二月十四日）

1) 雜錄第二十六號（大正十五年九月） pp. 456—459.

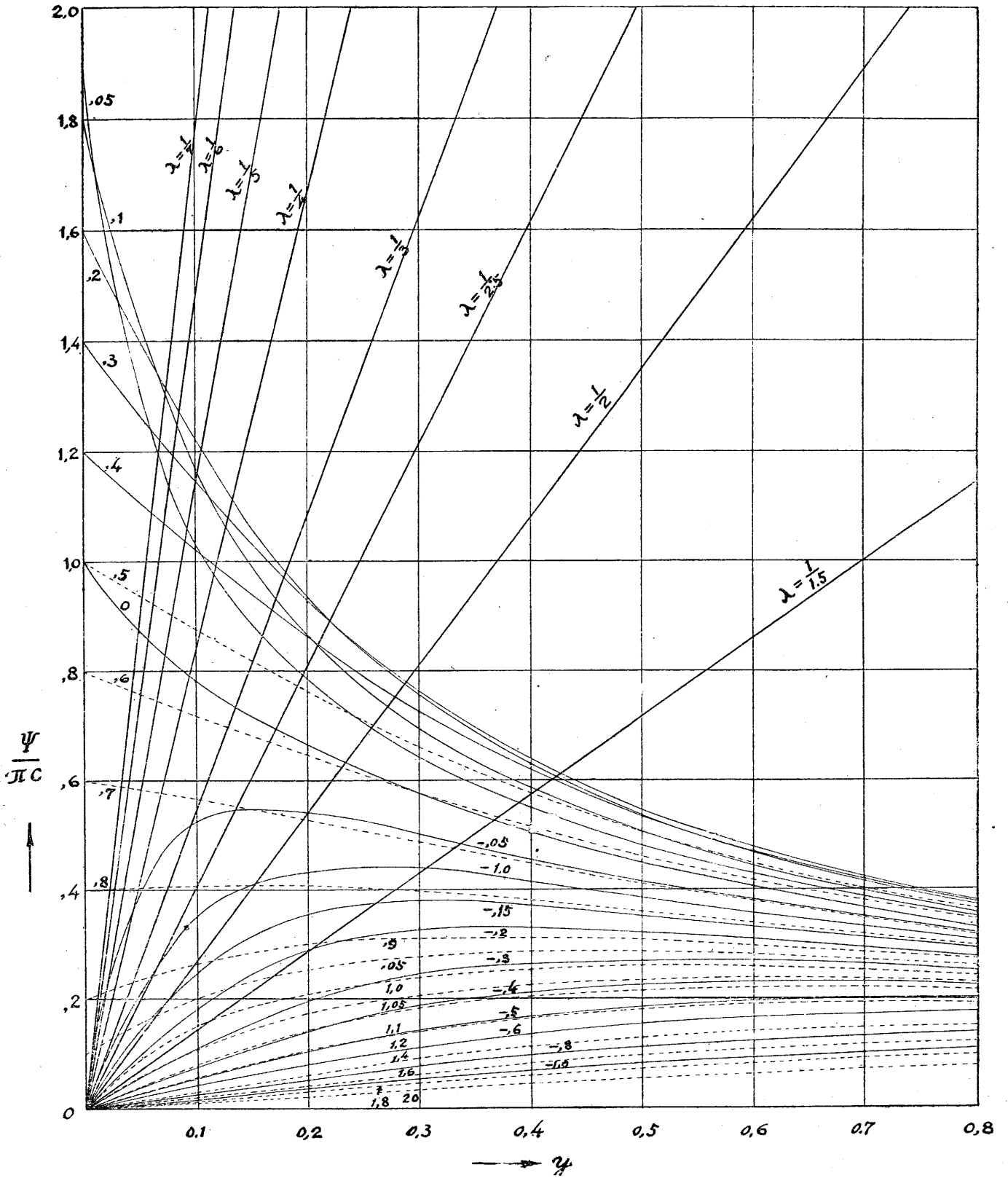
同 第三十號（昭和二年一月） pp. 14—18.

第十三圖

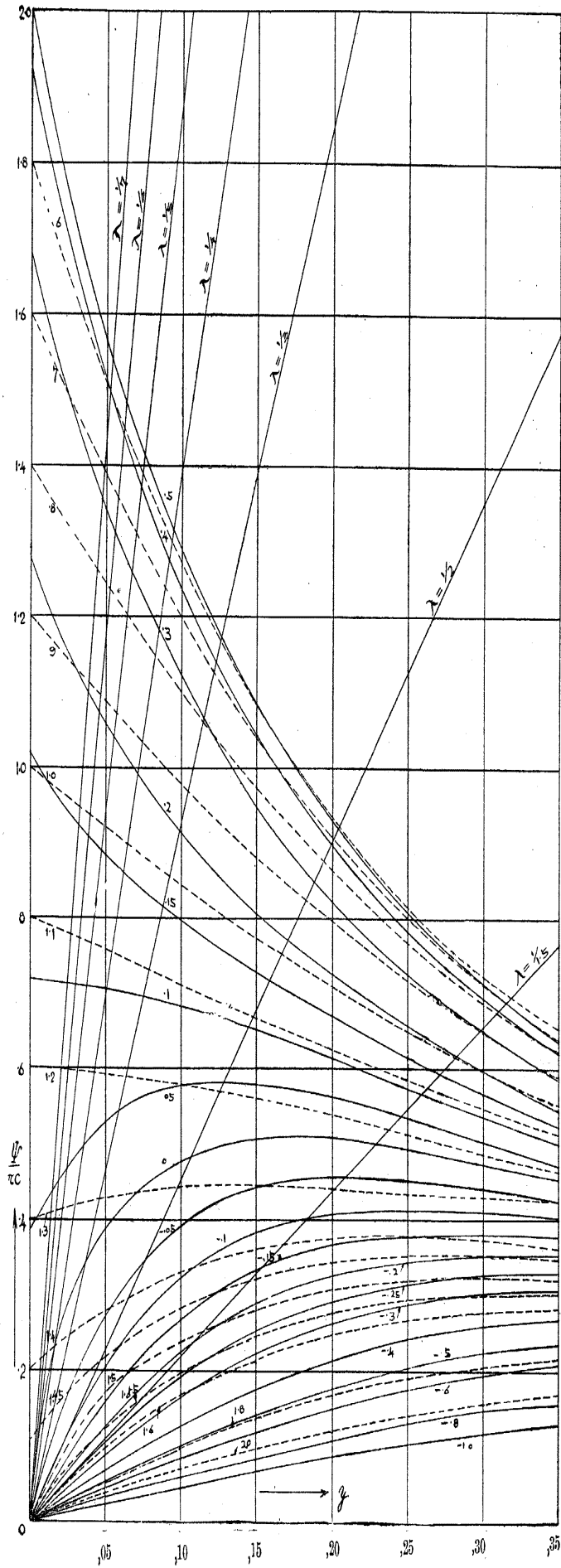


(I)

第十四圖



(II)



(III)

